

Министерство образования и науки Российской Федерации  
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра ЭММиИТ

Ю.В. Мартыненко

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Ульяновск 2011

## Аннотация

Пособие подготовлено в соответствии с рабочей программой курса “Актuarная математика” для студентов специальности 060400 “Финансы и кредит”. Может использоваться студентами экономических и математических специальностей при изучении соответствующих дисциплин и при выполнении курсовых и дипломных работ. Базируется на основных математических и экономических курсах.

Актuarная математика – дисциплина, изучающая методы и модели, связанные со страхованием различных рисков. Страхование представляет собой специальный механизм перераспределения риска между сторонами, заключающими страховой договор. Условия страховой сделки должны быть выгодны обеим сторонам. Для проведения соответствующих расчетов (определение платы за услугу страхования и т.д.) используется актuarная математика.

Актuarная математика – область сравнительно новая для финансово-экономического образования в России. Подготовка квалифицированных специалистов в области актuarной математики, потребность в которых диктуется экономическими сдвигами последних лет, такими, например, как развитие рынка страхования и негосударственного пенсионного обеспечения, является актуальной задачей экономического и финансового образования. Знание основных концепций предмета необходимо современному специалисту-экономисту.

Целью разработки данного пособия является помощь студентам в изучении основ актuarной математики. Оно дает представление о современном состоянии теории и практики актuarных расчетов, а также формирует у читателей представление об актуальных научных, прикладных и образовательных проблемах, стоящих перед развитием актuarного дела в России.

Ил 1. Табл. 4. Библ. 8 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                      | 4  |
| 1. СТРАХОВАЯ ПРЕМИЯ .....                                           | 5  |
| 1.1 СУЩНОСТЬ СТРАХОВОЙ ПРЕМИИ.....                                  | 5  |
| 1.2 СТРУКТУРА СТРАХОВОЙ ПРЕМИИ.....                                 | 5  |
| 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ .....                     | 7  |
| 2.1 ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЖИЗНИ .....                                   | 7  |
| 2.2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СМЕРТНОСТИ.....                            | 8  |
| 2.3 ОСТАТОЧНАЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЖИЗНИ.....                         | 9  |
| 2.4 ТАБЛИЦА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ.....                            | 11 |
| 2.5 ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ДРОБНЫХ ВОЗРАСТОВ.....                          | 12 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....                                           | 13 |
| Задачи для самостоятельного решения .....                           | 14 |
| 3. ДОЛГОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ.....                              | 16 |
| 3.1 ОСОБЕННОСТИ ДОГОВОРОВ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ .....                   | 16 |
| 3.2 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА НЕТТО-ПРЕМИЙ.....                        | 18 |
| 3.3 НЕТТО-ПРЕМИИ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ..... | 19 |
| 3.4 НЕТТО-ПРЕМИИ ДЛЯ СТРАХОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СУММОЙ.....           | 22 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....                                           | 23 |
| Задачи для самостоятельного решения .....                           | 23 |
| 4. СТРАХОВЫЕ РЕНТЫ .....                                            | 26 |
| 4.1 СУЩНОСТЬ СТРАХОВОЙ РЕНТЫ .....                                  | 26 |
| 4.2 ОСНОВНЫЕ ВИДЫ РЕНТ .....                                        | 26 |
| 4.3 РЕНТЫ, ВЫПЛАЧИВАЕМЫЕ НЕСКОЛЬКО РАЗ В ГОД.....                   | 28 |
| 4.4 АКТУАРНОЕ НАКОПЛЕНИЕ.....                                       | 28 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....                                           | 29 |
| Задачи для самостоятельного решения .....                           | 29 |
| МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....                                         | 34 |
| ТЕСТЫ.....                                                          | 36 |
| ТЕМА 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ .....                | 36 |
| ТЕМА 3. МОДЕЛИ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ .....                      | 38 |
| ТЕМА 4. СТРАХОВЫЕ РЕНТЫ .....                                       | 40 |
| ГЛОССАРИЙ .....                                                     | 43 |
| ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....                                          | 45 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....                                             | 46 |
| INTERNET-РЕСУРСЫ.....                                               | 46 |

## ВВЕДЕНИЕ

Актuarная математика – дисциплина, изучающая методы и модели, связанные со страхованием различных рисков. Страхование представляет собой специальный механизм перераспределения риска между сторонами, заключающими страховой договор: в качестве покупателя риска выступает страховая компания, а продавцами риска являются независимые индивидуумы или фирмы. Содержание сделки заключается в том, что клиент, желая избавиться от риска и иметь компенсацию в случае возможного ущерба, платит страховой компании определённую сумму, т.е. покупает себе «спокойную жизнь». Страховая компания же полагает, что вероятность наступления большого количества страховых случаев и необходимости выплаты страховых сумм мала, а, следовательно, собранных страховых взносов хватит не только на покрытие предъявленных исков и собственных издержек, но и на получение чистой прибыли. Условия страховой сделки должны быть выгодны обеим сторонам, причём решение каждая сторона принимает в соответствии со своей системой предпочтений. Для проведения соответствующих расчетов (определение платы за услугу страхования и т.д.) используется актуарная математика.

Перспективы развития отечественного страхования и его возрастающее влияние на экономику очевидны: в настоящее время это один из стратегических факторов эффективного функционирования и успешного развития финансово-хозяйственных отношений в нашей стране. Деятельность каждого хозяйствующего субъекта в условиях рынка подвержена множеству разнообразных рисков, требующих страховой защиты, для организации и проведения которой будущим экономистам необходимо знание основ страховой деятельности.

В настоящее время страхование принадлежит к числу наиболее динамично развивающихся финансовых институтов экономики. Рыночные отношения стали объективной предпосылкой появления нового характера страховой деятельности в России: развития разнообразных видов страхования, формирования дополнительных секторов, форм и методов организации страховой деятельности, стабильно функционирующих специализированных страховых предприятий. В частности, развитие негосударственных пенсионных фондов дает возможность каждому самостоятельно формировать его будущую пенсию. Поэтому современному экономисту в его профессиональной деятельности не обойтись без знания основополагающих принципов страхования и методик соответствующих расчетов.

Целью разработки данного пособия является помощь студентам в изучении основ актуарной математики. Оно дает по возможности широкое представление о современном состоянии теории и практики актуарных расчетов, а также формирует у читателей представление об актуальных научных, прикладных и образовательных проблемах, стоящих перед развитием актуарного дела в России.

# **1. СТРАХОВАЯ ПРЕМИЯ**

## **1.1 Сущность страховой премии**

Страховая премия – это денежная сумма, которую страхователь платит страховщику за принятое им на себя обязательство осуществить страховую выплату при наступлении страхового случая. Другими словами, это стоимость или цена страховой услуги. Как и всякая рыночная цена, она колеблется под влиянием спроса и предложения. Однако в силу специфики продаваемой услуги, в ценообразовании страховой премии есть свои особенности.

Премия должна быть достаточной для:

- покрытия ожидаемых выплат по договору страхования;
- создания страховых резервов;
- покрытия издержек страховой компании на ведение дела;
- обеспечения прибыли страховой компании.

Поэтому нижняя граница цены определяется из условия равенства между поступлениями платежей от страхователей и страховыми выплатами по договорам плюс издержки страховой компании (т.е. из условия безубыточности деятельности компании). Верхняя граница определяется в зависимости от спроса на данную услугу и конкуренции со стороны других компаний.

Также при расчете премии необходимо учитывать ставку банковских процентов. С одной стороны, клиент может принять решения обратиться в банк, а не в страховую компанию, если это будет выгодно для него. Например, вместо договора страхования жизни, по которому предусмотрена высокая премия, он может открыть накопительный счет в банке, завещав его своим наследникам. С другой стороны, средства, полученные страховой компанией от своих клиентов, временно свободны (до наступления страхового случая). Они могут и должны приносить инвестиционный доход. Этот доход либо учитывается при расчете премии (т.е. ее величина снижается), либо предоставляется страхователям как бонус.

Таким образом, страховая премия является одним из главных факторов привлечения клиентов, поэтому все соответствующие расчеты должны производиться квалифицированными специалистами, оценивающими соответствующие риски. Такие специалисты называются актуариями.

## **1.2 Структура страховой премии**

Страховая премия имеет фиксированную структуру, и каждая ее компонента обеспечивает определенную функцию. Большая часть премии уходит на формирования страхового фонда, из которого производятся выплаты по произошедшим страховым случаям. Страховая премия, которую уплачивает страхователь, называется брутто-премией. Ее структура представлена в таблице 1.

Таблица 1. Структура страховой премии

| Компонента брутто-премии                                                                      | Назначение                                                                     | Доля в общем объеме (%) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| <b>Нетто-премия по риску</b><br>=<br><i>Чистая нетто-премия по риску + страховая надбавка</i> | Выплаты по страховым случаям и создание резервов                               | 80 – 90                 |
| <b>Надбавка на покрытие расходов</b>                                                          | Оплата расходов, включая издержки на содержание офиса, заработную плату и т.д. | 10 – 20                 |
| <b>Надбавка на прибыль</b>                                                                    | Формирование прибыли                                                           |                         |

Нетто-премия по риску состоит из двух частей. Первая часть – чистая нетто-премия по риску. Она рассчитывается следующим образом. В момент заключения договора величина будущего ущерба неизвестна. Однако на основе данных за прошлый период по аналогичным договорам можно оценить вероятность наступления страхового случая и вероятностное распределение ущерба. Тогда ожидаемое (среднее) значение ущерба принимается за чистую нетто-премию по риску.

При таком подсчете возможны ошибки 2-х типов. Во-первых, ошибка диагноза, т.е. неверная оценка вероятностного распределения ущерба. Во-вторых, ошибка прогноза, которая вызывается неучтенными или изменившимися обстоятельствами. Практика показывает, что даже при очень хорошей информации о распределении ущерба примерно в 50% случаев реальные выплаты превосходят ожидаемые. Для того чтобы компенсировать чисто случайные отклонения реальных выплат от ожидаемых, к чистой нетто-премии по риску делают страховую надбавку. Она рассчитывается по портфелю договоров, исходя из принятой вероятности «неразорения» (т.е. вероятности, что выделенных средств хватит на страховые выплаты по всему портфелю). Это позволяет свести риск страховой компании до приемлемого уровня.

Расчет нетто-премии относится к области актуарной математики. Расчет надбавок на покрытие расходов и прибыль относится к экономике страховой организации. Так как нетто-премия составляет большую часть страховой премии, необходимо ответственно подходить к ее расчету и использовать соответствующие методики. В противном случае может сформироваться страховой фонд недостаточной величины, и страховщику придется искать дополнительные средства, чтобы выполнить свои обязательства перед клиентами.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

### 2.1 Продолжительность жизни

Для каждого человека заранее в точности неизвестна продолжительность его жизни (время жизни). С точки зрения математики такая величина является случайной, и может быть описана соответствующими характеристиками из теории вероятностей. Обозначим  $X$  – продолжительность жизни некоторого человека. Тогда  $X$  характеризуется в первую очередь своей функцией распределения  $F(t)$ .

**Функцией распределения  $F(t)$**  продолжительности жизни  $X$  называется функция, значение которой для аргумента  $t \geq 0$  показывает вероятность того, что продолжительность жизни индивида будет меньше либо равна  $t$ :  $F(t) = P(X \leq t)$ .

Например, если  $F(50) = 0,7$ , то вероятность того, что продолжительность жизни человека будет не более 50 лет, составляет 0,7 или 70%.

Однако для целей страхования удобнее использовать не саму функцию распределения, а получаемую на ее основе функцию выживания  $s(t)$ .

**Функцией выживания  $s(t)$**  называется функция, которая для аргумента  $t \geq 0$  показывает вероятность того, что продолжительность жизни индивида будет больше, чем  $t$ :  $s(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t)$ .

Например, если  $s(50) = 0,7$ , то вероятность того, что продолжительность жизни человека будет больше 50 лет, составляет 0,7 или 70%.

Аргумент  $t$  в приведенных выше определениях играет роль возраста. Другими словами, функция выживания показывает вероятность дожить до определенного возраста, что позволяет использовать ее в страховых расчетах.

#### **Свойства функции выживания:**

- 1)  $s(0) = 1$ ,  $s(\infty) = 0$ .
- 2)  $s(t)$  строго убывает, т.е. при  $t_1 > t_2$  выполняется условие  $s(t_1) < s(t_2)$ .
- 3)  $s(t)$  непрерывна.

Свойство 1 гарантирует, что рассматриваются действительно родившиеся индивиды, и что продолжительность жизни любого индивида конечна. На практике обычно выбирается предельный возраст  $\omega$  и считается, что  $s(t) = 0$  при  $t > \omega$ .

Свойства 2 и 3 необходимы, чтобы математические характеристики функции выживания не противоречили ее содержательному смыслу.

Следующая характеристика – кривая смертей  $f(t)$ . Она определяется как производная функции распределения, т.е. плотность распределения вероятности.

**Кривой смертей** называется функция  $f(t) = -s'(t) = F'(t)$ . Кривая смертей приближенно показывает среднее количество людей из первоначальной совокупности, которые умерли в возрасте от  $t$  до  $t + 1$  лет.

#### Свойства кривой смертей:

- 1)  $f(t) \geq 0$ .
- 2)  $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ .

Эти свойства гарантируют, что действительно существует функция выживания, для которой  $f(t) = -s'(t)$ .

Следующая характеристика — интенсивность смертности  $\mu_t$ . **Функция интенсивности смертности** определяется как  $\mu_t = f(t)/s(t)$ . Эта функция приближенно показывает вероятность индивида в возрасте  $t$  лет умереть на протяжении следующего года.

#### Свойства $\mu_t$ :

- 1)  $\mu_t \geq 0$ .
- 2)  $s(t) = e^{-\int_0^t \mu_u du}$ .

Таким образом, имеются 3 основные характеристики продолжительности жизни, и достаточно знать хотя бы одну, чтобы получить остальные. На их основе далее можно получать дополнительную информацию.

**Средней продолжительностью жизни** называется математическое ожидание продолжительности жизни  $X$ :  ${}^0_e_0 = E(X)$ .

Данная характеристика используется для сравнения качества жизни населения в разных регионах и странах. Если дана функция выживания или кривая смертей, то

$${}^0_e_0 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} s(t) dt.$$

Также можно использовать и другие статистические характеристики, например дисперсию.

## 2.2 Аналитические законы смертности

На практике характеристики представляют в виде функций определенного вида, зависящих от параметров (аналитических моделей смертности). Параметры определяются по данным демографической статистики. Рассмотрим основные модели.

### I. Модель де Муавра (1724 г.)

Предполагается, что существует предельный возраст  $\omega$  и продолжительность жизни равномерно распределена на интервале от 0 до  $\omega$ . Равномерное распределение в теории вероятностей полностью определяется интервалом, на котором оно задано.

Поэтому

$$f(t) = \frac{1}{\omega}, \quad s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}, \quad \mu_t = \frac{1}{\omega - t}.$$

Содержательно это означает, что в любом возрасте риск смерти одинаков. Эта модель была одной из первых, рассматриваемых в данной области. Очевидно, что она не учитывает особенности реальной продолжительности жизни.

## II. Модель Гомпертца (1824 г.)

Функция интенсивности смертности имеет вид  $\mu_t = Be^{\alpha t}$ , где  $\alpha > B > 0$  – параметры, оцениваемые по статистике. Здесь  $\mu_t$  возрастает экспоненциально, что точнее отражает законы старения и снимает предположение о предельном возрасте. Восстанавливая по  $\mu_t$  другие характеристики, получаем

$$s(t) = e^{-B(s^{\alpha t} - 1)/\alpha}, \quad f(t) = Be^{\alpha t - B(s^{\alpha t} - 1)/\alpha}.$$

Кривая смертей здесь имеет максимум при  $t = (\ln \alpha - \ln B)/\alpha$ , т.е. существует «опасный» возраст, в котором число умерших максимально.

## III. Модель Мейкхама (1860 г.)

Функция интенсивности смертности имеет вид  $\mu_t = A + Be^{\alpha t}$ , где  $\alpha > B > 0$ ,  $A > 0$  – параметры, оцениваемые по статистике. Эта модель является обобщением предыдущей, так как добавляется слагаемое  $A$ , не зависящее от возраста и учитывающее риск несчастного случая.

Из трех рассмотренных моделей именно модель Мейкхама наиболее адекватно отражает особенности продолжительности жизни индивида. Однако в учебных задачах часто используется модель де Муавра из-за ее простоты. В любом случае, выбор той или иной модели и оценка ее параметров являются нетривиальной задачей, от правильного решения которой зависит обоснованность дальнейших расчетов.

## 2.3 Остаточная продолжительность жизни

В силу специфики деятельности страховой компании, ее интересует не вся продолжительность жизни клиента, а остаточная продолжительность с того момента, как он обратился в страховую компанию. Она также является случайно величиной с соответствующими характеристиками.

**Остаточная продолжительность жизни** для человека возраста  $x$  лет определяется как  $T(x) = X - x$ .

Например,  $T(50) = 20$  означает, что для человека возраста 50 лет остаточная продолжительность жизни составляет 20 лет. Очевидно, что  $T(0) = X$ .

Определим 3 основные характеристики для  $T(x)$ . Функция выживания  $s_x(t)$  показывает вероятность человека в возрасте  $x$  прожить следующие  $t$  лет:

$$s_x(t) = P(T(x) > t) = P(X - x > t) = P(X > x + t | X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Тогда

$$f_x(t) = -s'_x(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)};$$

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu_{x+t}.$$

Таким образом, основные характеристики остаточной продолжительности жизни легко определяются через аналогичные величины для общей продолжительности жизни.

В аналитических моделях остаточная продолжительность подчиняется той же закономерности, но с другими параметрами: в модели де Муавра вместо интервала  $(0, \omega)$  нужно рассматривать интервал  $(0, \omega - x)$ , в моделях Гомпертца и Мейкхама вместо исходных параметров нужно рассматривать  $A_x = A$ ,  $B_x = Be^{\alpha x}$ ,  $\alpha_x = \alpha$ .

Для остаточной продолжительности вводится ряд показателей, существенно упрощающих страховые расчеты.

Величина

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

показывает вероятность для человека возраста  $x$  прожить следующие  $t$  лет.

Величина

$${}_t q_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

показывает вероятность для человека возраста  $x$  умереть на протяжении следующих  $t$  лет.

Если  $t = 1$ , то этот индекс опускается:  ${}_1 p_x = p_x$ ,  ${}_1 q_x = q_x$ . Для произвольного  $t$

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}.$$

Из определения данных величин следует, что  $p_x + q_x = 1$ , так как это вероятности противоположных событий (оба не могут произойти одновременно, но одно обязательно наступит).

Величина

$${}_t | u q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x$$

показывает вероятность для человека возраста  $x$  прожить следующие  $t$  лет, но умереть на протяжении последующих  $u$  лет.

Используя эти вероятности, можно описать любую ситуацию, связанную с остаточной продолжительностью жизни. Например, вероятность человека возраста 40 лет умереть в возрасте от 50 до 80 лет обозначается  ${}_{10|30} q_{40}$ .

Также в расчетах рассматривают **округленную остаточную продолжительность жизни**  $K(x) = [T(x)]$ , где  $[ ]$  – целая часть числа. Очевидно, что  $K(0) = [T(0)] = [X]$  – это округленная продолжительность жизни.

Необходимость рассматривать  $K(x)$  вызвана следующими причинами:

- 1) демографическая статистика доступна только для целых возрастов;
- 2) человек обычно считает свой возраст в целых годах;
- 3) договоры страхования обычно заключаются на целое число лет.

Округленная остаточная продолжительность жизни может принимать значения 0, 1, 2, и т.д., т.е. с точки зрения теории вероятностей это дискретная случайная величина. Поэтому она может быть полностью описана вероятностями

$$P(K(x) = k) = {}_k p_x q_{x+k},$$

т.е. вероятность того, что округленная остаточная продолжительность жизни составит  $k$  лет, равна произведению вероятностей дожить до возраста  $k$  и умереть на протяжении следующего года.

**Средней остаточной продолжительностью жизни** называется математическое ожидание остаточной продолжительности жизни  $E(T(x))$ .

Эта величина может быть подсчитана по формуле  $\frac{1}{s(x)} = \int_x^{\infty} s(t) dt$ .

**Средней округленной остаточной продолжительностью жизни** называется математическое ожидание округленной остаточной продолжительности жизни  $K(x)$ :  $e_x = E(K(x))$ . Она находится по формуле  $e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k {}_k p_x q_{x+k}$ .

## 2.4 Таблица продолжительности жизни

Для расчетов страховой компании необходимы данные демографической статистики. В каждой стране сбором и обработкой таких данных занимается государство (перепись населения). Кроме этого, крупные страховые компании, давно работающие на рынке, ведут свою статистику. Для удобства собранные показатели сводятся в **таблицы продолжительности жизни (таблицы смертности)**.

Простейшая таблица должна содержать два столбца: 1-й столбец – возраст  $x$ , 2-й столбец – среднее количество людей  $l_x$  из первоначальной группы численностью  $l_0$ , доживших до этого возраста. По смыслу функции выживания,  $s(x) = l_x/l_0$ , т.е. вероятности  ${}_t p_x$  и  ${}_t q_x$  можно найти через числа  $l_x$ :

$${}_t p_x = l_{x+t}/l_x, \quad {}_t q_x = 1 - l_{x+t}/l_x.$$

Для удобства в таблицу можно включить следующие показатели:

- среднее число  $d_x = l_x - l_{x+1}$  людей из первоначальной группы, скончавшихся в возрасте от  $x$  до  $x + 1$  лет;
- вероятность  $q_x$ ;
- средняя остаточная продолжительность жизни.

Таблица продолжительности жизни, в которой для индивида известен только его возраст, называется **общей**. Однако очевидно, что для различных групп населения характеристики продолжительности жизни будут различными. Такие группы можно формировать по полу, по месту жительства, по состоянию здоровья, по роду деятельности. Если таблица продолжительности жизни сформирована для выбранной группы, то она называется **таблицей с отбором**. Термин «отбор» означает, что люди попадают в выбранную группу после некоторого отбора (например, медицинского осмотра при оформлении документов).

В таблице с отбором для всех величин, кроме возраста, необходимо также указывать время, прошедшее с момента отбора. Для этого в индексах момент отбора указывают в квадратных скобках, и к нему прибавляют время, прошедшее с этого момента. При этом суть величин остается такой же. Например,  ${}_t p_{[x]+k}$  показывается вероятность человека возраста  $x+k$ , отобранного в группу  $k$  лет назад, прожить следующие  $t$  лет.

Действие отбора продолжается неограниченно долго, т.е. если человек попал в группу, то характеристики его продолжительности жизни отличаются от общих характеристик. Но при этом, чем больше времени прошло с момента отбора, тем более важную роль играет возраст человека, а моментом отбора можно пренебречь.

Период, в течение которого необходимо учитывать время, прошедшее с момента отбора, называется **периодом действия отбора  $r$** . Соответствующая таблица называется **таблицей с отбором ограниченного действия**.

Тогда, если  $x + k \geq r$ , то квадратные скобки в обозначении индекса можно опустить:  ${}_t p_{[x]+k} = {}_t p_{x+k}$  и т.д.

Составление таблиц продолжительности жизни является самостоятельной и достаточно сложной задачей. Существуют два класса методов построения таблиц. Методы, использующие данные текущего демографического учета, базируются только на анализе повозрастного числа умерших за год. При этом предполагаются справедливыми гипотезы стабильности или стационарности. Более точными являются демографические методы. Они опираются на обширную информацию, которая может включать данные переписей населения и повозрастную смертность за ряд лет.

При использовании данных только по одному году сказываются те или иные особенности конкретного года, в результате зависимость  $d_x$  от  $x$  может оказаться весьма нерегулярной. Поэтому применяются разнообразные методы сглаживания. После этого полученные зависимости усредняют за несколько последовательных лет. В практике страховых компаний Великобритании обычно усредняют данные за три года, и полученные таблицы считают применимыми в течение последующего десятилетия.

## 2.5 Приближения для дробных возрастов

Вероятности  ${}_t p_x$  и  ${}_t q_x$  для целых  $t$  и  $x$  можно получить из таблиц продолжительности жизни. Однако, если клиент обращается в страховую компанию не в свой день рождения, его фактический возраст в этот момент выражается дробным числом. Поэтому необходимо считать приближения для дробных возрастов. Это можно сделать с помощью интерполяции функции выживания. Рассмотрим основные предположения, которые можно сделать в этом случае.

### ***I. Линейная интерполяция $s(t)$ (равномерное распределение смертей)***

Пусть рассматривается интервал от  $t$  до  $t + 1$  лет, где  $t$  – целое,  $k$  – дробная часть года. Тогда известны  $s(t)$ ,  $s(t + 1)$  и требуется найти  $s(t + k)$ . Для этого представим  $s(t)$  как линейную функцию  $s(t) = a + bt$ . Подставляя  $t$  и  $t + 1$ , получим систему уравнений относительно неизвестных  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} s(t) = a + bt, \\ s(t + 1) = a + b(t + 1). \end{cases}$$

Тогда  $b = s(t + 1) - s(t)$ ,  $a = s(t) - t(s(t + 1) - s(t))$ . Окончательно получаем:

$$s(t + k) = s(t) + k(s(t + 1) - s(t)).$$

Кривая смертей в этом случае является постоянной на рассматриваемом интервале, т.е. момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни. В этом случае округленная продолжительность жизни и оставшаяся дробная часть независимы друг от друга.

### ***II. Постоянная интенсивность смертности***

Действуя аналогично предыдущему случаю, представим функцию выживания как экспоненту и затем найдем ее параметры:  $s(t) = ae^{bt}$ .

Тогда

$$\begin{cases} s(t) = ae^{bt}, \\ s(t + 1) = ae^{b(t+1)}, \end{cases}$$

и  $s(t + k) = s(t)(p_t)^k$ .

Можно показать, что здесь интенсивность смертности постоянна, а округленная продолжительность жизни и оставшаяся дробная часть не являются независимыми.

### ***III. Предположение Балдуччи***

Здесь линейной предполагается функция, обратная к функции выживания и в результате

$$s(t + k) = \frac{s(t + 1)}{p_t + kq_t}.$$

Так же, как и в предыдущем случае, округленная продолжительность жизни и оставшаяся дробная часть не являются независимыми.

Если вероятности смерти в течение следующего года малы, то дробная часть года смерти является приближенно равномерно распределенной и не зависит от округленной остаточной продолжительности жизни во всех трех предположениях.

### **Контрольные вопросы**

1. Почему продолжительность жизни нужно изучать с помощью теории вероятностей?
2. Почему вместо функции распределения удобнее использовать функцию выживания?

3. Поясните содержательный смысл понятия «функция выживания».
4. Поясните содержательный смысл понятия «кривая смертей».
5. Поясните содержательный смысл понятия «функция интенсивности смертности».
6. Каковы плюсы и минусы аналитических законов смертности?
7. Назовите основные величины для остаточной продолжительности жизни.
8. Какие виды таблиц продолжительности жизни вы знаете?
9. Чем отличаются друг от друга предположения для дробных возрастов?

### Задачи для самостоятельного решения

- 1) Какая из функций

$$s(x) = \exp(-x^2),$$

$$s(x) = 1/(1+x)^2,$$

$$s(x) = \exp(x - 0,7(2^x - 1))$$

может рассматриваться в качестве функции выживания?

- 2) Дана таблица продолжительности жизни. Найти вероятность того, что человек в возрасте 20 лет:

- доживет до 50 лет,
- умрет до 30 лет,
- умрет в возрасте от 40 до 70 лет.

| $x$ | $l_x$  | $x$ | $l_x$  | $x$ | $l_x$  |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|
| 20  | 97 290 | 40  | 94 086 | 60  | 80 404 |
| 25  | 96 794 | 45  | 92 164 | 65  | 74 071 |
| 30  | 96 192 | 50  | 89 272 | 70  | 64 544 |
| 35  | 95 354 | 55  | 85 454 | 75  | 51 363 |

- 3) Предположим, что функция выживания дается формулой  $s(x) = \sqrt{1 - x/110}$ ,  $0 \leq x \leq 110$ . Найти вероятность того, что человек в возрасте 50 лет умрет в течение ближайшего года, а также его среднее остаточное время жизни.
- 4) Специалисты предполагают, что разработка определенного нового типа лекарства увеличит среднюю остаточную продолжительности жизни на 4 года. Считая, что смертность описывается законом де Муавра (как до разработки, так и после), определите, как изменится предельный возраст.
- 5) Предположим, что  $q_{70} = 0,04$ , а  $q_{71} = 0,05$ . Подсчитайте вероятность того, что человек, которому сейчас 70 лет, умрет в возрасте от 70,5 до 71,5 лет. Для аппроксимации функции выживания для дробных возрастов используется предположение Балдуччи. Как изменится результат, если использовать предположение о равномерном распределении смертей?

6) Известно, что  $q_x = 0,12$ . Проверить истинность утверждений:

а)  ${}_{1/3}q_{x+1/2} = 0,0426$ , если принято предположение о равномерном распределении смертей,

б)  ${}_{1/3}q_x = 0,0435$ , если принято предположение Балдуччи,

в)  ${}_{1/2}q_x = 0,0619$ , если принято предположение о постоянной интенсивности смертности.

7) Таблица содержит вероятности  $q_{[x]+t}$ . Найти  ${}_2q_{[32]+1}$ .

| $[x]$ | $t=0$<br>$q_{[x]}$   | $t=1$<br>$q_{[x]+1}$ | $t=2$<br>$q_{[x]+2}$ | $q_{x+3}$            | $x+3$ |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------|
| 30    | $103 \times 10^{-5}$ | $170 \times 10^{-5}$ | $209 \times 10^{-5}$ | $229 \times 10^{-5}$ | 33    |
| 31    | $124 \times 10^{-5}$ | $186 \times 10^{-5}$ | $222 \times 10^{-5}$ | $241 \times 10^{-5}$ | 34    |
| 32    | $139 \times 10^{-5}$ | $191 \times 10^{-5}$ | $231 \times 10^{-5}$ | $254 \times 10^{-5}$ | 35    |
| 33    | $154 \times 10^{-5}$ | $207 \times 10^{-5}$ | $244 \times 10^{-5}$ | $267 \times 10^{-5}$ | 36    |
| 34    | $175 \times 10^{-5}$ | $212 \times 10^{-5}$ | $251 \times 10^{-5}$ | $283 \times 10^{-5}$ | 37    |

### **3. ДОЛГОСРОЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ**

#### **3.1 Особенности договоров страхования жизни**

Под страхованием жизни понимают предоставление страховщиком в обмен на уплату страховых премий гарантии выплатить определенную сумму денег страхователю или указанным им третьим лицам в случае смерти застрахованного или его дожития до определенного возраста.

Согласно условиям лицензирования страховой деятельности на территории РФ, «страхование жизни представляет собой совокупность видов личного страхования, предусматривающих обязанности страховщика по страховым выплатам в случаях:

- дожития застрахованного до окончания срока страхования или определенного договором страхования возраста;

- смерти застрахованного;

- а также по выплате пенсии (ренты, аннуитета) застрахованному в случаях, предусмотренных договором страхования (окончание действия договора страхования, достижение застрахованным определенного возраста, смерть кормильца, постоянная утрата трудоспособности, текущие выплаты (аннуитеты) в период действия договора страхования и др.),

при этом, формирование резерва взносов и расчеты тарифных ставок производятся с помощью актуарных методов, на основе таблиц смертности и норм доходности по инвестициям временно свободных средств резервов по страхованию жизни.

Договоры страхования жизни заключаются на срок не менее 1 года.»

Таким образом, все расчеты должны производиться на основе данных демографической статистики. Также должен учитываться доход от инвестирования собранных премий. Это делается с помощью дисконтирования.

Возможно участие страхователей в прибыли страховой компании. Компания направляет часть своей прибыли на увеличение страховых сумм. Дополнительная сумма называется бонусом и подлежит выплате только по окончании действия договора или при наступлении страхового случая. Премии по договорам с бонусами выше, чем по обычным договорам.

Прибыль, отчисляемая на бонусы, делится на техническую и финансовую в зависимости от источника ее получения. Техническая прибыль состоит из:

- прибыли от изменения показателей смертности (фактическая смертность ниже расчетной по договорам страхования на случай смерти и выше по договорам на дожитие);
- прибыли от экономии расходов на ведение страхового дела (фактические расходы ниже надбавок, использованных при расчете нетто-премии).

Финансовая прибыль образуется за счет инвестирования страховых фондов и рассчитывается как:

- разница между процентами на инвестиции, осуществленные страховщиком, и процентной ставкой, заложенной в расчет страховой премии;
- прибыль от прироста стоимости инвестиционных вложений страховщика, получаемая при их реализации.

В актуарной математике относительно страхования жизни используется иная терминология. Как отдельный раздел рассматриваются договоры с периодическими выплатами (пенсии, ренты, аннуитеты). В страховании жизни различают краткосрочное (на срок не более 1 года) и долгосрочное (на срок более 1 года) страхование.

Краткосрочное страхование представляет скорее теоретический и методический интерес. В таком типе договоров не предусмотрено инвестирование собранных премий, а страховая сумма выплачивается, если клиент умирает в течение срока действия договора. В противном случае ничего не выплачивается. Такой тип страхования позволяет актуарию освоить базовые методики расчетов и затем применять их в более сложных случаях.

Долгосрочное страхование учитывает при расчете премий доход от инвестирования. Здесь существует несколько базовых типов договоров с готовыми формулами нетто-премий. Остальные договоры либо сводятся к комбинации базовых типов, либо расчет ведется согласно соответствующим правилам актуарной математики. Это позволяет рассматривать практически любые варианты страхования жизни, предусмотренные законодательством, и без особых проблем рассчитывать нетто-премии.

### ***Основные виды долгосрочного страхования***

#### ***1. Пожизненное страхование***

Страховая сумма выплачивается при смерти застрахованного.

#### ***2. Временное страхование на $n$ лет***

Страховая сумма выплачивается при смерти застрахованного, но только если она произошла в течение  $n$  лет после заключения договора. В противном случае ничего не выплачивается.

#### ***3. Отсроченное на $m$ лет пожизненное страхование***

Страховая сумма выплачивается при смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении  $m$  лет после заключения договора. В противном случае ничего не выплачивается.

#### ***4. Накопительное страхование (чистое дожитие) на $n$ лет***

Страховая сумма выплачивается, если застрахованный дожил до момента окончания действия договора. В противном случае ничего не выплачивается.

#### ***5. Смешанное страхование на $n$ лет***

Страховая сумма выплачивается либо в момент окончания действия договора (если застрахованный дожил до него), либо при смерти застрахованного (если она произошла в течение срока действия договора).

### 3.2 Общие принципы расчета нетто-премий

Для расчетов необходимо выбрать таблицу продолжительности жизни, а также процентную ставку, под которую будут инвестированы собранные премии. Эта ставка  $i$  называется нормой процента (нормой доходности, технической ставкой) и выражается в процентах. Если в начальный момент времени была вложена сумма  $S$ , то по истечении  $t$  лет образуется

$$K = S(1 + i)^t,$$

т.е. проценты начисляются на начальную сумму и на уже накопленные проценты (сложные проценты).

В страховании при заключении договора известна величина  $K$ , т.е. будущая страховая выплата. По ней нужно найти начальную сумму  $S$ , т.е. нетто-премию. Такой процесс называется дисконтированием:

$$S = K \frac{1}{(1 + i)^t} = Kv^t,$$

где  $v$  называется дисконтирующим множителем. Он показывает, какую сумму надо вложить сегодня, чтобы через год с учетом заданной  $i$  получить одну денежную единицу.

Все денежные суммы, участвующие в расчетах, должны быть приведены к одному моменту времени с помощью дисконтирования. Для удобства в качестве такого момента выбирают момент заключения договора.

В общем случае финансовые обязательства страховщика и страхователя представляют собой случайные величины. Поэтому при расчетах оценивается их математическое ожидание (среднее значение) с учетом дисконтирования. **Актuarная стоимость финансового обязательства** – это математическое ожидание его величины с учетом дисконтирования.

#### *Схема нахождения актуарной стоимости обязательства*

**Шаг 1.** Записать все моменты времени, в которые предусмотрены платежи, и величины платежей:

$$\begin{aligned} t = 0 & - \text{платеж } 0; \\ t = 1 & - \text{платеж } 1; \\ & \dots \\ t = n & - \text{платеж } n. \end{aligned}$$

**Шаг 2.** Привести все платежи к начальному моменту времени:

$$\begin{aligned} t = 0 & - \text{платеж } 0 \times v^0; \\ t = 1 & - \text{платеж } 1 \times v^1; \\ & \dots \\ t = n & - \text{платеж } n \times v^n. \end{aligned}$$

**Шаг 3.** Указать вероятность каждого платежа:

$$\begin{aligned} t = 0 & - \text{платеж } 0 \times v^0 \text{ с вероятностью } p_0; \\ t = 1 & - \text{платеж } 1 \times v^1 \text{ с вероятностью } p_1; \\ & \dots \\ t = n & - \text{платеж } n \times v^n \text{ с вероятностью } p_n. \end{aligned}$$

**Шаг 4.** Тогда актуарная стоимость равна

$$\sum_{t=0}^n \text{платеж } t \times v^t \times p_t.$$

В основе подсчета нетто-премии лежит принцип эквивалентности (или принцип равновесия): на момент заключения договора актуарные стоимости обязательств страхователя и страховщика должны быть равны. Т.е. приравнивая обязательства страхователя и страховщика, мы получаем в общем случае уравнение, из которого находится нетто-премия.

### 3.3 Нетто-премии для основных видов долгосрочного страхования

В зависимости от того, в какой момент производится страховая выплата, все договоры делятся на дискретные и непрерывные.

Договор называется **непрерывным**, если страховая выплата производится в момент смерти.

Договор называется **дискретным**, если страховая выплата производится в очередную после смерти годовщину заключения договора.

Дискретный договор не отражает реальной практики страхования, но он более прост с точки зрения расчетов. Непрерывные договор сложнее, поэтому обычно ищут способы выразить нетто-премию для него через нетто-премию аналогичного дискретного договора.

Пусть страхователь целиком уплачивает нетто-премию в момент заключения договора. Тогда актуарная стоимость его обязательства совпадает с искомой нетто-премией. Согласно принципу эквивалентности, нетто-премия будет равна актуарной стоимости обязательств страховщика.

Предположим, что страховая сумма фиксирована и равна одной условной единице. Найдем при этих условиях нетто-премии для дискретных договоров.

#### 1. *Пожизненное страхование*

Нетто-премия обозначается  $A_x$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $K(x) + 1$ , так как договор дискретный и выплаты возможны лишь в годовщины заключения договора. Т.е. в момент  $t = 1, 2, 3, \dots$  может производиться выплата  $v^1, v^2, v^3, \dots$  с вероятностью  $q_x, p_x q_{x+1}, {}_2p_x q_{x+2}, \dots$ . Тогда по принципу эквивалентности

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

#### 2. *Временное страхование на $n$ лет*

Нетто-премия обозначается  $A_{x:\overline{n}|}^1$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $n$  – срок действия договора страхования. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $K(x) + 1$ , но только если  $K(x) < n$ . Т.е. в момент  $t = 1, 2, 3, \dots, n$  может производиться выплата  $v^1, v^2, v^3, \dots, v^n$  с вероятностью  $q_x, p_x q_{x+1}, {}_2p_x q_{x+2}, \dots, {}_{n-1}p_x q_{x+n-1}$ . Тогда

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

### 3. Отсроченное на $m$ лет пожизненное страхование

Нетто-премия обозначается  ${}_m|A_x$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $m$  – период отсрочки. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $K(x) + 1$ , но только если  $K(x) \geq m$ . Т.е. в момент  $t = m + 1, m + 2, m + 3, \dots$  может производиться выплата  $v^{m+1}, v^{m+2}, v^{m+3}, \dots$  с вероятностью  ${}_m p_x q_{x+m}, {}_{m+1}p_x q_{x+m+1}, {}_{m+2}p_x q_{x+m+2}, \dots$ . Тогда

$${}_m|A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = {}_m p_x v^m A_{x+m} = A_x - A_{x:\overline{m}|}^1.$$

### 4. Накопительное страхование (чистое дожитие) на $n$ лет

Нетто-премия обозначается  $A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}}$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $n$  – срок действия договора страхования. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $n$ , но только если застрахованный жив. Т.е. в момент  $t = n$  может производиться выплата  $v^n$  с вероятностью  ${}_n p_x$ . Тогда

$$A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}} = v^n {}_n p_x.$$

### 5. Смешанное страхование на $n$ лет

Нетто-премия обозначается  $A_{x:\overline{n}|}$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $n$  – срок действия договора страхования. Здесь выплата производится в любом случае, вопрос лишь в том, в какой момент. Обязательство страховщика можно представить как сумму обязательств по временному и накопительному страхованию на  $n$  лет. Тогда нетто-премию можно представить как сумму соответствующих нетто-премий:

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}}.$$

Далее перейдем к непрерывным договорам. Нетто-премии обозначаются аналогично дискретному случаю, но с чертой сверху. Вместо сумм в соответствующих формулах появляются интегралы.

### 1. *Пожизненное страхование*

Нетто-премия обозначается  $\bar{A}_x$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $T(x)$ .

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Если предположить, что  $K(x)$  и  $T(x) - K(x)$  независимы, и для дробных возрастов используется предположение 1 о равномерном распределении, то

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x,$$

где  $\delta = \ln(1 + i)$ .

### 2. *Временное страхование на $n$ лет*

Нетто-премия обозначается  $\bar{A}_{x:n|}^1$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $n$  – срок действия договора страхования. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $T(x)$ , но только если  $T(x) \leq n$ .

$$\bar{A}_{x:n|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Используя те же предположения, что и для пожизненного страхования, получаем

$$\bar{A}_{x:n|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:n|}^1.$$

### 3. *Отсроченное на $m$ лет пожизненное страхование*

Нетто-премия обозначается  ${}_m|\bar{A}_x$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $m$  – период отсрочки. Обязательство страховой компании заключается в выплате единичной суммы в момент  $T(x)$ , но только если  $T(x) > m$ .

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = {}_m p_x v^m \bar{A}_{x+m} = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:m|}^1.$$

### 4. *Накопительное страхование (чистое дожитие) на $n$ лет*

Здесь нетто-премия одинакова и для дискретного, и для непрерывного случая, так как момент выплаты известен заранее:

$$\bar{A}_{x:n|}^1 \equiv A_{x:n|}^1 = v^n {}_n p_x.$$

### 5. *Смешанное страхование на $n$ лет*

Нетто-премия обозначается  $\bar{A}_{x:n|}$ , где  $x$  – возраст застрахованного в момент заключения договора,  $n$  – срок действия договора страхования.

$$\bar{A}_{x:n|} = \bar{A}_{x:n|}^1 + A_{x:n|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:n|}^1 + A_{x:n|}^1 = A_{x:n|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A_{x:n|}^1.$$

### 3.4 Нетто-премии для страхования с переменной суммой

Необходимость считать нетто-премии для переменной страховой суммы вызвана тем, что нужно учитывать нестандартные договоры, договоры с бонусами и т.д. Вначале рассмотрим дискретный договор пожизненного страхования, в котором сумма меняется в зависимости от года смерти. Пусть в  $j$  – й год действия договора выплачивается сумма  $c_j$ . Тогда в момент  $t = 1, 2, 3, \dots$  может производиться выплата  $c_1 v^1, c_2 v^2, c_3 v^3, \dots$  с вероятностью  $q_x, {}_1p_x q_{x+1}, {}_2p_x q_{x+2}, \dots$  и нетто-премия равна

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Если договор непрерывный, то страховая сумма может быть представлена как функция от времени  $t$ :  $c(t) > 0$  при  $t \geq 0$ . Тогда нетто-премия находится с помощью интеграла

$$A = \int_0^{\infty} c(t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

или

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

где

$$c_{k+1} = E[c(k + T(x) - K(x))(1+i)^{1-(T(x)-K(x))} | K(x) = k].$$

Используя предположение о равномерном распределении дробного возраста, получаем

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u} du.$$

Таким образом, для любых распределений страховой суммы возможно найти нетто-премию по общим формулам. Далее рассмотрим частные случаи.

Рассмотрим стандартное возрастающее страхование, где страховая сумма каждый год увеличивается на 1, т.е.  $c_j = j$ . Нетто-премия обозначается  $(IA)_x$  в дискретном случае и  $(I\bar{A})_x$  в непрерывном:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x.$$

Если срок страхования ограничен  $n$  годами, то

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Также возможен вариант, когда страховая сумма временного страхования убывает от  $n$  до 0. Такой тип договора используется при страховании жизни заемщика в пользу

кредитора (при условии, что неоплаченный долг также линейно убывает). Для дискретного договора нетто-премия вычисляется как

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

### Контрольные вопросы

1. Какие виды страхования жизни вы знаете?
2. Чем дискретный договор отличается от непрерывного?
3. По какому договору при прочих равных условиях нетто-премия будет максимальной?
4. Зачем нужно стандартное убывающее страхование?
5. Для каких случаев подходят формулы нетто-премий  $A_x$ ?
6. Что такое актуарная стоимость обязательства?
7. Какие проценты используются в долгосрочном страховании?
8. Поясните смысл термина «техническая ставка».

### Задачи для самостоятельного решения

- 1) Страховая компания предлагает заключить договор пожизненного страхования на сумму 10 000 долларов с человеком в возрасте 30 лет. Смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом 100 лет, а премия составляет 2500 долларов. Страховая компания учитывает при расчетах техническую процентную ставку  $i=6\%$ . Учитывая только поступление премий, выплаты страховых сумм и инвестиционный доход, определите среднее значение приведенного дохода страховщика (на момент заключения договора).
- 2) Найти нетто-премию при заключении договора о 3-х летнем смешанном страховании человека в возрасте 25 лет на сумму 100 000 рублей. Техническая ставка  $i=25\%$ . Используется предположение о равномерном распределении смерти для дробных возрастов.

| $x$ | $q_x$    | $l_x$  | $d_x$ |
|-----|----------|--------|-------|
| 20  | 0,001268 | 97 813 | 124   |
| 21  | 0,001321 | 97 689 | 129   |
| 22  | 0,001374 | 97 560 | 134   |
| 23  | 0,001437 | 97 426 | 140   |
| 24  | 0,001501 | 97 286 | 146   |
| 25  | 0,001565 | 97 140 | 152   |
| 26  | 0,001639 | 96 988 | 159   |
| 27  | 0,001714 | 96 829 | 166   |

|    |          |        |     |
|----|----------|--------|-----|
| 28 | 0,001800 | 96 663 | 174 |
| 29 | 0,001886 | 96 489 | 182 |

3) Страховщик использует при расчетах таблицу с отбором, действующим 3 года, и техническую процентную ставку  $i=3\%$ . Человек в возрасте 60 лет заключает отложенный на 2 года договор страхования жизни на 2 года с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Найти актуарную стоимость обязательств страховщика (страховая сумма равна 1).

| $[x]$ | $q_{[x]}$ | $q_{[x]+1}$ | $q_{[x]+2}$ | $q_{x+3}$ | $x+3$ |
|-------|-----------|-------------|-------------|-----------|-------|
| 60    | 0,09      | 0,11        | 0,13        | 0,15      | 63    |
| 61    | 0,1       | 0,12        | 0,14        | 0,16      | 64    |
| 62    | 0,11      | 0,13        | 0,15        | 0,17      | 65    |
| 63    | 0,12      | 0,14        | 0,16        | 0,18      | 66    |
| 64    | 0,13      | 0,15        | 0,17        | 0,19      | 67    |

4) Время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом 120 лет,  $i=15\%$ . Найти нетто-премию для человека в возрасте 40 лет, если заключается договор:

- пожизненного страхования;
- 5-летнего страхования;
- 5-летнего смешанного страхования;
- пожизненного страхования, отсроченного на 2 года.

5) Студенты третьего курса в начале учебного года решили организовать страховой фонд на следующих условиях:

- Каждый студент вносит одну и ту же сумму  $S$ ;
- Если в течение учебного года студента отчисляют из университета, он получает из фонда 1000 рублей;
- Все успешно окончившие третий курс получают обратно свой взнос.

Предполагается, что средства фонда будут приносить 21% годовых. Отчисление возможно только в конце семестра. После зимней сессии отчисляется 10% студентов, после летней – 11%. Определить размер индивидуального взноса, соответствующий принципу эквивалентности обязательств фонда и каждого студента.

6) Договор страхования жизни на три года предполагает выплату страхового возмещения в конце последнего года жизни. Страховая сумма составляет 300 000 в случае смерти застрахованного в первый год действия договора, 350 000 в случае смерти застрахованного во второй год действия договора и 400 000 в случае смерти застрахованного в третий год действия договора. При актуарных расчетах компания использует техническую ставку  $i=6\%$  и предполагает, что вероятность смерти

застрахованного в  $k$ -й год действия договора дается формулой:  $q_{x+k}=0,02(k+1)$ ,  $k=0,1,2$ . Чему равна актуарная стоимость обязательств страховщика по выплате страхового возмещения.

7) Разовая нетто-премия по договору 20-летнего страхования жизни с человеком в возрасте 40 лет, в соответствии с которым в случае смерти в течение  $k$ -го года действия договора в конце этого года выплачивается страховая сумма  $21-k$ , равна 13. Страховая компания использовала при расчетах техническую процентную ставку  $i=6\%$  и ТПЖ с  $q_{40}=0,2$ . Как изменится нетто-премия по этому договору, если уменьшить  $q_{40}$  в два раза?

## 4. СТРАХОВЫЕ РЕНТЫ

### 4.1 Сущность страховой ренты

Рентой в общем случае называются последовательные периодические выплаты. Если выплаты производятся при условии, что застрахованный жив, то рента называется страховой. Весь срок страхования (действия договора о ренте) можно разбить на несколько периодов (рис 1.):



Рисунок 1. Периоды в договоре о ренте

Таким образом, срок страхования состоит из двух основных этапов: *период отсрочки  $m$*  и *период выплат  $n$* . Период отсрочки состоит из двух частей: *период уплаты взносов*, в течение которого страхователь уплачивает страховые премии, и *выжидательный период* (от момента окончания периода уплаты взносов до периода выплат). Период выплат – это период, в течение которого застрахованный получает ренту.

В зависимости от длительности каждого периода и моментов выплат различают различные виды рент.

Если в договоре не указана конкретная длительность периода выплат  $n$ , то рента называется *срочной*, иначе *пожизненной*.

Если длительность периода отсрочки равна нулю, то рента называется *немедленной*, иначе *отсроченной*.

Если выплаты производятся в начале временного интервала, то рента называется рентой *пренумерандо*. Если выплаты производятся в конце временного интервала, то рента называется рентой *постнумерандо*.

### 4.2 Основные виды рент

1. **Полная пожизненная рента.** Начиная с момента заключения договора, застрахованный раз в год получает фиксированную сумму. Выплаты производятся до тех пор, пока он жив.
2. **Временная рента.** Начиная с момента заключения договора, застрахованный раз в год получает фиксированную сумму. Выплаты производятся до тех пор, пока он жив, но не более чем в течение  $n$  лет.

3. **Отсроченная пожизненная рента.** Ежегодные выплаты фиксированной суммы начинаются по истечении  $m$  лет с момента заключения договора. Если застрахованный умер до этого момента, то выплаты не производятся.
4. **Отсроченная временная рента.** Ежегодные выплаты фиксированной суммы начинаются по истечении  $m$  лет с момента заключения договора. Если застрахованный умер до этого момента, то выплаты не производятся. Выплаты производятся не более чем в течение  $n$  лет при условии, что застрахованный жив.

Примем величину ежегодной выплаты за условную единицу и будем считать, что плата за договор ренты целиком вносится клиентом в момент заключения договора. Тогда актуарная стоимость соответствующих рент 1-4 обозначается буквой  $a$  с различными индексами. Для ренты пренумерандо используется обозначение  $\ddot{a}$ , для ренты постнумерандо  $a$ . Возраст клиента в момент заключения договора обозначается  $x$  и указывается как нижний правый индекс:  $a_x$ . Длительность периода выплат обозначается  $n$ , длительность периода отсрочки –  $m$ .

Таким образом, для пожизненной ренты постнумерандо используется обозначение  $a_x$ , для временной ренты  $a_{x:\overline{n}|}$ , для отсроченной  ${}_m|a_x$ , для отсроченной временной  ${}_m|{}_na_x$ . Аналогично обозначаются ренты пренумерандо.

Для стоимости произвольной ренты можно использовать общее правило нахождения актуарной стоимости обязательства (см. п. 3.2). Для основных видов можно использовать готовые формулы из таблицы 2.

Таблица 2. Актуарная стоимость различных видов ренты

| Рента                   | Пренумерандо                                                | Постнумерандо                                    |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Пожизненная             | $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$              | $a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kp_x$          |
| Временная               | $\ddot{a}_{x:\overline{n} } = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x$ | $a_{x:\overline{n} } = \sum_{k=1}^n v^k {}_kp_x$ |
| Отсроченная пожизненная | ${}_m \ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_kp_x$         | ${}_m a_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} v^k {}_kp_x$   |
| Отсроченная временная   | ${}_m {}_n\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k {}_kp_x$      | ${}_m {}_na_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k {}_kp_x$  |

Также можно использовать соотношения:

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_x &= 1 + a_x, \\
 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= a_{x:\overline{n}|} + 1 - {}_nE_x \\
 {}_m|\ddot{a}_x &= {}_mE_x \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}, \quad {}_m|a_x = {}_mE_x a_{x+m} = a_x - a_{x:\overline{m}|}, \\
 {}_m|{}_n\ddot{a}_x &= {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}, \quad {}_m|{}_na_x = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|}.
 \end{aligned}$$

Здесь  ${}_nE_x = v^n {}_np_x$  – актуарный коэффициент дисконтирования, смысл которого будет объяснен далее.

### 4.3 Ренты, выплачиваемые несколько раз в год

Далее рассмотрим ренты, в которых выплаты производятся чаще, чем раз в год. Такая рента называется **дробленной**. Пусть выплаты производятся  $k$  раз в год, величина одной выплаты составляет  $\frac{1}{k}$  условной единицы, т.е. в сумме за год выплачивается условная единица. Тогда для стоимостей рент 1-4 сохраняются введенные ранее обозначения, но к ним добавляется правый верхний индекс  $(k)$ :  $\ddot{a}_x^{(k)}$  – актуарная стоимость пожизненной ренты пренумерандо, выплачиваемой  $k$  раз в год, и т.д.

Для нахождения стоимости дробленной ренты используются различные математические приемы (разложение по формуле Тейлора и др.) На практике можно использовать приближенные формулы из таблицы 3.

Таблица 3. Актуарная стоимость дробленных рент

| Дробленная рента        | Пренумерандо                                                                            | Постнумерандо                                                                    |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Пожизненная             | $\ddot{a}_x^{(k)} = \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}$                                        | $a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k}$                                               |
| Временная               | $\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(k)} = a_{x:\overline{n} } + \frac{k+1}{2k} (1 - {}_nE_x)$ | $a_{x:\overline{n} }^{(k)} = a_{x:\overline{n} } + \frac{k-1}{2k} (1 - {}_nE_x)$ |
| Отсроченная пожизненная | ${}_m\ddot{a}_x^{(k)} = {}_m a_x + \frac{k+1}{2k} {}_mE_x$                              | ${}_m a_x^{(k)} = {}_m a_x + \frac{k-1}{2k} {}_mE_x$                             |
| Отсроченная временная   | ${}_m _n\ddot{a}_x^{(k)} = {}_m _n a_x + \frac{k+1}{2k} [{}_mE_x - {}_{m+n}E_x]$        | ${}_m _n a_x^{(k)} = {}_m _n a_x + \frac{k-1}{2k} [{}_mE_x - {}_{m+n}E_x]$       |

### 4.4 Актуарное накопление

Рассмотрим так называемое **актуарное накопление**. Пусть  $N$  человек в возрасте  $x$  лет внесли в начальный момент времени по 1 условной единице. Тогда через  $n$  лет эта сумма возрастет до величины  $N(1+i)^n$ , а число участников фонда сократиться в среднем до  $N {}_n p_x$ . На каждого из них приходится сумма

$$A(x, n) = \frac{N(1+i)^n}{N {}_n p_x} = \frac{l_x}{l_{x+n}} (1+i)^n.$$

Величина  $A(x, n)$  называется **актуарным коэффициентом накопления**. Он показывает, какую сумму получит через  $n$  лет человек, вложивший единичную сумму в возрасте  $x$  лет, при условии, что он останется жив к этому моменту. Так как  $l_x > l_{x+n}$ , то актуарное накопление больше по сравнению с обычными накоплениями для сложных процентов.

Аналогичным образом можно определить **актуарный коэффициент дисконтирования**

$${}_nE_x = \frac{1}{A(x, n)} = v^n {}_n p_x,$$

который показывает, какую сумму нужно вложить в начальный момент человеку возраста  $x$  лет, чтобы через  $n$  лет получить единичную сумму при условии, что он останется жив. Т.е. если в финансовой математике для дисконтирования нужно умножать на  $v^n$ , то в актуарной математике нужно умножать на  ${}_nE_x$ , чтобы учесть, что страхователь будет жив к моменту  $n$ .

Существует определенная связь между актуарными стоимостями рента и нетто-премиями долгосрочного страхования. Например, пожизненную ренту можно рассматривать как договор долгосрочного страхования жизни, по которому страховщик обязан выплачивать условную единицу за каждый год жизни застрахованного. Основные формулы для этого случая указаны в таблице 4, где  $d = \frac{i}{i+1}$ .

Таблица 4. Связь между рентами и долгосрочным страхованием

| Рента                   | Пренумерандо                                                     | Постнумерандо                                                 |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Пожизненная             | $\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$                                 | $a_x = \frac{1 - A_x}{d} - 1$                                 |
| Временная               | $\ddot{a}_{x:\overline{m} } = \frac{1 - A_{x:\overline{m} }}{d}$ | $a_{x:\overline{m} } = \frac{1 - A_{x:\overline{m} }}{d} - 1$ |
| Отсроченная пожизненная | ${}_m \ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{m} } - A_x}{d}$          | ${}_m a_x = \frac{A_{x:\overline{m} } - A_x}{d} - {}_mE_x$    |

### Контрольные вопросы

1. Что такое страховая рента?
2. Какие периоды выделяют в договоре о ренте?
3. Чем срочная рента отличается от пожизненной?
4. Чем немедленная рента отличается от отсроченной?
5. Поясните смысл понятия «рента пренумерандо».
6. Поясните смысл понятия «рента постнумерандо».
7. Поясните смысл понятия «дробленая рента».
8. Что такое актуарная стоимость ренты?
9. Чем актуарное накопление отличается от обычного?

### Задачи для самостоятельного решения

- 1) Известно, что  $l_{30} = 96307$ ,  $l_{31} = 96117$ ,  $l_{32} = 95918$ . Подсчитайте актуарную стоимость 3-х летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 10000 рублей. Возраст человека на момент заключения договора — 30 лет. Техническая ставка  $i = 25\%$ .

2) Страховая компания приняла на себя обязательство выплачивать ежегодно 150000 рублей рабочему в возрасте  $x$  лет, который получил производственную травму. Выплаты начинаются немедленно и производятся раз в год до тех пор, пока работник жив. После того, как страховщик выплатит 500000 рублей, оставшиеся платежи производит перестраховочная компания. Относительно смертности рабочего после получения травмы известно, что

$${}_t p_x = \begin{cases} (0,7)^t, & 0 < t < 5,5 \\ 0, & t > 5,5 \end{cases}$$

Найдите актуарную стоимость обязательств перестраховочной компании, если  $i = 5\%$ .

3) Страховая компания устанавливает плату за пожизненную ренту пренумерандо, исходя из технической процентной ставки  $i = 0,05$  и таблицы продолжительности жизни:

|       |    |    |     |
|-------|----|----|-----|
| $x$   | 40 | 41 | ... |
| $q_x$ | 1% | 5% | ... |

Известно, что  $\ddot{a}_{41} = 6,951$ . Найдите  $\ddot{a}_{40}$ . Как изменится  $\ddot{a}_{40}$ , если  $q_{41}$  уменьшится на 60%?

4) Страховая компания заключила договор 3-х летнего временного страхования жизни с человеком в возрасте  $x = 25$  лет на сумму 1000 руб. с выплатой премии в начале каждого года в течение всего срока действия договора. Заключение и поддержание договора связаны со следующими расходами:

- Комиссионные агенту, заключившему договор: 20% от премии в момент получения первой премии и 5% от премии при получении последующих премий.
- Подготовка документов: 15 рублей в момент заключения договора (т.е. при получении первой премии), 5 рублей при получении последующих премий, 50 рублей при выплате страхового пособия.
- Налоги: 5 % от премии в момент получения премии.

Кроме того, компания увеличивает премию на 2% от величины страхового пособия для того, чтобы покрыть общие административные расходы. Предполагая, что смертность описывается данной ТПЖ с равномерным распределением момента смерти внутри последнего года жизни, а техническая процентная ставка  $i = 25\%$ , подсчитайте величину премии, учитывающей перечисленные выше расходы.

| $x$ | $q_x$    | $l_x$ | $d_x$ |
|-----|----------|-------|-------|
| 25  | 0,001565 | 97140 | 152   |
| 26  | 0,001639 | 96988 | 159   |
| 27  | 0,001714 | 96829 | 166   |
| 28  | 0,001800 | 96663 | 174   |

5) Человек в возрасте  $x = 35$  лет покупает пожизненную пенсию, начиная с возраста 65 лет. Пенсия величиной 1000 рублей должна выплачиваться раз в год. Плата за пенсию

$R$  вносится в виде разовой премии в момент заключения договора. При этом в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию  $R$  возвращается наследникам в конце года смерти. Определите  $R$ .

6) Человек в возрасте  $x = 35$  лет покупает пожизненную пенсию, начиная с возраста 65 лет. Пенсия величиной 1000 рублей должна выплачиваться раз в год. Плата за пенсию  $R$  вносится в виде разовой премии в момент заключения договора. При этом в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию  $R$  возвращается наследникам в конце года смерти вместе с накопленными процентами. Определите  $R$ .

- 7) Человек в возрасте  $x$  лет покупает следующую специальную пожизненную ренту:
- премия фиксированного размера  $P$  вносится в каждую годовщину заключения договора на протяжении первых трех лет;
  - в случае смерти застрахованного в течение этого трехлетнего периода страховая выплата не производится;
  - рента начинает выплачиваться через три года после заключения договора и платится раз в год в годовщину заключения договора;
  - первая выплата равна 1000, а каждая последующая выплата больше предыдущей на 4 %.

Найдите нетто-премию  $P$ , если техническая процентная ставка  $i=4\%$ , среднее округленное остаточное время жизни застрахованного  $e_x$  равно 11,05, вероятность того, что он проживет 1 год, равна 0,99, 2 года – 0,98.

8) Специальный договор пожизненного страхования, заключенный с человеком в возрасте  $x$  лет, гарантирует выплату суммы  $C$ , если смерть наступит в течение  $p$  ближайших лет, и суммы  $C/2$ , если смерть наступит позже. Плата за страховку вносится в виде ежегодных премий. Премия должна быть постоянной первые  $p$  лет и уменьшенной вдвое позже. Определите величину премии.

9) Страховая компания «Надежная Защита» продала г-же Петровой полис двухлетнего страхования жизни со страховой суммой  $S = 100000$  руб. и выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Премия была рассчитана на основании принципа эквивалентности (расходы и пр. нагрузки не учитывались), была полностью уплачена в момент заключения договора. В момент заключения договора г-жа Петрова заявила, что ей 30 лет. Через год выяснилось, что на самом деле возраст г-жи Петровой в момент заключения договора был 40 лет. Хотя пункт 3 статьи 944 ГК РФ давал страховой компании право потребовать признания договора недействительным (так как страхователь сообщил страховщику заведомо ложные сведения об обстоятельствах, имеющих существенное значение для определения вероятности наступления страхового случая), страховщик решил не расторгать договор, а лишь уменьшить размер страховой суммы

таким образом, чтобы уплаченная премия соответствовала на основании принципа эквивалентности реальному риску для страховой компании на протяжении всего срока действия договора. Определите новую страховую сумму. Известно, что  $i = 10\%$ ,  $q_{30} = 0,5\%$ ,  $q_{31} = 0,6\%$ ,  $q_{40} = 1\%$ ,  $q_{41} = 1,1\%$ . При каком условии это решение проблемы возможно?

10) Страховая компания «Надежная Защита» продала г-же Ивановой полис 3-х летнего страхования жизни со страховой суммой 1000 и выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Премии рассчитаны на основании принципа эквивалентности и платятся раз в год. В момент заключения договора г-жа Иванова заявила, что ей 30 лет. Через 2 года после заключения договора компании стало известно, что на самом деле возраст г-жи Ивановой в момент заключения договора был 31 год. Поэтому компания решила уменьшить размер страховой суммы таким образом, чтобы уплаченные премии соответствовали на основании принципа эквивалентности новой страховой сумме и реальному возрасту г-жи Ивановой. Определите новую страховую сумму. Известно, что  $i = 4\%$ ,  $q_{30} = 1\%$ ,  $q_{31} = 2\%$ ,  $q_{32} = 3\%$ ,  $q_{33} = 4\%$ .

11) Подсчитайте ежегодную нетто-премию по следующему дискретному договору страхования жизни:

- возраст застрахованного 30 лет;
- страховая сумма равна 1 в течение первых 20 лет действия договора и 5 после этого;
- период выплаты премий не более 35 лет;
- в течение первых 20 лет ежегодная премия должна составлять  $1/5$  от ежегодной премии в последующие 15 лет;
- $i = 0,06$ ;  $A_{30:\overline{20}|}^1 = 0,02933$ ,  $A_{30} = 0,1024835$ ,  $A_{30:\overline{20}|} = 0,32307$ ;  $\ddot{a}_{30:\overline{35}|} = 14,835$ .

12) Используя принцип эквивалентности, подсчитайте премию по договору пожизненного страхования, который заключен с человеком в возрасте  $x = 80$  лет на следующих условиях:

- премия вносится равными долями в момент заключения договора и в начале третьего года его действия (если договор еще действует);
- страховая сумма  $SA = 1000$  выплачивается в конце года смерти;
- если застрахованный умирает на протяжении первого или третьего года действия договора, то в конце года смерти дополнительно выплачивается половина премии, внесенной в начале соответствующего года.

Известно, что если бы был заключен обычный дискретный договор пожизненного страхования, то разовая нетто-премия была бы равна 665,7528. При актуарных расчетах

используйте техническую процентную ставку  $i = 0,06$  и таблицу продолжительности жизни.

| $x$ | $I_x$    |
|-----|----------|
| 80  | 39143,64 |
| 81  | 36000,37 |
| 82  | 32845,41 |
| 83  | 29704,95 |

13) Страховая компания заключает договоры пожизненного страхования с выплатой фиксированной страховой суммы  $S = 1$  в конце года смерти; постоянная премия  $\pi$  платится раз в год в годовщину заключения договора. В таблице приведены значения премии  $\pi = \pi_x$  и средний доход по одному договору,  $I = I_x$ , в момент его заключения (для его расчета используется постоянная техническая процентная ставка  $i = 0,06$ ) в зависимости от возраста  $x$  застрахованного в момент заключения договора.

| $x$ | $\pi_x$ | $I_x$  |
|-----|---------|--------|
| 30  | 0,0077  | 0,0200 |
| 31  | 0,0081  | 0,0210 |
| 32  | 0,0086  | 0,0235 |

Как изменится величина  $I_{30}$ , если  $q_{30}$  уменьшится в два раза?

### Методические указания

Дисциплина «Актuariальная математика» для студентов специальности «Финансы и кредит» читается в первом семестре 5 курса. Программой предусматривается проведение лекций и семинаров, на которых наряду с теорией рассматриваются вопросы практического применения актуарных расчетов. Общее количество часов по предмету – 26, из них 13 лекционных и 13 практических занятий. Знания по основным разделам курса закрепляются в процессе решения задач. Это ориентирует студентов на применение полученных знаний на практике, что способствует повышению профессиональной подготовки будущих специалистов.

В курсе используются следующие методы и формы работы:

- Лекции (1 пара в две недели);
- Практические занятия (1 пара в две недели, решаются задачи, обсуждаются основные вопросы по домашним заданиям);
- самостоятельная работа студента.

Предполагается, что до начала изучения курса студенты на хорошем уровне владеют терминологией и методами теории вероятностей, а также имеют базовые знания по курсу «страхование». Если уровень знаний студентов по данным дисциплинам оказывается недостаточным, то следует предварительно повторить все необходимые сведения.

В связи с небольшим количеством часов, отводимых на практические занятия, уделяется большое внимание самостоятельному решению задач по всем разделам курса. Предполагается выполнение студентами домашних работ.

Итоговая форма контроля по дисциплине – зачет. Получение зачета состоит из двух этапов. Первый – решение контрольного задания, которое оценивается по 5-бальной шкале. Второй этап – написание теста. Тест составляется по вопросам, приведенным в данном пособии. Число вопросов в тесте зависит от числа студентов в группе. Следует так выбирать вопросы, чтобы избежать большого количества их повторений в разных вариантах теста. Это делает оценку знаний студентов более объективной.

Тест оценивается следующим образом. За один правильный ответ начисляется  $\frac{100 \text{ баллов}}{\text{количество вопросов}}$ . Баллы за все вопросы суммируются. Менее 50 баллов – оценка

«2», от 50 до 69 – оценка «3», от 70 до 84 – оценка «4», от 85 и выше баллов – оценка «5». Для получения зачета необходимо набрать в сумме не менее 7 баллов.

Рекомендуется следующее распределение тем по часам:

страховая премия – 1 лекционный час;

характеристики продолжительности жизни – 4 часа лекционных и 4 часа практических занятий;

долгосрочное страхование жизни – 4 часа лекционных и 4 часа практических занятий;  
страховые ренты – 4 часа лекционных и 4 часа практических занятий.

Оставшиеся 2 часа по усмотрению преподавателя можно использовать для повторения базовых понятий курсов «страхование» и «теория вероятностей и математическая статистика», или для углубленного изучения тем, вызвавших наибольшее затруднение у студентов.

В первой, вводной теме «страховая премия» раскрывается сущность страховой премии, указываются ее составляющие. После изучения темы студенты должны иметь ясное представление о том, что именно при вычислении премии относится к задачам актуарной математики.

Вторая тема «характеристики продолжительности жизни» является основополагающей для дальнейшего курса. После изучения темы студенты должны уметь свободно оперировать базовыми характеристиками.

Третья тема «долгосрочное страхование жизни» изучает один из старейших видов страховой услуги. После изучения темы студенты должны разбираться в классификации страхования жизни, а также находить нетто-премии для любых условий страхования.

Четвертая тема «страховые ренты» изучает периодические выплаты (пенсии, ренты, аннуитеты). После изучения темы студенты должны знать основные виды рент, а также находить для них актуарные стоимости.

Во всех темах, кроме первой, на лекциях дается теоретический материал, на практических занятиях разбираются основные классы задач. В первой теме предусмотрены только лекции. Для самостоятельной проверки усвоенного материала студентам рекомендуется отвечать на контрольные вопросы и решать задачи.

## Тесты

## Тема 2. Характеристики продолжительности жизни

| №   | Вопрос                                                                                       | Варианты ответов                                                                                                                                                                     | Ответ |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1.  | Функция выживания показывает                                                                 | а) среднее количество умерших до возраста $x$<br>б) среднее количество доживших до возраста $x$<br>в) вероятность дожить до возраста $x$<br>г) вероятность не дожить до возраста $x$ | в)    |
| 2.  | Продолжительность жизни индивида является                                                    | а) детерминированной величиной<br>б) непрерывной случайной величиной<br>в) дискретной случайной величиной<br>г) аналитической функцией                                               | б)    |
| 3.  | Среднее число доживших до возраста $x$ обозначается                                          | а) $s(x)$<br>б) $L_x$<br>в) $d_x$<br>г) $l_x$                                                                                                                                        | г)    |
| 4.  | Формула $-s'(x)$ определяет                                                                  | а) функцию выживания<br>б) функцию интенсивности смертности<br>в) кривую смертей<br>г) продолжительность жизни                                                                       | в)    |
| 5.  | Свойством функции выживания не является                                                      | а) Непрерывность<br>б) Монотонное убывание<br>в) Неотрицательность производной<br>г) Неотрицательность значений                                                                      | в)    |
| 6.  | Если реальная продолжительность жизни ограничена предельным возрастом $\omega$ , то          | а) $s(x) = 0$ при $x > \omega$<br>б) $s(x) < 0$ при $x > \omega$<br>в) $s(x) > 0$ при $x > \omega$<br>г) $s(x)$ любое число при $x > \omega$                                         | а)    |
| 7.  | Вероятность человека в возрасте $x$ лет умереть на протяжении следующих $t$ лет обозначается | а) ${}_xq_t$<br>б) ${}_tp_x$<br>в) ${}_xp_t$<br>г) ${}_tq_x$                                                                                                                         | г)    |
| 8.  | Вероятность человека в возрасте $x$ прожить следующие $t$ лет обозначается                   | а) ${}_xq_t$<br>б) ${}_tp_x$<br>в) ${}_xp_t$<br>г) ${}_tq_x$                                                                                                                         | б)    |
| 9.  | Величины $l_0$ , $l_x$ , $s(x)$ связаны формулой                                             | а) $s(x) = l_0 + l_x$<br>б) $l_x = l_0 \cdot s(x)$<br>в) $s(x) = l_0 \cdot l_x$<br>г) $l_0 = s(x) \cdot l_x$                                                                         | б)    |
| 10. | Если $l_x = 85\,234$ , $l_0 = 100\,000$ , то                                                 | а) До возраста $x$ доживет в среднем 85 234 человек из 100 000<br>б) До возраста $x$ не доживет в среднем 14 766 человек из 100 000<br>в) До возраста $x$ не доживет в среднем 85    | а)б)  |

|     |                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                       |        |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
|     |                                                                                                   | 234 человек из 100 000<br>d) До возраста $x$ доживет в среднем 14 766 человек из 100 000                                                                                                                                                              |        |
| 11. | Если $s(20) = 0,940$ ;<br>$s(30) = 0,921$ ; $l_0 = 1000$ , то                                     | a) До 20 лет доживает в среднем 940 человек из начальной группы<br>b) До 20 лет не доживает в среднем 940 человек из начальной группы<br>c) До 30 лет доживает ровно 921 человек из начальной группы<br>d) От 20 до 30 лет умрет в среднем 19 человек | a)d)   |
| 12. | В модели де Муавра                                                                                | a) Время жизни равномерно распределено<br>b) Кривая смертей является константой<br>c) Учитывается риск несчастного случая<br>d) Характеристики полностью определяются предельным возрастом                                                            | a)b)d) |
| 13. | В модели Гомпертца                                                                                | a) Время жизни равномерно распределено<br>b) Кривая смертей является константой<br>c) Учитывается риск несчастного случая<br>d) Два основных параметра                                                                                                | d)     |
| 14. | В модели Мейкхама                                                                                 | a) Три основных параметра<br>b) Кривая смертей является константой<br>c) Учитывается риск несчастного случая<br>d) Характеристики полностью определяются предельным возрастом                                                                         | a)c)   |
| 15. | Среднее число умерших в возрасте от $x$ до $x+1$ лет обозначается                                 | a) $s(x)$<br>b) $L_x$<br>c) $d_x$<br>d) $l_x$                                                                                                                                                                                                         | c)     |
| 16. | Что не является причиной того, что рассматривается округленная остаточная продолжительность жизни | a) Человек считает свой возраст в целых годах<br>b) Договоры заключаются на целое число лет<br>c) Человек не заключает договор в свой день рождения<br>d) Статистические данные приводятся в целых годах                                              | c)     |
| 17. | Округленная продолжительность жизни является                                                      | a) аналитической функцией<br>b) детерминированной величиной<br>c) непрерывной случайной величиной<br>d) дискретной случайной величиной                                                                                                                | d)     |
| 18. | ТПЖ для различных групп населения называются                                                      | a) общими<br>b) простейшими<br>c) с отбором<br>d) ретроспективными                                                                                                                                                                                    | c)     |
| 19. | ТПЖ для человека, относительно которого известен только его возраст, называются                   | a) общими<br>b) перспективными<br>c) с отбором<br>d) ретроспективными                                                                                                                                                                                 | a)     |
| 20. | Чем вызвана необходимость считать                                                                 | a) Человек считает свой возраст в целых годах                                                                                                                                                                                                         | b)     |

|     |                                                                                                                          |                                                                                                                                                         |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|     | вероятностные характеристики продолжительности жизни для дробных возрастов                                               | b) Человек не заключает договор в свой день рождения<br>c) Договоры заключаются на целое число лет<br>d) Статистические данные приводятся в целых годах |    |
| 21. | С математической точки зрения подсчет вероятностных характеристик продолжительности жизни для дробных возрастов является | a) Интерполяцией<br>b) Экстраполяцией<br>c) Дифференцированием<br>d) Потенцированием                                                                    | a) |
| 22. | Какие предположения используются при аппроксимации характеристик для дробных возрастов                                   | a) Равномерное распределение смертей<br>b) Постоянная интенсивность смертности<br>c) Предположение Балдуччи<br>d) Предположение Мейкхама                | d) |

### Тема 3. Модели долгосрочного страхования

| №  | Вопрос                                                   | Варианты ответов                                                                                                                                                                                                    | Ответ |
|----|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. | Модели долгосрочного страхования жизни                   | a) Не учитывают доход от инвестирования премий<br>b) Учитывают доход от инвестирования премий<br>c) Рассматриваются при страховании на срок более 10 лет<br>d) Рассматриваются при страховании на срок более 20 лет | b)    |
| 2. | С математической точки зрения долгосрочное страхование   | a) Учитывает изменение ценности денег со временем<br>b) Не учитывает изменение ценности денег со временем<br>c) Использует простые проценты<br>d) Использует сложные проценты                                       | a)d)  |
| 3. | Обязательства страхователя и страховщика приводятся к    | a) Моменту окончания договора<br>b) Моменту начала выплат<br>c) Случайному моменту<br>d) Моменту заключения договора                                                                                                | d)    |
| 4. | Ставка сложных процентов в актуарных расчетах называется | a) Технической<br>b) Механической<br>c) Процентной<br>d) Сложной                                                                                                                                                    | a)    |
| 5. | При использовании сложных процентов проценты начисляются | a) только на основную сумму<br>b) только на единичную сумму<br>c) на основную сумму и на уже накопленные проценты<br>d) зависит от договора                                                                         | c)    |
| 6. | Дисконтирование – это                                    | a) Процесс определения стоимости текущих доходов или расходов                                                                                                                                                       | b)    |

|     |                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                              |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|     |                                                                                                                                                                                                            | b) Процесс определения стоимости будущих доходов или расходов<br>c) Процесс начисления простых процентов<br>d) Процесс начисления сложных процентов          |    |
| 7.  | Если выплата по договору производится в очередную годовщину заключения договора, то он называется                                                                                                          | a) Непрерывным<br>b) Целочисленным<br>c) Вероятностным<br>d) Дискретным                                                                                      | d) |
| 8.  | Если фиксированная страховая сумма выплачивается в момент смерти, то это                                                                                                                                   | a) Пожизненное страхование<br>b) Временное страхование<br>c) Отсроченное пожизненное страхование<br>d) Накопительное страхование<br>e) Смешанное страхование | a) |
| 9.  | Если фиксированная сумма выплачивается в момент смерти, если застрахованный умер в течение n лет после заключения договора и не выплачивается в противном случае, то это                                   | a) Пожизненное страхование<br>b) Временное страхование<br>c) Отсроченное пожизненное страхование<br>d) Накопительное страхование<br>e) Смешанное страхование | b) |
| 10. | Если фиксированная страховая сумма выплачивается в момент смерти, но только если она произошла по истечении некоторого периода с момента заключения договора и не выплачивается в противном случае, то это | a) Пожизненное страхование<br>b) Временное страхование<br>c) Отсроченное пожизненное страхование<br>d) Накопительное страхование<br>e) Смешанное страхование | c) |
| 11. | Если фиксированная страховая сумма выплачивается в некоторый момент, если застрахованный дожил до него и в противном случае ничего не выплачивается, то это                                                | a) Пожизненное страхование<br>b) Временное страхование<br>c) Отсроченное пожизненное страхование<br>d) Накопительное страхование<br>e) Смешанное страхование | d) |
| 12. | Если выплата производится в момент окончания действия договора при условии, что застрахованный дожил до него или производится в момент смерти, если он умер раньше окончания действия договора, то это     | a) Пожизненное страхование<br>b) Временное страхование<br>c) Отсроченное пожизненное страхование<br>d) Накопительное страхование<br>e) Смешанное страхование | e) |
| 13. | Что не входит в подсчет нетто-премии                                                                                                                                                                       | a) Определение взаимных финансовых обязательств страхователя и                                                                                               | d) |

|  |  |                                                                                                                                                     |  |
|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  | страховщика<br>б) Актuarная оценка обязательств страхователя и страховщика<br>c) Применение принципа эквивалентности<br>d) Расчет защитных надбавок |  |
|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

#### Тема 4. Страховые ренты

| №  | Вопрос                                                                                       | Варианты ответов                                                                                                                                                                                                                                              | Ответ |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. | Рента в общем случае                                                                         | а) Единовременная выплата<br>б) Последовательность периодических выплат<br>c) Единовременный взнос<br>d) Последовательность периодических взносов                                                                                                             | б)    |
| 2. | Какого периода в договоре о ренте не существует                                              | а) Период уплаты взносов<br>б) Период выплат<br>c) Период накоплений<br>d) Период отсрочки                                                                                                                                                                    | с)    |
| 3. | Срок страхования (для рент) – это период                                                     | а) С момента заключения договора до момента последней выплаты<br>б) С момента заключения договора до момента первой выплаты<br>c) С момента выплаты последнего взноса до момента первой выплаты<br>d) С момента заключения договора до момента первого взноса | а)    |
| 4. | Временной интервал с момента окончания периода уплаты взносов до момента начала выплат – это | а) Период уплаты взносов<br>б) Период отсрочки<br>c) Период выплат<br>d) Выжидательный период                                                                                                                                                                 | д)    |
| 5. | Если период отсрочки $m=0$ , то рента называется                                             | а) срочной<br>б) пожизненной<br>c) немедленной<br>d) отсроченной                                                                                                                                                                                              | с)    |
| 6. | Если период отсрочки $m \neq 0$ , то рента называется                                        | а) срочной<br>б) пожизненной<br>c) немедленной<br>d) отсроченной                                                                                                                                                                                              | д)    |
| 7. | Если в договоре указана конкретная длительность периода выплат, то рента называется          | а) срочной<br>б) пожизненной<br>c) немедленной<br>d) отсроченной                                                                                                                                                                                              | а)    |
| 8. | Если в договоре не указана конкретная длительность периода выплат, то рента называется       | а) срочной<br>б) пожизненной<br>c) немедленной<br>d) отсроченной                                                                                                                                                                                              | б)    |
| 9. | Для ренты пренумерандо выплаты производятся                                                  | а) В конце временного интервала<br>б) В середине временного интервала<br>c) В начале временного интервала<br>d) В случайные моменты времени                                                                                                                   | с)    |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                              |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 10. | Для ренты постнумерандо выплаты производятся                                                                                                                                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) В конце временного интервала</li> <li>b) В середине временного интервала</li> <li>c) В начале временного интервала</li> <li>d) В случайные моменты времени</li> </ul>              | a) |
| 11. | Если, начиная с некоторого момента времени, застрахованный раз в год будет получать фиксированную сумму (выплаты производятся при условии, что застрахованный жив), то это                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Пожизненная рента</li> <li>b) Временная пожизненная рента</li> <li>c) Отсроченная пожизненная рента</li> <li>d) Отсроченная временная рента</li> <li>e) Дробленая рента</li> </ul> | a) |
| 12. | Если, начиная с некоторого момента времени, застрахованный раз в год будет получать фиксированную сумму и выплаты производятся не более чем в течение некоторого количества лет (при условии, что застрахованный жив), то это                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Пожизненная рента</li> <li>b) Временная пожизненная рента</li> <li>c) Отсроченная пожизненная рента</li> <li>d) Отсроченная временная рента</li> <li>e) Дробленая рента</li> </ul> | b) |
| 13. | Если, начиная с некоторого момента времени $m$ после заключения договора, застрахованный раз в год будет получать фиксированную сумму (выплаты производятся при условии, что застрахованный жив и не производятся, если он умер до момента $m$ ), то это        | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Пожизненная рента</li> <li>b) Временная пожизненная рента</li> <li>c) Отсроченная пожизненная рента</li> <li>d) Отсроченная временная рента</li> <li>e) Дробленая рента</li> </ul> | c) |
| 14. | Если, начиная с некоторого момента времени $m$ после заключения договора, застрахованный раз в год будет получать фиксированную сумму (выплаты производятся в течение не более чем $n$ лет и не производятся, если застрахованный умер до момента $m$ ), то это | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Пожизненная рента</li> <li>b) Временная пожизненная рента</li> <li>c) Отсроченная пожизненная рента</li> <li>d) Отсроченная временная рента</li> <li>e) Дробленая рента</li> </ul> | d) |
| 15. | Если выплаты производятся несколько раз в год, то это                                                                                                                                                                                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Пожизненная рента</li> <li>b) Временная пожизненная рента</li> <li>c) Отсроченная пожизненная рента</li> <li>d) Отсроченная временная рента</li> <li>e) Дробленая рента</li> </ul> | e) |
| 16. | При расчете дробленых                                                                                                                                                                                                                                           | a) Сплайновая интерполяция                                                                                                                                                                                                   | c) |

|     |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                      |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|     | рент используется                                                                                                                                       | b) Эрмитова интерполяция<br>c) Линейная интерполяция<br>d) Квадратичная интерполяция                                                 |    |
| 17. | Актuarное накопление по сравнению с обычным в теории сложных процентов                                                                                  | a) Больше<br>b) Меньше<br>c) Равно<br>d) Зависит от договора                                                                         | a) |
| 18. | Сумма, которую нужно вложить в начальный момент человеку в возрасте $x$ лет, чтобы через $t$ лет получить единичную сумму при условии, что он жив – это | a) Коэффициент дисконтирования<br>b) Эффективная учетная ставка<br>c) Актuarный коэффициент дисконтирования<br>d) Техническая ставка | c) |

## ГЛОССАРИЙ

**Актuarная математика (актуарные расчеты)** – совокупность математических и статистических методов, используемых при оценке финансовых взаимоотношений сторон по договору страхования. Основной задачей актуарной математики является определение размеров страховых тарифов и резервов, обеспечивающих безубыточность страховых операций.

**Аннуитет** – страховой договор, по которому выплачивается годовая рента в течение какого-либо периода жизни застрахованного в обмен на уплату однократной премии при подписании договора.

**Бонус** – часть получаемой страховщиком прибыли, направляемая на увеличение страховых сумм по договорам страхования жизни

**Дисконтирование** – процесс определения современной (текущей) стоимости будущих доходов или расходов. Используется в актуарных расчетах по страхованию жизни.

**Договор страхования** – соглашение между страхователем и страховщиком, в силу которого страховщик обязуется при наступлении страхового случая произвести страховые выплаты страхователю или иному лицу, в пользу которого заключен договор страхования, а страхователя обязуется уплатить страховые взносы в установленные сроки.

**Пенсия** – рента, выплачиваемая по старости или инвалидности.

**Пенсионный план** – договор пенсионного страхования, предусматривающий накопление пенсионного капитала в течение периода трудовой деятельности и выплату ренты (пенсии) после достижения пенсионного возраста.

**Рента** – последовательные периодические выплаты. В англоязычной литературе для обозначения ренты употребляется термин «аннуитет».

**Риск** – в страховании вероятное случайное событие или совокупность событий, на случай наступления которых проводится страхование. Количественными характеристиками риска являются вероятность наступления и тяжесть ущерба.

**Страхование** – система экономических отношений, подразумевающая образование за счет взносов предприятий, организаций и граждан страхового фонда и его использование для возмещения ущерба, возникающих вследствие наступления страхового случая.

**Страхователь** – физическое или юридическое лицо любой организационно-правовой формы, предусмотренной законодательством Российской Федерации, заключающее со страховщиком договор страхования.

**Страховая премия** – плата за страхование, которую страхователь платит страховщику за принятое им на себя обязательство осуществить страховую выплату страхователю (выгодоприобретателю) при наступлении страхового случая. Страховая премия по договору определяется как произведение страховой суммы на страховой тариф.

**Страховой тариф (тарифная ставка)** – ставка страховой премии с единицы страховой суммы или объекта страхования, на основании которой рассчитывается страховая премия. Выражается в процентах или рублях со 100 рублей страховой суммы.

**Страховщик** – юридическое лицо любой организационно-правовой формы, предусмотренной законодательством Российской Федерации, созданное для осуществления страховой деятельности (страховые организации и общества взаимного страхования) и получившее в установленном Федеральным законом «Об организации страхового дела в Российской Федерации» порядке лицензию на осуществление страховой деятельности на территории Российской Федерации.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

актуарная стоимость обязательства, 18  
 актуарное дисконтирование, 28  
 актуарное накопление, 28

### Д

дисконтирование, 18  
 долгосрочное страхование, 17  
     *временное страхование*, 17  
     *дискретный договор*, 19  
     *накопительное страхование*, 17  
     *непрерывный договор*, 19  
     *отсроченное страхование*, 17  
     *пожизненное страхование*, 17  
     *смешанное страхование*, 17

### К

кривая смертей, 7

### М

модель Гомпертца, 9  
 модель де Муавра, 8  
 модель Мейкхама, 9

### О

округленная остаточная продолжительность жизни, 10  
 остаточная продолжительность жизни, 9

### П

период действия отбора, 12  
 принцип эквивалентности, 19

### С

средняя округленная остаточная продолжительность жизни, 11  
 средняя продолжительность жизни, 8  
 страховая рента, 26  
     *временная*, 26  
     *дробленая*, 28  
     *немедленная*, 26  
     *отсроченная*, 26  
     *отсроченная временная*, 27  
     *отсроченная пожизненная*, 27  
     *пожизненная*, 26  
     *полная пожизненная*, 26  
     *постнумерандо*, 26  
     *пренумерандо*, 26  
     *срочная*, 26

### Т

таблица продолжительности жизни, 11  
     *общая таблица*, 11  
     *таблица с отбором*, 11  
     *таблица с отбором ограниченного действия*, 12  
 таблица смертности. *См. таблица продолжительности жизни.*

### Ф

функция выживания, 7  
 функция интенсивности смертности, 8

### Ч

*чистое дожитие. См. накопительное страхование*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001.
2. Гербер Х. Математика страхования жизни – М.: Мир, 1995.
3. Касимов Ю.Ф. Введение в актуарную математику. – М.: Анкил, 2001.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики. СПб.:Питер, 2006.
5. Корнилов И.А. Основы страховой математики: Учеб. пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2004.
6. Страхование: Учебник/ Под ред. Т.А. Федоровой. – М.: Экономистъ, 2004.
7. Фалин Г.И., Фалин А.И. Актуарная математика в задачах.. – М.: Физматлит, 2003.
8. Четыркин Е.М. Финансовая математика.– М.:Дело, 2003.

## Internet-ресурсы

1. <http://www.actuaries.ru>
2. <http://www.actuary.by>
3. <http://www.actuary-al.ru>
4. <http://www.twirpx.com>