Ульяновский государственный университет
Институт медицины, экологии и физической культуры
Медицинский колледж

Методическая разработка
для студентов и преподавателей
Тема: «Тригонометрия»

По дисциплине: Математика
для специальностей
31.02.02 Акушерское дело
34.02.01 Сестринское дело
Разработана преподавателем:
Прасоловой Т.В.

Рассмотрена на заседании ПЦК
общеобразовательных дисциплин
протокол №_7_ от _28.02_ 2019 г.
Председатель ПЦК _______
Л.М. Чамина

Рассмотрено и одобрено на
заседании
Методического совета
Протокол №_7_ от _19.03._ 2019 г.
Председатель_______
М.Т. Шевчук

Ульяновск, 2019 г.

Введение.

Реализация программ среднего профессионального образования предусматривает значительное повышение качества подготовки специалистов, способных успешно решать свои профессиональные задачи в современных условиях.

Теоретические занятия имеют первостепенное значение в подготовке специалистов. Они формирует научное мировоззрение, развивают у студентов способность к анализу.

На них отводится большая часть времени учебных занятий по данной дисциплине.

Целью данной методической разработки является формирование у студентов общих понятий о тригонометрии, углубление знаний по данной теме.

Цели:

Учебные:

Повторить пройденный материал по разделу «Тригонометрия»:

- определение тригонометрических функций;
- связь между градусной и радианной мерой угла;
- свойства тригонометрических функций;
- основные формулы тригонометрии,
- вычисление значений тригонометрических выражений;
- решение тригонометрических уравнений и неравенств.

Воспитательные:

1. Воспитывать интерес к занятиям математикой, интерес к интеллектуальному труду;
2. Воспитывать самостоятельность, уверенность в своих силах.

Развивающие:

1. Развивать у студентов память, аналитические способности;
2. Развивать умения и навыки решения задачи по тригонометрии;
3. Развивать кругозор студентов о применении тригонометрии в других дисциплинах.

Задачи:

.

Студент должен знать:

Единицы измерения углов, свойства тригонометрических функций, формулы тригонометрии, определение обратных тригонометрических функций, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.

Студент должен уметь:

переводить градусы в радианы и радианы в градусы, работать с тригонометрической окружностью, определять знаки тригонометрических функций в координатных четвертях, применять формулы тригонометрии к преобразованию тригонометрических выражений, решению простейших тригонометрических уравнений.

Методы: словесный, наглядный, проблемно-поисковый.

Дидактическая база занятия:

Наглядные пособия:

Раздаточный материал:

- дидактические карточки,
- тестовые задания.

Оборудование:

- учебник,
- таблица со справочным материалом по данной теме.

Содержание разработки:

I. Теоретическая часть

1.Тригонометрическая окружность

2.Формулы приведения

3 Связь меду тригонометрическими функциями одного угла

4.Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

5. Формулы двойного угла

6. Обратные тригонометрические функции

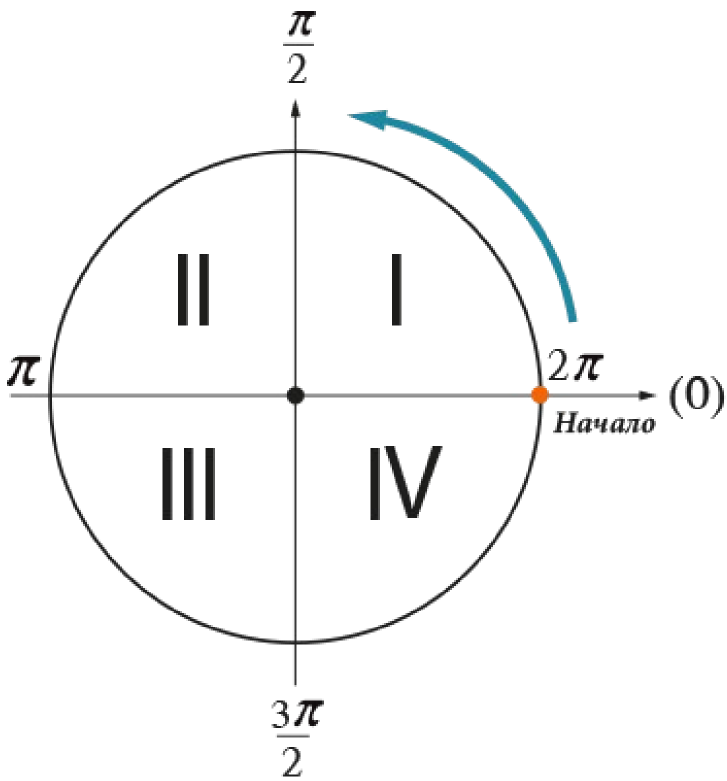
7. Простейшие тригонометрические уравнения

II. Закрепление

III. Самостоятельная работа

Теоретический материал. Закрепление

1. *Тригонометрическая окружность*



Нарисована единичная окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY , в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Мы отсчитываем углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Полный круг_360 градусов. Точка с координатами $(1;0)$ соответствует углу ноль градусов. Точка с координатами $(-1;0)$ отвечает углу в 180°, точка с координатами $(0;1)$ — углу в 90°.,.точка с координатами (0;-1)=углу 270 градусов Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности.

Косинусом угла называется абсцисса (то есть координата по оси OX точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Синусом угла называется ордината (то есть координата по оси OY точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Есть два способа измерять углы.

а) Через градусы

б) Через радианы

Радианная мера — угловая мера, в которой за единицу принимается угол в 1 радиан. Определить радианную меру можно и так: радианная мера угла — отношение длины дуги окружности, находящейся между сторонами угла, к радиусу этой окружности, когда центр окружности совпадает с вершиной угла. π радиан =180°.Выразим один радиан в градусах. Для этого разделим левую и правую части радиуса на пи.

1 *рад*=(180π)°1 рад=180π° - градусная мера угла в 1 радиан равна 180/π180π.

Также можно выразить один градус в радианах.

1°=π180*рад*

Примеры

Выразить в радианах угол α = 20°

1) π/5 2) π/7 3) π/9 4) π/10

Выразить в градусах угол α = 4π/45

1) 16º 2) 15º 3) 20º 4) 3

2.Формулы приведения

Эти формулы позволяют упростить сложные тригонометрические выражения

Аргумент	Функции					
	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
- α	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α	sec α	- cosec
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	cos α	$\mp\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\mp$ cosec α	sec α
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	- cos α	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	- sec α	$\pm$ cosec α
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	- cos α	$\pm\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm$ cosec α	- sec α
$2\pi-\alpha$	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α	sec α	- cosec α

Функция	Аргумент t																
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\, t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\, t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	–

3

.Связь между тригонометрическими функциями одного угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z,$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$
$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$

.4.Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

Формула	**Название формулы**
sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β	Синус суммы
sin (α – β) = sin α cos β – cos α sin β	Синус разности
cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β	Косинус суммы
cos (α – β) = cos α cos β + sin α sin β	Косинус разности
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$ $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$	Тангенс суммы
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$ $\alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$	Тангенс разности

5.Тригонометрические функции двойного угла

Формула	**Название формулы**
sin 2α = 2 sin α cos α	Синус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	Косинус двойного угла

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$	
$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$	Тангенс двойного угла

ПРИМЕРЫ:

1.Упростить выражение: $3\cos^2\alpha - 6 + 3\sin^2\alpha$

1) 1 2) -5 3) 3 4) -3

2.Найти значение выражения $4\cos^2 x + 2$, если $\sin^2 x = 0,6$

1) 4,56 2) 3,6 3) 4,6 4) 8,4

3.Упростить выражение: $\sin 4\alpha - \sin 6\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha$

1) $\cos 10\alpha + \cos 2\alpha$ 2) $2\cos 2\alpha$ 3) $\cos\alpha - \cos 6\alpha$ 4) $\cos 2\alpha + \sin 10\alpha$

4.Упростить выражение $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

1) $\sin\alpha$ 2) $-\sin\alpha$ 3) $2\cos\alpha + \sin\alpha$ 4) $\cos\alpha + \sin\alpha$

5.Найти область значений функции $y = \sin 2x$

1) [-1;1] 2) [-2;2] 3) [0;-2] 4) [-2;0]

6.Найти $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -2/3$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

1) $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ 2) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 3) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 4) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7. Найдите значение выражения $5\,\mathrm{tg}\,17^\circ \cdot \mathrm{tg}\,107^\circ$

8. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

9.Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

10.. Найдите значение выражения $5\,\mathrm{tg}\,17^\circ \cdot \mathrm{tg}\,107^\circ$.

11.. Найдите значение выражения $7\,\mathrm{tg}\,13^\circ \cdot \mathrm{tg}\,77^\circ$.

12.. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$

13.. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.1

14.. Найдите значение выражения $\frac{3\cos(\pi-\beta)+\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)}{\cos(\beta+3\pi)}$.

15.. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

16.. Найдите $\frac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0,6$.

17.. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

18 Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.

19**.** Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$

20.. Найдите значение выражения $\frac{40\sin 165^\circ}{\sin 195^\circ}$.

6.Обратные тригонометрические функции

*Определения****.*** arcsin *x* – это угол, синус которого равен ***x***. Аналогично определяются функции arccos *x*, arctan *x*, arccot *x*, Эти функции являются обратными по отношению к функциям sin *x*, cos *x*, tan *x*, cot *x*, поэтому они называются *обратными тригонометрическими функциями.*

$$-\pi/2 \le \arcsin x \le +\pi/2 .$$

Главное значение arccos *x* – это его значение, которое находится между 0 и π (0⌗ и + 180⌗), *включая границы*: 0 $\le$ arccos *x* $\le$ π .

$$-\pi/2 < \arctan x < +\pi/2 .$$

Главное значение arccot *x* – это его значение, которое находится между 0 и π (0⌗ и + 180⌗) *без границ*:0 < arccot *x* < π

4) ;

7..Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Уравнения вида *sin x* = *a*; *cos x* = *a*; *tg x* = *a*; *ctg x* = *a*, где *x* - переменная, a∈R, называются **.** простейшими тригонометрическими уравнениями
Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a$	$a \in [-1;1]$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$; $\arcsin(-a) = -\arcsin a$
	$a \notin [-1;1]$	*решений нет*
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in Z$	
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	

$\cos x = a$	$a \in [-1;1]$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
	$a \notin [-1;1]$	*решений нет*
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in Z$	
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	

$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Примеры

Решить уравнения

№ 1

2cosx+ $\sqrt{2}$ =0;

cosx= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; Какой формулой выражается это решение?

x=±arccos($-\frac{\sqrt{2}}{2}$)+2πn, n∈Z, Чему равняется arccos($-\frac{\sqrt{2}}{2}$)?

x=± $\frac{3\pi}{4}$ +2πn, n∈Z

№ 2

2sinx-1=0

2sinx=1

sinx= $\frac{1}{2}$, Какой формулой выражается это решение?

x=$(-1)^k$arcsin $\frac{1}{2}$ +πk, k∈Z, Что называется арксинусом числа $\frac{1}{2}$?

x=$(-1)^k$ $\frac{\pi}{6}$ +πk, k∈Z.

№ 3

sin($-\frac{x}{3}$)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

-sin $\frac{x}{3}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Какое свойство функции y=sinx использовали

$\sin\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при решении?

k, k∈Z . $\frac{x}{3}=(-1)^k \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\pi k$, k∈Z , Чему равняется $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$?

$1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈Z ,

$x=(-1)^{k+1}\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{3}=(-1)^{k+1}\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})+\pi k$, k∈Z ,

$\frac{x}{3}=(-3\pi$

Самостоятельная работа

Тест№1

1 вариант		2 вариант	
	Ответы		Ответы
sin (-π/3)	- √3/2	cos (-π/4)	√2/2
cos 2π/3	- 1/2	sin π/3	√3/2
tg π/6	√3/3	ctg π/6	√3
ctg π/4	1	tg π/4	1
cos (-π/6)	√3/2	sin (-π/6)	- 1/2
sin 3π/4	√2/2	cos 5π/6	- √3/2

Тест№2

1 вариант		2 вариант	
	Ответы		Ответы
arcsin √2/2	π/4	arccos √2/2	π/4
arccos 1	0	arcsin 1	π/2
arcsin (- 1/2)	- π/6	arccos (- 1/2)	2π/3
arccos (- √3/2)	5π/6	arcsin (- √3/2)	- π/3
arctg √3	π/3	arctg √3/3	π/6

Тест №3

1.Решите уравнение sin x = 0.

- $x = \pi/2 + 2\pi k$
- $x = \pi + 2\pi k$
- $x = \pi k$
- $x = 2\pi k$

2.Решите уравнение cos x = $\sqrt{3}/2$

- $x = \pm\pi/6 + 2\pi k$
- $x = \pm\pi/3 + 2\pi k$
- $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$
- $x = (-1)^k \pi/6 + \pi k$
- $x = (-1)^k \pi/4 + \pi k$

3.Решите уравнение tg x = $\sqrt{3}/3$

- $x = \pi/3 + \pi k$
- $x = \pi/6 + \pi k$
- $x = \pm\pi/3 + 2\pi k$
- $x = \pi/6 + 2\pi k$
- $x = (-1)^k \pi/3 + \pi k$

4..Решением какого из нижеперечисленных уравнений является такой ответ $x = 2\pi k$?

- cos x = 1
- ctg x = 1
- sin x = 0
- tg x = 0

5.Решите уравнение cos x = $-\sqrt{2}/2$

- $x = (-1)^{k+1} \pi/4 + \pi k$
- $x = \pm 3\pi/4 + 2\pi k$
- $x = -\pi/4 + \pi k$

- $x = 3\pi/4 + \pi k$
- $x = \pm\pi/4 + 2\pi k$

Тест №4

1.Найдите значение выражения:

$$12\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)$$

Ответ: 36

2.. Найдите значение выражения:

$$-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$$

Ответ: -6

3.. Найдите значение выражения:

$$-\sqrt{3}\sin(-780^\circ)$$

Ответ: 1,5

4.. Найдите значение выражения:

$$12\sin 150^\circ \cos 120^\circ$$

Ответ: -3

5.. Найдите значение выражения:

$$\frac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$$

Ответ: 5

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{-6\sin 374^\circ}{\sin 14^\circ}$$

Ответ: -6

7. Найдите значение выражения:

$$\frac{38\cos 153^\circ}{\cos 27^\circ}$$

Ответ: -38

8.. Найдите значение выражения:

$$\frac{51\cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$$

Ответ: 59

9.. Найдите значение выражения: $35\,\mathrm{tg}\,89^\circ \cdot \mathrm{tg}\,179^\circ$

Ответ: -35

10 Найдите значение выражения: $\dfrac{-22\,\mathrm{tg}\,148^\circ}{\mathrm{tg}\,32^\circ}$:

Ответ: 22

11.Найдите значение выражения:

$$\frac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ}$$

Ответ: 10

12. Найдите значение выражения:

$$\frac{8\sin 64^\circ \cdot \cos 64^\circ}{\sin 128^\circ}$$

Ответ: 4

Литература:

1 Колягин Ю.М. , Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н., Математика в 2-х томах, Учебное пособие - М. Новая волна, , 2015 г.;

2. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. , Ткачева М.В. и др., Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень общеобразова, 2015 г.;

3. Бродский Я.С., Математика. Тесты для школьников и поступающих в ВУЗы, 2015 г.;

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10 - 11классы: Учебник, задачник М.: Мнемозина, 2014.