МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

В свет
100 экз.

На правах рукописи

УДК 512. 664. 2

Верёвкин Андрей Борисович

КОГОМОЛОГИИ СЕРРА НАД НЕКОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

01. 01. 06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 1989

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель : доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Манин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, Б.Б. Венков ,

доктор физико-математических наук , профессор В.В. Шокуров .

Ведущая организация: Ленинградский государственный университет

Защита диссертации состоится " " 1989 г. в 16 час. 05 мин. на заседании специализированного Совета по математике № 2 (Д.053.05.05) при МГУ по адресу: 117234, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (14 этаж).

Автореферат разослан " " 1989 г.

Учёный секретарь

Специализированного Совета по математике № 2 при МГУ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

История темы :

В 1955 г. в классической работе [1] Серр ввёл и изучил когомологии когерентных пучков на проективных алгебраических многообразиях. Он установил, что категория $Coh(X)$ на проективном спектре $X = Proj\ A$ коммутативной градуированной k-алгебры эквивалентна категории градуированных модулей над A, отфакторизованной по подкатегории конечномерных модулей. Так же он показал, что когомологии пучка изоморфны соответствующим Ext'ам из A в модуль в полученной фактор-категории.

Можно показать, что фактор-категория, построенная Серром, может иметь удовлетворительные свойства (абелевость, насыщенность инъективными объектами и пр.) и в некоммутативном случае: вполне достаточны односторонняя градуированная нётеровость и градуированная ограниченность снизу алгебры A . Поэтому Ю.И. Манин предложил считать эту фактор-категорию некоммутативным аналогом категории пучков, минуя построение самой схемы, определение которой в последнее десятилетие столкнулось со значительными трудностями. В таком подходе возобладает старая точка зрения Гротендика, согласно которой не обязательно иметь „некоммутативное пространство",- достаточно иметь хорошую категорию пучков на этом пространстве.

---

1. Serre J.-P. Faisceaux algébriques cohérénts, Ann. of Math., 61 (1955), 197 - 278.

[Имеется перевод: Серр Ж.-П. Когерентные алгебраические пучки.- В сб.: Расслоенные пространства и их приложения.- М.: ИЛ, 1958, с. 372 - 458.]

__Цель работы__ - изучение указанных выше категорий гипотетических пучков и их когомологий, получивших название „когомологии Серра над некоммутативными кольцами".

__В работе используются__ общие методы исследования категорий частных; результаты из гомологической алгебры, как известные ранее, так и найденные автором для этого случая; факты, относящиеся к разделу Оре-локализаций, а так же некоторые приложения теории стандартных базисов Грёбнера.

__Новизна результатов__ :

1/ доказана корректность определения фактор-категорий и когомологий Серра, указан сравнительно простой способ вычисления когомологий (1.4, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14) ,

2/ получены некоторые аналоги классических теорем о когомологиях пучков на проективной схеме (1.18, 1.20) ,

3/ доказаны эквивалентности категорий $Coh(A) \simeq Coh(B)$, $Qco(A) \simeq Qco(B)$ с выводами для когомологий Серра:

- $B = A_{\geq 0}$, если $A_{<0}$ - конечномерна (2.4, 2.5) ,
- $B = A^{(d)}$ - подкольцо Веронезе, если $A = A_0 \langle A_{-1}, A_1 \rangle$ - конечнопорождённая алгебра над телом A_0 (2.10, 2.11, 2.12) (этот случай интересен тем, что согласно [2] , ограничивает круг рассматриваемых алгебр до квадратичных) ,
- градуированная инвариантность Мориты (2.19, 2.20, 2.21) (этот результат не может иметь коммутативного аналога) ,

2. Backelin J., Fröberg R. Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions // Revue Roumaine de Math. Pures et Appl..- 1985.- t.XXX, No. 2.- pp. 85 - 97.

4/ при существовании хорошей Оре-локализации кольца (аналог существования аффинного подмножества в пространстве $\mathrm{Proj}\, A$ в коммутативном случае) описаны глобальные сечения скрученного структурного пучка и связь остальных когомологий этого пучка с локальными когомологиями модуля AS^{-1}/A (3.9, 3.10).

5/ при существовании полной локализующей системы (аналог конечного полного аффинного покрытия неприводимого пространства $\mathrm{Proj}\, A$ в коммутативном случае) построен комплекс в категории градуированных A-модулей, позволяющий вычислять когомологии Серра: „комплекс Чеха" (3.15, 3.16, 3.17).

6/ развитая в предыдущих пунктах техника приложена к ряду конкретных алгебр:

- градуированной правонётеровой строго упорядоченной $\mathrm{\partial}.f.p.$ k-алгебре над полем (эта алгебра изучена Т. Гатевой-Ивановой в [3]) (4.1, 4.1.4),
- „Жордановой алгебре" (4.2, 4.2.4, 4.2.5),
- кольцу квантовых матриц (которое является кольцом автоморфизмов квантовых плоскостей,- [4]) (4.3, 4.3.4),
- „почти коммутативным" алгебрам (4.4, 4.4.2-5),
- конечнопорождённым свободным суперкоммутативным алгебрам над полем (4.5, 4.5.3),

---

3. Gateva-Ivanova T. On the noetherianity of some associative finitely presented algebras, Preprint, 1989.

4. Manin Y.I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.- 1987.- v. 37, No. 4., pp. 191 - 205.

7/ показано, что комплекс $(\underline{H}^{\bullet}_{A}(A))^{*}$, в случае его ограниченности,- дуализирующий для когомологий Серра (5.3, 5.4) .

<u>Практическая ценность</u> : работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в некоммутативной алгебраической геометрии, гомологической алгебре, теории градуированных колец и модулей.

<u>Публикации</u> : по теме диссертации автором напечатаны четыре работы,- список их приведён в конце автореферата. Так же часть результатов докладывалась автором в 1988 г. на Сибирской Школе по алгебре и анализу, проходившей в Томске и в 1989 г. на Международной конференции по алгебре, проходившей в Новосибирске.

<u>Структура работы</u> : диссертация состоит из введения - гл. 0 и пяти глав, связанных общим содержанием, но различных направлением и методами исследования. Четвёртая (предпоследняя) глава посвящена различным приложениям теории. Работа содержит 74 стр., снабжена библиографией из 18 неавторских работ, оглавлением и кратким списком нераспространённых обозначений.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Всюду в работе предполагается, что A - ограниченная слева (снизу), градуированно правонётерова k-алгебра над телом k.

В первой главе изучаются наиболее общие свойства категорий $\mathcal{C}oh$ и $\mathcal{Q}co$, доказывается, что эти категории - абелевы (1.4) , $\mathcal{Q}co$ замкнута относительно индуктивных пределов (1.2 б/), в категориях $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$ и $\mathcal{Q}co$ содержится достаточно много инъективных объектов (1.11) ,- последний факт доказан с помощью важной вспомогательной леммы 1.6 , которая даёт картину строения морфизмов во всех указанных фактор-категориях (1.7) .

Из этой же леммы получен следующий факт о строении когомологий Серра квазикогерентных пучков $(1.13-15)$:

$$H_A^i(X):=Ext^i_{Qco(A)}(A,X)\cong \varinjlim_{n\in Z} Ext^i_{\mathcal{M}}(A\cdot A_{\geqslant n}\cdot A, X),$$

где $A\cdot A_{\geqslant n}\cdot A$ - наиболее удобный идеал I_n в A , такой что $(A/I_n)_{\geqslant n}=0$; в случае, если A - неотрицательно-градуированная k-алгебра,- он превращается в $A_{\geqslant n}$. Если же A порождена своей первой компонентой над телом, тогда $I_n = \mathfrak{M}^n$, где $\mathfrak{M} = A_{>0}$ - единственный максимальный идеал в A , и становится видна связь когомологий Серра с локальными когомологиями (1.19) . Выписанный изоморфизм доказывает когомологическую ограниченность категории Qco , если A имеет конечную правую гомологическую размерность (1.20) , а так же даёт основания считать $H_A^i(X)$ нулевой градуированной компонентой некоторого объекта категории $\mathcal{M}$, называемого „полной" когомологией Серра:

$$\underline{H}_A^i(X):=\bigoplus_{j\in Z} H_A^i(X(j)) .$$

Новое определение позволяет сформулировать и доказать неполный аналог теоремы о когомологиях когерентных пучков на проективной схеме (см. [1] , 66.2) (1.18.) .

Во второй главе доказан ряд теорем об эквивалентностях категорий Coh и Qco над разными алгебрами и сделаны сравнения когомологий Серра при этих эквивалентностях.

Теорема 2.4 доказывает эквивалентность уже введённых категорий $Coh(A), Qco(A)$ с аналогичными категориями над алгеброй $A_+ := \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$, если $\dim_k(\bigoplus_{j=-\infty}^{-1} A_j) < \infty$.

Следующая за ней лемма 2.5 показывает, что эквивалентность сохраняет полные когомологии:

$$\underline{H}_A^i(X) \cong \underline{H}_{A_+}^i(X) \,;\ \underline{H}_{A_+}^i(Y) \cong \underline{H}_A^i(Y \otimes_{A_+} A).$$

Напомню, что подкольцом Веронезе кольца A называется $A^{(d)} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} A_{d\cdot j}$,- это довольно изученные объекты в алгебре, стоит, например, упомянуть работу [2], в которой доказана квадратичность и кошулевость $A^{(d)}$ при больших d. В классической алгебраической геометрии известна эквивалентность Веронезе, использующая для доказательства простой факт:

$$Proj(A^{(d)}) \simeq Proj(A).$$

Теорема 2.10 настоящей работы устанавливает эквивалентность категорий $Coh(A)$, $Qco(A)$ и $Coh(A^{(d)}), Qco(A^{(d)})$ для всех положительных d и алгебры A , порождённой своими первой и минус-первой конечномерными компонентами над телом. Следующие леммы 2.11 и 2.12 утверждают, что в этом случае сохраняются и когомологии Серра:

$$\underline{H}_A^i(X)^{(d)} \cong \underline{H}_{A^{(d)}}^i(X^{(d)}),\ H_{A^{(d)}}^i(Y) \cong H_A^i(Y \otimes_{(d)} A),-$$

где тензорное произведение $\otimes_{(d)}$ определено в 2.6 б/.

При доказательстве предидущего важную роль играют леммы 2.3 и 2.9 , которые ликвидируют основные технические сложности, связанные с Tor'ами, препятствующими точности построенных функторов.

Теорема 2.19 утверждает, что категории $\mathcal{Coh}$ и $\mathcal{Qco}$ являются инвариантами Мориты. Для доказательства этого используется градуированный аналог теоремы Мориты, изложенный И.Н. Балабой в [5]. Леммы 2.20 и 2.21 описывают поведение когомологий Серра при этой эквивалентности.

В третьей главе дополнительно предполагается, что A содержит „локализаторы" S'_i : правые однородные множества Оре, не содержащие делителей нуля и не лежащие целиком в A_0. В этом случае можно определить кольцо „целых дробей" $\hat{A}$:=

$$:=\{q\in AS'^{-1}=:Q \,/\, \text{найдётся } n\in\mathbb{Z}: q\cdot A_{\geqslant n}\subset A\}\cong \pi^{-1}(\mathcal{C}(Q/A)),$$

где $\pi: Q\to Q/A$ (3.1 б/, замечание 3.8).

Доказывается, что $\hat{A}$ не зависит от конкретного выбора S' (3.6), $\hat{\hat{A}}\cong\hat{A}$ (3.8) и $\underline{H}^0_A(A)\cong\hat{A}$ (3.9), параллельно устанавливается, что :

$$\underline{H}^{\cdot>0}_A(A)\cong\underline{H}^{\cdot>0}_{\mathfrak{M}}(Q/A) \qquad (3.10).$$

В лемме 3.4 показано, что модули вида XS'^{-1} являются ацикличными относительно функтора когомологий Серра, причём $\underline{H}^0_A(XS'^{-1})\cong XS'^{-1}$, что наталкивает на идею построения

---

5. Балаба И.Н. Градуированный вариант теоремы Мориты // сб. $\underline{\overline{V}}$ Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей.- Новосибирск, 1982, С. 10 - 11.

комплекса, состоящего из локализованных модулей для вычисления когомологий Серра. Эту идею удаётся реализовать путём дополнительных ограничений на k-алгебру A : в 3.1 в/,г/ предполагается существование такого множества локализаторов $\{S_1,\dots,S_n\}$ называемого „полной локализующей системой", что:

$$Q_i \underset{A}{\otimes} Q_j \xrightarrow{\sim} Q_{ij} \xleftarrow{\sim} Q_j \underset{A}{\otimes} Q_i \quad ,$$

и для любого $M \in Ob\,\mathcal{M}$: $Ker\left(M \xrightarrow{(1,\dots,1)} \bigoplus_{i=1}^{n} MS_i^{-1}\right) \in Ob\,\mathcal{T}$

(первые изоморфизмы аналогичны функциям переклейки на многообразии, а второе условие - аналог полноты аффинного покрытия) .

Тогда удаётся построить комплекс $\check{C}_\bullet(A)$ (аналогичный комплексу Чеха) (3.14) , обладающий свойством: для любого модуля X : $\underline{H}_A^i(X) \cong H_i(X \underset{A}{\otimes} \check{C}_\bullet(A))$ (3.15) .

Комплекс $\check{C}_\bullet(A)$ играет и другую роль : оказывается, что комплекс $K^\bullet := \underline{Hom}_{gr\text{-}k}(\check{C}_\bullet(A), k) =: (\check{C}_\bullet(A))^*$ состоящий из инъективных объектов является дуализирующим. (3.16) .

Четвёртая глава работы посвящена различным приложениям полученных результатов.

В пункте 4.1 рассматривается градуированная правонётерова строгоупорядоченная $s.f.p$ k-алгебра, изученная в [3]. Теорема 4.1.4 показывает, что для неё $\underline{H}_A^0(A) \cong A$.

В пункте 4.2 рассмотрена Жорданова алгебра $A =$ $= k\langle x,y\rangle/(xy-yx-x^2)$. Она типа 4.1, поэтому $\underline{H}_A^0(A) \cong A$. Теорема 4.2.5 (а так же 5.6) утверждает, что модуль $(\underline{H}_A^1(A))^*$ - - дуализирующий.

В пункте 4.3 рассмотрено кольцо квантовых матриц $A = M_q(2)$, определённое в [4]. Теорема 4.3.4 показывает, что в этом случае $\underline{H}^0_A(A) \cong A$, $\underline{H}^{1,2}_A(A) = 0$. К сожалению, не удалось вычислить $\underline{H}^3_A(A)$.

В пункте 4.4 рассматриваются максимальные конечнопорождённые алгебры, порождающие элементы которых коммутируют с точностью до элементов центра. Утверждения 4.4.2 – 4.4.6 показывают, что в этом случае когомологии Серра модулей ведут себя аналогично когомологиям пучков на $\mathbb{P}^n$. В частности, дуализирующий пучок изоморфен $A(-n-1)$

В пункте 4.5 рассмотрена суперкоммутативная алгебра $k[x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m]$, $n \geq 1$. Доказывается (4.5.3), что модуль $\Gamma(\mathrm{Ber}\,\mathbb{P}^{n/m})$ играет роль дуализирующего, что согласуется с результатом Огиевецкого и Пенкова [6].

В пятой главе предполагается, что A – алгебра над полем k, сама имеющая конечное число ненулевых полных когомологий Серра. Доказано, что комплекс $(\underline{H}^{\bullet}_A(A))^*$ является дуализирующим (5.4), а так же дано достаточное условие существования дуализирующего модуля (5.6).

Автор выражает искреннюю признательность профессору Ю.И. Манину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

---

6. Огиевецкий О.В., Пенков И.Б. Двойственность Серра для проективных супермногообразий // Функциональный анализ и его прил..– 1984.– Т.18, в. 1.– С. 78–79.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

7. Верёвкин А.Б. О когомологиях Серра над некоммутативными кольцами (рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР), 12. 07. 1989 г., № 4620 - В89.

8. Верёвкин А.Б. Когомологии Серра и локализации по множествам Оре // Международная конференция по алгебре: Тезисы докладов по теории колец. Новосибирск, 1989. С. 30.

9. Верёвкин А.Б. Когомологии Серра некоммутативных колец и эквивалентность Мориты // Успехи мат. наук.- 1989.- № 5.- С. 157 - 158.

10. Верёвкин А.Б. Обобщение двойственности Серра (рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР), 1989.