МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра прикладной математики

А.А. Бутов, М.С. Гаврилова, Ю.Г. Савинов

Решение задач по теории вероятностей

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Ульяновск, 2016

УДК 519.21 (075.8)
ББК 22.171 я73
Б93

Печатается по решению Ученого совета факультета математики, информационных и авиационных технологий Ульяновского государственного университета (протокол № 7/16 от 18.10.2016)

Рецензенты:
Н.О. Седова – д.ф.-м.н., профессор;
М.А. Волков – к.ф.-м.н., доцент

Бутов А.А.
Б93 **Решение задач по теории вероятностей. Часть 2** : учебно-методическое пособие / А.А. Бутов, М.С. Гаврилова, Ю.Г. Савинов. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 36 с.

В учебно-методическом пособии представлены подробные решения задач с объяснениями по классическим разделам теории вероятностей.

Вторая часть пособия включает разные задачи на дискретные распределения вероятностей случайных величин и предназначена для обеспечения студентов факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ второго курса направлений «Автоматизация технологических процессов и производств», «Авиастроение» и третьего курса направлений «Прикладная математика и информатика», «Информационные системы и технологии», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и специальности «Компьютерная безопасность» учебно-методической литературой по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Разбор предложенных задач поможет успешной работе на семинарах и написанию контрольных работ, а также закреплению лекционного материала по данной дисциплине. Настоящее пособие будет полезным и студентам других факультетов УлГУ, в программах обучения которых присутствует этот курс.

УДК 519.21 (075.8)
ББК 22.171 я73

Оглавление

Глава 1. Дискретные распределения случайных величин

§ 1.1 Общие сведения о дискретных распределениях случайных величин

Напомним определения, необходимые для успешного решения задач по теме “дискретные распределения вероятностей случайных величин” (подробнее см., например, [1-3]).

Определение. Система F подмножеств Ω называется σ*-алгеброй*, если она является алгеброй и если $A_n \in F \ \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in F \ \text{ и } \bigcap_{n \geq 1} A_n \in F.$$

Упражнение. Рассмотрите в качестве примера борелевскую σ-алгебру $B(R)$ и точечную σ-алгебру.

Определение. *Вероятностная мера*, *или вероятность* на σ-алгебре F – это числовая функция множеств $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$, $\forall A \in F$, если:

1) $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$;
2) $\forall\ A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ из F

$$\mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n);$$

3) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Определение (аксиоматика Колмогорова). Набор (Ω, F, P), где

а) Ω – множество ω – пространство элементарных событий;
б) F – σ-алгебра подмножеств Ω; $A \subseteq \mathbf{\Omega}$, $A \in F$;
в) P – вероятность на F;

называется *вероятностным пространством* (*вероятностной моделью*), $\mathrm{P}(A)$ – вероятностью события A.

Определение. *Случайная величина* $\xi(\omega)$ – это любая определенная на $\omega \in \Omega$, F-измеримая числовая функция ω, т. е. для любого подмножества $B \in B(R)$ верно $A = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$, где B принадлежит борелевской σ-алгебре $B(R)$.

Определение. *Вероятностная мера* $\mathrm{P}_\xi(B)=\mathrm{P}(\omega:\xi(\omega)\in B), B\in B(R)$ называется *распределением вероятностей случайной величины* ξ на $(R, B(R))$.

Определение. *Функцией распределения случайной величины* ξ называется

$$F_\xi(x)=F(x)=\mathrm{P}(\omega:\xi(\omega)\le x)=\mathrm{P}(\omega:\xi(\omega)\in(-\infty\,;x])\text{ для любого } x\in R$$

где x – независимая переменная.

Замечание. *В некоторых источниках и даже тестах при аккредитации вузов принимается в качестве определения* $F_\xi(x)=F(x)=\mathrm{P}(\xi<x)$ *для любого* $x\in R$. *Это нужно иметь в виду и уточнять у организаторов, какое принято определение, чтобы правильно решать задачи.*

Функцией распределения может являться любая функция $F(x)$ такая, что

1) $F(x)$ – неубывающая функция;
2) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, где $F(-\infty)=\lim\limits_{x\downarrow-\infty}F(x)$; $F(+\infty)=\lim\limits_{x\uparrow+\infty}F(x)$;
3) $F(x)$ непрерывна справа, имеет предел слева $\forall x\in R$, т.е.

$$F(x_0)=F(x_0+)\stackrel{def}{=}\lim_{x\downarrow x_0}F(x),\text{ и } \exists\ F(x_0-)=\lim_{x\uparrow x_0}F(x).$$

Равенство $\mathbf{P}(\xi(\omega)\in(a,b])=F(b)-F(a)$ устанавливает соответствие между вероятностными мерами $\mathbf{P}$ и функциями распределения F и дает возможность конструировать различные вероятностные меры с помощью задания соответствующих функций распределения [1].

Примеры мер:
1) дискретные, с кусочно-постоянной функцией распределения $F(x)$;
2) абсолютно-непрерывные с плотностью (неотрицательной функцией $\rho(x), x\in R$, такой что $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\rho(t)dt$);
3) сингулярные (меры, функции распределения которых непрерывны, но точки их роста образуют множества нулевой меры Лебега).

Известно [1], что на самом деле произвольная функция распределения может быть представлена в виде

$$F(x)=p_1F_1(x)+p_2F_2(x)+p_3F_3(x),$$

где $p_1,p_2,p_3\ge 0, p_1+p_2+p_3=1, F_1(x)$ – дискретная функция распределения, $F_2(x)$ – абсолютно-непрерывная функция распределения, $F_3(x)$ – сингулярная функция распределения **(теорема Лебега)**.

Случайная величина ξ имеет *дискретное распределение*, если множество ее значений не более чем счетно, т.е. мера $\mathbf{P}_\xi(B)$ сосредоточена не более чем в счетном числе точек:

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \sum_{\{k: x_k \in B\}} \mathbf{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{\{k: x_k \in B\}} \Delta F_\xi(x_k).$$

Функция распределения $F(x)$ в этом случае кусочно-постоянная (ступенчатая) и задается суммой

$$F_\xi(x) = \sum_{\{k: x_k \le x\}} \mathbf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Замечание. *Если распределение случайной величины абсолютно-непрерывное или дискретное, то говорят также, что сама* ***случайная величина*** *или её функция распределения соответственно* ***абсолютно-непрерывные*** *или* ***дискретные*** *[2]. Иногда вводят определение «****непрерывной»*** *случайной величины, если её функция распределения* $F_\xi(x)$ *непрерывна по* $x \in R$ *[1, стр. 187]. Но данное определение не совсем удачное, поскольку случайная величина эта функция (отображение) на пространстве* Ω *произвольной природы, и понятие непрерывности на* Ω *может вообще не иметь смысла. Поэтому авторы данного пособия не рекомендую употреблять понятие «непрерывной» случайной величины.*

Таблица, в которой представлены все значения дискретной случайной величины ξ и вероятности, с которыми она их принимает $p_1 = P(\xi = x_1)$, $p_2 = P(\xi = x_2)$,... называется *рядом распределения вероятностей дискретной случайной величины* ξ:

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

Упражнение. Докажите, что сумма всех вероятностей p_i равна единице:

$$\sum_{i \ge 1} p_i = 1.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины ξ определяется формулой

$$M\xi = \sum_k x_k \cdot \mathbf{P}\{\xi = x_k\}, \textit{ если ряд абсолютно сходится.}$$

Замечание. Если $\eta = f(\xi)$, то $M\eta = Mf(\xi) = \sum_k f(x_k) \cdot \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$, если ряд абсолютно сходится.

Дисперсия случайной величины ξ

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2.$$

Упражнение. Вывести формулу

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2.$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ – квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}.$$

Математическое ожидание может принимать любые значения, дисперсия и среднеквадратическое отклонение по определению неотрицательны.

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ определены случайные величины ξ_1, $\xi_2, ..., \xi_n$, то иногда говорят, что задан случайный вектор ξ=(ξ_1, ξ_2, ... ,ξ_n) [2].

Определение. *Многомерной (совместной) функцией распределения* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ называется $F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 \le x_1,...,\xi_n \le x_n\}$, где $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$ [2].

Определение. *Дискретное n-мерное распределение* задается с помощью не более чем счетного набора вероятностей $\mathbf{P}\{\xi = x_k\}, x_k \in R^n$, так что для любого борелевского множества ***B***

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \sum_{\{k: x_k \in B\}} \mathbf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Определение. Случайные величины ξ_1, $\xi_2, ..., \xi_n$ называются *независимыми,* если для любых борелевских множеств ***B₁ ,… Bₙ*** имеет место равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1,...,\xi_n \in B_n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_k \in B_k\}.$$

Для *дискретных распределений* это определение равносильно условию

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x_1,...,\xi_n = x_n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_k = x_k\}, \text{ \textit{для всех} } x = (x_1,...,x_n) \in R^n.$$

Замечание. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы, то функции от них $\eta_k = f(\xi_k),\ k = 1,...,n$, также будут независимыми случайными величинами [2].

§ 1.2 Дискретное равномерное распределение

Дискретное равномерное распределение (англ. discrete uniform distribution) – это распределение случайной величины, которая принимает все целочисленные значения из отрезка $[a\,;b]$ с одинаковыми вероятностями, где $a, b \in Z$ и $a < b$.

Пусть ξ имеет дискретное равномерное распределение: $\xi \sim DU(a,b)$, или $\xi \sim U\{a,b\}$, $\xi \sim unif\{a,b\}$.

Параметры дискретного равномерного распределения:
1. Параметр положения $a \in \mathrm{Z}$.
2. Масштабный параметр $b - a$, $b \in \mathrm{Z}$, $a < b$.
3. Число значений случайной величины $n = b - a + 1$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim DU(a,b)$.

ξ	a	$a+1$	$a+2$	...	$b-1$	b
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Вероятность того, что $\xi \sim DU(a,b)$ принимает произвольное значение k,

$$P(\xi = k) = \frac{1}{n}, \text{ где } k \in Z\,,\, k \in [a\,;b].$$

Примеры случайных величин:
1. Случайная величина ξ равна 0, если при подбрасывании монеты выпал “орел”, и 1 – если “решка”; в математической модели случай выпадения “ребра” исключается из-за малой вероятности этого события: $P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = 0.5 \;\Rightarrow\; \xi \sim DU(0,1)$.
2. Случайная величина η равна числу точек на грани игрального кубика, выпавшему при однократном подбрасывании: $P(\eta = k) = 1/6$, где $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ и $\eta \sim DU(1, 6)$.

Упражнение. Найти формулу и построить график функции распределения $F_\xi(x)$ для $\xi \sim DU(a,b)$.

Задача 1.1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi \sim DU(a,b)$.

Решение:

По формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i p_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\frac{1}{n}\left(a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(b-1)+b\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(a+b)}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$D\xi=M\left(\xi^2\right)-\left(M\xi\right)^2 \Rightarrow$ найдем математическое ожидание квадрата ξ, применив формулу суммы квадратов первых k натуральных чисел:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6,$$

последняя формула доказывается методом математической индукции.

$$M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 p_i=\frac{1}{n}\left(a^2+(a+1)^2+\ldots+\underbrace{b^2}_{b=a+n-1}\right)=\frac{1}{n}\left(a^2+(a+1)^2+\ldots+(a+n-1)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(a^2+\left(a^2+2a+1\right)+\left(a^2+4a+4\right)+\left(a^2+6a+9\right)+\ldots+\left(a^2+2(n-1)a+(n-1)^2\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(na^2+2\left(\underbrace{a+2a+3a+\ldots+(n-1)a}_{\substack{\text{сумма первых }(n-1)\text{ членов}\\ \text{арифметической прогрессии}}}\right)+\left(\underbrace{1+4+9+\ldots+(n-1)^2}_{\substack{\text{сумма квадратов первых}\\ (n-1)\text{ натуральных чисел}}}\right)\right)=$$

$$=a^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{(a+(n-1)a)(n-1)}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=a^2+(n-1)a+\frac{2n^2-3n+1}{6}.$$

В формуле для математического ожидания перейдем от параметров a, b к параметрам a, n и найдем дисперсию:

$$D\xi=\left(a^2+(n-1)a+\frac{2n^2-3n+1}{6}\right)-\left(a+\frac{n-1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12}=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Ответ: $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$, $D\xi=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Задача 1.2. В корзине 9 синих шариков и один фиолетовый. Наугад вынимают по одному шарику до тех пор, пока шар не окажется фиолетовым. Синие шарики в корзину не возвращаются. Пусть случайная величина ξ – число синих шариков, покинувших корзину. Найти закон распределения ξ, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение ξ, и вероятности следующих событий: фиолетовый шарик извлечен за 5 попыток; не менее чем за 3 попытки; число попыток от 7 до 10 включительно.

Решение:

Ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	...	k	...	9
p	0.1	0.1	0.1	...	0.1	...	0.1

параметр $k \in Z$, $k \in [0\,;9]$.

$p_1 = P(\xi = 0) = P(\textit{сразу вынули фиолетовый шар}) = 0.1$;

$p_2 = P(\xi = 1) = P(\textit{сначала вынули синий шар, а потом фиолетовый}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0.1$;

$p_3 = P(\xi = 2) = P(\textit{вынули синий шар, потом снова синий, потом фиолетовый}) =$

$= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0.1$ и т. д.

Таким образом, $p_{k+1} = P(\xi = k) = p = 0.1 \Rightarrow$ случайная величина ξ принимает все целочисленные значения из $[0\,;9]$ с одинаковой вероятностью $\Rightarrow$ $\xi \sim DU(0,9)$ и $n = 10$.

$M\xi = \frac{0+9}{2} = 4.5$; $D\xi = \frac{10^2 - 1}{12} = \frac{33}{4} = 8.25$ и $\sigma(\xi) = \sqrt{8.25} \approx 2.9$;

$P(\xi = 4) = 0.1 = 10\%$; $P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 2) = 1 - 0.2 = 0.8 = 80\%$;

$P(6 \leq \xi \leq 9) = P(\xi = 6) + P(\xi = 7) + P(\xi = 8) + P(\xi = 9) = 0.4 = 40\%$.

Ответ: $\xi \sim DU(0,9)$; $M\xi = 4.5$, $D\xi = 8.25$ и $\sigma(\xi) \approx 2.9$;
$P(\xi = 4) = 10\%$, $P(\xi \geq 2) = 80\%$ и $P(6 \leq \xi \leq 9) = 40\%$.

§ 1.3 Распределение Бернулли

Распределение Бернулли (англ. Bernoulli distribution) - дискретное распределение случайной величины, принимающей значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Если случайная величина равна единице, это событие называют “успехом”, иначе “неудачей” или “неуспехом”.

Пусть случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p: $\xi \sim Bernoulli(p)$. Параметры распределения Бернулли: вероятность “успеха” $p \in (0\,;1)$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim Bernoulli(p)$:

ξ	0	1
p	q	p

Вероятность того, что $\xi \sim Bernoulli(p)$ принимает произвольное значение *k*, равна:

$$P(\xi = k) = \begin{cases} q \text{ } при \text{ } k = 0 \\ p \text{ } при \text{ } k = 1 \end{cases}.$$

Вероятностные характеристики случайной величины $\xi \sim Bernoulli(p)$:

$$M\xi = p \text{ и } D\xi = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Примеры случайных величин:

1. Случайная величина ξ равна 1, если случайное событие A произошло, и 0 в противном случае:

$$P(\xi = k) = \begin{cases} 1 - P(A) \text{ } при \text{ } k = 0, \\ P(A) \text{ } при \text{ } k = 1. \end{cases}$$

Например, пусть $\xi = 1$, если при подбрасывании игральной кости выпало число очков, делящееся без остатка на 3, иначе $\xi = 0$:

$$P(\xi = k) = \begin{cases} \frac{2}{3} \text{ } при \text{ } k = 0, \\ \frac{1}{3} \text{ } при \text{ } k = 1. \end{cases}$$

Упражнение. Найти формулу и построить график функции распределения $F_\xi(x)$ для $\xi \sim Bernoulli(p)$.

§ 1.4 Биномиальное распределение

Биномиальное распределение (англ. binomial distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной числу “успехов” в *n* независимых испытаниях с вероятностью “успеха” в одном испытании *p*.

Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами *n* и *p*: $\xi \sim B(n, p)$, $\xi \sim Bin(n, p)$, $\xi \sim Binom(n, p)$ или $\xi \sim bin(n, p)$.

Параметры биномиального распределения:

1. Число независимых испытаний $n \in \mathrm{N}$.
2. Вероятность “успеха” в одном испытании $p \in (0; 1)$, величина $p \equiv const$.

Ряд распределения случайной величины $\xi \sim Bin(n,p)$:

ξ	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

где $k \in Z$, $k \in [0\,;n]$ и $q = 1 - p$.

Вероятность того, что $\xi \sim Bin(n,p)$ принимает значение k, равна:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент.

Случайная величина $\xi \sim Bin(n,p)$ равна сумме n независимых случайных величин, распределенных по закону Бернулли с параметром p:

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n,$$

где $\zeta_i \sim Bernoulli(p)$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ вероятностные характеристики ξ равны: $M\xi = nM(\zeta_1) = np,\ D\xi = nD(\zeta_1) = npq.$

Примеры случайных величин:
1. Число гербов при n подбрасываниях монеты.
2. Число “5” при n подбрасываниях игрального кубика.
3. Число попаданий в цель при n выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянная и др.

Упражнение. Найти формулу и построить график функции распределения $F_\xi(x)$ для $\xi \sim Bin(n,p)$.

Задача 1.3. На день рождения пришли 14 гостей. Известно, что каждый 5-й гость бессовестный и приходит без подарка. Пусть ξ – число бессовестных гостей на празднике. Найти закон распределения случайной величины ξ, вероятностные характеристики ξ и вероятности следующих событий: пришло 8 бессовестных гостей; пришло не меньше 11 гостей с подарками. Считать, что гость приносит или не приносит подарок независимо от остальных.

Решение:

По условию вероятность появления бессовестного гостя $p \equiv const = 0.2$ и общее число гостей $n = 14$, при этом гости приходят независимо один от другого $\Rightarrow$ число бессовестных гостей $\xi \sim Bin(14, 0.2)$.

Вероятностные характеристики ξ вычисляются по формулам:

$$M\xi = np = 2.8,\ D\xi = npq = 2.8\cdot 0.8 = 2.24,\ \sigma\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.5.$$

Вероятность события вида $\xi = k$ равна:

$$P(\xi = k) = C_{14}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{14-k},$$

где $k \in Z$, $k \in [0;14]$.

По условию задачи нужно найти вероятности событий:

$$P(\xi = 8) = C_{14}^{8}(0.2)^{8}(0.8)^{6} = 3003\cdot(0.2)^{8}(0.8)^{6} \approx 0.002 = 0.2\%.$$

Если на праздник пришло не меньше 11 гостей с подарками (“не меньше” означает “больше, либо равно”) $\Rightarrow$ бессовестных гостей должно быть не больше трех:

$$P(\xi \le 3) = \sum_{k=0}^{3} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{3} C_{14}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{14-k} = (0.8)^{14} + 14\cdot 0.2\cdot(0.8)^{13} +$$

$$+ C_{14}^{2}(0.2)^{2}(0.8)^{12} + C_{14}^{3}(0.2)^{3}(0.8)^{11} =$$

$$= (0.8)^{11}\left((0.8)^{3} + 2.8\cdot(0.8)^{2} + 91\cdot 0.04\cdot 0.8 + 364\cdot 0.008\right) =$$

$$= (0.8)^{11}\cdot 8.128 \approx 0.698 \approx 0.7 = 70\%.$$

Ответ: $\xi \sim Bin(14, 0.2)$, $M\xi = 2.8$, $D\xi = 2.24$, $\sigma\xi \approx 1.5$, $P(\xi = 8) \approx 0.2\%$
$P(\xi \le 3) \approx 70\%$.

Задача 1.4. Неисправный автомат с газировкой в 30% случаев вместо газировки наливает обычную воду. 10 студентов решили попить газировки, каждый взял по стаканчику. Пусть ξ – число студентов, которые получили обычную воду, а η – число тех, кому досталась газировка. Найти законы распределения ξ и η, их математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения, и вероятности событий: обычная вода была у половины студентов; не более чем у 8 студентов; газировку пили 12 студентов; от 4 до 7 студентов включительно.

Решение:

По аналогии с Задачей 2.3 случайные величины ξ и η распределены по биномиальному закону: $\xi \sim Bin(10, 0.3)$ и $\eta \sim Bin(10, 0.7)$.

Вероятностные характеристики ξ: $M\xi = 3$, $D\xi = 2.1$ и $\sigma\xi \approx 1.45$.
Вероятностные характеристики η: $M\eta = 7$, $D\eta = 2.1$ и $\sigma\eta \approx 1.45$.

Вероятность события $\xi = k$:

$$P(\xi=k)=C_{10}^{k}(0.3)^{k}(0.7)^{10-k},$$

где $k\in Z$ и $k\in[0;10]$.

Вероятность события $\eta=r$:

$$P(\eta=r)=C_{10}^{r}(0.7)^{r}(0.3)^{10-r},$$

где $r\in Z$ и $r\in[0;10]$.

Вероятности событий из условия задачи:

$$P(\xi=5)=C_{10}^{5}(0.3)^{5}(0.7)^{5}=252\cdot(0.3)^{5}(0.7)^{5}\approx 0.1=10\%.$$

$$P(\xi\le 8)=1-P(\xi>8)=1-(P(\xi=9)+P(\xi=10))=1-10\cdot(0.3)^{9}\cdot 0.7-(0.3)^{10}=$$
$$=1-7.3\cdot(0.3)^{9}\approx 0.99986\approx 99.9\%.$$

$P(\eta=12)=0$, поскольку студентов всего 10: $\eta\le 10$.

$$P(4\le\eta\le 7)=\sum_{r=4}^{7}P(\eta=r)=C_{10}^{4}(0.7)^{4}(0.3)^{6}+C_{10}^{5}(0.7)^{5}(0.3)^{5}+C_{10}^{6}(0.7)^{6}(0.3)^{4}+$$
$$+C_{10}^{7}(0.7)^{7}(0.3)^{3}\approx 0.61=61\%.$$

Ответ: $\xi\sim Bin(10,0.3)$, $M\xi=3$, $D\xi=2.1$, $\sigma\xi\approx 1.45$;
$\eta\sim Bin(10,0.7)$, $M\eta=7$, $D\eta=2.1$, $\sigma\eta\approx 1.45$;
$P(\xi=5)\approx 10\%$, $P(\xi\le 8)\approx 99.9\%$, $P(\eta=12)=0$, $P(4\le\eta\le 7)\approx 61\%$.

§ 1.5 Геометрическое распределение

Геометрическое распределение (англ. geometric distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной числу “неудач” до появления первого “успеха” в независимых испытаниях с вероятностью “успеха” в одном испытании *p*.

Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром *p*: $\xi\sim Geom(p)$ или $\xi\sim geom(p)$.

Параметр геометрического распределения: вероятность “успеха” $p\in(0;1)$.

Ряд распределения случайной величины $\xi\sim Geom(p)$:

ξ	0	1	2	...	k	...
p	p	qp	q^2p	...	q^kp	...

где $k\in N_0$ и $q=1-p$.

Вероятность того, что $\xi \sim Geom(p)$ принимает значение *k*, равна:

$$P(\xi = k) = q^k p\,.$$

Задача 1.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию $\xi \sim Geom(p)$.

Решение

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_i p_i = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}\left(q^k\right) = pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) =$$

$$= pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = pq \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p},$$

т.к. по свойству степенных рядов: если степенной ряд сходится $\Rightarrow$ производная степенного ряда равна сумме производных его членов. Наш ряд, составленный из степеней q, сходится как геометрическая прогрессия с частным $q \in (0\,;1)$.

Далее найдем дисперсию ξ по формуле $D\xi = M\left(\xi^2\right) - (M\xi)^2$:

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_i^2 p_i = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k p = pq\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}\left(kq^k\right) = pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right) =$$

$$= pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = pq \cdot \frac{1+q}{p^3} = \frac{q+q^2}{p^2},$$

т. к. ряд, составленный из элементов вида kq^k, $k \in \mathrm{N}$, является сходящимся:

$$p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{p^2} = \frac{q}{(1-q)^2},$$

$$D\xi = \frac{q+q^2}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}\,.$$

Ответ: $M\xi = \dfrac{q}{p}$, $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

Примеры случайных величин:

1. Число гербов до первого выпадения цифры при подбрасывании монеты.
2. Число промахов до первого попадания в цель, если считать вероятность попадания при каждом выстреле одинаковой.
3. Число красных шаров, извлеченных из урны, до появления синего шара, если в урне *n* красных шаров и 1 синий, шары извлекаются последовательно по одному и красные шары возвращаются обратно.
4. Число подбрасываний игрального кубика до первого выпадения “3”.

Упражнение. Найти формулу и построить график функции распределения $F_{\xi}(x)$ для $\xi \sim Geom(p)$.

В другой интерпретации геометрическое распределение – это дискретное распределение случайной величины, равной номеру появления первого “успеха” в независимых испытаниях с вероятностью “успеха” в одном испытании *p*.

В этом случае ряд распределения $\xi \sim Geom(p)$:

ξ	1	2	...	k	...
p	p	qp	...	$q^{k-1}p$	...

где параметр $k \in \mathrm{N}$ и $q = 1 - p$.

Вероятность события $\xi = k$ в этом случае равна:

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p .$$

Задача 1.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию $\xi \sim Geom(p)$.

Решение:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}\left(q^k\right) = p \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

.

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}\left(k q^k\right) = p \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k q^k\right) = p \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= p \cdot \frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ установлена в Задаче 1.5.

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - (M\xi)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2} .$$

Ответ: $M\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$.

Различие между определениями геометрического закона распределения: в первом случае моделируется число “неудач”, а во втором – число испытаний до первого “успеха” включительно.

Упражнение. Укажите, в чем сходства и различия между биномиальным и геометрическим законами распределения.

Задача 1.7. В корзине 9 синих шариков и один фиолетовый. Наугад вынимают по одному шарику до тех пор, пока шар не окажется фиолетовым. Синие шарики возвращаются в корзину. Пусть случайная величина ξ – это число извлеченных синих шариков, а η – общее число испытаний. Найти законы распределения и вероятностные характеристики случайных величин и вероятности следующих событий: фиолетовый шарик извлекли за 5 попыток; не менее чем за 3 попытки; число попыток от 10 до 12 включительно.

Решение:

Случайная величина ξ равна числу "неудач" до первого "успеха", где под "неудачей" понимается извлечение синего шара, под "успехом" – фиолетового. Вероятность извлечь фиолетовый шар не зависит от номера попытки, поскольку синие шары возвращаются в корзину $\Rightarrow \xi \sim Geom(0.1)$, где $p = 0.1$ – вероятность появления фиолетового шарика:

$$P(\xi = k) = 0.1 \cdot (0.9)^k,$$

параметр $k \in \mathrm{N}_0$ и $q = 1 - p = 0.9$.

Вероятностные характеристики ξ: $M\xi = 9$, $D\xi = 90$ и $\sigma\xi \approx 9.5$. Случайная величина η равна общему числу испытаний, которое совпадает с номером первого "успеха", т. е. $\eta \sim Geom(0.1)$. Вероятность события $\eta = r$ вычисляется по формуле:

$$P(\eta = r) = 0.1 \cdot (0.9)^{r-1},$$

где $r \in \mathrm{N}$. Вероятностные характеристики η: $M\eta = 10$, $D\eta = 90$ и $\sigma\eta \approx 9.5$. Вероятность извлечь фиолетовый шарик с пятой попытки:

$$P(\eta = 5) = 0.1 \cdot (0.9)^4 \approx 0.066 = 6.6\%.$$

Вероятность извлечь фиолетовый шар не менее чем с третьей попытки:

$$P(\eta \geq 3) = 1 - P(\eta < 3) = 1 - \left(P(\eta = 1) + P(\eta = 2)\right) = 1 - 0.1 - 0.1 \cdot 0.9 = 0.81 = 81\%.$$

Вероятность извлечь фиолетовый шарик за 10–12 попыток:

$$P(10 \leq \eta \leq 12) = \sum_{r=10}^{12} P(\eta = r) = 0.1 \cdot (0.9)^9 + 0.1 \cdot (0.9)^{10} + 0.1 \cdot (0.9)^{11} = 0.1 \cdot (0.9)^9 2.71 \approx$$

$$\approx 0.1 = 10\%.$$

Ответ: $\xi \sim Geom(0.1)$, $M\xi = 9$, $D\xi = 90$, $\sigma\xi \approx 9.5$;

$\eta \sim Geom(0.1)$, $M\eta = 10$, $D\eta = 90$, $\sigma\eta \approx 9.5$;

$P(\eta = 5) \approx 0.066 = 6.6\%$, $P(\eta \geq 3) = 0.81 = 81\%$, $P(10 \leq \eta \leq 12) \approx 0.1 = 10\%$.

Задача 1.8 (по мотивам задачи [4]). Студент едет в другой конец города, стоя в переполненном автобусе. Он пытается занять свободное место. Будем считать, что эти попытки не зависят друг от друга, и вероятность успеть к свободному месту постоянна и равна 0.05. Пусть случайная величина ξ – число неудавшихся попыток. Найдите закон распределения ξ, ее вероятностные характеристики и вероятности следующих событий: студенту повезет на 7-й раз; число неудачных попыток не превышает 2; номер успешной попытки начинается с 8.

Решение:

Случайная величина ξ равна числу "неудач" до первого "успеха" в серии независимых испытаний с постоянной вероятностью "успеха" $p = 0.05$, где под испытанием понимается попытка занять свободное место $\Rightarrow\ \xi \sim Geom(0.05)$.

Вероятность события $\xi = k$ вычисляется по формуле:

$$P(\xi = k) = 0.05 \cdot (0.95)^k,$$

где $k \in \mathrm{N}_0$ и $q = 1 - p = 0.95$. Вероятностные характеристики ξ: $M\xi = 19$, $D\xi = 380$ и $\sigma\xi \approx 19.5$;

$P(\xi = 6) = 0.05 \cdot (0.95)^6 \approx 0.037 = 3.7\%$;

$$P(\xi \le 2) = \sum_{k=0}^{2} P(\xi = k) = 0.05 + 0.05 \cdot 0.95 + 0.05 \cdot (0.95)^2 \approx 0.14 = 14\%;$$

$$P(\xi \ge 7) = 1 - P(\xi < 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} P(\xi = k) = 1 - 0.05\sum_{k=0}^{6} (0.95)^k = (0.95)^7 \approx 0.7 = 70\%.$$

Для вычисления вероятности события $\xi \ge 7$ следует применить формулу суммы первых 7 членов геометрической прогрессии $\{(0.95)^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ответ: $\xi \sim Geom(0.05)$; $M\xi = 19$, $D\xi = 380$, $\sigma\xi \approx 19.5$; $P(\xi = 6) \approx 0.037 = 3.7\%$; $P(\xi \le 2) \approx 0.14 = 14\%$; $P(\xi \ge 7) \approx 0.7 = 70\%$.

§ 1.6 Распределение Пуассона

Распределение Пуассона, или пуассоновское распределение (англ. Poisson distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной числу событий за фиксированный период времени и/или в фиксированной области пространства, при этом события происходят с постоянной интенсивностью и не зависят друг от друга.

Случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ: $\xi \sim P(\lambda)$, $\xi \sim Po(\lambda)$ или $\xi \sim Poisson(\lambda)$.

Параметр пуассоновского распределения: интенсивность λ, или среднее число событий на единицу времени и/или пространства, $\lambda > 0$.

Закон распределения Пуассона, или ряд распределения $\xi \sim Poisson(\lambda)$:

ξ	0	1	2	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

где $k \in N_0$. Вероятность события $\xi = k$ для $\xi \sim Poisson(\lambda)$ равна:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где факториал натурального числа k равен $k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$ и $0! = 1$.

Распределение Пуассона представляет собой один из предельных случаев биномиального распределения: рассмотрим последовательность схем Бернулли с числом испытаний $n \in \{1, 2, ...\}$, при этом в каждой схеме для фиксированного n вероятность “успеха” $p = p(n)$ постоянна и равна:

$$p(n) = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

где постоянное число $\lambda > 0$.

При переходе от одной схемы Бернулли к другой вероятность “успеха” стремится к нулю: $p(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть случайные величины $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют биномиальное распределение: $\xi_n \sim Bin(n, p)$ $\Rightarrow$ при неограниченном росте числа испытаний n вероятности событий $P(\xi_n = k)$ стремятся к закону Пуассона:

$$P(\xi_n = k) = C_n^k (p(n))^k (1 - p(n))^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ } при \text{ } n \to \infty,$$

где $k << n$ и $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} np(n)$.

Упражнение. Доказать справедливость последней формулы.

В нашем частном случае последовательность числа “успехов” сходится по распределению к случайной величине:

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \text{ } при \text{ } n \to \infty,$$

где $\xi \sim Poisson(\lambda)$ $\Rightarrow$ $M\xi = \lim\limits_{n \to \infty} M\xi_n = \lim\limits_{n \to \infty} np(n) = \lambda$ и $D\xi = \lambda$.

Упражнение. Доказать справедливость формул для $M\xi$ и $D\xi$.

Пуассоновское распределение – предельный случай биномиального, когда при неограниченном росте n и неограниченном уменьшении p математическое ожидание случайных величин ξ_n приблизительно постоянное и равно $M\xi_n \approx \lambda$.

Биномиальные коэффициенты вычисляются весьма сложно при больших значениях n и $k << n$ $\Rightarrow$ справедлива теорема:

*Если вероятность "успеха" p в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность наступления "успеха" ровно k раз, $k << n$, приближенно вычисляется по формуле Пуассона с параметром $\lambda = np$.**

* *распределение Пуассона иногда называют распределением редких событий.*

Примеры случайных величин:
1) Число опечаток на странице текста.
2) Число вызовов, поступивших на АТС в единицу времени.
3) Число покупателей в магазине в определенный час и т. д.

Задача 1.9. Сосед сверлит дрелью по воскресеньям в среднем 2 раза в час. Пусть случайная величина ξ – количество включений дрели в течение часа. Найдите ее закон распределения, вероятностные характеристики и вероятности следующих событий: дрель включали 4 раза в час; 4 раза в течение получаса; не более 2 раз в 15 минут.

Решение:

Предположим, что испытания независимые, т.е. сосед заранее не выбирает моменты, когда включить дрель $\Rightarrow$ получаем серию независимых испытаний с постоянной интенсивностью $\lambda = 2$ в час: $\xi \sim Poisson(2)$ $\Rightarrow$ вероятность события $\xi = k$ равна:

$$P(\xi = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2},$$

где $k \in \mathrm{N}_0$.

Вероятностные характеристики ξ: $M\xi = 2$, $D\xi = 2$ и $\sigma\xi \approx 1.4$.

Вероятность события "дрель включали 4 раза в час" равна:

$$P(\xi = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0.09 = 9\%.$$

Вероятность события "дрель включали 4 раза в течение получаса":

$$P\left(\tilde{\xi}=4\right)=\frac{1^4}{4!}e^{-1}=\frac{1}{24}e^{-1}\approx 0.015=1.5\%,$$

где случайная величина $\tilde{\xi}\sim Poisson(1)$.

Вероятность события “дрель включали не более 2 раз в 15 минут ”:

$$P\left(\bar{\xi}\le 2\right)=\sum_{k=0}^{2}P\left(\bar{\xi}=k\right)=\sum_{k=0}^{2}\frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}=1.625e^{-0.5}\approx 0.99=99\%,$$

где случайная величина $\bar{\xi}\sim Poisson(0.5)$.

Ответ: $\xi\sim Poisson(2)$; $M\xi=2$, $D\xi=2$, $\sigma\xi\approx 1.4$; $P(\xi=4)\approx 0.09=9\%$;
$P\left(\tilde{\xi}=4\right)\approx 0.015=1.5\%$, где $\tilde{\xi}\sim Poisson(1)$;
$P\left(\bar{\xi}\le 2\right)\approx 0.99=99\%$, где $\bar{\xi}\sim Poisson(0.5)$.

Задача 1.10. Студент делает в среднем 1 ошибку на 10 страниц конспекта. Пусть ξ – число ошибок, которое студент сделает в 24-листовой тетради. Найти закон распределения ξ, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение ξ и вероятности следующих событий: в конспекте будет 5 ошибок; не меньше 3 ошибок; от 3 до 6 ошибок включительно.

Решение:

Случайная величина ξ является пуассоновской с параметром λ, т. к. равна числу ошибок, возникающих с постоянной интенсивностью независимо одна от другой.

Вычислим интенсивность появления ошибок в 24-листовой тетради, если в среднем на 10 страницах допускается одна ошибка, а в тетради 48 страниц:

$\lambda=4.8\ \Rightarrow\ \xi\sim Poisson(4.8)$ с вероятностью события

$$P(\xi=k)=\frac{(4.8)^k}{k!}e^{-4.8},$$

где параметр $k\in \mathrm{N}_0$.

Вероятностные характеристики ξ: $M\xi=4.8$, $D\xi=4.8$ и $\sigma\xi\approx 2.2$.

Вероятность сделать 5 ошибок в 24-листовой тетради:

$$P(\xi=5)=\frac{(4.8)^5}{5\,!}e^{-4.8}\approx 0.175=17.5\%.$$

Вероятность сделать в 24-листовой тетради не меньше 3 ошибок:

$$P(\xi\ge 3)=1-P(\xi<3)=1-\sum_{k=0}^{2}P(\xi=k)=1-e^{-4.8}-4.8e^{-4.8}-11.52e^{-4.8}\approx 0.86=86\%.$$

Вероятность допустить в 24-листовой тетради от 3 до 6 ошибок:

$$P(3 \le \xi \le 6) = \sum_{k=3}^{6} P(\xi = k) = \sum_{k=3}^{6} \frac{(4.8)^k}{k!} e^{-4.8} \approx 0.65 = 65\%.$$

Ответ: $\xi \sim Poisson(4.8)$; $M\xi = 4.8$, $D\xi = 4.8$, $\sigma\xi \approx 2.2$; $P(\xi = 5) \approx 0.175 = 17.5\%$, $P(\xi \ge 3) \approx 0.86 = 86\%$, $P(3 \le \xi \le 6) \approx 0.65 = 65\%$.

Задача 1.11 (по мотивам задачи [4]).
На концерте популярного исполнителя аппаратура ломается с вероятностью 3%, и приходится петь вживую. Пусть ξ – число концертов, на которых аппаратура вышла из строя. На год запланировано ровно 100 концертов. Найти вероятности событий: аппаратура выйдет из строя на 8 концертах; не менее чем на четырех концертах; "живыми" станут от 7 до 10 концертов включительно.

Решение:

В задаче рассматривается схема Бернулли с малой вероятностью "успеха" $p = 0.03$, большим числом испытаний $n = 100$ и числом "успехов" $k << n$, где под "успехом" понимается отказ аппаратуры. При заданных условиях вычислить биномиальные коэффициенты и возвести величину $q = 1 - p$ в большую степень достаточно сложно. Однако можно заменить случайную величину $\xi \sim Bin(n, p)$ на приближенную ей $\zeta \sim Poisson(\lambda)$ с интенсивностью $\lambda = np = 3$: $\xi \approx \zeta$, откуда

$$P(\xi = k) \approx P(\zeta = k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3},$$

где $k \in N_0$, $k << n$.

Вероятность отказа аппаратуры на 8 концертах:

$$P(\xi = 8) \approx \frac{3^8}{8!} e^{-3} \approx 0.008 = 0.8\%.$$

Вероятность отказа аппаратуры не меньше чем на 4-х концертах:

$$P(\xi \ge 4) = 1 - P(\xi < 4) \approx 1 - P(\zeta < 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(\zeta = k) = 1 - 13e^{-3} \approx 0.35 = 35\%.$$

Вероятность того, что придется петь вживую на 7–10 концертах:

$$P(7 \le \xi \le 10) = \sum_{k=7}^{10} P(\xi = k) \approx \sum_{k=7}^{10} P(\zeta = k) = \left(1 + \frac{4}{8} + \frac{3}{80}\right) \frac{3^7}{7!} e^{-3} \approx 0.033 = 3.3\%.$$

Ответ: $P(\xi = 8) \approx 0.8\%$, $P(\xi \ge 4) \approx 35\%$, $P(7 \le \xi \le 10) \approx 3.3\%$.

§ 1.7 Гипергеометрическое распределение

Гипергеометрическое распределение (англ. hypergeometric distribution) – это дискретное распределение случайной величины, равной количеству удачных выборок без возвращения из конечной совокупности. Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из N элементов. Предположим, что M из них обладают нужным нам свойством. Оставшиеся N-M этим свойством не обладают. Случайным образом из общей совокупности выбирается группа n элементов. Пусть ξ - случайная величина, равная количеству выбранных элементов, обладающих нужным свойством. Тогда случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами M, N, n: $\xi \sim HG(M, N, n)$, $N=0,1,2....$; $M=0,1,2...,N$; $n=0,1,2...,N$;

Вероятность того, что $\xi \sim HG(M, N, n)$ принимает значение k равна:

$$P(\xi = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Математическое ожидание $M\xi = \dfrac{nM}{N}$.

Дисперсия $D\xi = \dfrac{nM / N(1 - M / N)(N - n)}{N - 1}$.

Замечание. *Если ввести $p=M/N$, $q=1-p$, то* $M\xi = \dfrac{nM}{N} = np$;
$D\xi = \dfrac{nM / N(1 - M / N)(N - n)}{N - 1} = npq(1 - \dfrac{n-1}{N-1})$. *И можно показать, что при увеличении объема выборки $N \to \infty$ гипергеометрическое распределение стремится к биномиальному распределению.*

Задача 1.12. Организация пытается создать группу из 8 человек, обладающих определенными знаниями о производственном процессе. В организации работают 30 сотрудников, обладающих необходимыми знаниями, причем 10 из них работают в конструкторском бюро. Какова вероятность того, что в группу попадут два сотрудника из конструкторского бюро, если членов группы выбирают случайно? Объем генеральной совокупности в этой задаче $N = 30$, объем выборки $n = 8$, а количество успехов $M = 10$.

Решение:

Используя формулу $P(\xi = k) = \dfrac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, получаем:

$P(\xi=2)=\dfrac{C_{10}^{2}\cdot C_{20}^{6}}{C_{30}^{10}}$ =0.298. Таким образом, вероятность того, что в группу попадут два сотрудника из конструкторского бюро, равна 0,298 (или 29,8%).

Ответ: 0,298.

Упражнение. Выписать формулу для функции распределения $F_{\xi}(x)$ для $\xi \sim HG(M,N,n)$.

§ 1.8 Распределение Паскаля

Распределение Паскаля (англ. Pascal distribution) или отрицательное биномиальное распределение (англ. negative binomial distribution) – это распределение дискретной случайной величины, равной количеству испытаний в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха *p*, проводимой до *m*-го успеха.

Распределение Паскаля неразрывно связано с биномиальным. Отличие состоит в том, что биномиальная случайная величина определяет вероятность *m* успехов в *n* испытаниях, а случайная величина из распределения Паскаля – вероятность *k* испытаний вплоть до *m*-го успеха (включая и этот успех). Более подробно: в последовательности независимых испытаний Бернулли фиксируется число наступлений «успехов» – *m*. Вероятность «успеха» в одном испытании известна и равна *p*. Рассматривается распределение вероятностей случайной величины ξ, равной числу испытаний до наступления *m*-го по порядку «успеха» в последовательности включительно. В заданных условиях случайная величина ξ имеет распределение Паскаля. Обозначение $\xi \sim \mathrm{NB}(m,p)$. Вероятность того, что $\xi \sim \mathrm{NB}(m,p)$ принимает значение *k* равна:

$$P(\xi=k)=C_{k-1}^{m-1}p^{m}q^{k-m},\ m=1,2,...,\ k=m,m+1,... .$$

Математическое ожидание $M\xi=\dfrac{m}{p}$. Дисперсия $D\xi=\dfrac{mq}{p^{2}}$.

Задача 1.13. Спутник сканирует заданную акваторию океана за 4 оборота вокруг Земли. Если на каком-либо витке из-за различных помех происходит искажение текущего результата, то оно обнаруживается, и сканирование, выполненное на этом витке, повторяется заново. Найти вероятность того, что всё сканирование будет завершено не более чем за 10 витков, если вероятность искажения результата на одном витке составляет 0,2.

Решение:

Для решения задачи введем схему Бернулли. Неискажение результата сканирования на витке – «успех», $p=0,8$. Тогда числу m будет соответствовать число успешно завершенных витков с вероятностью неискажения 0,8, то есть 4 витка. С учетом этого искомая вероятность решения задачи не более чем за $n = 10$ витков запишется в виде:

$$P\{\xi \le 10\} = \sum_{k=4}^{10} P(\xi = k) = \sum_{k=4}^{10} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = 0,999136,$$

то есть примерно в одном случае из тысячи в заданных условиях сканирование не завершится за 10 оборотов спутника вокруг Земли.

Ответ: 0,999136.

Упражнение. Выписать формулу для функции распределения $F_\xi(x)$ для $\xi \sim \mathrm{NB}(m, p)$.

Глава 2. Разные задачи на дискретные распределения

Задача 2.1. Дан ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	–2	–1	0	1	3
p	0.1	p_2	0.4	p_4	0.2

где $p_2, p_4 > 0$ и величина p_4 в два раза больше величины p_2.

Найти:
1. Параметры p_2, p_4.
2. Математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение ξ.
3. Функцию распределения $F_\xi(x)$ и построить ее график.
4. Вероятности следующих событий:
   а) $\xi > 0$
   б) $\xi \geq 0$
   в) $-7 < \xi < -3$
   г) $-1.5 < \xi \leq 2$

Решение:

1. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение $\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} p_2 + p_4 = 0.3 \\ p_4 = 2p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = 0.1 \\ p_4 = 0.2 \end{cases}$$

2. Вероятностные характеристики ξ:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{5} \xi_i p_i = -0.2 - 0.1 + 0 + 0.2 + 0.6 = 0.5$$

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - (M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{5} \xi_i^2 p_i - 0.5^2 = 0.4 + 0.1 + 0 + 0.2 + 1.8 - 0.25 = 2.25,$$

откуда

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{2.25} = 1.5$$

3. По определению $F_{\xi}(x)=P(\xi\in(-\infty\,;x]) \Rightarrow$

1. При $x<-2$ данная вероятность равна нулю, т. к. все значения $\xi_i\geq -2$;

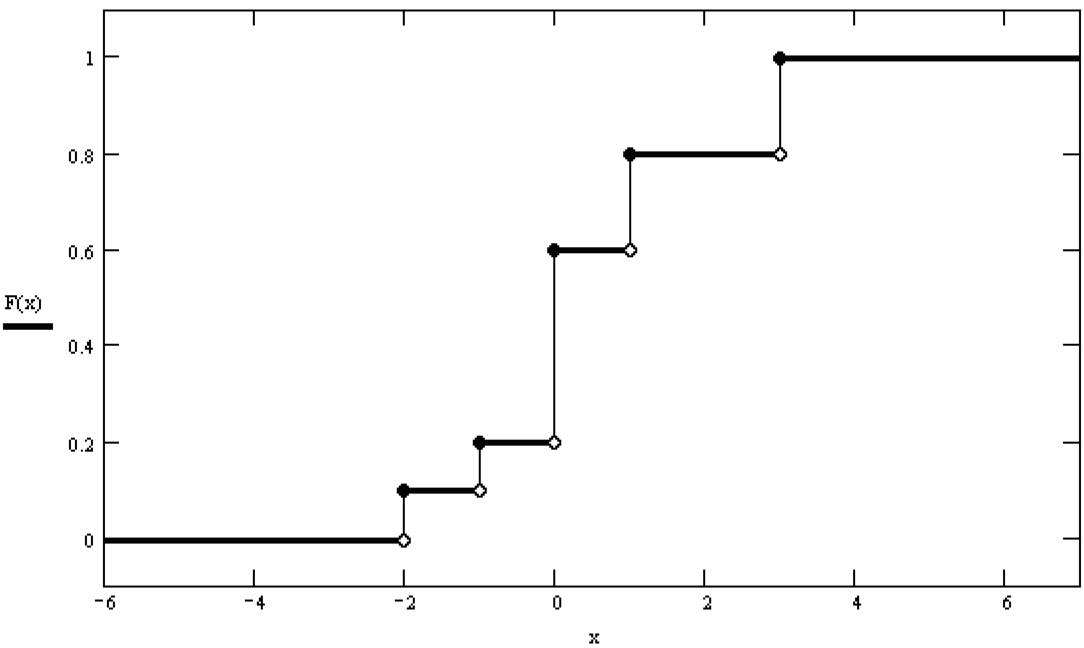
2. При $-2\leq x<-1$ ровно 1 значение $\xi_1=-2$ попадает в промежуток $(-\infty\,;x]$ с вероятностью $p_1=0.1$;

3. При $-1\leq x<0$ значения $\xi_1=-2$ и $\xi_2=-1$ попадают в промежуток $(-\infty\,;x]$ с вероятностью $p_1+p_2=0.2$ и т. д.

Формула функции распределения:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2\\ 0.1 \;\; при \;\; -2\leq x<-1\\ 0.2 \;\; при \;\; -1\leq x<0\\ 0.6 \;\; при \;\; 0\leq x<1\\ 0.8 \;\; при \;\; 1\leq x<3\\ 1 \;\; при \;\; x\geq 3\end{cases}$$

График функции распределения:



4. а) $P(\xi>0)=P(\xi=1)+P(\xi=3)=p_4+p_5=0.2+0.2=0.4$

б) $P(\xi\geq 0)=P(\xi=0)+P(\xi>0)=p_3+0.4=0.4+0.4=0.8$

в) $P(-7<\xi<-3)=0$, т. к. все значения $\xi_i\geq -2$

г) $P(-1.5<\xi\leq 2)=P(\xi=-1)+P(\xi=0)+P(\xi=1)=p_2+p_3+p_4=0.7$

Ответ: 1. $p_2 = 0.1$, $p_4 = 0.2$

2. $M\xi = 0.5$, $D\xi = 2.25$, $\sigma(\xi) = 1.5$

3. см. Решение

4. а) 0.4

б) 0.8

в) 0

г) 0.7

Задача 2.2 [2].

Случайная величина ξ задана законом распределения вероятностей:

ξ	1	3	5	7	9
p	0.25	a	b	c	0.15

Известно, что $P(1 \le \xi \le 5) = 0.6$. Тогда значения неизвестных параметров *a*, *b* и *c* могут быть равны:

1) $a = 0.05$, $b = 0.30$, $c = 0.25$
2) $a = 0.05$, $b = 0.30$, $c = 0.35$
3) $a = 0.05$, $b = 0.20$, $c = 0.35$
4) $a = 0.15$, $b = 0.30$, $c = 0.25$

Решение:

Сумма вероятностей всех возможных значений ξ равна 1, следовательно

$$a + b + c = 1 - 0.25 - 0.15 = 0.6$$

По условию задачи $0.25 + a + b = 0.6 \Rightarrow a + b = 0.35 \Rightarrow$ из полученных двух уравнений $c = 0.25$.

Среди предложенных вариантов всем условиям отвечает лишь вариант 1), где a = 0.05, b = 0.30, c = 0.25.

Ответ: 1).

Задача 2.3 (по мотивам [5]).

Случайная величина ξ задана законом распределения вероятностей:

ξ	1	2	3	4
p	0.4	0.2	0.25	0.15

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид:

1) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1 \\ 0.4 \text{ при } 1\le x<2 \\ 0.6 \text{ при } 2\le x<3 \\ 0.85 \text{ при } 3\le x<4 \\ 0 \text{ при } x\ge 4 \end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1 \\ 0.4 \text{ при } 1\le x<2 \\ 0.6 \text{ при } 2\le x<3 \\ 0.85 \text{ при } 3\le x<4 \\ 1 \text{ при } x\ge 4 \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1 \\ 0.2 \text{ при } 1\le x<2 \\ 0.25 \text{ при } 2\le x<3 \\ 0.15 \text{ при } 3\le x<4 \\ 1 \text{ при } x\ge 4 \end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1 \\ 0.4 \text{ при } 1\le x<2 \\ 0.2 \text{ при } 2\le x<3 \\ 0.25 \text{ при } 3\le x<4 \\ 0.15 \text{ при } x\ge 4 \end{cases}$

Решение:

Первый способ – найти формулу по определению $F(x)=P(\xi\le x)$:
1) при $x<1$: $F(x)=P(\xi<1)=0$
2) при $1\le x<2$: $F(x)=P(\xi=1)=0.4$
3) при $2\le x<3$: $F(x)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.4+0.2=0.6$
4) при $3\le x<4$: $F(x)=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=0.4+0.2+0.25=0.85$
5) при $x\ge 4$: $F(x)=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)=1$

Следовательно, нам подходит формула 2).

Второй способ – внимательно посмотреть на предложенные варианты:
1) $F(x)=0$ при $x\ge 4$ – не выполняются свойства функции распределения 2 и 4 со стр. 4.
3) $F(x)=0.15$ при $3\le x<4$ – не выполняется свойство 2.
4) не выполняются свойства 2 и 4.

Важное замечание о втором способе. В условии задачи не сказано, что какой-либо из предложенных вариантов обязательно является ответом. Не исключено, что ни один вариант не подходит. В связи с этим, второй способ является вспомогательным для того, чтобы сразу исключить из рассмотрения заведомо не подходящие варианты, не относящиеся к функциям распределения.

Ответ: 2).

Задача 2.4 (по мотивам [5]).
Случайная величина ξ задана законом распределения вероятностей:

ξ	–2	–1	1	3	5	6
p	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1

Тогда вероятность $P(-1<\xi\le 4)$ равна:
1) 0.5
2) 0.4
3) 0.3
4) 0.1

Решение:

Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, следовательно,

$$P(-1<\xi\le 4)=P(\xi=1)+P(\xi=3)=0.2+0.1=0.3$$

Ответ: 3).

Задача 2.5 (по мотивам [5]).
Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x<1\\ 0.4 \text{ } при \text{ } 1\le x<2\\ 0.6 \text{ } при \text{ } 2\le x<3\\ 0.85 \text{ } при \text{ } 3\le x<4\\ 1 \text{ } при \text{ } x\ge 4\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(2<\xi\le 4)$ равна:
1) 0; 2) 0.2; 3) 0.4; 4) 0.55.

Решение:

Первый способ.
По определению $F(x)=P(\xi\le x)$ $\Rightarrow$ ряд распределения ξ имеет вид:

ξ	1	2	3	4
p	0.4	0.2	0.25	0.15

$p_1=P(\xi=1)=0.4,$ $p_2=P(\xi=2)=0.6-0.4=0.2,$
$p_3=P(\xi=3)=0.85-0.6=0.25$ и $p_4=P(\xi=4)=1-0.85=0.15.$

Следовательно, $P(2<\xi\le 4)=P(\xi=3)+P(\xi=4)=0.25+0.15=0.4$.

Второй способ.

$$P(2<\xi\le 4)=P(\xi\le 4)-P(\xi\le 2)=F(4)-F(2)=1-0.6=0.4\,.$$

Ответ: 3).

Задача 2.6 (по мотивам [5]).

Для случайной величины ξ с рядом распределения

ξ	1	2	3	4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид: $F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x<1\\ 0.4 \text{ } при \text{ } 1\le x<2\\ 0.6 \text{ } при \text{ } 2\le x<3\\ 0.85 \text{ } при \text{ } 3\le x<4\\ 1 \text{ } при \text{ } x\ge 4\end{cases}$

Тогда значения вероятностей p_1, p_2, p_3 и p_4 равны соответственно:

1) 0.4, 0.6, 0.85, 1
2) 0, 0.25, 0.40, 0.75
3) 0.25, 0.4, 0.15, 0.2
4) 0.4, 0.2, 0.25, 0.15

Решение:

По определению $F(x)=P(\xi\le x)$, следовательно,

$$p_1=P(\xi=1)=P(\xi\le 1)-P(\xi<1)=F(1)-F(1-0)=0.4-0=0.4\,,$$

где $F(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}F(x)$.

По аналогии рассчитываются остальные параметры:

$$p_2=P(\xi=2)=P(\xi\le 2)-P(\xi<2)=F(2)-F(2-0)=0.6-0.4=0.2,$$
$$p_3=P(\xi=3)=P(\xi\le 3)-P(\xi<3)=F(3)-F(3-0)=0.85-0.6=0.25,$$
и $p_4=P(\xi=4)=P(\xi\le 4)-P(\xi<4)=F(4)-F(4-0)=1-0.85=0.15.$

Здесь $F(x-0)$ означает предел слева функции распределения $F(x)$ в точке x, существование которого следует из свойств функции распределения (свойство 3 на стр. 5).

Ответ: 4).

Задача 2.7 (по мотивам [4]).

Каждое утро Федя просит деньги на обед по алгоритму:

1. Сначала подходит к папе: папа ничего не даст с вероятностью 0.2, даст 50 р. с вероятностью 0.5, иначе – 100 р.
2. Потом к маме: если папа ничего не дал, мама ничего не даст с вероятностью 0.1, либо даст 50 р. с вероятностью 0.5, либо даст 100 р.

Если папа дал 50 р., то мама ничего не даст с вероятностью 0.2, либо даст 50 р. с вероятностью 0.4, либо 100 р.

Если папа дал 100 р., то мама ничего не даст с вероятностью 0.4, либо даст 50 р. с вероятностью 0.5, иначе – 100 р.

Пусть случайная величина ξ – количество денег от мамы с папой за одно утро. Найти закон распределения ξ, ее вероятностные характеристики, а также вероятности событий: во вторник Федя останется без карманных денег; в среду Феде дадут не больше сотни; в четверг Федя купит обед из супа за 20 р., пюре с котлетой за 70 р., салата за 15 р. и компота за 10 р. при условии, что предыдущие карманные деньги потрачены и можно рассчитывать только на то, что ему дадут с утра.

Решение:

Случайная величина ξ распределена дискретно:

ξ	0	50	100	150	200
p	0.02	0.2	0.4	0.35	0.03

где вероятности p_i вычисляются следующим образом.

Пусть событие A = “папа не даст ничего”, B = “мама не даст ничего”, тогда событие $\xi = 0$ равносильно произведению событий AB и по теореме умножения вероятностей:

$$p_1 = P(\xi = 0) = P(AB) = P(A)P(B \mid A) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02.$$

Пусть событие A = “папа не даст ничего”, B = “мама даст 50 р.”, C = “папа даст 50 р.”, D = “мама не даст ничего” $\Rightarrow$ событие $\xi = 50$ равно сумме событий AB и CD. По теореме сложения вероятностей для несовместных событий:

$$p_2 = P(\xi = 50) = P(AB + CD) = P(AB) + P(CD) = 0.2 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.2.$$

По аналогии вычисляются остальные вероятности:

$$p_3 = P(\xi = 100) = 0.2 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.4;$$

$$p_4 = P(\xi = 150) = 0.5 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.35;$$

$$p_5 = P(\xi = 200) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03;$$

* *не забывайте проверять, чтобы сумма всех* p_i *была равна единице.*

Математическое ожидание случайной величины ξ:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{5}\xi_i p_i=0\cdot 0.02+50\cdot 0.2+100\cdot 0.4+150\cdot 0.35+200\cdot 0.03=108.5.$$

Математическое ожидание ξ^2:

$$M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=1}^{5}\xi_i^2 p_i=0^2\cdot 0.02+50^2\cdot 0.2+100^2\cdot 0.4+150^2\cdot 0.35+200^2\cdot 0.03=13575.$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение ξ равны:

$D\xi=M\left(\xi^2\right)-\left(M\xi\right)^2=13575-11772.25=1802.75$, $\sigma\xi\approx 42.46$.

Вероятность того, что во вторник Феде ничего не дадут, равна $p_1=2\%$.

Вероятность того, что в среду Феде дадут не больше сотни:

$$P(\xi\le 100)=P(\xi=0)+P(\xi=50)+P(\xi=100)=0.02+0.20+0.40=0.62=62\%.$$

Вероятность того, что в четверг Федя купит обед общей стоимостью 115 р. только на деньги, выданные родителями утром:

$$P(\xi\ge 115)=P(\xi=150)+P(\xi=200)=0.35+0.03=0.38=38\%.$$

Ответ: закон распределения ξ приводится в решении задачи;

$M\xi=108.5,\ D\xi=1802.75,\ \sigma\xi\approx 42.46$;

$P(\xi=0)=0.02=2\%$, $P(\xi\le 100)=0.62=62\%$, $P(\xi\ge 115)=0.38=38\%$.

Задача 2.8 (по мотивам [4]).

Преподаватель ставит оценки на экзамене следующим образом: он подбрасывает три монетки, считает число гербов и прибавляет два балла. Пусть ξ – оценка за экзамен. Найдите закон распределения ξ и ее вероятностные характеристики, а также вероятности событий: студент-отличник получит тройку, а прогульщик –не ниже четверки; из трех подруг 2 получат оценку “отлично” и одна “хорошо”.

Решение:

Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	2	3	4	5
p	0.125	0.375	0.375	0.125

Вероятности p_i определяем по числу гербов, выпавших на трех монетках, с вероятностью выпадения герба, равной 0.5:

$p_1 = P(\xi = 2) = P(\textit{не выпало ни одного герба}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.125$;
$p_2 = P(\xi = 3) = P(\textit{выпал один герб}) = C_3^1 \cdot 0.125 = 0.375$;
$p_3 = P(\xi = 4) = P(\textit{выпало два герба}) = C_3^2 \cdot 0.125 = 0.375$;
$p_4 = P(\xi = 5) = P(\textit{выпало три герба}) = 0.125$.

Вероятностные характеристики случайной величины ξ:

$M\xi = \sum_{i=1}^{4} \xi_i p_i = 2 \cdot 0.125 + 3 \cdot 0.375 + 4 \cdot 0.375 + 5 \cdot 0.125 = 3.5$;

$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0.125 + 3^2 \cdot 0.375 + 4^2 \cdot 0.375 + 5^2 \cdot 0.125 = 13$, следовательно

$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 13 - 3.5^2 = 0.75$ и $\sigma\xi \approx 0.87$.

Вычислим вероятность того, что отличник получит тройку, а прогульщик не ниже четверки: рассматривается произведение событий $D = AB$, где событие $A =$ "*отличник получит тройку*" и событие $B =$ "*прогульщик получит оценку не ниже четверки*". Учитывая способ выставления оценок, можем сделать вывод о независимости событий A и B $\Rightarrow$ для независимых событий A и B вероятность их произведения равна произведению вероятностей каждого события:

$$P(D) = P(AB) = P(A)P(B) = P(\xi = 3)P(\xi \geq 4) = P(\xi = 3)(P(\xi = 4) + P(\xi = 5)) =$$
$$= 0.375 \cdot 0.5 = 0.1875 = 18.75\%$$

Вероятность того, что из трех подруг 2 девочки получат "отлично" и одна "хорошо", равна:

$$P(H) = \tilde{N}_3^2 \cdot 0.125^2 \cdot 0.375 \approx 0.018 = 1.8\%$$

Ответ: закон распределения ξ представлен в решении задачи;
$M\xi = 3.5$, $D\xi = 0.75$, $\sigma\xi \approx 0.87$
$P(D) = 0.1875 = 18.75\%$, $P(H) \approx 0.018 = 1.8\%$.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М. : Наука. – 1980. – 576 с.
2. *Зубков А.М.* Сборник задач по теории вероятностей [Текст] / А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. – М. : Наука. – 1989. – 320 с.
3. Одномерные дискретные распределения / Н.Л. Джонсон, С. Коц, А.У. Кемп; пер. 2-го англ. изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 559 с. : ил. – (Теория вероятностных распределений). – ISBN 978-5-94774-471-2.
4. Математика. Часть III: Теория вероятностей : учебное пособие [Текст] / под ред. Г.Г. Хамова. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена. – 2011. – 201 с.
5. *Нефедова Г.А.* Теория вероятностей и математическая статистика (тестовые задания с решениями и ответами) [Текст] : метод. указания / Г.А. Нефедова. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 74 с.

Учебное издание

Бутов А.А., Гаврилова М.С., Савинов Ю.Г.

Решение задач по теории вероятностей

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Директор Издательского центра *Т.В. Филиппова*
Подготовка оригинал-макета *М.А. Водениной*

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 11.11.2016. Формат 60×84/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 100. Заказ № 153 /

Оригинал-макет подготовлен и тираж отпечатан в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42