И.В. Лутошкин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Ульяновск
Издательство Ульяновского государственного университета
2014

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт экономики и бизнеса

Факультет экономики

Для студентов направления "Бизнес-информатика"

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекционных курсов "Теория оптимального управления"и "Динамические модели экономики", читаемых для студентов специальности "Математические методы в экономике", а также курса "Оптимальное управление в экономических процессах", читаемого для направления "Бизнес-информатика".

Актуальность издания определяется тем, что большинство существующих учебников по теории оптимального управления (ОУ) (в силу объективных исторических причин) написаны для математиков, инженеров и физиков. Для студентов экономических специальностей язык изложения в этих учебниках сложен, и приведенные примеры не соответствуют области приложения, изучаемой экономистами.

Материал пособия, по возможности, адаптирован для студентов экономических специальностей и направлений, но также может представлять интерес для студентов других направлений при изучении динамических процессов в экономике.

Для качественного освоения пособия нужно в основном владеть материалом курсов "Линейная алгебра", "Математический анализ", "Обыкновенные дифференциальные уравнения". В силу того, что для экономических специальностей данные дисциплины читаются в недостаточно полном объеме, необходимом для изучения этого пособия, в приложении приведены некоторые определения и теоремы из выше обозначенных курсов, используемые в построении теории оптимального управления.

В первой главе приведены достаточные условия оптимальности управляемых динамических процессов. Материал этой главы является изложением достаточных условий оптимальности В.Ф. Кротова. Рассматриваются непрерывные и дискретные управляемые процессы в оптимизационных задачах.

Вторая глава посвящена необходимым условиям задач оптимального управления. Здесь, следуя логике исторического развития данного вопроса, вначале рассматриваются задачи вариационного исчисления (ВИ) (простейшая задача, задача Больца), затем выводятся необходимые условия оптимальности для задачи ОУ со свободным правым концом, приводятся необходимые условия в задаче ОУ достаточно общего вида – принципа максимума Л.С.Понтрягина. Рассматриваются некоторые частные случаи общей задачи. Последний параграф второй главы содержит тестовые примеры, позволяющие эффективно освоить необходимые условия оптимальности в задачах ВИ и ОУ.

Третья глава содержит методы численного решения задач ОУ и ВИ. Отметим, что все многообразие численных методов можно условно разбить на несколько классов. В пособии приведено три принципиально различных метода, обоснованность выбора которых основывается на простоте реализации и принадлежности различным классам. Первый класс численных методов основан на редукции к конечномерным задачам нелинейного программирования (НП) на основе разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений. Метод локальных вариаций, представленный в пособии, является представителем данного направления. Второй класс методов можно назвать аналитико-численным, методы этого класса основаны на углублённом анализе функциональных задач на первом этапе и использовании разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений на последнем. Одним из первых методов данного направления является метод Крылова-Черноусько. Третий метод, излагаемый в настоящем пособии, – метод параметризации, предложенный В.К. Горбуновым в 1978 году, заключается в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции с последующим решением задачи нелинейного программирования относительно параметров полученной функции. При этом для вычисления первых и вторых производных функционалов задачи по параметрам была развита техника сопряженных систем. Развитию этого метода посвящена диссертация автора "Метод параметризации в вырожденных задачах". Последний параграф данной главы посвящен методам сведения постановок задач ОУ к более простым постановкам.

В четвертой главе приведены модели макроэкономической динамики: односекторная и двухсекторная модели. Проведен численный анализ моделей, являющихся модификациями двухсекторной модели экономики, дана интерпретация полученных результатов.

Введение

Теория ОУ изучает управляемые объекты различной природы, представленные математической моделью в виде системы дифференциальных (или конечно-разностных) уравнений с параметрами. Параметры системы могут выбираться таким образом, что система приобретает планируемое свойство поведения.

Примером управляемого объекта может служить машина, ракета, предприятие, экономика региона или страны, вообще, любая система, реагирующая на внешнее воздействие изменением своих свойств. Принято считать, что исходной точкой в постановке теории оптимального управления явились 1940-1960 гг., когда актуальные проблемы того времени стимулировали развитие нового аппарата моделирования, в первую очередь это были инженерно-технические задачи (управление летательными аппаратами, автоматическое управление, космическая навигация и т.д.). Именно в это время был получен принцип максимума Понтрягина [25], достаточные условия оптимальности Кротова [18]. В 70-е годы 20-го века область приложения теории ОУ вышла за рамки инженерно-технических задач и нашла применение в рамках экономических и социально-экологических проблем. В первую очередь на основе аппарата теории ОУ были построены динамические макроэкономические модели (однопродуктовая модель, двухсекторная модель) [16, 19, 17], позднее появились микроэкономические модели (модели фирм, управление рекламными расходами, кредитная стратегия и т.д.) [29, 15].

Для более ясного понимания сущности оптимального управления рассмотрим несколько примеров.

1. Задача о перевозке груза. Рассмотрим управляемую систему: груз массой m находится на тележке. Управление сводится к воздействию на силу тяги двигателя F, которой можно либо ускорять, либо тормозить систему; сила тяги ограничена $-C \leqslant F \leqslant C$. На рисунке 1 схематично представлена эта система.

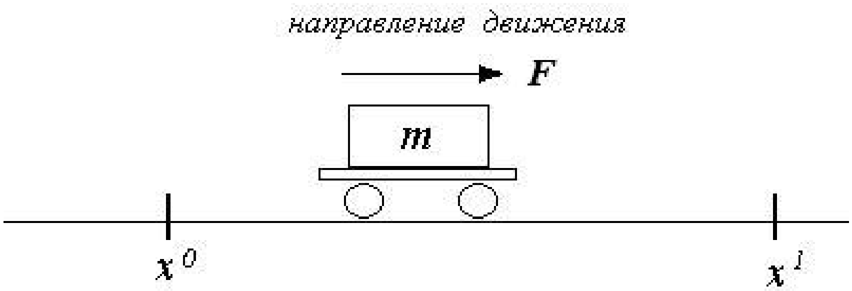

Рис. 1: Система тележка-груз

Задача оптимального управления заключается в переводе системы из положения x^0 в положение x^1 за кратчайшее время, при этом система должна находиться в состоянии покоя в начальный и конечный моменты времени.

Обозначим через $x(t), v(t), a(t)$ положение, скорость и ускорение тележки соответственно в момент времени t. Из школьного курса физики известно, что $\dot{x} = v(t)$, $\dot{v} = a(t)$, $m \cdot a(t) = F(t)$, таким образом можно сформулировать следующую задачу:

$$\begin{gathered}\dot{x} = v(t), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1; \\ \dot{v} = F(t)/m, \quad v(0) = 0, \quad v(T) = 0; \\ |F(t)| \leqslant C, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ T \to \inf .\end{gathered}$$

Поставленная задача суть задача быстродействия, $F(t)$ – управляющая функция, $x(t)$, $v(t)$ – фазовые переменные.

2. Модель однопродуктовой экономической системы [19]. Рассмотрим экономическую систему, характеризующуюся в каждый момент времени t совокупностью факторов:

X – интенсивность выпуска валового продукта;
Y – интенсивность конечного продукта;
C – величина непроизводственного потребления;
K – капитал (объем основных производственных фондов – ОПФ);
L – трудовые ресурсы (живая сила);
I – инвестиции.

Очевидно, что эти переменные взаимосвязаны. Пусть α – коэффициент фондоотдачи $(0 < \alpha < 1)$, тогда для любого t имеет место условие баланса:

$$X(t) = \alpha X(t) + Y(t).$$

В свою очередь, конечный продукт распределяется на валовые инвестиции и непроизводственные потребление:

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Валовые инвестиции расходуются на прирост капитала и восстановление ОПФ за счет амортизационных отчислений:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \mu K(t),$$

где μ – коэффициент амортизации.

Обозначим $u(t) = \dfrac{C(t)}{Y(t)}$ – доля непроизводственного потребления. Очевидно, что она удовлетворяет условию

$$0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Так как

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - \mu K(t),$$

то

$$\frac{dK}{dt} = (1-\alpha)\,(1-u)\,X(t) - \mu K(t).$$

Будем считать, что размеры валового продукта определяются заданной производственной функцией (ПФ), характеризующей возможности производства в зависимости от величины капитала $K(t)$, трудовых ресурсов $L(t)$:

$$X(t) = F\left(K(t), L(t)\right).$$

Пусть заданы ОПФ в начальный и конечный моменты времени:

$$K\left(t_0\right)=K_0, \quad K\left(t_1\right)=K_1.$$

Функция изменения трудовых ресурсов $L(t)$ детерминированна и определяется из условия постоянного прироста

$$\frac{dL}{dt}=\eta L,$$

тогда $L(t)=L(0)\exp(\eta t)$, здесь η – темп прироста.

Задача управления данной системой состоит в том, чтобы найти такой процесс, который обеспечивал бы наибольшее среднедушевое потребление на исследуемом интервале времени $[t_0;t_1]$ с учетом дисконтированного (приведенного к начальному моменту) потребления:

$$J=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{C}{L}e^{-\delta t}dt\to\max,$$

где $\delta>0$ – коэффициент дисконтирования.

Таким образом, совокупность условий

$$\begin{gathered}
\frac{dK}{dt}=(1-\alpha)\left(1-u\right)F\left(K(t),L(t)\right)-\mu K(t),\\
K\left(0\right)=K_0, \quad K\left(T\right)=K_1,\\
0\leqslant u(t)\leqslant 1, \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\
J=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{C}{L}e^{-\delta t}dt\to\max
\end{gathered}$$

образует задачу оптимального управления. Допустимый процесс представлен набором функций

$$\left\{K\left(t\right),X\left(t\right),u\left(t\right)\right\}.$$

Здесь $\{X,K\}$ – состояние экономической системы, u – управление.

3. Модель двухпродуктовой экономической системы [12]. Рассмотрим некоторую замкнутую экономику как совокупность двух секторов: А – производство средств производства и Б – производство предметов потребления. Средства производства (фонды) в обоих секторах будем считать однотипными, их количества в секторах обозначим через x_1, x_2. Коэффициент фондоотдачи в секторе А равен α, коэффициент амортизации фондов – μ. Все величины положительны.

Справедливо балансовое соотношение

$$\alpha x_1(t)=\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t)+\mu[x_1(t)+x_2(t)].$$

Величины $\dot{x}_i+\mu x_i$ $(i=1,2)$ обозначают количества выпускаемых фондов, направляемых в соответствующий сектор. Обозначим

$$u=\frac{\dot{x}_1+\mu x_1}{\alpha x_1}.$$

Эта величина – доля новых фондов, направляемых в А. Из введенных соотношений следуют уравнения динамики фондов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u x_1 - \mu x_1, \\ \dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1 - \mu x_2. \end{cases}$$

Параметр u здесь управляющий, он может выбираться из условия

$$0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Начальное состояние системы задано:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0.$$

Целью планирования распределения выпускаемых фондов $x_1(t)$ будем считать максимизацию выпуска предметов потребления за период $[t_0; t_1]$. Этот выпуск определяется функционалом

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^T x_2(t)dt.$$

Таким образом, получаем задачу ОУ со свободным правым концом.

4. Динамика фирмы [15, 29]. Рассмотрим вариант модели динамики фирмы, где характеристиками, определяющими поведение фирмы, являются объем капитала фирмы (активы, которые фирма приобретает для длительного использования в процессе экономической деятельности, а не для перепродажи: здания, сооружения, машины, оборудование, земля и т. п.; используются в течение нескольких операционных циклов организации, постепенно перенося свою стоимость на стоимость производимых товаров (услуг)), доход фирмы и кредитная задолженность. Обозначим их через K, X и B соответственно.

Будем предполагать выполнение следующих условий:

– текущий доход фирмы зависит от капитала и определяется вогнутой возрастающей функцией $R(K)$;

– доход идет на инвестиции, амортизацию капитала и отчисления остатка прибыли на депозит (в фонд развития материального поощрения и т.д.) u;

– фирма имеет возможность брать банковский кредит, регулируя тем самым имеющийся объем капитальных ресурсов;

– кредитная задолженность не может превышать фиксированного процента α текущего объема капитала;

– цель фирмы состоит в максимизации суммарной дисконтированной суммы на депозите за период $[t_0, t_1]$. Она достигается путем распределения дохода на депозитный счет $u(t)$ и погашение кредита $v(t)$.

Введем параметры b – норма амортизации капитала, r – ставка кредита (банковского и своего), тогда можно записать следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
X(t) = R(K(t)); \\
\dot{K} = X(t) - bK(t) - u(t) + v(t) - rB(t), \quad K(t_0) = K^0; \\
\dot{B} = v(t), \quad B(t_0) = B^0; \\
0 \leqslant B(t) \leqslant aK(t); \\
u(t) \geqslant 0, \quad v(t) \in (-\infty; +\infty); \\
\int\limits_{t_0}^{t_1} \exp(-rt)\, u(t)dt \to \sup .
\end{gathered}
$$

Поставленная задача суть задача ОУ, где управляющие переменные – $u(t)$, $v(t)$.

5. Модель рыбохозяйства. Следующий пример представляет собой модель субъекта микроэкономики: хозяйство по производству рыбы. Для формирования условий, определяющих изменение изучаемых параметров, введем предположения:

– предприятие содержит некоторый водоем: несет постоянные издержки $C(t)$;

– в водоеме выращивается рыба на вылов с последующей реализацией (количество рыбы в момент времени t обозначим через $x(t)$);

– переменные издержки прямо пропорциональны объему, содержащейся в водоеме рыбы;

– объем вылова в момент t обозначим $u(t)$;

– темп прироста рыбных запасов при отсутствии вылова постоянен, коэффициент прироста – μ;

– пусть $p(t)$ – детерминированная ценовая характеристика объема вылова;

– цель задачи – максимизация прибыли на фиксированном промежутке планирования $[t_0; t_1]$.

Объединив все обозначенные предположения, можно поставить следующую задачу оптимального управления. Динамика изменения объема популяции определяется задачей Коши

$$\dot{x} = \mu x(t) - u(t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Объем вылова удовлетворяет естественным ограничениям

$$0 \leqslant u(t) \leqslant x(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Требуется максимизировать прибыль, описываемую функционалом

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (p(t)u(t) - C(t) - \alpha x(t))\, dt,$$

где α – затраты на обслуживание одной единицы рыбных ресурсов в единицу времени.

6. Оптимизация рекламных расходов в модели Видала-Вульфа. В заключение рассмотрим модель рекламных расходов [15].

Сделаем предположения относительно факторов, определяющих модель:

– часть населения, информированная через рекламу о продукции фирмы, забывает об этом, или отказывается от услуг фирмы, или покидает рынок по каким-то причинам с постоянным темпом, если фирма не осуществляет вложения в рекламу;

– увеличение темпов продаж пропорционально, во-первых, текущим вложениям в рекламу и, во-вторых, – той части рынка, которая пока не охвачена фирмой, но потенциально может быть ею завоевана.

Через $u(t)$ обозначим объем средств, вкладываемых в рекламу; $S(t)$ – текущий объем продаж, который уменьшается с постоянным темпом $\mu > 0$ при отсутствии инвестиций на рекламу; M – максимально возможный объем продаж, который может быть достигнут фирмой (в силу ее производственных возможностей или ситуации на рынке).

Очевидно что $\dfrac{S(t)}{M} < 1$ при любом t. Прирост продаж dS за время dt пропорционален потоку рекламных расходов $u(t)$ и части рынка $1-\dfrac{S(t)}{M}$, которая не пользуется товаром фирмы и характеризует неиспользованные ею потенциальные возможности. Таким образом, можно составить дифференциальное уравнение

$$\dot{S} = ku(t)\left(1 - \frac{S}{M}\right) - \mu S(t), \quad S(0) = S_0;$$

здесь k – коэффициент пропорциональности.

Чтобы получить оптимальные расходы на рекламу, естественно максимизировать дисконтированную прибыль за период времени T, то есть

$$J = \int\limits_0^T exp\{-rt\}\,(p(t)S(t) - u(t))\,dt \to \max;$$

здесь $p(t)$ – экзогенная переменная, играющая роль цены для продукта $S(t)$.

Что касается ограничений на управление (вложения в рекламу), то очевидно, что $u(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$. Кроме этого, имеет смысл ограничить расходы на рекламу сверху, т.е. принять, к примеру, условие, что $u(t) \leqslant \alpha S(t)$ (α – фиксированная доля объема продаж) или поставить интегральное ограничение $\int\limits_0^T u(t)dt \leqslant B$ (B – рекламный бюджет на весь период планирования).

Рассмотренный ряд задач показывает, что многие проблемы моделирования динамики экономических процессов естественно могут быть представлены в классе задач ОУ.

Общая постановка. Пусть $x(t)$ – функция времени, описывающая параметры некоторой динамической системы

$$x(t) \in G \subset \Re^n, \quad t \in [t_0, T] \subset \Re;$$

$u(t)$ – функция управления, воздействующая на вектор исследуемых параметров

$$u(t) \in U \subset \Re^r, \quad t \in [t_0, T] \subset \Re.$$

В этом случае взаимодействие переменных $x(t)$ и $u(t)$ можно описать блок-схемой

Приведенная блок-схема представляет собой систему с обратной связью. В зависимости от реакции $x(t)$ на управляющее воздействие $u(t)$ блоком "управляющая система" определяется корректировка управления Δu.

Очевидно, что различные управляющие воздействия будут давать соответствующие им траектории параметров управляемой системы, выбор наилучшей среди них (в каком либо смысле) определяется соответствующим критерием. Таким образом, задачей оптимального управления является выбор наилучшего, относительно поставленного критерия, управления $u(t)$ и соответствующей этому управлению траектории $x(t)$.

Обозначенная оптимизационная задача существенно сложнее ранее изучаемых задач конечномерной оптимизации: классической задачи Лагранжа на условный экстремум, линейного, выпуклого, нелинейного программирования. В данном случае аргументом является не конечномерный вектор, а вектор-функция. Соответственно, методы, позволяющие найти оптимальное решение задачи, также существенно усложняются.

1. Достаточные условия оптимальности

Материал этой главы является реферативным изложением достаточных условий оптимальности в динамических оптимизационных системах на основе литературы [18, 19].

1.1. Динамические оптимизационные системы

Пусть $x = (x(0), x(1), \ldots, x(T-1))$, $u = (u(0), u(1), \ldots, u(T-1))$, где $x(t) \in \Re^n, u(t) \in \Re^r$ $(t = 0, 1, \ldots, T-1)$. Рассмотрим простейшую задачу дискретного оптимального управления (ОУ) с аддитивным функционалом:

$$J(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)) \to \min_{x,u} \tag{1.1.1}$$

при ограничениях

$$(x(t), u(t)) \in \mathbf{V}^t, \quad (t = 0, 1, \ldots, T-1) \tag{1.1.2}$$

Теорема 1. *Для того чтобы процесс* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *был оптимален в задаче (1.1.1),(1.1.2) необходимо и достаточно, чтобы при всех* $t = 0, 1, \ldots, T-1$ *выполнялось условие (1.1.3)*

$$f_0(t, x^*(t), u^*(t)) = \min_{(x,u)\in \mathbf{V}^t} f_0(t, x, u). \tag{1.1.3}$$

Доказательство.

1.Необходимость. Пусть (x^*, u^*) – решение задачи (1.1.1), (1.1.2), тогда

$$J(x^*, u^*) \leqslant J(x, u) \qquad \forall (x, u) : (1.1.2)\,.$$

Требуется доказать, что выполняется условие (1.1.3). Доказательство проводим от противного, пусть $\exists \tau :$ (1.1.3) не выполняется, следовательно, существует $(x(\tau), u(\tau))$:

$$f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) < f_0(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)), \tag{a}$$
$$(x(\tau), u(\tau)) \in \mathbf{V}^\tau.$$

Введем новый процесс

$$(x^0(t), u^0(t)) = \begin{cases} (x^*(t), u^*(t)), & t \neq \tau; \\ (x(\tau), u(\tau)), & t = \tau. \end{cases}$$

Вычислим значение функционала (1.1.1) на этом процессе:

$$J(x^0, u^0) = \sum_{t=0}^{\tau-1} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) + \sum_{t=\tau+1}^{T-1} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) + f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)).$$

Разбив выражение (1.1.1), для $(x^*(t), u^*(t))$ аналогично получим

$$J(x^*, u^*) = \sum_{t=0}^{\tau-1} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) + \sum_{t=\tau+1}^{T-1} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) + f_0(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)).$$

Сравним теперь правые части двух последних равенств. Первые два слагаемых в них совпадают, а третьи удовлетворяют сделанному предположению (a). Следовательно,

$$J(x^*, u^*) > J(x^0, u^0),$$

что противоречит условию (1.1.3) оптимальности процесса (x^*, u^*).
Необходимость доказана.

2. Достаточность. Пусть процесс (x^*, u^*) удовлетворяет условиям (1.1.2), (1.1.3). Требуется доказать, что для него будет выполнено и условие (1.1.1), т.е. этот процесс будет оптимальным.

Рассмотрим произвольный допустимый процесс (x, u). Тогда из (1.1.3) можно установить, что при любом $t = 0, 1, \ldots, T-1$

$$\begin{gathered} f_0(0, x^*(0), u^*(0)) \leqslant f_0(0, x(0), u(0)); \\ f_0(1, x^*(1), u^*(1)) \leqslant f_0(1, x(1), u(1)); \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_0(T-1, x^*(T-1), u^*(T-1)) \leqslant f_0(T-1, x(T-1), u(T-1)). \end{gathered}$$

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$\sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) \leqslant \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)).$$

Левая и правая части в этом неравенстве – значение функционала (1.1.1) для процессов (x^*, u^*) и (x, u), т.е

$$J(x^*, u^*) \leqslant J(x, u),$$

откуда, вследствие произвольности процесса (x, u), вытекает справедливость условия (1.1.1) для процесса (x^*, u^*), следовательно, (x^*, u^*), – решение задачи (1.1.1), (1.1.2).
Достаточность доказана. ■

Замечание 1. Изложенная теорема сводит решение поставленной задачи (1.1.1) к минимизации функции $f_0(t, x, u)$ при $\forall t = 0, 1, ..., T-1$ по переменным (x, u) на множестве $(x, u) \in \mathbf{V}^t$. При этом существование минимума функции $f_0(t, x, u)$ при $\forall t$ есть необходимое и достаточное условие существования решения задачи (1.1.1).

Замечание 2. Теорема может быть обобщена и на непрерывный случай, когда функционал задается соотношением

$$J = \int\limits_0^T f(t, x, u) dt \to \min. \tag{1.1.4}$$

Однако формулировка теоремы при этом нуждается в уточнении. Что касается достаточности условия (1.1.3), то и в непрерывном случае это также остается справедливым (доказательство дословно повторяет приведенное выше с заменой суммирования интегрированием). Необходимым же это условие, вообще говоря, не является.

Пример 1.1. Рассмотрим функционал

$$J(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt \to \min, \qquad (a)$$

заданный на множестве кусочно-непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющий ограничению $0 \leqslant x(t) \leqslant 2$. Так как $x^2(t) \geqslant 0$ при всех t, то, очевидно, и $J(x) \geqslant 0$. Таким образом, если при некотором $x^*(t)$ будет достигнуто значение $J(x^*) = 0$, то можно сделать вывод, что функционал (a) достигает минимального значения на решении $x^*(t)$.

Возьмем в качестве $x^*(t)$ следующую функцию:

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (0 \leqslant t < 0,5) \cup (0,5 < t \leqslant 1); \\ 1, & \text{если} \quad t = 0,5. \end{cases}$$

Очевидно, что $J(x^*) = 0 \implies x^*(t)$ – решение задачи (a). Но данная функция, как легко видеть, не минимизирует $x^2(t)$ при всех $t \in [0; 1]$, в частности, при $t = 0.5$, где значением $x^*(0.5) = 1$. Подынтегральную функцию $x^2(t)$ минимизирует значение $x^*(0.5) = 0$.

Таким образом, в данном примере необходимость условия теоремы не выполняется.

Для того чтобы условие теоремы в непрерывном случае стало не только достаточным, но и необходимым, его можно уточнить: потребовать, чтобы оно исполнялось не обязательно в каждой точке интервала $[0; T]$, а за исключением, быть может, точек меры нуль.

Возможен и другой путь. Если дополнительно наложить требование непрерывности на процесс (x, u) и на функцию $f_0(t, x, u)$, то формулировка теоремы в непрерывном случае сохраняется дословно с заменой соотношения (1.1.1) на (1.1.4). Однако требование непрерывности функций $x(t)$, $u(t)$ зачастую является слишком сильным в задачах ОУ (независимо от прикладной области) и не выполняется во многих случаях [15, 19].

1.2. Достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов

Пусть $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^r$, $t \in [0; T]$. Рассмотрим задачу ОУ в следующем виде:

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \qquad (1.2.1)$$

$$x(0) = x^0, \quad (x(t), u(t)) \in \mathbf{V}^t; \qquad (1.2.2)$$

$$J(u(\cdot), x(\cdot)) = \int\limits_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt + F(x(T)) \to \min, \qquad (1.2.3)$$

здесь $f : \Re^{1+n+r} \to \Re^n$, $f_0 : \Re^{1+n+r} \to \Re$, $F : \Re^n \to \Re$.

Пусть $\mathbf{D}$ – множество процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$: $\forall t \in [0;T]$ $(x(t), u(t)) \in \mathbf{V}^t$. Через $\mathbf{M}$ обозначим множество процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условиям (1.2.1), (1.2.2). Очевидно, $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}$.

Требуется найти процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, минимизирующий функционал (1.2.3) и принадлежащий $\mathbf{M}$. Предполагается, что вектор оптимального состояния $x^*(t)$ непрерывен при $t \in (0;T)$, а вектор оптимального управления $u^*(t)$ в той же области принадлежит классу кусочно непрерывных функций. Заметим, что если $f(t,x,u)$ непрерывна по своим аргументам, то из кусочной непрерывности управления следует непрерывность фазовой переменной $x(t)$.

Пусть $\varphi(t,x)$ – непрерывная функция $n+1$ переменной $t, x_1, x_2, ..., x_n$, имеющая по всем этим переменным непрерывные частные производные. Построим с помощью функции $\varphi(t,x)$ функции $\Phi(x)$ и $R(t,x,u)$, определяемые формулами:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}, f(t,x,u) \right\rangle - f_0(t,x,u); \qquad (1.2.4)$$

$$\Phi(x) = \varphi(T,x) + F(x), \qquad (1.2.5)$$

где $F(x)$ – терминальный член в формуле (1.2.3), $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ – градиент, равный $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$.

Введем вспомогательный функционал

$$L(x,u,\varphi) = -\int\limits_0^T R(t,x,u)dt + \Phi(x(T)) - \varphi(0,x^0). \qquad (1.2.6)$$

Функционал (1.2.6) определен на множестве функций $(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot,\cdot))$. Если фиксировать значение $\varphi(\cdot, x)$, то получим функционал, заданный на парах $(x(\cdot), u(\cdot))$.

Лемма. *Для любой функции $\varphi(t,x)$, имеющей непрерывные частные производные по всем своим аргументам, на множестве допустимых процессов значения функционалов L и J совпадают, т.е.*

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot, x)) = J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad \textit{для} \quad \forall (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}. \qquad (1.2.7)$$

Доказательство. Пусть $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}$, подставим в (1.2.6) выражения $R(t,x,u)$ и $\Phi(x(T))$ из соотношений (1.2.4) и (1.2.5).

По формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\varphi(t,x(t))}{dt} = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{т.к. процесс} \\ \text{допустим, то из (1.2.1)} \end{array} \right| = \\ = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}, f(t,x,u) \right\rangle.$$

Таким образом, функцию $R(t,x,u)$ при подстановке в нее допустимого процесса $(x(t), u(t))$ можно представить в виде

$$R(t,x(t),u(t)) = \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt} - f_0(t,x(t),u(t)).$$

Тогда интегральный член в формуле (1.2.6) окажется равным

$$-\int_0^T R(t,x(t),u(t))dt = -\int_0^T \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt}dt + \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt. \qquad (a)$$

Вычисляя первое слагаемое в правой части равенства (a) по формуле Ньютона -Лейбница, получим

$$-\int_0^T \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt}dt = \varphi(0,x(0)) - \varphi(T,x(T)).$$

Следовательно, выражение (a) преобразуется к виду

$$-\int_0^T R(t,x(t),u(t))dt = \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt + \varphi(0,x^0) - \varphi(T,x(T)).$$

Подставим полученное соотношение в (1.2.6), тогда

$$L(x(t),u(t),\varphi(t,x)) = \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt + \varphi(0,x(0)) - \varphi(0,x^0) + \Phi(x(T)) - \varphi(T,x(T)).$$

Второе и третье слагаемые в сумме дают нуль, так как $x(0) = x^0$. Два последних слагаемых преобразуем с учетом равенства (1.2.5):

$$\Phi(x(T)) - \varphi(T,x(T)) = F(x(T)).$$

Отсюда окончательно имеем

$$L(x(t),u(t),\varphi(t,x(t))) = \int_0^T f_0(t,x(t),u(t))dt + F(x(T)),$$

что совпадает с соотношением (1.2.7). ■

Теорема 2 (достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов). *Пусть допустимый процесс* $(x^*(\cdot),u^*(\cdot)) \in M$ *и некоторая функция* $\varphi(t,x)$ *удовлетворяют условиям:*

1. $R(t,x^*(t),u^*(t)) = \max\limits_{(x,u)\in\mathbf{V}^t} R(t,x,u)$ *при* $\forall t \in [0;T]$;

2. $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x\in\mathbf{V}_x^T} \Phi(x)$.

Тогда процесс $(x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ *является оптимальным для задачи (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3).*

Доказательство. Функционалы $L(x,u,\varphi)$ и $J(x,u)$ при фиксированном значении функции $\varphi(t,x)$ будем считать заданными на множестве $\mathbf{D}$.

В условиях теоремы справедливо:

$$L(x^*(\cdot),u^*(\cdot),\varphi(\cdot,x^*)) = \min_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} L(x(\cdot),u(\cdot),\varphi(\cdot,x(\cdot))). \qquad (a)$$

Действительно, функционал (1.2.6) состоит из трех слагаемых, последнее из которых – постоянная величина.

Рассмотрим первое слагаемое: $-\int\limits_0^T R(t,x,u)dt$. Так как предполагается выполненным условие 1 теоремы, то при $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$ подынтегральное выражение $R(t,x,u)$ достигает для всех $t \in [0;T]$ максимального значения, а $(-R(t,x,u))$ – минимального. Следовательно, в формуле (1.2.6) первое слагаемое будет минимальным.

Второе слагаемое в функционале (1.2.6) согласно условию 2 теоремы также примет минимальное значение при $x = x^*(T)$.

Таким образом, каждое из слагаемых в формуле (1.2.6) достигает на процессе $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ минимального значения по сравнению с любым другим процессом $(x(\cdot), u(\cdot))$ на множестве $\mathbf{D}$. Очевидно, этим свойством обладает и сумма этих слагаемых, следовательно, справедливо (a).

Рассмотрим функционал l_φ, заданный соотношением

$$l_\varphi = \min_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi).$$

Свойство (a) можно записать в виде

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot, x(\cdot))) \geqslant l_\varphi, \quad \forall \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{D}; \tag{b}$$

$$L(x^*(\cdot), u^*(\cdot), \varphi(\cdot, x(\cdot))) = l_\varphi. \tag{c}$$

Завершим доказательство теоремы. Во-первых, так как множество $\mathbf{M}$ является подмножеством множества $\mathbf{D}$, то на нем также выполняется ограничение (b), т.е.

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot, x(\cdot))) \geqslant l_\varphi, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}.$$

В силу леммы последнее неравенство можно переписать в виде:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant l_\varphi, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}. \tag{d}$$

Так как по условию теоремы $(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{M}$, то выражение (c) равносильно равенству

$$J(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) = l_\varphi. \tag{e}$$

Сопоставляя соотношения (d) и (e), получим, что при всех $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}$

$$J(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \leqslant J(x(\cdot), u(\cdot)),$$

откуда вытекает оптимальность процесса $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$. ■

Замечание. Доказанная теорема – признак оптимальности допустимого процесса, если он каким-либо способом найден. Действительно, если среди всех допустимых, согласно условиям теоремы, процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$ установлен процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, то он будет оптимальным. Однако процедура определения этого процесса сводится к рассмотрению и анализу различных типов задач ОУ.

1.3. Достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов

Для задач ОУ в дискретных системах, так же как и в рассмотренных в предыдущем разделе непрерывных, может быть сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях оптимальности. Используемые при этом математические конструкции аналогичны введенным выше и являются их качественным аналогом для многошаговых процессов.

Пусть $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^r$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$; функции $f : \Re^{1+n+r} \to \Re^n$, $f_0 : \Re^{1+n+r} \to \Re$, $F : \Re^n \to \Re$. Управляемый процесс описывается системой разностных уравнений

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1; \tag{1.3.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{1.3.2}$$

На возможные значения состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ наложены ограничения

$$(x(t), u(t)) \in \mathbf{V}^t. \tag{1.3.3}$$

Соотношения (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) можно рассматривать как ограничения, определяющие множество $\mathbf{M}$ допустимых процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$ в данной системе.

Требуется найти такой процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, который минимизирует функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)) + F(x(T)) \to \min. \tag{1.3.4}$$

Как и при рассмотрении непрерывных систем, для формулировки теоремы о достаточных условиях оптимальности вводятся две функции: $R(t, x, u)$ и $\Phi(x(T))$. Для их построения введем функцию $\varphi(t, x)$ переменных (t, x). В отличие от непрерывных систем здесь от функции $\varphi(t, x)$, вообще говоря, не требуется наличия каких-либо аналитических свойств типа непрерывности или дифференцируемости.

Функцию $R(t, x, u)$ определим в дискретном процессе следующим образом:

$$R(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) - f_0(t, x, u), \tag{1.3.5}$$

а функцию $\Phi(x(T))$ зададим в виде

$$\Phi(x(T)) = \varphi(T, x) + F(x). \tag{1.3.6}$$

Через $\Delta f(t)$ обозначим приращение функции $f(t)$ в точке t : $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$.

В этом случае, если $x(t)$ является решением системы (1.3.1), первые два слагаемых в (1.3.5) можно рассматривать как $\Delta\varphi(t, x(t))$ функции $\varphi(t, x(t))$.

Если это так, то в выражении $\varphi(t+1, f(t, x, u))$ после подстановки $x = x(t)$, $u = u(t)$ можно, учитывая уравнение процесса (1.3.1), $f(t, x(t), u(t))$ заменить на $x(t+1)$. В результате получим, что на траектории $x(t)$ первые два слагаемых в формуле (1.3.5) будут равны

$$\Delta\varphi(t, x(t)) = \varphi(t+1, x(t+1)) - \varphi(t, x(t)). \tag{1.3.7}$$

Для задачи (1.3.1), (1.3.2), (1.3.4) имеет место теорема о достаточных условиях оптимальности.

Теорема 3 (достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов). *Пусть допустимый процесс* $(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{M}$ *и некоторая функция* $\varphi(t,x)$ *удовлетворяют условиям:*

1. $R(t, x^*(t), u^*(t)) = \max\limits_{(x,u)\in \mathbf{V}^t} R(t,x,u) \quad t = 0, 1, \ldots, T-1;$

2. $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x\in\mathbf{V}^T} \Phi(x).$

Тогда процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ *является оптимальным.*

Доказательство. Введем функционал $L(x,u,\varphi)$ с помощью соотношения

$$L(x,u,\varphi) = -\sum_{t=0}^{T-1} R(t,x,u) + \Phi(x(T)) - \varphi(0,x^0). \qquad (a)$$

Покажем, что для любой функции $\varphi(t,x)$ значения функционалов L и J на множестве $\mathbf{M}$ совпадают, т.е.

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot, x(\cdot))) = J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad \text{для} \quad \forall (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}. \qquad (b)$$

Проведем преобразование выражения (a), подставляя в него $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}$ с учетом формулы (1.3.5),

$$L(x(t), u(t), \varphi(t,x)) = -\sum_{t=0}^{T-1} (\varphi(t+1), f(t), x(t), u(t)) - \varphi(t, x(t)) +$$
$$+ \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)) + \Phi(T,x) - \varphi(0,x^0).$$

Выражения под знаком суммы в первом слагаемом, вследствие соотношения (1.3.7), при значениях $t = 0, 1, \ldots, T-1$ будут равны:

$$\begin{array}{ll}
\varphi(1, x(1)) - \varphi(0, x(0)), & \text{при} \quad t = 0; \\
\varphi(2, x(2)) - \varphi(1, x(1)), & \text{при} \quad t = 1; \\
\ldots & \\
\varphi(T-1, x(T-1)) - \varphi(T-2, x(T-2)), & \text{при} \quad t = T-2; \\
\varphi(T, x(T)) - \varphi(T-1, x(T-1)), & \text{при} \quad t = T-1.
\end{array}$$

Складывая эти выражения, видим, что после попарных сокращений их сумма будет равна $\varphi(T, x(T)) - \varphi(0, x(0))$. После ее подстановки в формулу (1.3.6) с учетом $x(0) = x^0$ получим

$$L(x(t), u(t), \varphi(t,x)) = \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)) + F(x(t)),$$

что совпадает с равенством (b), которое и требовалось установить.

При выполнении условий 1 и 2 теоремы функционал $L(x,u,\varphi)$ достигает минимального значения на множестве $\mathbf{D}$ при $x = x^*(\cdot), u = u^*(\cdot)$, т.е.

$$L(x^*(\cdot), u^*(\cdot), \varphi(\cdot, x^*)) = \min_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi). \qquad (c)$$

Рассмотрим каждое из трех слагаемых в выражении (a) для функционала L. По условию 1 теоремы стоящая под знаком суммы в первом слагаемом в соотношении (a) функция $R(t, x(t), u(t))$ достигает при всех $t = 0, 1, \ldots, T-1$ своего максимального значения на процессе $(x^*(t), u^*(t))$. Это является достаточным условием того, что максимальной будет и вся сумма значений $\sum_{t=0}^{T-1} R(t, x(t), u(t))$. Так как знак перед этой суммой отрицателен, то первое слагаемое в выражении (a) достигает на процессе $(x^*(t), u^*(t))$ своего минимального значения.

Второе слагаемое в соотношении (a) также будет минимально при $x = x^*(T)$ по условию 2 теоремы, а третье слагаемое – постоянная величина. Таким образом, все три слагаемых одновременно достигают минимального значения на процессе $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$. Следовательно, минимальной будет и их сумма, равная $L(x^*(\cdot), u^*(\cdot), \varphi(\cdot, x^*))$.

Обозначим

$$l_\varphi = \min_{(x(\cdot),u(\cdot))\in \mathbf{D}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi).$$

Так как множество $\mathbf{M}$ является подмножеством множества $\mathbf{D}$, то справедливо

$$L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi(\cdot, x(\cdot))) \geqslant l_\varphi, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}.$$

В силу (b) последнее неравенство можно переписать в виде:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant l_\varphi, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}. \tag{d}$$

Так как по условию теоремы $(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{M}$, то выражение (d) равносильно равенству

$$J(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) = l_\varphi. \tag{e}$$

Сопоставляя соотношения (d) и (e), получим, что при всех $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{M}$

$$J(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \leqslant J(x(\cdot), u(\cdot)),$$

откуда с учетом допустимости процесса $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ вытекает его оптимальность. ■

1.4. Обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности

В предыдущих разделах шла речь об условиях, гарантирующих оптимальность данного процесса $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$. Здесь установим, при каких условиях последовательность допустимых процессов $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\}$ будет минимизирующей последовательностью в данной задаче ОУ.

Определение 1.1. Последовательность допустимых процессов $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\}$ будем называть минимизирующей последовательностью на множестве P для функционала $J(x(\cdot), u(\cdot))$, если $\lim\limits_{s\to\infty} J(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)) = \inf\limits_{(x(\cdot),u(\cdot))\in P} J(x(\cdot), u(\cdot)) = J^*$.

Рассмотрим сначала задачу оптимального управления для непрерывных систем, когда ограничения, определяющие множество допустимых процессов, задаются соотношениями (1.2.1) и (1.2.2), а функционал J имеет вид (1.2.3). В задаче ОУ для непрерывных систем достаточные условия оптимальности указанной последовательности могут быть сформулированы в виде следуюшей теоремы.

Теорема 4 (обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов). *Пусть имеется последовательность допустимых процессов* $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\}$, *принадлежащих* $\mathbf{M}$ *при* $\forall s = 1, 2, \ldots$. *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(t, x)$ *(т.е. имеющая по крайней мере вторые частные производные по всем своим переменным), которая при* $s \to \infty$ *удовлетворяет условиям:*

1. $R(t, x_s^*(t), u_s^*(t)) \to \sup\limits_{(x,u)\in\mathbf{V}^t} R(t, x, u)$ *равномерно по* $t \in [0; T]$;

2. $\Phi(x_s^*(T)) \to \inf\limits_{x\in\mathbf{V}_x^t} \Phi(x)$.

Тогда последовательность $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\}$ *является минимизирующей для функционала* $J(x, u)$.

Доказательство. Введем определенный на множестве $\mathbf{D}$ (следовательно, и на множестве $\mathbf{M}$) функционал $L(x, u, \varphi)$ с помощью соотношения (1.2.6). О функционале $L(x, u, \varphi)$ известно, что при некоторых условиях на множестве $\mathbf{M}$ его значение совпадает со значениями функционала $J(x, u)$ (соотношение (1.2.7)).

Обозначим l_φ :

$$l_\varphi = \inf_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi).$$

Так как $\mathbf{M}$ есть подмножество $\mathbf{D}$, то

$$\inf_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi) \leqslant \inf_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{M}} L(x(\cdot), u(\cdot), \varphi),$$

откуда

$$\inf_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{M}} J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant l_\varphi. \qquad (a)$$

С другой стороны, из условия 1 настоящей теоремы для первого слагаемого в правой части соотношения (1.2.6) получаем

$$\int\limits_0^T R(t, x_s^*(t), u_s^*(t))dt \to \sup_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} \int\limits_0^T R(t, x(t), u(t)).$$

Следовательно, взятое с обратным знаком, это слагаемое стремится к

$$\inf_{(x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbf{D}} \left(-\int_0^T R(t, x(t), u(t)) \right).$$

Из условия 2 теоремы получаем, что второе слагаемое в правой части функционала (1.2.6) также стремится к своей нижней грани.

Последнее слагаемое в правой части формулы (1.2.6) – постоянная величина, не влияющая на предельный переход, поэтому можно сделать вывод, что при $s \to \infty$

$$L(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot), \varphi) \to l_\varphi. \qquad (b)$$

Сравнивая соотношения (a), (b) и пользуясь определением точной нижней грани (inf), можно написать $J(x_s^*, u_s^*) \to \inf\limits_{(x,u)\in\mathbf{M}} J(x, u)$, т.е. последовательность

$(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot))$ является минимизирующей для функционала J на множестве $\mathbf{M}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Условие 1 теоремы может быть ослаблено, если сформулировать его в виде

$$\int_0^T R(t, x_s^*(t), u_s^*(t))dt = \sup_{(x,u)\in\mathbf{D}} \int_0^T R(t, x(t), u(t))dt.$$

Замечание 2. Если при $\forall t \in [0, T]$ существует $\max R(t, x, u)$ при $(x, u) \in \mathbf{V}^t$, то утверждение теоремы остается верным при замене условия 1 более слабым условием

$$\int_0^T R(t, x_s^*(t), u_s^*(t))dt \to \sup_{(x,u)\in\mathbf{V}^t} \int_0^T R(t, x(t), u(t))dt. \tag{1.4.1}$$

Использованное в формулировке теоремы условие 1 является достаточным для выполнения соотношения (1.4.1), так как равномерная сходимость подынтегральных функций обеспечивает и сходимость интеграла, однако диапазон применимости этого условия шире, чем условия 1 теоремы. Например, условие (1.4.1) можно применять для таких процессов, где управление $u(t)$ или состояние $x(t)$ не является ограниченным на отрезке $[0; T]$. В этом случае, даже если верхняя грань функции R и не существует при $\forall t \in [0, T]$, для применения соотношения (1.4.1) требуются лишь существование и конечность интегралов в этом соотношении.

Перейдем теперь к обобщенной теореме о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов в дискретных системах. Постановка задачи оптимального управления определяется функционалом (1.3.4), который требуется минимизировать на множестве $\mathbf{M}$ допустимых процессов, задаваемом ограничениями (1.3.1)-(1.3.3).

Так как доказательство теоремы для дискретных процессов может быть проведено аналогично доказательству теоремы для непрерывного процесса, ограничимся ее формулировкой.

Теорема 5 (обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов). *Пусть имеется последовательность* $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\} \in \mathbf{M}$ *при* $\forall s = 1, 2, \ldots.$ *Предположим, существует функция* $\varphi(t, x)$, *которая при* $s \to \infty$ *удовлетворяет условиям:*

1. $R(t, x_s^*(t), u_s^*(t)) \to \sup\limits_{(x,u)\in\mathbf{V}^t} R(t, x, u)$ *для* $t = 0, 1, \ldots, T - 1$;

2. $\Phi(x_s^*(T)) \to \inf\limits_{x\in\mathbf{V}_x^t} \Phi(x)$.

Тогда последовательность $\{x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot)\}$ *является минимизирующей для функционала* J.

1.5. Линейные по управлению процессы без ограничений на управление

Рассмотрим класс оптимизационных задач, в которых непосредственное применение достаточных условий позволяет строить оптимальное решение.

Пусть управляемый процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = P(t,x) + Q(t,x)u. \tag{1.5.1}$$

Данный процесс $(x(t), u(t))$, где $x(t)$ и $u(t)$ – скалярные функции, протекает при $t \in [0;T]$, причем начальное состояние системы при $t = 0$ и конечное при $t = T$, в которое ее требуется перевести, заданы:

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T. \tag{1.5.2}$$

Функционал определяется соотношением

$$J = \int_0^T \big(P^0(t,x) + Q^0(t,x)u\big)\, dt \to \min. \tag{1.5.3}$$

В формулах (1.5.1), (1.5.3) $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $P^0(t,x)$, $Q^0(t,x)$ – заданные непрерывные функции, причем $Q(t,x) \neq 0$ при $\forall t \in [0,T]$.

Рассматриваемый класс задач характеризуется линейной зависимостью от управления в правой части уравнения процесса (1.5.1) и подынтегральной функции (1.5.3). Зависимость их от t и x может быть произвольной.

Предположим, что в данных задачах отсутствуют ограничения на $x(t)$ и $u(t)$. Для нахождения оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$ применим к подобным задачам теорему 4.2.

С учетом формул (1.5.1) и (1.5.3) запишем функцию $R(t,x,u)$ (1.2.4) следующим образом:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}[P(t,x) + Q(t,x)u] - P^0(t,x) - Q^0(t,x)u, \tag{1.5.4}$$

где $\varphi(t,x)$ – некоторая функция, которую нужно определить.

Наша цель будет состоять в подборе функции $\varphi(t,x)$ таким образом, чтобы процесс $(x^*(t), u^*(t))$ при каждом t, максимизирующем выражение (1.5.4), был допустимым. При таком подходе процесс $(x^*(t), u^*(t))$ является оптимальным. Действительно, условие 1 теоремы 4.2 будет выполнено для процесса $(x^*(t), u^*(t))$, а условие 2 удовлетворяется тривиально, поскольку правый конец траектории зафиксирован: $x(T) = x^T$.

Зададим функцию $\varphi(t,x)$ так, чтобы функция $R(t,x,u)$ не зависела от u. Из формулы (1.5.4) видно, что зависимость R от u линейна, поэтому независимость от u означает равенство нулю коэффициента при u, т.е.

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} Q(t,x) - Q^0(t,x) = 0. \tag{1.5.5}$$

При таком задании $\varphi(t,x)$ функция R будет зависеть от двух переменных: $R = R(t,x)$. Если теперь при каждом значении t найти $\max R(t,x)$ по x, получим некоторую траекторию $x^*(t)$. В случае допустимости $x^*(t)$, т.е. если она удовлетворяет условиям (1.5.2), эта траектория и будет искомым оптимальным решением. Соответствующее оптимальное управление $u^*(t)$ получим, подставляя $x^*(t)$ в уравнение процесса (1.5.1):

$$u^*(t) = \frac{\dot{x}^*(t) - P(t, x^*(t))}{Q(t, x^*(t))}. \tag{1.5.6}$$

При этом управление $u^*(t)$ будет допустимым из-за отсутствия в задаче ограничений на управление.

Найденный процесс $(x^*(t), u^*(t))$ будет удовлетворять условию 1 теоремы 4.2. Если окажутся выполненными краевые условия (1.5.2), то по этой теореме процесс $(x^*(t), u^*(t))$ будет оптимальным.

Для реализации представленной идеи требуется найти функцию $\varphi(t,x)$ из уравнения (1.5.5). Преобразуя его, получим

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} = \frac{Q^0(t,x)}{Q(t,x)}.$$

Данное уравнение – простейшее с частными производными. Его общее решение находится непосредственным интегрированием:

$$\varphi(t,x) = \int\limits_c^x \frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)} d\xi + C(t), \tag{1.5.7}$$

где c – произвольное число, которое можно, например, принять равным нулю; $C(t)$ – произвольная функция времени.

Равенство (1.5.7) задает множество всех решений уравнения (1.5.1), любые два из которых отличаются друг от друга только на произвольную функцию времени. Чтобы с помощью найденной функции $\varphi(t,x)$ составить функцию R, вычислим слагаемые в выражении (1.5.4). Для вычисления частной производной $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$ воспользуемся правилом дифференцирования интеграла по параметру. Из равенства (1.5.7), где параметром в подынтегральной функции является t, будем иметь

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \int\limits_c^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)}\right) d\xi + C_1(t).$$

Подставляя значения производных функции $\varphi(t,x)$ в соотношение (1.5.4), получим

$$R(t,x) = \frac{Q^0(t,x)P(t,x) - P^0(t,x)Q(t,x)}{Q(t,x)} + \int\limits_c^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)}\right) d\xi + C_1(t). \tag{1.5.8}$$

Формула (1.5.8) позволяет получать выражение для функции $R(t,x)$ в любой задаче рассматриваемого в данном разделе класса задач. Отметим, что искомое значение $x^*(t)$, максимизирующее $R(t,x)$, не зависит от вида функции $C_1(t)$ так как последняя не зависит от x. Поэтому ее можно считать равной нулю (или любой другой константе или функции времени).

Все изложенное до сих пор справедливо, и траектория $x^*(t)$ является оптимальной, если выполняются краевые условия $x^*(0) = x^0$, $x^*(T) = x^T$.

В общем случае, когда краевые условия не выполнены (хотя бы одно из них), решение задачи может быть найдено в классе минимизирующих последовательностей. Рассмотрим произвольную последовательность моментов времени $\tau_s \to 0$ и $\tau_s' \to T$.

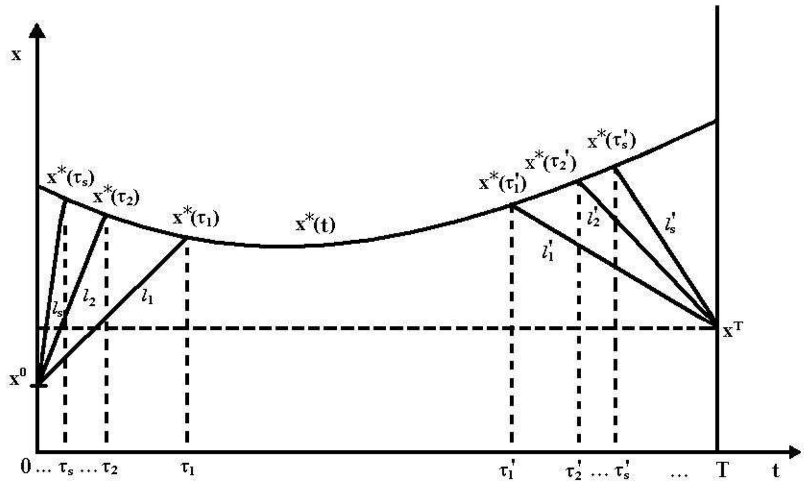

Рис. 2: Минимизирующая последовательность в линейном случае

Соединим начальную точку x^0 прямой l_1 с точкой $x^*(\tau_1)$, а точку x^T прямой l_1' с точкой $x^*(\tau_1')$, затем точку x^0 прямой l_2 с точкой $x^*(\tau_2)$, а точку x^T прямой l_2' с точкой $x^*(\tau_2')$ и т.д. В результате получаем последовательность кривых $x_s^*(t)$, каждая из которых состоит из трех участков:

$$x_s^*(t) = \begin{cases} l_s, & t \in [0; \tau_s); \\ x^*(t), & t \in [\tau_s; \tau_s'); \\ l_s', & t \in [\tau_s'; T]. \end{cases}$$

Прямые l_s и l_s' задаются уравнениями

$$x = x^0 + \left(x^*(\tau_s) - x^0\right) \frac{t}{\tau_s};$$

$$x = x^T + \left(x^*(\tau_s') - x^T\right) \frac{(t - T)}{\tau_s' - T}.$$

Полученные значения $x_s^*(t)$ будем рассматривать как траектории системы (1.5.1). Реализующие их уравнения $u_s^*(t)$ можно получить, подставляя значения $x_s^*(t)$ в формулу (1.5.6). После определения $u_s^*(t)$ получаем последовательность $(x_s^*(t), u_s^*(t))$ допустимых процессов, удовлетворяющих ограничениям (1.5.1) и (1.5.2) данной задачи. Построенная последовательность процессов является минимизирующей и представляет решение задачи.

Воспользуемся обобщенной теоремой 5. В данной задаче требуется для последовательности $(x_s^*(t), u_s^*(t))$ проверить выполнение лишь условия 1. Условие 2 удовлетворяется автоматически, так как $x_s^*(T) = x^T$ при всех s.

Сходимость $x_s^*(t)$ к $x^*(t)$ на интервале $[0; T]$ не является равномерной; следовательно, равномерная сходимость функции $R(t, x(t))$ в формуле (1.5.8) к своей верхней грани $R(t, x^*(t))$ не гарантирована, а в точках $t = 0$ и $t = T$ вообще может не иметь места. Поэтому будем проверять условие 1 теоремы 5, сформулированное в виде соотношения (1.4.1). В соответствии с этим требуется проверить, что при $s \to \infty$

$$\int\limits_0^T R(t, x_s^*(t))dt \to \int\limits_0^T R(t, x^*(t))dt. \tag{1.5.9}$$

Для того чтобы установить справедливость условия (1.5.9), представим интеграл в левой части в виде трех слагаемых:

$$\int\limits_0^T R(t, x_s^*(t))dt = \int\limits_0^{\tau_s} R(t, x_s^*(t))dt + \int\limits_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t, x_s^*(t))dt + \int\limits_{\tau_s'}^T R(t, x_s^*(t))dt.$$

В связи с тем, что функция $R(t, x_s^*(t))$ ограничена, а длины промежутков интегрирования τ_s и $T - \tau_s'$ в первом и третьем слагаемых в формуле стремятся к нулю, эти интегралы при $s \to \infty$ также стремятся к нулю. Так как на промежутке $[\tau_s, \tau_s']$ значение $x_s^*(t)$ совпадает с $x^*(t)$, то второе слагаемое будет равно

$$\int\limits_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t, x_s^*(t))dt = \int\limits_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t, x^*(t))dt.$$

Следовательно, при $s \to \infty$ оно стремится к значению правой части (1.5.9). Это и доказывает, что данное соотношение выполняется для последовательности траекторий $x_s^*(t)$. Поэтому последовательность $(x_s^*(t), u_s^*(t))$ является минимизирующей.

Перейдем теперь к случаю, когда в рассматриваемой оптимизационной задаче (1.5.1) - (1.5.3) имеются ограничения на состояние. Множество допустимых состояний $\mathbf{V}_x^t$ при каждом фиксированном t представляет собой некоторое множество на числовой прямой. Будем считать, что это множество – отрезок

$$a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t). \tag{1.5.10}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ – скалярные заданные функции.

Если по-прежнему считать, что на управление не наложено ограничений, то единственное изменение при решении данной задачи по сравнению с задачей без ограничений состоит в том, что траектория $x(t)$ в ней строится из условия

$$R(t, x(t)) \to \max_{(1.5.10)} R(t, x),$$

где $R(t, x)$ задается соотношением (1.5.8).

До этого $x(t)$ находилась исходя из необходимого условия безусловного максимума функции $R(t, x)$:

$$\frac{\partial R(t, x)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

1.6. Однопродуктовая макроэкономическая модель

Рассмотрим подробнее однопродуктовую экономическую систему, которая частично приведена во введении. Напомним получившиеся уравнения. Пусть α –

коэффициент фондоотдачи $(0 < \alpha < 1)$, тогда имеет место условие баланса в каждый момент времени:

$$X = \alpha X + Y.$$

Конечный продукт распределяется на валовые инвестиции и непроизводственные потребление:

$$Y = I + C.$$

Валовые инвестиции расходуются на прирост капитала и восстановление ОПФ за счет амортизационных отчислений:

$$I = \frac{dK}{dt} + \mu K,$$

где μ – коэффициент амортизации.

Обозначим $u = \dfrac{C}{Y}$ – доля непроизводственного потребления, она удовлетворяет условию

$$0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{1.6.1}$$

Так как

$$\frac{dK}{dt} = I - \mu K,$$

то

$$\frac{dK}{dt} = (1-\alpha)(1-u)X - \mu K. \tag{1.6.2}$$

Будем считать, что размеры валового продукта определяются заданной производственной функцией (ПФ), характеризующей возможности производства в зависимости от величины капитала K, трудовых ресурсов L и времени t :

$$0 \leqslant X \leqslant F(K, L, t). \tag{1.6.3}$$

Предполагается, что ПФ $F(K, L, t)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем выполняются все условия неоклассической ПФ [17].

Решение будем искать при условии

$$K(t) \geqslant M(t), \tag{1.6.4}$$

где $M(t)$ – заданный уровень ОПФ.

Пусть заданы ОПФ в начальный и конечный моменты времени:

$$K(0) = K_0, \quad K(T) = K_1. \tag{1.6.5}$$

Множество допустимых процессов в рассматриваемой задаче описывается условиями (1.6.1) - (1.6.5). Допустимый процесс представлен совокупностью функций

$$\{K(t), X(t), u(t)\},$$

удовлетворяющих этим условиям. Здесь $\{X, K\}$ – состояние экономической системы, u – управление. Очевидно, что такой процесс неединственный.

Задача управления данной системой состоит в том, чтобы найти такой процесс, который обеспечивал бы наибольшее среднедушевое потребление на исследуемом интервале времени $[0;T]$ с учетом дисконтированного (приведенного к начальному моменту) потребления:

$$J = \int_0^T \frac{C}{L} e^{-\delta t} dt \to \max, \tag{1.6.6}$$

где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования. Дисконтирование позволяет рассматривать случай, когда потребление неравнозначно на всем промежутке планирования: на начальном этапе потребление более значимо по отношению к тому же объему потребления на конечном этапе.

Сделаем замену переменных, приведя их к удельным показателям на душу населения. Это позволяет сопоставлять однородные показатели больших и малых экономических систем. Введем в дифференциальное уравнение (1.6.2) относительные переменные:

$k = K/L$ – капиталовооруженность;
$c = C/L$ – среднедушевое потребление;
$x = X/L$ – производительность труда.

Так как $K = kL$, то согласно правилу дифференцирования произведения получим

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dk}{dt} L + k \frac{dL}{dt}.$$

Учитывыая данный факт и то, что $X = xL$, получаем уравнение (1.6.2) в виде

$$\frac{dk}{dt} L + k \frac{dL}{dt} = (1-\alpha)(1-u)\, xL - \mu kL.$$

Будем считать, что прирост трудовых ресурсов осуществляется с постоянным темпом (в условиях стабильности экономической системы и социальных условий это может быть справедливым):

$$\frac{dL}{dt} = nL,$$

тогда

$$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{dk}{dt} + kn \right) L.$$

Окончательно дифференциальное уравнение связи в относительных переменных с учетом формулы (1.6.2) примет вид

$$\frac{dk}{dt} = (1-\alpha)(1-u)\, x - (\mu + n)\, k. \tag{1.6.7}$$

Ограничение на управление u остается тем же (1.6.1):

$$0 \leqslant u \leqslant 1,$$

а ограничение на производительность труда x примет вид

$$0 \leqslant x = f(k,t)\,; \tag{1.6.8}$$

где
$$f\left(k,t\right)=\frac{1}{L}F\left(K,L,t\right)=F\left(k,1,t\right).$$
Последнее справедливо, если производственная функция $F\left(K,L,t\right)$ обладает свойством однородности первой степени (примером может служить функция Коба-Дугласа).

Ограничения на капитал (ОПФ) заменим ограничениями на капиталовооруженность:
$$k\left(t\right)\geqslant m(t). \tag{1.6.9}$$

Вытекающие из краевых условий (1.6.5) начальное и конечное значения капиталовооруженности имеют вид:
$$k\left(0\right)=k_0,\quad k\left(T\right)=k_1. \tag{1.6.10}$$

Преобразование функционала (1.6.6) к относительным переменным дает
$$J=-\int\limits_0^T\left(1-\alpha\right)uxe^{-\delta t}dt\rightarrow\min. \tag{1.6.11}$$

В задаче (1.6.1), (1.6.7) - (1.6.11) требуется определить процесс $\{k\left(t\right),\ x\left(t\right),\ u\left(t\right)\}$, обращающий в минимум функционал (1.6.11) на множестве (1.6.1), (1.6.7)-(1.6.10).

Таким образом, в модифицированной задаче состоянием системы является капиталовооруженность k, а управлением – доля потребления u. Производительность труда x определяется по формуле (1.6.8). Уравнение процесса (1.6.7) – дифференциальное уравнение роста капиталовооруженности.

Построенная задача – линейная по управлению u с ограничением на управление (1.6.1), т.е. вписывается в класс задач, проанализированный в предыдущем параграфе. Построим функцию $R\left(t,k\right)$, не зависящую от u:
$$R\left(t,k\right)=e^{-\delta t}\left[\left(1-\alpha\right)f\left(k,t\right)-\left(\mu+n+\delta\right)k\right].$$

Введем обозначение $r\left(t,k\right)=\left(1-\alpha\right)f\left(k,t\right)-\left(\mu+n+\delta\right)k$. Тогда, учитывая, что функция $e^{-\delta t}$ положительна и монотонна, то $\operatorname{argmax}R\left(t,k\right)=\operatorname{argmax}r\left(t,k\right)$. Следовательно, оптимальное решение $k^*\left(t\right)$ можно записать в виде
$$k^*\left(t\right)=\underset{k}{\operatorname{argmax}}\,r\left(t,k\right),\quad\forall t\in\left[0;T\right].$$

Проанализируем поведение функции $r\left(t,k\right)$ по k. Эта функция является суммой двух слагаемых: производственной функции с точностью до постоянного положительного множителя $\left(1-\alpha\right)$ и линейного выражения. В силу того, что производственная функция $f(k,t)$ вогнутая по переменной k, то $r\left(t,k\right)$ также вогнутая функция по переменной k. Если функция $f(k,t)$ строго вогнута, то $\dfrac{\partial^2 r}{\partial k^2}<0$ при $\forall t,k\left(t\right)>0$.

График $r\left(t,k\right)$ и его составляющие при фиксированном значении t показаны на рис. 3.

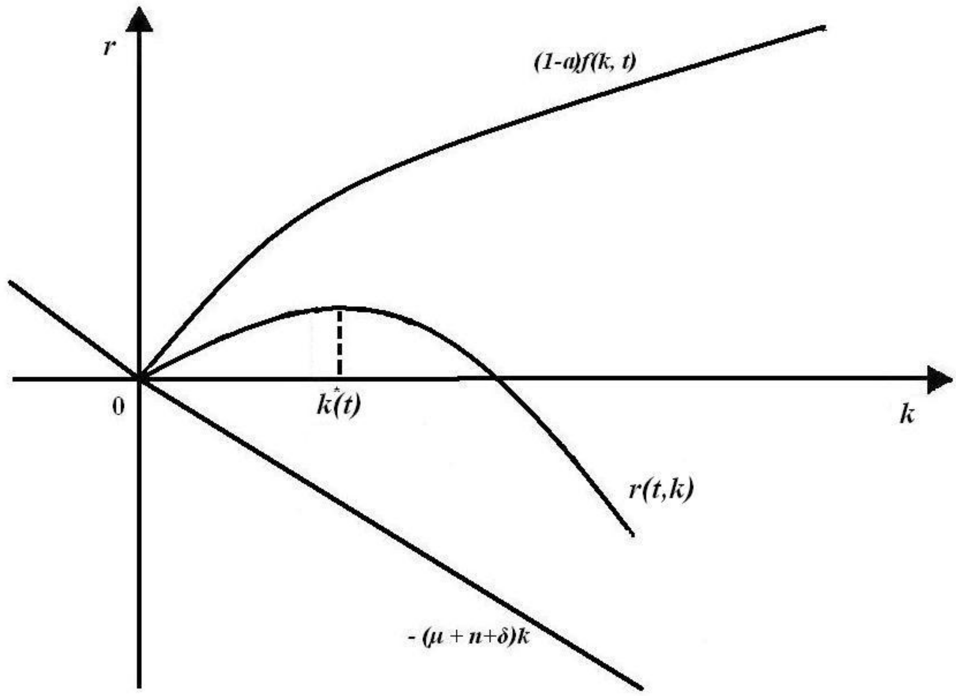

Рис. 3: Функция $r\,(t,k)$ и ее составляющие

В силу свойств ПФ $f(0,t)=0$, тогда $r\,(t,0)=0$. Так как при $k\to+0$, $\dfrac{\partial f}{\partial k}\to +\infty$, то $\dfrac{\partial r}{\partial k}\to+\infty$, следовательно $r(t,k)$ монтонно возрастает в нуле справа. С другой стороны, при $k\to+\infty$, $\dfrac{\partial f}{\partial k}\to 0$, следовательно, $\dfrac{\partial r}{\partial k}\to-(\mu+n+\delta)$, это означает, что при $k\to+\infty$, $r(t,k)$ монотонно убывает. Таким образом, непрерывная функция $r\,(t,k)$ сначала возрастает из нуля, затем убывает, следовательно, имеет положительный максимум, так как она вогнута, то максимум единственнен, обозначим его $k^*\,(t)$.

Необходимым условием максимума $r\,(t,k)$ по k является $\dfrac{\partial r}{\partial k}=0$. Предположим, что $F(K,L,t)$ имеет вид мультипликативной ПФ с множителем $e^{\rho t}$, учитывающим научно-технический прогресс (НТП), т.е. $F(K,L,t)=AK^{\nu_1}L^{\nu_2}e^{\rho t}$, где ρ – темп роста НТП. В этом случае $f\,(k,t)$ может быть представлена в виде $bk^{\nu}e^{\rho t}$, тогда необходимое условие максимума порождает уравнение

$$(1-\alpha)\,b\nu e^{\rho t}k^{\nu-1}-(\mu+n+\delta)=0.$$

Для неоклассической ПФ необходимо, чтобы $0<\nu<1$, обозначим $\beta=1-\nu$, $\widehat{k}(t)$ – решение полученного уравнения относительно k, тогда

$$\widehat{k}\,(t)=\left[\frac{(1-\alpha)\,b\nu}{\mu+n+\delta}\right]^{1/\beta}e^{\rho t/\beta}. \tag{1.6.12}$$

Так как $\rho/\beta>0$, то $\widehat{k}\,(t)$ – монотонно возрастающая функция. Назовем эту функцию магистралью данной динамической модели экономики.

Управление, отвечающее магистрали, определяется подстановкой функции $\widehat{k}\,(t)$ в дифференциальное уравнение развития системы (1.6.7):

$$\widehat{u}\,(t) = 1 - \frac{\dfrac{d\widehat{k}}{dt} - (\mu + n)\,\widehat{k}\,(t)}{(1-\alpha)\,be^{\rho t}\left(\widehat{k}\right)^{\nu}}. \qquad (1.6.13)$$

Из формулы (1.6.12) найдем

$$\frac{d\widehat{k}}{dt} = \widehat{k}\,(t)\,\frac{\rho}{\beta},$$

тогда

$$\widehat{u}\,(t) = 1 - \frac{\mu + n + \dfrac{\rho}{\beta}}{(1-\alpha)\,be^{\rho t}\left(\widehat{k}\right)^{\nu-1}}.$$

Так как

$$\left(\widehat{k}\right)^{\nu-1} = \left(\widehat{k}\right)^{-\beta} = \left[\frac{\mu+n+\delta}{(1-\alpha)\,b\nu}e^{-\rho t}\right]^{-1} e^{-\rho t},$$

то получим магистральное управление

$$\widehat{u}\,(t) = 1 - \nu\frac{\mu + n + \dfrac{\rho}{\beta}}{\mu+n+\delta}$$

в предположении, что $0 \leqslant \widehat{u}(t) \leqslant 1$.

Нетрудно показать, что для специально подобранных краевых условий, когда они лежат на магистрали

$$k_0 = \widehat{k}\,(0)\,, \quad k_1 = \widehat{k}\,(T)\,,$$

магистраль – суть решение задачи: $k^*(t) \equiv \widehat{k}(t)$.

Отметим, что условие реализуемости $0 \leqslant u \leqslant 1$ в данной задаче выполняется. Это можно проверить. Для функции Кобба-Дугласа экономической магистралью является кривая постоянного роста капиталовооруженности, пропорционального темпу роста НТП ρ, а оптимальное управление, реализующее эту магистраль, – постоянная величина.

В действительности очень редко краевые условия принадлежат магистрали, предположим, что

$$k_0 \neq \widehat{k}\,(0)\,, \quad k_1 \neq \widehat{k}\,(T)\,.$$

Пусть оптимальное решение находится из соотношения

$$k^*\,(t) = \operatorname*{argmax}_{k\in\hat{V}_k^t} R\,(t,k)\,, \qquad (1.6.14)$$

где $\hat{V}_k^t$ определяется условиями

$$0 < u_1(t) \leqslant u(t) \leqslant u_2(t) \leqslant 1,$$

$u_1(t)$, $u_2(t)$ – известные функции времени.

В соответствии с формулой (1.6.14) построим границы $\gamma_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, допустимой области. Функции $\gamma_{ij}(t)$ являются решениями дифференциального уравнения процесса

$$\frac{dk}{dt} = (1-\alpha)(1-u) f(k,t) - (\mu + n) k \tag{1.6.15}$$

при соответствующих краевых условиях (если $j = 0$, то берется $k(0) = k_0$; если $j = 1$, то используется $k(T) = k_1$) и ограничениях на управление (если $i = 1$, то берется нижний предел $u = u_1$; если $i = 2$, то $u = 1$).

Рассмотрим пример, когда $k_0 < \widehat{k}(0)$, $k_1 > \widehat{k}(T)$, т.е. магистраль $\widehat{k}(t)$ проходит так, как показано на рис. 4. Тогда оптимальная траектория будет состоять из трех участков с моментами переключения τ_1 и τ_2, где τ_1 является точкой пересечения границы γ_{10} с магистралью, а τ_2 – точкой пересечения магистрали $\widehat{k}(t)$ с границей γ_{11}.

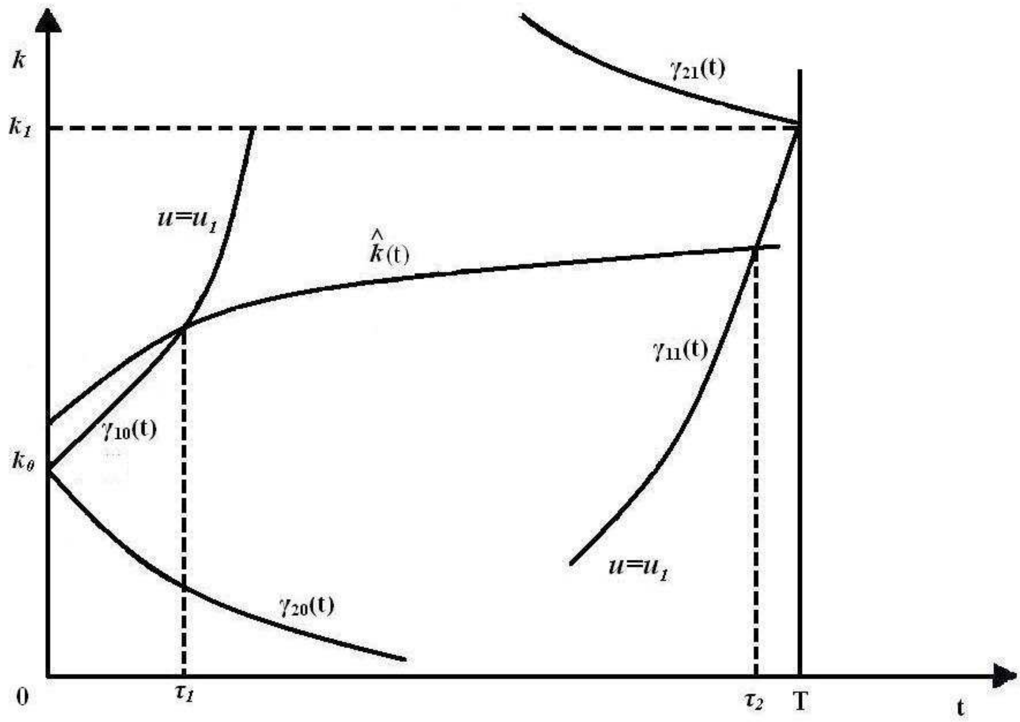

Рис. 4: Графическая интерпретация решения задачи магистрального типа

Как видим, вначале на временном интервале $(0, \tau_1)$ почти все вкладывается в накопление (потребление в этот период на минимальном уровне u_1), решение идет по траектории γ_{10}. Начиная с τ_1 развитие идет по магистрали $\widehat{k}(t)$ вплоть до момента τ_2, с которого опять почти все вкладывается в экономику (потребление вновь находится на нижнем уровне u_1), решение идет по γ_{11}.

Исходя из рис. 4, можно объяснить происхождение названия магистрали и магистрального функционирования экономики. Допустим, мы находимся в начальном пункте k_0 и нам нужно на автомобиле переехать в конечный пункт k_1. Неподалеку от k_0 проходит магистраль. Мы оптимальным образом от k_0 по местной дороге γ_{10} доезжаем до магистрали, далее в момент τ_1 въезжаем на магистраль и едем по ней до момента τ_2, после чего съезжаем с магистрали и по местной дороге γ_{11} добираемся до конечного пункта k_1. Эта интерпретация дает интуитивное представление об оптимальном развитии экономики.

2. Необходимые условия оптимальности

Материал данной главы основан на литературных источниках [1, 2, 7, 12] и адаптирован для студентов экономических специальностей.

Необходимые условия оптимальности начнем рассматривать с задач вариационного исчисления.

2.1. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача Больца. Уравнение Эйлера. Условия трансверсальности

Определение 2.2. *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \mathrm{extr};\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1. \tag{2.1.1}$$

Задача

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = J(x(\cdot)) + l(x(t_0), x(t_1)) \to \mathrm{extr} \tag{2.1.2}$$

называется *задачей Больца.* Здесь $x(t) \in \Re^n$ при $t \in [t_0; t_1]$, $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция ($L : \Re^{1+2n} \to \Re$), называемая *интегрантом,* $l(\xi_0, \xi_1)$ — функция ($l : \Re^{2n} \to \Re$), называемая *терминантом.* Отрезок $[t_0,\, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$.

Задачи (2.1.1) и (2.1.2) рассматриваются в пространстве $C^1([t_0,\, t_1])$.

Определение 2.3. Функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет *слабый локальный минимум* в простейшей задаче (задаче Больца), если существует $\varepsilon > 0$: для любой допустимой функции $x(\cdot)$: $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1} \leqslant \varepsilon$ выполняется

$$J(\hat{x}(\cdot)) \leqslant J(x(\cdot)) \qquad (\mathcal{B}(\hat{x}(\cdot)) \leqslant \mathcal{B}(x(\cdot))).$$

Аналогично дается определение слабого локального максимума. Функция доставляет *слабый локальный экстремум* если она доставляет слабый локальный минимум или слабый локальный максимум.

Лемма (Дюбуа-Реймон, 70-е годы 19 в.). *Пусть* $a_0(\cdot), a_1(\cdot) \in C([t_0,\, t_1])$ *и* $\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle a_1(t), \dot{h}(t)\right\rangle + \langle a_0(t), h(t)\rangle\right) dt = 0$ *для всех* $h(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1]),\ h(t_0) = h(t_1) = 0$ *(тривиальный вектор). Тогда* $a_1(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1])$ *и* $\dfrac{d}{dt} a_1(t) = a_0(t) \quad \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$.

Доказательство. Возьмем функцию $p(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1])$:

$$\dot{p}(t) = a_0(t), \qquad \int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)\, dt. \tag{a}$$

Тогда для любой функции $h(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1])$, зануляющейся на концах отрезка,

$$0 = \left| \begin{array}{c}\text{по условию}\\ \text{леммы}\end{array} \right| = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle a_1(t), \dot{h}(t)\right\rangle + \langle a_0(t), h(t)\rangle\right) dt = |(\ a\ )| = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle a_1(t), \dot{h}(t)\right\rangle dt +$$

$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle h(t), dp(t)\rangle = \left| \begin{array}{c}\text{интегрируем по частям}\\ \text{второе слагаемое}\end{array}\right| = \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle a_1(t), \dot h(t)\rangle dt + \langle h(t), p(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle p(t), \dot h(t)\rangle dt =$ $\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle a_1(t) - p(t), \dot h(t)\right\rangle dt.$ Следовательно, для любой функции $h(\cdot)$, удовлетворяющей условиям леммы

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle a_1(t) - p(t), \dot h(t)\right\rangle dt = 0. \tag{b}$$

Возьмем функцию $\tilde h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (a_1(\tau) - p(\tau))\, d\tau$. Тогда $\dot{\tilde h}(\cdot) = a_1(\cdot) - p(\cdot) \in C([t_0,\, t_1])$, и она равна нулю в граничных точках. Действительно, равенство $\tilde h(t_0) = 0$ следует из определения функции $\tilde h(\cdot)$. Равенство $\tilde h(t_1) = 0$ имеет место в силу выбора функции $p(\cdot)$: $\tilde h(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))\, dt = 0$. Значит для функции $\tilde h(\cdot)$ должно выполняться равенство (b), т. е. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \|a_1(t) - p(t)\|^2\, dt = 0$. Из последнего соотношения следует, что $a_1(t) \equiv p(t)$, т. е. $a_1(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1])$ и $\frac{d}{dt} a_1(t) = a_0(t)$. Лемма доказана. ■

Обозначим через L_x, $L_{\dot x}$ соответствующие производные по переменным x и $\dot x$ от функции $L(t, x, \dot x)$.

Теорема 6 (уравнение Эйлера, 1744 г.). *Пусть* L, L_x, $L_{\dot x}$ *— непрерывны. Тогда, если* $\widehat x(\cdot)$ *доставляет слабый экстремум в простейшей задаче или задаче Больца, то* $\widehat L_{\dot x}(t) \in C^1([t_0, t_1])$ *и выполняется уравнение Эйлера:*

$$\frac{d\widehat L_{\dot x}(t)}{dt} = \widehat L_x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{2.1.3}$$

где $\widehat L_{\dot x}(t) = L_{\dot x}(t, \widehat x(t), \dot{\widehat x}(t))$, $\widehat L_x(t) = L_x(t, \widehat x(t), \dot{\widehat x}(t))$.

В задаче Больца удовлетворяются также условия трансверсальности (краевые условия): $\widehat L_{\dot x}(t_0) = \widehat l_{x(t_0)}$, $\widehat L_{\dot x}(t_1) = -\widehat l_{x(t_1)}$, *где* $\widehat l_{x(t_0)} = l_{\xi_0}(\widehat x(t_0), \widehat x(t_1))$, $\widehat l_{x(t_1)} = l_{\xi_1}(\widehat x(t_0), \widehat x(t_1))$.

Доказательство. Рассмотрим функции одного переменного:

$$\varphi(\alpha) = \varphi_{h(\cdot)}(\alpha) = J(\widehat x(\cdot) + \alpha h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \widehat x(t) + \alpha h(t), \dot{\widehat x}(t) + \alpha \dot h(t))\, dt,$$

$\psi(\alpha) = \psi_{h(\cdot)}(\alpha) = \mathcal{B}(\widehat x(\cdot) + \alpha h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \widehat x(t) + \alpha h(t), \dot{\widehat x}(t) + \alpha \dot h(t))\, dt + l(x(t_0) + \alpha h(t_0), x(t_1) + \alpha h(t_1))$.

Поскольку $\widehat x(\cdot)$ доставляет слабый экстремум, функции $\varphi(\alpha)$ в простейшей задаче и $\psi(\alpha)$ в задаче Больца имеют экстремум при $\alpha = 0$. Из теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла следует, что эти функции дифференцируемы в нуле, и значит, по теореме Ферма $\varphi'(0)=0$, $\psi'(0)=0$. Дифференцируя функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ и полагая $\alpha=0$, получаем

$$\varphi'(0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(\Big\langle \widehat{L}_x(t),h(t)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t),\dot h(t)\Big\rangle\Big)\,dt=0, \tag{a}$$

$$\begin{aligned}\psi'(0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(\Big\langle \widehat{L}_x(t),h(t)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t),\dot h(t)\Big\rangle\Big)\,dt+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)},h(t_0)\Big\rangle+\\ +\Big\langle \widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle=0.\end{aligned} \tag{b}$$

Из леммы Дюбуа-Реймона и соотношения (a) следует утверждение теоремы об уравнении Эйлера. Для завершения доказательства, касающегося задачи Больца, надо в (b) проинтегрировать по частям,

$$\psi'(0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle \widehat{L}_x(t),h(t)\Big\rangle\,dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t),\,dh(t)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)},h(t_0)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle \widehat{L}_x(t),h(t)\Big\rangle dt+\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t),h(t)\Big\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot x}(t),h(t)\Big\rangle dt+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)},h(t_0)\Big\rangle+$$

$$+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle \quad =\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle \widehat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot x}(t),h(t)\Big\rangle dt+\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t_1),h(t_1)\Big\rangle-$$

$$-\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t_0),h(t_0)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)},h(t_0)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle=\Big|\begin{array}{c}\text{из уравнения}\\ \text{Эйлера}\end{array}\Big|=$$

$$=\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t_1)+\widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)}-\widehat{L}_{\dot x}(t_0),h(t_0)\Big\rangle.$$

Получаем, что для любых $h(t_0)$, $h(t_1)$

$$\Big\langle \widehat{L}_{\dot x}(t_1)+\widehat{l}_{x(t_1)},h(t_1)\Big\rangle+\Big\langle \widehat{l}_{x(t_0)}-\widehat{L}_{\dot x}(t_0),h(t_0)\Big\rangle=0,$$

таким образом, справедливы условия трансверсальности. ■

Первые интегралы уравнения Эйлера. Итак, уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\,L_{\dot x}(t,x,\dot x)=L_x(t,x,\dot x)$$

представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Укажем случаи, когда легко выписываются его первые интегралы.

1. L не зависит от $x\Rightarrow L_x=0\Rightarrow L_{\dot x}(t,\dot x)=const.$

2. L не зависит от $\dot x\Rightarrow L_{\dot x}=0\Rightarrow L_x(t,x)=0.$

3. L не зависит от t – имеем интеграл энергии:

$$\langle \dot x,L_{\dot x}(x,\dot x)\rangle-L(x,\dot x)=const.$$

Действительно (при условии, что $x(\cdot) \in C^2$),

$$\frac{d}{dt}\left(\langle \dot{x}, L_{\dot{x}}\rangle - L\right) = \langle \ddot{x}, L_{\dot{x}}\rangle + \left\langle \dot{x}, \frac{d}{dt}\,L_{\dot{x}}\right\rangle - \langle L_x, \dot{x}\rangle - \langle L_{\dot{x}}, \ddot{x}\rangle =$$
$$= \left\langle \dot{x}, \frac{d}{dt}\,L_{\dot{x}} - L_x\right\rangle = 0.$$

2.2. Условие Вейерштрасса сильного минимума

Рассмотрим простейшую задачу на минимум (а не на экстремум) в несколько более широком пространстве $PC^1([t_0,t_1])$ кусочно непрерывно-дифференцируемых функций (а не в пространстве $C^1([t_0,t_1])$, как в предыдущем пункте).

Определение 2.4. Говорят, что допустимая функция $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет в простейшей задаче *сильный минимум,* если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой функции $x(\cdot) \in PC^1([t_0,t_1])$, удовлетворяющей условию $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])} < \varepsilon$ и граничным условиям, выполняется неравенство: $J(x(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot))$.

Определение 2.5. Функция

$$\mathcal{E}\,(t,x,y,u) = L(t,x,u) - L(t,x,y) - \langle L_{\dot{x}}(t,x,y), u-y\rangle$$

называется *E-функцией Вейерштрасса.*

Теорема 7 (необходимое условие Вейерштрасса, 1879 г.). *При выполнении условий теоремы 6, если $\widehat{x}(\cdot)$ доставляет сильный минимум в простейшей задаче, тогда в любой точке τ непрерывности функции $\dot{\widehat{x}}(\cdot)$ выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}\left(\tau, \widehat{x}(\tau), \dot{\widehat{x}}(\tau), u\right) \geqslant 0, \quad \forall u \in \Re^n. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Приводимое доказательство (восходящее к Вейерштрассу) основано на построении *игольчатой вариации.* Пусть τ произвольная точка непрерывности функции $\dot{\widehat{x}}(\cdot)$ и (для удобства) пусть $\tau \neq t_0,\, t_1$. Положим $\xi = u - \dot{\widehat{x}}(\tau)$ и

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda\xi + (t-\tau)\xi, t \in [\tau-\lambda, \tau], \\ \lambda\xi - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda}, t \in [\tau, \tau+\sqrt{\lambda}], \\ 0, t \notin [\tau-\lambda, \tau+\sqrt{\lambda}], \end{cases}$$

где λ — достаточно малое положительное число. (Производная этой функции на отрезке $[\tau-\lambda,\tau]$ напоминает иголку, откуда и название "игольчатая вариация".) Функция $x_\lambda(\cdot) = \widehat{x}(\cdot) + h_\lambda(\cdot)$ допустима (т. е. принадлежит $PC^1([t_0,t_1])$ и удовлетворяет краевым условиям), и потому функция $\psi(\lambda) = J(x_\lambda(\cdot)) - J(\widehat{x}(\cdot))$ удовлетворяет неравенству $\psi(\lambda) - \psi(0) \geqslant 0$ при малых $\lambda > 0$ (в силу определения сильного минимума и того, что $\|h_\lambda(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])} = O(\lambda)$ при $\lambda \to 0$). Имеем

$$\psi(\lambda) - \psi(0) = \int\limits_{\tau-\lambda}^{\tau} \left(L(t, x_\lambda(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \xi) - \widehat{L}(t)\right) dt +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \left(L(t, x_\lambda(t), \dot{\widehat{x}}(t) - \sqrt{\lambda}\xi) - \widehat{L}(t)\right) dt = J_1(\lambda) + J_2(\lambda).$$

По формуле дифференцирования интеграла по параметру имеем

$$\frac{dJ_1(\lambda)}{d\lambda} = L\left(\tau-\lambda, x_\lambda(\tau-\lambda), \dot{\widehat{x}}(\tau-\lambda)+\xi\right) - \widehat{L}(\tau-\lambda)+$$
$$+\int\limits_{\tau-\lambda}^{\tau} \left\langle L_x\left(t, x_\lambda(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\xi\right), \xi\right\rangle dt.$$

Воспользуемся непрерывностью $\dot{\widehat{x}}(\cdot)$ в точке τ и разложим по формуле Тейлора $J_1(\lambda)$ в окрестности нуля до членов первого порядка включительно, получаем, что $J_1(\lambda) = J_1(0) + \left.\dfrac{\partial J_1(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\lambda + o(\lambda) = \lambda(L(\tau, \widehat{x}(\tau), \dot{\widehat{x}}(\tau)+\xi) - \widehat{L}(\tau)) + o(\lambda)$.

Проведём оценку второго интеграла. При фиксированном t по формуле Тэйлора для функции нескольких переменных в окрестности точки $\left(\widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\right)$ разложим функцию

$$L(t, x_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)) = \widehat{L}(t)+\left\langle \widehat{L}_x(t), h_\lambda(t)\right\rangle+\left\langle \widehat{L}_{\dot{x}}(t), \dot{h}_\lambda(t)\right\rangle+o\left(\sqrt{\|h_\lambda(t)\|^2+\left\|\dot{h}_\lambda(t)\right\|^2}\right).$$

Оценим подкоренное выражение

$$\|h_\lambda(t)\|^2+\left\|\dot{h}_\lambda(t)\right\|^2 = \left\|\lambda\xi-(t-\tau)\xi\sqrt{\lambda}\right\|^2+\left\|\xi\sqrt{\lambda}\right\|^2 =$$
$$= \lambda\|\xi\|^2\left(\left(\sqrt{\lambda}-t+\tau\right)^2+1\right) = O(\lambda).$$

Имеем $L(t, x_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)) - \widehat{L}(t) = \left\langle \widehat{L}_x(t), h_\lambda(t)\right\rangle + \left\langle \widehat{L}_{\dot{x}}(t), \dot{h}_\lambda(t)\right\rangle + o(\sqrt{\lambda}) \quad\Longrightarrow$

$$J_2(\lambda) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \left(\left\langle \widehat{L}_x(t), h_\lambda(t)\right\rangle + \left\langle \widehat{L}_{\dot{x}}(t), \dot{h}_\lambda(t)\right\rangle + o(\sqrt{\lambda})\right) dt = \left|\begin{array}{c}\text{интегрируем}\\ \text{по частям}\\ \text{второе}\\ \text{слагаемое}\end{array}\right|$$

$$= \left\langle \widehat{L}_{\dot{x}}(t), h_\lambda(t)\right\rangle\Big|_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} + \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}}\left(\left\langle \widehat{L}_x(t), h_\lambda(t)\right\rangle - \left\langle h_\lambda(t), \frac{d\widehat{L}_{\dot{x}}(t)}{dt}\right\rangle + o(\sqrt{\lambda})\right) dt$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{из уравнения}\\ \text{Эйлера}\end{array}\right| = -\lambda\left\langle \xi, \widehat{L}_{\dot{x}}(\tau)\right\rangle + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} o(\sqrt{\lambda})dt = -\lambda\left\langle \xi, \widehat{L}_{\dot{x}}(\tau)\right\rangle + o(\lambda).$$

В итоге: $0 \leqslant \psi(\lambda) - \psi(0) = \lambda\mathcal{E}(\tau, \widehat{x}(\tau), \dot{\widehat{x}}(\tau), \dot{\widehat{x}}(\tau)+\xi) + o(\lambda)$, что и требовалось.

■

2.3. Принцип максимума для задачи со свободным концом

Определение 2.6. Задачей оптимального управления со свободным (правым) концом называется экстремальная задача:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U;\\ J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\, dt \to \min.\end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Здесь $x \in \Re^n$, $u \in \Re^r$, f_0 — функция $n+r+1$ переменного, f — отображение из $\Re^{n+r+1}$ в $\Re^n$, U — некоторое (произвольное непустое) множество в $\Re^r$, отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован.

Задачу (2.3.1) рассмотрим в пространстве $Z = PC^1([t_0,\, t_1], \Re^n) \times PC([t_0,\, t_1], \Re^r)$ (декартовом произведении кусочно непрерывно-дифференцируемых вектор-функций из $[t_0, t_1]$ в $\Re^n$ и кусочно-непрерывных вектор-функций из $[t_0, t_1]$ в $\Re^r$).

Определение 2.7. Допустимую пару $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in Z$ назовём *оптимальным процессом* в задаче (2.3.1) или *сильным минимумом* в этой задаче, если существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которой $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\Re^n)} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Теорема 8 [25, необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина]. *Пусть* f_0 *и* f *— непрерывны вместе со своими частными производными по* x. *Тогда для (единственного) решения задачи Коши*

$$\dot{p}(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\bigg|_{(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))} \right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))} \right)^T p(t), \quad p(t_1) = 0 \qquad (2.3.2)$$

в любой точке τ *непрерывности функции* $\widehat{u}(\cdot)$ *выполнено соотношение (называемое принципом максимума Понтрягина)*

$$\langle p(\tau), f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}) \rangle - f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}) = \max_{u\in U} \left(\langle p(\tau), f(\tau, \widehat{x}(\tau), u) \rangle - f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), u) \right). \quad (2.3.3)$$

Доказательство. Доказательство (как и в случае условия Вейерштрасса) основано на построении *игольчатой вариации.*

$$u_\lambda(t) = u_{\lambda\tau v}(t) = \begin{cases} \widehat{u}(t), & t \notin [\tau - \lambda, \tau], \\ v, & t \in [\tau - \lambda, \tau], \end{cases} \quad (\lambda, \tau, v) \in \Re \times (t_0, t_1) \times U,$$

где τ — точка непрерывности $\widehat{u}(\cdot)$, $v \in U$, а λ — достаточно малое положительное число. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что при малом λ решение $x_\lambda(\cdot) = x_{\lambda\tau v}(\cdot)$ уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_\lambda(t))$, $x(t_0) = x^0$, определено на всем отрезке $[t_0, t_1]$ и дифференцируемо по параметру λ,

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} \widehat{x}(t), & t_0 \leqslant t \leqslant \tau - \lambda, \\ \widehat{x}(\tau - \lambda) + \displaystyle\int_{\tau-\lambda}^{t} f(s, x_\lambda(s), v)ds, & \tau - \lambda \leqslant t \leqslant \tau, \\ x_\lambda(\tau) + \displaystyle\int_{\tau}^{t} f(s, x_\lambda(s), \widehat{u}(s))ds, & \tau \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases} \qquad (a)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\lambda\to 0+} x_\lambda(t) = \widehat{x}(t)$.

Введем функцию

$$y(t) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\partial x_\lambda(t)}{\partial \lambda},$$

тогда по формуле Тэйлора

$$x_\lambda(t) = \widehat{x}(t) + \lambda y(t) + o(\lambda), \qquad (b)$$

и при $\lambda \to 0+$ выполняется

$$f_0(t, x_\lambda(t), v) = f_0(t, \widehat{x}(t), v) + \lambda \left\langle \frac{\partial f_0(t, \widehat{x}(t), v)}{\partial x}, y(t) \right\rangle + o(\lambda). \qquad (c)$$

Продифференцируем (a) по параметру λ и найдем предел:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leqslant t < \tau; \\ f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - \widehat{f}(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)), & t = \tau; \\ y(\tau) + \displaystyle\int_\tau^t \frac{\partial f(s, \widehat{x}(s), \widehat{u}(s))}{\partial x} y(s)ds, & \tau < t \leqslant t_1. \end{cases} \qquad (d)$$

Но тогда в силу (b), (c) и теоремы о среднем:

$$J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau} (f_0(t, x_\lambda(t), v) - f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)))\, dt +$$
$$\int_\tau^{t_1} (f_0(t, x_\lambda(t), \widehat{u}(t)) - f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)))\, dt =$$
$$\lambda\, (f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau))) + \lambda \int_\tau^{t_1} \left\langle \frac{\partial f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))}{\partial x}, y(t) \right\rangle dt + o(\lambda).$$

Применяем теперь такой же приём, что и при доказательстве леммы Дюбуа-Реймона. А именно, определим $p(\cdot)$ из соотношений (2.3.2). Тогда

$$\langle p(t_1), y(t_1)\rangle - \langle p(\tau), y(\tau)\rangle \overset{Id}{=} \int_\tau^{t_1} \frac{d}{dt}\langle p(t), y(t)\rangle\, dt \overset{Id}{=}$$
$$\int_\tau^{t_1} (\langle \dot{p}(t), y(t)\rangle + \langle p(t), \dot{y}(t)\rangle)\, dt \overset{(2.3.2)}{=} \int_\tau^{t_1} \left\langle \frac{\partial f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))}{\partial x}, y(t) \right\rangle dt +$$
$$+ \int_\tau^{t_1} \left\langle p(t), \dot{y}(t) - \frac{\partial f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))}{\partial x} y(t) \right\rangle dt \overset{Id}{=} \int_\tau^{t_1} \left\langle \frac{\partial f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))}{\partial x}, y(t) \right\rangle dt.$$

Отсюда, а также из (d) и (2.3.2) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) &= \lambda(f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)) + \\ &\langle p(t_1), y(t_1)\rangle - \langle p(\tau), y(\tau)\rangle) + o(\lambda) = \\ = \lambda(f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - f_0(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)) &- \langle p(\tau), f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - \widehat{f}(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau))\rangle) + o(\lambda), \end{aligned}$$

и значит (в силу того, что пара $(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))$ допустима и $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ — сильный минимум), мы приходим к неравенству (2.3.3). ■

2.4. Общая задача оптимального управления

Рассмотрим более общую постановку задачи оптимального управления (ОУ).

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2.4.1}$$

здесь $x \in \Re^n$, $u \in \Re^r$, f — отображение из $\Re^{n+r+1}$ в $\Re^n$.

Функции $u(t)$, $x(t)$ не могут быть произвольными, вследствии того, что при моделировании они обозначают определенные экономические признаки, и ограничения на них соответствуют естественным ограничениям моделируемой проблемы. Остановимся на следующей форме таких условий.

Конечные состояния $x(t_0)$, $x(t_1)$ и, возможно, сами значения границ временного промежутка t_0, t_1 связаны системой

$$\begin{cases} g_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant l, \\ g_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \ l+1 \leqslant i \leqslant m. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Если одно или оба значения t_0, t_1 фиксированы, то их следует опускать в (2.4.2).

Выбор параметров управления $u(t)$ ограничен некоторым непустым множеством U произвольной структуры, т.е.

$$u(t) \in U \subseteq \Re^r. \tag{2.4.3}$$

Каждая реализуемая пара $\{u(t), x(t)\}$ характеризуется некоторой мерой качества, в общем случае – функционалом

$$J\left(u(\cdot), t_0, x(t_0), t_1\right) = g_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt, \tag{2.4.4}$$

здесь $g_0 : \Re^{1+n+1+n} \to \Re$, $f_0 : \Re^{n+r+1} \to \Re$.

Определение 2.8. Функционал (2.4.4) называется *терминальным*, если в нем нетривиально только первое слагаемое, *интегральным* — второе, *смешанным*, если оба слагаемых нетривиальны.

Здесь считается, что система условий (2.4.1) - (2.4.3) совместна, т.е. существуют допустимые управления $u(t)$, значения t_0, $x(t_0)$ и t_1, такие, что соответствующая задача Коши для уравнения (2.4.1) разрешима, решение $x(t)$ единственно, и набор $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ удовлетворяет условиям (2.4.2). Требуется найти такую функцию $u(t)$ и, в общем случае, значения t_0, t_1, $x(t_0)$, для которых система (2.4.1) имеет решение $x(t)$, выполнены условия (2.4.2), (2.4.3) и функционал (2.4.4) достигает экстремума.

Определение 2.9. *Допустимым управлением* называется любая кусочно непрерывная функция, в точках разрыва непрерывная справа и удовлетворяющая включению (2.4.3).

Определение 2.10. *Допустимым процессом* называется набор функций $\{u(t),\ x(t) : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$, где $u(t)$ – допустимое управление, а $x(t)$ – соответствующее решение уравнения (2.4.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.4.2).

Под решением задачи ОУ будем понимать нахождение допустимого процесса, доставляющего минимум функционалу (2.4.4).

<u>*Определение 2.11.*</u> Допустимый процесс $\{u(t), x(t) : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ доставляет функционалу (2.4.4) *локальный минимум*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого процесса $\{\tilde{u}(t), \tilde{x}(t) : \tilde{t}_0 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_1\}$ такого, что $| \tilde{t}_0 - t_0 | \leqslant \varepsilon$, $| \tilde{t}_1 - t_1 | \leqslant \varepsilon$, $| \tilde{x}(t) - x(t) | \leqslant \varepsilon$ для $t \in [t_0, t_1] \cap [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ выполняется неравенство

$$J(u(\cdot), x(t_0), t_0, t_1) \leqslant J(\tilde{u}(\cdot), \tilde{x}(\tilde{t}_0), \tilde{t}_0, \tilde{t}_1).$$

В дальнейшем будет предполагаться, что все функции $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$ и $g_j(t, x, t_1, z)$, $j = 0, 1, \dots, m$ непрерывны по всем аргументам в окрестности оптимального процесса относительно фазовых аргументов (x, z), а относительно переменных управления u – непрерывны на U. Кроме того, в этой же области существуют и непрерывны производные $\dfrac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_k}$, $1 \leqslant i, k \leqslant n$ и все производные первого порядка функций $g_j(t, x, t_1, z)$, $0 \leqslant j \leqslant m$.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(\lambda_0, p, t, x, u) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(t, x, u), \tag{2.4.5}$$

Здесь λ_0 – число, p_i – сопряженные переменные, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\lambda_0, p(t), t, x(t), u(t))}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.4.6}$$

где $\{u(t), x(t)\}$ – допустимый процесс.

Определим терминальную функцию

$$\Phi(\lambda, t, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i g_i(t, x(t_0), t_1, x(t_1)), \tag{2.4.7}$$

здесь $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ – вспомогательные переменные.

Введем также обозначение для экстремального значения гамильтониана H по параметру управления

$$M(t) = \max\{H(\lambda_0, p(t), t, x(t), u) : u \in U\}. \tag{2.4.8}$$

Теорема 9 (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $\{u(t), x(t)\}$ *– решение задачи (2.4.1) - (2.4.4). Тогда существуют числа* $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, *не равные нулю одновременно, причем* $\lambda_i \geqslant 0$ *для* $i = 0, 1, \dots, l$, *и такое решение системы (2.4.6) – функция* $p(t)$, *для которых выполняются следующие условия:*

а) дополняющей нежесткости

$$\lambda_i g_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant l; \tag{2.4.9}$$

б) трансверсальности

$$p(t_1) = -\frac{\partial \Phi(\lambda, t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))}{\partial x(t_1)}, \tag{2.4.10}$$

$$p(t_0) = \frac{\partial \Phi(\lambda, t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))}{\partial x(t_0)}, \tag{2.4.11}$$

в) если время t_1 *подвижно, то*

$$M(t_1) = \left[\frac{\partial \Phi(\lambda, t_0, x, t_1, z)}{\partial t_1} \right]_{x=x(t_0), z=x(t_1)}, \tag{2.4.12}$$

если подвижно t_0, *то*

$$M(t_0) = -\left[\frac{\partial \Phi(\lambda, t_0, x, t_1, z)}{\partial t_0} \right]_{x=x(t_0), z=x(t_1)}; \tag{2.4.13}$$

г) максимума

$$H(\lambda_0, p(t), t, x(t), u(t)) = M(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{2.4.14}$$

Здесь теорема приводится без доказательства, которое можно посмотреть, например в [2, 25].

Замечание. Система условий оптимальности, представляемая теоремой, имеет вид краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных (x, p), с условием (2.4.8). Однако теперь в задачу входят новые параметры $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, подлежащие определению. Условие максимума позволяет выразить в каждый момент t параметр управления $u(t)$ в виде

$$u(t) = u(t, \lambda_0, x(t), p(t)). \tag{2.4.15}$$

Этим задача замыкается относительно функций $x(t)$, $p(t)$ и параметров λ, t_0, t_1. Порядок задачи равен $2n$ и число параметров $m+3$. Соответственно, для ее разрешимости требуется $2n+m+3$ уравнений, связывающих граничные значения функций $x(t)$, $p(t)$ и параметры.

В системе конечных условий (2.4.2), (2.4.9) - (2.4.11), (2.4.12) - (2.4.13) содержится $m + 2n + 2$ равенства, т.е. на одно равенство меньше требуемого. Однако условия, содержащие переменные (λ, p), однородны относительно них. Это значит, что вместе с набором $(\lambda, p(t))$ этим условиям также удовлетворяет набор $(c\lambda, cp(t))$, при любом $c > 0$. Из этого следует, что на переменные $(\lambda, p(t))$ можно наложить одно условие, например, нормировать этот набор или часть его. Поскольку принцип максимума гарантирует нетривиальность вектора λ, то можно наложить условие

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 = 1. \tag{2.4.16}$$

Если удается установить, что компонента $\lambda_0 > 0$ (отрицательной она быть не может), то вместо нелинейного условия (2.4.16) лучше положить λ_0 какому-нибудь определенному положительному числу, например 1. В общем случае можно рассмотреть два варианта решения, соответствующие выборам $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$.

Краевая задача в силу нелинейности может иметь неединственное решение. Условия равенства следует рассматривать совместно с неравенствами – первой группой условий (2.4.2) и условиями $\lambda_i \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant l$. Теорема гарантирует существование такого решения.

В дальнейшем рассмотрим несколько важных частных случаев общей задачи оптимального управления.

2.5. Задача с фиксированными концами

Определение 2.12. *Задачей с фиксированными концами* называется задача ОУ вида:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2.5.1}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \tag{2.5.2}$$

$$u(t) \in U, \tag{2.5.3}$$

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt \to \min. \tag{2.5.4}$$

Здесь временной промежуток $[t_0, t_1]$ и конечные состояния $x(t_0), x(t_1)$ фиксированы.

Применим теорему 9 к задаче (2.5.1)-(2.5.4). Функция Гамильтона-Понтрягина для этой задачи представляется в виде

$$H(\bar{p}, t, x, u) = \sum_{i=0}^{n} p_i f_i(t, x, u), \quad \bar{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n), \tag{2.5.5}$$

что соответствует (2.4.5) при $p_0 = -\lambda_0$. Сопряженная система (2.4.6) сохраняется:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\bar{p}(t), t, x, u(t))}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.5.6}$$

И терминальная функция (2.4.7) теперь будет

$$\Phi(\lambda, x(t_0), x(t_1)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i (x_i(t_0) - x_i^0) + \lambda_{n+i}(x_i(t_1) - x_i^1)\right). \tag{2.5.7}$$

Теорема 9 утверждает существование нетривиального набора $(p_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{2n})$, который определяет решение системы (2.5.6) такое, что выполняются условия (2.4.10)-(2.4.14). Условие дополняющей нежесткости (2.4.9) здесь отсутствует, т.к. нет условий-неравенств на конечные состояния траектории, и конечные условия (2.4.12), (2.4.13) отсутствуют ввиду закрепленности значений t_0, t_1.

Остановимся на условиях трансверсальности (2.4.10), (2.4.11), принимающих в соответствии с (2.5.7) вид

$$p_i(t_1) = -\lambda_{n+i}, \quad p_i(t_0) = \lambda_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.5.8}$$

Это полный набор краевых условий для системы (2.5.6) при заданных $\{x(t), u(t)\}$. Поскольку параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_{2n}$ неопределенные, то условия (2.5.8) ничего не дают для выбора значений $p(t_0)$, $p(t_1)$. Однако нетривиальность набора $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{2n}\}$ влечет нетривиальность вектора $(p_0, p_1(t), \dots, p_n(t))$ при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Действительно, если $\bar{p}(s) = 0$ при некотором $s \in [t_0, t_1]$, то $p_0 = 0$, система (2.5.6) становится однородной относительно переменных $p(t) = \{p_1(t), \cdots, p_n(t)\}$ и из $p(s) = 0$ следует $p(t) = 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. При этом из (2.5.8) следует $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2n} = 0$, т.е. набор $\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\}$ тривиальный.

После этих замечаний теорема 9 для специальной задачи (2.5.1) - (2.5.4) редуцируется к следующей.

Теорема 10. *Пусть* $\{u(t), x(t)\}$ *– решение задачи (2.5.1)-(2.5.4). Тогда существует нетривиальная векторная функция* $\bar{p}(t) = (p_0, p(t))$, *где* $p_0 \leqslant 0$ *– константа и* $p(t)$ *– решение системы (2.5.6), для которой в точках отрезка* $[t_0, t_1]$ *выполняется условие максимума*

$$H(\bar{p}(t), t, x(t), u(t)) = \max\{H(\bar{p}(t), t, x(t), u) : u \in U\} \equiv M(t). \qquad (2.5.9)$$

Замечание. Здесь система условий оптимальности сводится к краевой задаче (2.5.1), (2.5.2), (2.5.6) относительно функций $x(t)$, $p(t)$, параметра p_0 и условия максимума (2.5.9). Последнее позволяет выражать $u(t) = u(t, p(t), x(t))$ и замыкать краевую задачу относительно $(x(t), p(t))$. Избыточность переменных ($2n$ функций и один параметр p_0), как и в общем случае, несущественна в силу однородности выражений (2.5.5), (2.5.6), (2.5.9) относительно $\bar{p}(t)$. Эти переменные также можно нормировать или рассматривать два случая, соответствующие $p_0 = 0$ и $p_0 = -1$.

2.6. Задача быстродействия

<u>*Определение 2.13.*</u> *Задачей быстродействия* называется задача ОУ вида:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad (2.6.1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad g_i(t_1, x(t_1)) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant \ m, \qquad (2.6.2)$$

$$u(t) \in U, \qquad (2.6.3)$$

$$J = t_1 \to \min. \qquad (2.6.4)$$

Здесь требуется минимизировать время перевода системы $x(t)$ из заданного состояния $x(t_0)$ в конечное $x(t_1)$, определяемое второй группой условий (2.6.2).

Применим теорему 9 к этой задаче. Составим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(p, t, x, u) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(t, x, u); \qquad (2.6.5)$$

сопряженная система –

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(p(t), t, x, u(t))}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (2.6.6)$$

и функцию (2.4.7) запишем в виде

$$\Phi(\lambda, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \lambda_0 t_1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(t_1, x(t_1)) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j} \left(x_j(t_0) - x_j^0\right). \qquad (2.6.7)$$

Условия трансверсальности (2.4.10), (2.4.11) принимают вид

$$p_j(t_1) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(t_1, x(t_1))}{\partial x_j(t_1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad (2.6.8)$$

$$p_k(t_0) = \lambda_{m+k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad (2.6.9)$$

и конечное условие (2.4.12) для функции

$$M(t)=\max\{H(p(t),t,x(t),u): u\in U\}$$

суть равенство

$$M(t_1)=\lambda_0. \tag{2.6.10}$$

Согласно теореме 9 существуют нетривиальный набор множителей $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{m+n})$ и решение $p(t)$ системы (2.6.6), на оптимальном процессе $\{u(t),x(t)\}$, такие, что $\lambda_0\geqslant 0$, выполнены условия (2.6.8) - (2.6.10) и условие максимума

$$H(p(t),t,x(t),u(t))=M(t). \tag{2.6.11}$$

В рассматриваемом случае из нетривиальности набора множителей $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{m+n})$ следует нетривиальность его части $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Действительно, если $\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$, то из (2.6.8) следует $p_j(t_1)=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, и, так как система (2.6.6) однородна, то $p_j(t)=0$ на всем промежутке. При этом из (2.6.9) следует $\lambda_{m+1}=\ldots=\lambda_{m+n}=0$. Кроме того, из (2.6.5) следует $H(p(t),t,x(t),u(t))=M(t)=0$ и в силу (2.6.10) $\lambda_0=0$, т.е. весь набор $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{m+n})$ тривиален.

Рассмотрим краевые условия (2.6.8)-(2.6.10). Множители $\lambda_0,\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{m+n}$ входят только в равенства (2.6.9), (2.6.10), причем тривиальным образом, аналогично условиям (2.6.8) задачи с фиксированными концами. Соответственно, можно опустить условия (2.6.9), а равенство (2.6.10) с учетом информации $\lambda_0\geqslant 0$ заменить неравенством

$$M(t_1)\geqslant 0. \tag{2.6.12}$$

Краевая задача принципа максимума теперь состоит из системы дифференциальных уравнений (2.6.1), (2.6.6), условия максимума (2.6.11) и краевых условий (2.6.2), (2.6.8), связывающих конечные значения функций $x(t)$, $p(t)$ с m параметрами $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ и моментом окончания процесса t_1 (также параметром задачи). Порядок системы (2.6.1), (2.6.6) равен $2n$, число параметров $m+1$, а условий (2.6.2), (2.6.8) всего $2n+m$, т.е. на одно меньше требуемого. Однако, как и прежде, условия, содержащие сопряженные переменные p и множители λ однородны, следовательно, они инвариантны относительно масштабирования. Для определенности краевой задачи в этом случае требуется наложить одно условие на выбор λ. В качестве такого условия можно нормировать вектор λ или задать два варианта одной из компонент (0 или ненулевое число).

Итак, система (2.6.2), (2.6.8) достаточна для краевой задачи принципа максимума. При этом условие (2.6.12) может оказаться полезным в случае неединственности решений краевой задачи.

С учетом изложенного теорема 9 для задачи быстродействия (2.6.1) - (2.6.4) редуцируется к следующему утверждению.

Теорема 11. *Пусть* $\{u(t),x(t)\}$ *– решение задачи (2.6.1) - (2.6.4). Тогда существует нетривиальный набор чисел* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, *определяющих решение сопряженной системы (2.6.6) с условием (2.6.8) так, что в точках непрерывности* $u(t)$ *выполнено условие максимума (2.6.11), и в момент* $t=t_1$ *– условие (2.6.12).*

Остановимся на случае закрепленных концов траектории, т.е. рассмотрим вместо (2.6.2) условия

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1. \tag{2.6.13}$$

Это также задача быстродействия (2.6.1) - (2.6.4) при $m = n$, $g_i(t_1, x) = x_i(t_1) - x_i^1$. Соответственно, условие трансверсальности (2.6.8) перейдет в условие $p_j(t_1) = -\lambda_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Это условие также неинформативно, как и (2.6.9), и его также можно опустить вместе с множителями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Нетривиальность этих множителей влечет нетривиальность вектора $p(t_1)$, а значит и соответствующего решения $p(t)$ системы (2.6.6). При этом теорема 11 упрощается, переходя в следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть $\{u(t), x(t)\}$ – решение задачи (2.6.1), (2.6.13), (2.6.3), (2.6.4). Тогда существует нетривиальное решение $p(t)$ системы (2.6.6) такое, что в точках отрезка $[t_0, t_1]$ выполнено условие максимума (2.6.11) и при $t = t_1$ – условие (2.6.12).*

2.7. Связь задач ВИ и ОУ

В этом параграфе мы рассмотрим связь между теорией оптимального управления и классическим вариационным исчислением.

Для выявления основных моментов этой связи достаточно детального рассмотрения простейшей задачи вариационного исчисления. Связь между вариационным исчислением и оптимальным управлением устанавливается благодаря возможности переформулирования задачи ВИ в задачу ОУ. Для простейшей задачи (2.1.1) это достигается простым обозначением

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{2.7.1}$$

При этом

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt, \tag{2.7.2}$$

и поставленная задача ВИ становится задачей ОУ: найти кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ такую, что соответствующее решение $x(t)$ системы (2.7.1) удовлетворяет краевым условиям $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ и доставляет функционалу (2.7.2) наименьшее значение.

Таким образом, исходная задача ВИ эквивалентна частному случаю задачи ОУ с фиксированными концами. Множество значений параметра управления u здесь $U = \Re^n$.

Применим к задаче (2.7.1), (2.7.2) теорему 10. Функция Гамильтона-Понтрягина —

$$H(\bar{p}, t, x, u) = p_0 L(t, x, u) + \langle p, u \rangle,$$

и сопряженная система —

$$\dot{p} = -p_0 \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial x}, \quad p_0 \leqslant 0. \tag{2.7.3}$$

В силу теоремы 10 существует такая нетривиальная векторная функция $\bar{p}(t) = (p_0, p_1(t), \cdots p_n(t))$, где $p_0 \leqslant 0$ и $(p_1(t), \cdots, p_n(t))$ – решение системы (2.7.3), что в точках непрерывности функции $u(t)$ выполнено условие максимума

$$H(\bar{p}(t), t, x(t), u(t)) = \max\{H(\bar{p}(t), t, x(t), u) : u \in \Re^n\}. \tag{2.7.4}$$

Здесь справа операция безусловного экстремума по u, поэтому из этого условия следует система равенств

$$\frac{\partial H(\bar{p}(t), t, x(t), u(t))}{\partial u} = p_0 \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial u} + p(t) = 0. \tag{2.7.5}$$

Из (2.7.5) получаем, что, если $p_0 = 0$, то $p(t) \equiv 0$, следовательно p_0 произвольное отрицательное число. Положим $p_0 = -1$, тогда (2.7.5) переходит в

$$p(t) = \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial u}. \tag{2.7.6}$$

Дифференцируя эти равенства и используя (2.7.1) и (2.7.3), получим

$$\frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}. \tag{2.7.7}$$

Система (2.7.7) – уравнение Эйлера (2.1.3). Мы получили это условие из принципа максимума, представляющее необходимое условие локального минимума. Принцип максимума дает гораздо больше информации о решении задачи ВИ, чем уравнения Эйлера. Предположим, что существуют и непрерывны вторые производные $\partial^2 L(t, x, u)/\partial u^2$. Тогда существует матрица

$$\frac{\partial^2 H(\bar{p}, t, x, u)}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 L(t, x, u)}{\partial u^2}, \tag{2.7.8}$$

и для задачи безусловной максимизации (2.7.4) выполняется необходимое условие второго порядка – неположительная определенность квадратичной формы

$$\left\langle \frac{\partial^2 H(\bar{p}(t), t, x(t), u(t))}{\partial^2 u} v, v \right\rangle \leqslant 0$$

при любых $v \in \Re^n$. Переписав это с учетом (2.7.1), (2.7.8), получим неравенство

$$-\left\langle \frac{\partial^2 L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x^2} v, v \right\rangle \leqslant 0, \quad v \in \Re^n,$$

или же неотрицательную определенность матрицы

$$\frac{\partial^2 L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x^2} \geqslant 0 \tag{2.7.9}$$

на экстремалях задачи.

Определение 2.14. Условие (2.7.9) в ВИ называется *условием Лежандра.*

Условие Лежандра является необходимым условием локального слабого минимума, оно позволяет в общем случае исключать некоторые экстремали в случае неединствености решения уравнений Эйлера (2.7.7) с условиями $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Из условия максимума (2.7.4) получается еще одно важное необходимое условие. Очевидно, соотношение (2.7.4) эквивалентно неравенству

$$H(\bar{p}(t), t, x(t), u(t)) \geqslant H(\bar{p}(t), t, x(t), v), \quad v \in \Re^n.$$

По определению H, в силу $p_0 = -1$ и связи (2.7.6) это дает для $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $v \in \Re^n$

$$L(t, x(t), v) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \left\langle v - \dot{x}(t), \frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right\rangle \geqslant 0. \qquad (2.7.10)$$

Условие (2.7.10) – суть условие Вейерштрасса (2.2.1).

Итак, мы получили для исходной задачи ВИ из принципа максимума три важнейших классических условия. Это можно делать и для более общих задач ВИ, используя стандартные приемы сведения их к задачам ОУ.

Определение 2.15. *Изопериметрической задачей* называется задача (2.1.1) с дополнительными условиями

$$\int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (2.7.11)$$

где L_i – функции с аналогичными L свойствами гладкости, и a_i – заданные числа. Эта задача сводится к задаче ОУ помимо введения управления $u(t)$ согласно (2.7.1) также введением дополнительных фазовых переменных $x_{n+i}(t)$, определяемых задачами Коши

$$\dot{x}_{n+i} = L_i(t, x, u), \quad x_{n+i}(t_0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (2.7.12)$$

Очевидно, изопериметрические условия (2.7.11) эквивалентны условиям

$$x_{n+i}(t_1) = a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (2.7.13)$$

Таким образом, задача (2.1.1), (2.7.11) эквивалентна задаче ОУ (2.7.1), (2.7.2), (2.7.12), (2.7.13) с краевыми условиями из задачи (2.1.1). Применив к последней теорему 10, можно получить известные в ВИ условия экстремума для изопериметрической задачи (см. [25, 1]).

2.8. Динамика фирмы

Вернемся к модели динамики фирмы, которая была обозначена во введении. Напомним, что переменные K, X и B обозначают объем капитала фирмы, доход фирмы и кредитную задолженность, соответственно.

Выполняются следующие условия:

– текущий доход фирмы зависит от капитала и определяется некоторой производственной функцией $R(K)$, т.е. $X(t) = R(K(t))$;

– доход идет на инвестиции, амортизацию капитала и отчисления остатка прибыли на депозит u;

– фирма имеет возможность брать банковский кредит, регулируя тем самым имеющийся объем капитальных ресурсов;

– кредитная задолженность не может превышать фиксированного процента a текущего объема капитала $0 \leqslant B(t) \leqslant aK(t)$;

– цель фирмы состоит в максимизации суммарной дисконтированной суммы на депозите за период $[t_0, t_1]$. Она достигается путем распределения дохода на депозитный счет $u(t)$ и погашение кредита $v(t)$.

Введем параметры b – норма амортизации капитала, r – ставка кредита (банковского и своего), тогда в модель можно добавить следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\dot{K} = R(K(t)) - bK(t) - u(t) + v(t) - rB(t), \quad K(t_0) = K^0;\\ \dot{B} = v(t), \quad B(t_0) = B^0;\\ u(t) \geqslant 0, \quad v(t) \in (-\infty; +\infty);\\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \exp\left(-rt\right) u(t) dt \to \sup .\end{gathered}$$

Исследуем полученную модель. Определим новую переменную $y = K - B$, динамика для новой переменной примет вид

$$\dot{y} = \dot{K} - \dot{B} = R\left(y + B\right) - b\left(y + B\right) - u - rB.$$

Так как $0 < a < 1$, то в силу фазовых ограничений на кредитную задолженность имеем неотрицательность введенной переменной $y(t) \geqslant 0$, а также условие на B :

$$\begin{gathered}0 \leqslant B \leqslant a\left(y + B\right), \quad \Rightarrow\\ 0 \leqslant B \leqslant \frac{a}{1-a} y. \qquad (2.8.1)\end{gathered}$$

Пусть $\alpha = \dfrac{a}{1-a}$, введем управление $\omega\left(t\right):\ \ 0 \leqslant \omega\left(t\right) \leqslant 1$, тогда ограничение (2.8.1) становится эквивалентным условию $B(t) = \alpha\omega(t)y(t)$.

Таким образом, учитывая, что $K = y + B = (1 + \alpha\omega)y$, получаем модифицированную задачу ОУ

$$\begin{gathered}\dot{y} = R\left(\left(1 + \alpha\omega\right) y\right) - \left(b\left(1 + \alpha\omega\right) + \alpha r\omega\right) y - u,\\ y(0) = y^0 = K^0 - B^0;\\ y(t) \geqslant 0, \quad u(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \omega\left(t\right) \leqslant 1;\\ J = \int\limits_0^T \exp\{-rt\} u\left(t\right) dt \to \max_{u,\omega} .\end{gathered} \qquad (2.8.2)$$

Будем предполагать, что $R(K)$ удовлетворяет всем свойствам неоклассической производственной функции [17]: $R'(K) > 0$, $R''(K) < 0$, $R(0) = 0$, $R(+\infty) = +\infty$. В этом случае, правая часть дифференциального уравнения в (2.8.2) представляет разность строго вогнутой (монотонно возрастающей) $R\left(\left(1 + \alpha\omega\right) y\right)$ и линейной (возрастающей) $\left(b\left(1 + \alpha\omega\right) + \alpha r\omega\right) y$ функций, в силу свойств этих функций $\dot{y}$ положительна на некотором интервале $(0; \tau)$, отрицательна на $(\tau; +\infty)$, следовательно, $y(t)$ вначале возрастает, а затем убывает. Таким образом, требование условия $y(t) \geqslant 0$ эквивалентно $y(T) \geqslant 0$.

Для задачи (2.8.2) составим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p, x, u, t) = p\{R((1 + \alpha\omega)y) - (b(1 + \alpha\omega) + \alpha r\omega)y - u\} + \exp\{-rt\}u \qquad (2.8.3)$$

и терминальную функцию (с учетом замены условия $y(t) \geqslant 0$ на $y(T) \geqslant 0$)

$$\Phi(y(0), y(T)) = \lambda_1 y\,(0) + \lambda_2\,(-y\,(T))\,.$$

Для переменной λ_2 выполняется условие неотрицательности $\lambda_2 \geqslant 0$ и условие дополняющей нежесткости $\lambda_2\,(-y\,(T)) = 0$.

Задача Коши для сопряженной переменной $p(t)$ имеет вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\left[(1+\alpha\omega)\,R'\left((1+\alpha\omega)\,y\right) - \left(b\,(1+\alpha\omega) + \alpha r\omega\right)\right] p$$

с конечными условиями

$$p(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y\,(T)} = \lambda_2 \geqslant 0.$$

Рассмотрим условия максимума функции (2.8.3) по переменным u, ω. Функция (2.8.3) линейна относительно u, следовательно, максимум достигается на границе допустимых u. Если $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ положительно, то максимум недостижим (u справа неограниченно), тогда необходимым условием максимума будет

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \exp\{-rt\} - p(t) = \begin{cases} \leqslant 0, & \forall t; \\ < 0, & u(t) = 0; \\ = 0, & u(t) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.8.4}$$

Что касается второй переменной управления, то здесь приходится анализировать более сложный вариант: функция (2.8.3) строго вогнута по переменной ω, имеет единственную точку максимума (глобальный максимум), тогда, если максимальное значение внутри допустимого множества $(\omega \in (0;1))$, то выполняется теорема Ферма, в противном случае решением будут границы допустимого множества:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \left(R'\left((1+\alpha\omega)\,y\right) - r - b\right)\alpha y p = \begin{cases} < 0, & \omega = 0; \\ = 0, & \omega \in (0,1)\,; \\ > 0, & \omega = 1. \end{cases} \tag{2.8.5}$$

Из условия (2.8.4) $p(t) \geqslant \exp\{-rt\} > 0 \Rightarrow p(T) > 0$, так как $p(T) = \lambda_2$, то $y(T) = 0$. Последнее означает, что $K(T) = B(T)$, то есть банковский долг погашен, и все капитальные ресурсы полностью переводятся на депозит (фирма ликвидируется).

Рассмотрим функцию $P(K) = R(K) - (b+r)K$ (доход минус приведенная амортизация). В силу свойств $R(K)$ функция $P(K)$ – строго вогнута и имеет максимум, который находится из необходимого условия $P'(\overline{K}) = 0$, т.е. $R'(\overline{K}) = b + r$. При этом

$$P'(K) = \begin{cases} > 0, & 0 \leqslant K < \overline{K}; \\ < 0, & K > \overline{K}. \end{cases}$$

Заменив в полученном условии K на $(1+\alpha\omega)y$ имеем

$$P'((1+\alpha\omega)y) = \begin{cases} > 0, & (1+\alpha\omega)\,y < \overline{K} \\ = 0, & (1+\alpha\omega)\,y = \overline{K} \\ < 0, & (1+\alpha\omega)\,y > \overline{K}. \end{cases}$$

Заметим, что $\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = P'((1+\alpha\omega)y)\alpha yp$, и, так как $\alpha yp > 0$, знаки P' и $\dfrac{\partial H}{\partial \omega}$ совпадают, следовательно, правило выбора оптимального управления ω формулируется:

$$\omega = \begin{cases} 1, & y < \dfrac{\overline{K}}{1+\alpha}; \\ \overline{\omega}\,(y)\,, & \dfrac{\overline{K}}{1+\alpha} \leqslant y \leqslant \overline{K}; \\ 0, & y > \overline{K}. \end{cases}$$

$\overline{\omega}(y)$ находят из уравнения $(1+\alpha\overline{\omega})y = \overline{K}$, то есть $\overline{\omega}(y) = \dfrac{\overline{K}-y}{\alpha y} \in [0,1]\,.$

Вернемся к управлению u, пусть $u(t) > 0$, из условия (2.8.4) $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, следовательно, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$. Рассмотрим полученное соотношение: так как $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, то $p(t) = \exp\{-rt\} > 0$, продифференцируем по t выражение (2.8.4)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial u} = -r\exp\{-rt\} - \dot{p} = \\ &\quad = -r\exp\{-rt\} + [(1+\alpha\omega)\,R'\,((1+\alpha\omega)\,y) - (b\,(1+\alpha\omega) + \alpha r\omega)]\exp\{-rt\} = \\ &\quad = \exp\{-rt\}\,(1+\alpha\omega)\,(R'\,((1+\alpha\omega)\,y) - b - r) = 0, \end{aligned}$$

последнее эквивалентно условию $P'((1+\alpha\omega)\,y) = 0$, т.е. $u(t) > 0$ только на магистральном уровне капитала $\overline{K}$.

Исходя из дифференциального уравнения в (2.8.2) целевой функционал можно привести к виду

$$J = \int\limits_0^T \exp\{-rt\}u(t)dt = -\exp\{-rt\}y(t)\Big|_0^T + \int\limits_0^T \exp\{-rt\}P\,((1+\alpha\omega)\,y)\,dt =$$
$$= K_0 - B_0 + \int\limits_0^T \exp\{-rt\}P\,((1+\alpha\omega)\,y)\,dt,$$

для этого нужно из дифференциального уравнения выразить $u(t)$, подставить в функционал и проинтегрировать по частям слагаемое, содержащее $\dot{y}$. Полученный вид функционала показывает, что его максимум достигается тогда, когда P достигает максимума, т.е. уровня капитала $\overline{K}$. Таким образом, решение $\{u(t), \overline{\omega}, y\,(t)\}$ будет оптимальным, если обеспечит уровень $\overline{K}$ вдоль магистрали, этого можно достигнуть, если положить $u(t) = P(\overline{K})$.

Выполнение условия $y(T) = 0$ достигается скачком: мгновенным переводом капитала на депозит.

2.9. Примеры решения задач

Задачи данного раздела взяты из [7, 12]. Некоторые решения изменены, в некоторых устранены ошибки.

Пример 2.1.

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^1\left(\dot{x}^2-x\right)dt+x^2\left(1\right)\to\text{extr}.$$

Решение. Выпишем необходимые условия экстремума:
а) уравнения Эйлера $-\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0\Leftrightarrow 2\ddot{x}+1=0;$
б) условия трансверсальности

$$L_{\dot{x}}\left(0\right)=l_{x(0)},\ L_{\dot{x}}\left(1\right)=-l_{x(1)}\ \Leftrightarrow\ 2\dot{x}\left(0\right)=0,\ 2\dot{x}\left(1\right)=-2x\left(1\right).$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x\left(t\right)=-\dfrac{t^2}{4}+C_1t+C_2.$

Из условий трансверсальности находим, что $C_1=0,\quad C_2=3/4.$ Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}\left(t\right)=\left(3-t^2\right)/4.$ Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h\left(\cdot\right)\in C^1\left(\left[t_0,t_1\right]\right),$ то

$$J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)+h\left(\cdot\right)\right)-J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{h}dt+\int\limits_0^1 h^2dt-\int\limits_0^1 hdt+2\hat{x}\left(1\right)h\left(1\right)+h^2\left(1\right).$$

Интегрируя по частям первое слагаемое и учитывая, что $\hat{x}\left(t\right)=\left(3-t^2\right)/4,$ получим

$$J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)+h\left(\cdot\right)\right)-J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)\right)=2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(2\ddot{\hat{x}}+1\right)hdt+$$
$$+\int\limits_0^1\dot{h}^2dt+2\hat{x}\left(1\right)h\left(1\right)+h^2\left(1\right)=\int\limits_0^1\dot{h}^2dt+h^2\left(1\right)\geqslant 0.$$

Ответ: $\hat{x}\left(t\right)=\left(3-t^2\right)/4\in\text{absmin}.$

Пример 2.2. (допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет глобальный экстремум).

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^1\dot{x}^2dt\to\inf;\quad x\left(0\right)=0,\quad x\left(1\right)=1.$$

Решение. В данном случае уравнение Эйлера: $\ddot{x}=0.$

Общее решение: $x=C_1t+C_2.$ Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}=t.$ Экстремаль доставляет глобальный минимум в задаче. Действительно, пусть $h\left(\cdot\right)\in C^1\left(\left[0,1\right]\right)$ и $h(0)=h(1)=0.$ Тогда $\hat{x}\left(\cdot\right)+h\left(\cdot\right)$ – допустимая в задаче функция и

$$J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)+h\left(\cdot\right)\right)-J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)\right)=\int_0^1\left(\dot{\hat{x}}+\dot{h}\right)^2dt-\int_0^1\dot{\hat{x}}^2dt=$$
$$=2\int_0^1\dot{h}dt+\int_0^1\dot{h}^2dt=\int_0^1\dot{h}^2dt\geqslant 0.$$

Ответ: $\hat{x}(t) = t \in \mathrm{absmin}$.

Пример 2.3. (экстремаль существует, единственна, доставляет глобальный экстремум, но не является непрерывно дифференцируемой функцией). Пример Гильберта

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2 dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение. Уравнение Эйлера: $\dfrac{d}{dt}\left(2t^{2/3}\dot{x}\right) = 0 \Leftrightarrow t^{2/3}\dot{x} = C \Leftrightarrow \dot{x} = Ct^{-2/3}$.

Общее решение: $x = C_1 t^{1/3} + C_2$. Единственная экстремаль, удовлетворяющая условиям на концах: $\hat{x} = t^{1/3}$. Ясно, что экстремаль не является функцией класса $C^1([0,1])$, так как $\hat{x}(\cdot) \notin C^1([0,1])$. Покажем тем не менее, что она доставляет глобальный минимум в задаче среди всех абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих краевым условиям, для которых интеграл $J(x(\cdot))$ конечен. Действительно, пусть $h(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $h(0) = h(1) = 0$, тогда

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J\left(\dot{\hat{x}}(\cdot)\right) = \int_0^1 t^{2/3}\left(\frac{t^{-2/3}}{3} + \dot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 t^{2/3}\left(\frac{t^{-2/3}}{3}\right)^2 dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\dot{h}dt + \int_0^1 t^{2/3}\dot{h}^2 dt = \int_0^1 t^{2/3}\dot{h}^2 dt \geqslant 0.$$

Ответ: $\hat{x}(t) = t^{1/3} \in \mathrm{absmin}$.

Пример 2.4. (решение задачи и допустимой экстремали не существует даже среди абсолютно непрерывных функций). Пример Вейерштрасса

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 t^2\dot{x}^2 dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение. Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\left(2t^2\dot{x}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2\dot{x} = C \;\Leftrightarrow\; \dot{x} = C/t^2.$$

Общее решение: $x = C_1/t + C_2$. Экстремали, удовлетворяющие краевому условию $x(0) = 0$, не существует.

Очевидно, что $J(x(\cdot)) \geqslant 0$, и для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \neq 0$ $J(x(\cdot)) > 0$. Покажем, что нижняя грань в задаче равна нулю. Рассмотрим последовательность допустимых функций $x_n(t) = \dfrac{\mathrm{arctg}(nt)}{\mathrm{arctg}(n)}$. Имеем

$$J(x_n(\cdot)) = \int_0^1 t^2 \frac{n^2}{(1+n^2t^2)^2\,\mathrm{arctg}^2(n)} dt = \frac{(n^2+1)\,\mathrm{arctg}(n) - n}{2n(n^2+1)\,\mathrm{arctg}^2(n)} \to 0.$$

Ответ: решения нет.

Пример 2.5. (допустимая экстремаль существует, единственна, но не доставляет решения).

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{0}^{3\pi/2}\left(\dot{x}^{2}-x^{2}\right)dt\rightarrow\inf;\quad x\left(0\right)=x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$

Решение. Уравнение Эйлера: $\ddot{x}+x=0$.

Общее решение: $x=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}\equiv 0$.

Рассмотрим последовательность функций $x_n\left(t\right)=\left(1/n\right)\sin\left(2t/3\right)$. Очевидно, что $x_n\left(\cdot\right)$ – допустимые функции и $x_n\left(\cdot\right)\rightarrow x\left(\cdot\right)\equiv 0$ в $C^1\left(\left[0,3\pi/2\right]\right)$, но при этом

$$J\left(x_n\left(\cdot\right)\right)=\frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9}-1\right)=-\frac{5\pi}{12n^2}<0=J\left(\hat{x}\left(\cdot\right)\right).$$

Из данного примера, в частности, видно, что уравнение Эйлера – необходимое, но не достаточное условие экстремума.

Ответ: решения нет.

Пример 2.6.

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{0}^{1}\left(\left(1-\dot{x}^{2}\right)^{2}+x^{2}\right)dt\rightarrow\inf;\quad x\left(0\right)=0,\quad x\left(1\right)=0.$$

Решение. Нижняя грань функционала равна здесь нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть минимизирующую последовательность функций из $PC^1\left(\left[0,1\right]\right)$:

$$x_n\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}\operatorname{sign}\left(\sin(2\pi n\tau)\right)d\tau,\quad n=1,2,...$$

Функции $x_n\left(\cdot\right)$ равномерно стремятся к нулю, а $\left|\dot{x}_n\left(t\right)\right|=1$, за исключением конечного числа точек, т.е. $J\left(x_n\left(\cdot\right)\right)\rightarrow 0$. С другой стороны, если $x\left(t\right)\equiv 0$, то $J\left(x\left(\cdot\right)\right)=1$, а если $x\left(t\right)\neq 0$, то $J\left(x\left(\cdot\right)\right)\geqslant\int\limits_{0}^{1}x^2dt>0$. Таким образом, нижняя грань функционала не достигается ни на одной допустимой функции.

Последовательности функции, подобные $x_n\left(\cdot\right)$, называются «скользящими режимами», ибо управление в них (в данном примере – производная) как бы скользит между некоторыми значениями (в данном случае между $+1$ и -1).

Ответ: решения нет.

Пример 2.7.

$$\int\limits_{0}^{1}\dot{x}^{2}dt\rightarrow\mathrm{extr};\int\limits_{0}^{1}xdt=0,\quad x\left(0\right)=0,\quad x\left(1\right)=1.$$

Эта задача относится к классу изопериметрических.

Решение. Выпишем лагранжиан задачи $L=\lambda_0\dot{x}^2+\lambda x$.

Необходимое условие – уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + \lambda = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0,$ то $\lambda = 0$ – все множители Лагранжа – нули. В этом случае допустимых экстремалей нет. Положим $\lambda_0 = 1/2.$ Тогда $\ddot{x} = \lambda.$ Общее решение: $x(t) = C_1t^2 + C_2t + C_3.$

Неизвестные константы $C_1,$ $C_2,$ C_3 находим из условий на концах и изопериметрических условий:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$$
$$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$$
$$\int_0^1 xdt = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(C_1t^2 + C_2t\right)dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -2.$$

В задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t.$ Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}(t)$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h(\cdot) \in C^1([0,1])$ такую, что $(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot))$ допустимая. Для этого надо взять функцию $h(\cdot),$ для которой $h(0) = h(1) = 0$ и $\int_0^1 hdt = 0.$ Тогда для функционала $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt$ имеем

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \left(\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt = \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{h}^2 dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geqslant$$
$$\geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}dt = 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}dh = 2\dot{\hat{x}}h\int_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}hdt = -12\int_0^1 hdt = 0.$$

Нетрудно посчитать значение функционала на оптимальной траектории $\int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt = \int_0^1 (6t-2)^2 dt = 4.$

Ответ. Функция $\hat{x} = 3t^2 - 2t$ доставляет в задаче абсолютный минимум; значение функционала $4.$

Пример 2.8.

$$\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Решение. Рассмотрим случай, когда функционал стоит на $\min,$ и сведем к задаче оптимального управления, сделав замену переменных $x_1 = x,$ $x_2 = \dot{x},$ $u = \ddot{x}:$

$$\int_0^1 u^2 dt \to \min; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1.$$

Составим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(p,t,x,u) = -\lambda_0 u^2 + p_1x_2 + p_2u$$

и терминальную функцию

$$\Phi(\lambda, x(0), x(1)) = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 (x_1(1) - 1).$$

Необходимые условия:

а) так как на $u(t)$ нет ограничений, то $\dfrac{\partial H(p,t,x,u)}{\partial u} = 0 \Rightarrow -2\lambda_0 u + p_2 = 0;$

б) уравнения для сопряженных переменных $\dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H(p,t,x,u)}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H(p,t,x,u)}{\partial x_2} = -p_1;$

в) трансверсальность:

$$p_1(0) = \frac{\partial \Phi(\lambda, x(0), x(1))}{\partial x_1(0)} = \lambda_1, \quad p_1(1) = -\frac{\partial \Phi(\lambda, x(0), x(1))}{\partial x_1(1)} = -\lambda_3,$$

$$p_2(0) = \frac{\partial \Phi(\lambda, x(0), x(1))}{\partial x_2(0)} = \lambda_2, \quad p_2(1) = -\frac{\partial \Phi(\lambda, x(0), x(1))}{\partial x_2(1)} = 0.$$

Поскольку концы отрезка интегрирования фиксированы, то условие стационарности по t_0, t_1 не выписываем. Условия дополняющей нежесткости и неотрицательности также отсутствуют ввиду отсутствия ограничений типа неравенств.

Если $\lambda_0 = 0$, то из а) следует, что $p_2 \equiv 0$; тогда из б) $p_1 \equiv 0$; следовательно из в) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – все сопряженные переменные – нули. Итак, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

Пусть $\lambda_0 > 0$ (например, $\lambda_0 = 0,5$). Из б) $p_1(t) = C_1 \Rightarrow p_2(t) = -C_1 t + C_2$; из в) $p_2(1) = -C_1 + C_2 = 0$, т.е. $C_1 = C_2$; из а) $u(t) = p_2(t) = C_1 - C_1 t$. Подставляя в систему дифференциальных уравнений задачи оптимального управления $u(t)$, получаем $x_2(t) = C_1 t - \dfrac{C_1}{2} t^2 + C_3$, используем условие $x_2(0) = 0 \Rightarrow x_2(t) = C_1 t - \dfrac{C_1}{2} t^2$. Далее $x_1(t) = \dfrac{C_1}{2} t^2 - \dfrac{C_1}{6} t^3 + C_4$, используем краевые условия $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1 \Rightarrow x_1(t) = \dfrac{3t^2 - t^3}{2}$.

Таким образом, единственная допустимая экстремаль исходной задачи: $\hat{x}(t) = \dfrac{3t^2 - t^3}{2}$. Покажем с помощью непосредственной проверки, что $\hat{x} \in \text{absmin}$. Возьмем функцию $h(\cdot) \in C^2([0,1])$, такую, что $(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot))$ – допустимая в задаче. Для этого надо взять функцию $h(\cdot)$ со следующими условиями на концах: $h(0) = \dot{h}(0) = h(1) = 0$. Рассмотрим функционал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{x}^2 dt.$$

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \left(\ddot{\hat{x}} + \ddot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h} dt + \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h} dt = 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}} d\dot{h} = 2\ddot{\hat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \dddot{\hat{x}}\dot{h} dt =$$

$$= -2\int_0^1 \dddot{\hat{x}} dh = -2\dddot{\hat{x}}h\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \ddddot{\hat{x}} h dt = 0.$$

Таким образом, $J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)) \geqslant J(\hat{x}(\cdot))$ и, следовательно, $\hat{x}(\cdot) \in \text{absmin}$, $J(\hat{x}(\cdot))=3$.

Очевидно, что $J(x(\cdot))$ не ограничено сверху на допустимых траекториях. Действительно, возьмем последовательность $x_n(t)=\hat{x}(t)+nh(t)$, где $h(\cdot)$ – некоторая функция из $C_0^2([0,1])$, такая, что $\ddot{h}\neq 0$, например $h(t)=t^2(t-1)^2$. Тогда $J(\hat{x}(\cdot)) \to +\infty$ при $n\to\infty$.

Пример 2.9.

$$J(x(\cdot),T)=\int\limits_0^T \left(\dot{x}^2-x+1\right)dt \to \min;\;\; x(0)=0.$$

Предполагается, что $T \geqslant 0$. Эта задача отличается от предыдущих тем, что в ней подвижным является время окончания процесса T.

Решение. Введем переменную $u=\dot{x}$. В этих переменных исходная задача записывается как задача ОУ:

$$\begin{aligned} &\dot{x}=u, \quad x(0)=0,\\ &J(x(\cdot),T)=\int\limits_0^T \left(u^2-x+1\right)dt \to \min_{u(\cdot)}; \end{aligned}$$

Составим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p,t,x,u)=-\lambda_0\left(u^2-x+1\right)+pu.$$

Необходимые условия:

а) так как на u нет никаких ограничений, то

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u-p=0;$$

б) где $\dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\lambda_0;$

в) условия трансверсальности для p, в данном случае терминальная функция $\Phi(\lambda,x(0),x(T))=\lambda x(0)$, тогда

$$p(0)=\frac{\partial \Phi}{\partial x(0)}=\lambda, \quad p(T)=-\frac{\partial \Phi}{\partial x(T)}=0;$$

г) так как T – подвижно, то

$$-\lambda_0\left(u^2(T)-x(T)+1\right)+p(T)u(T)=\frac{\partial \Phi}{\partial T}=0$$

Если $\lambda_0=0$, то из а) следует, что $p(t)\equiv 0$, из в) получаем $\lambda=0$, т.е. все множители Лагранжа оказались нулями.

Положим $\lambda_0=1$. Тогда из а) вытекает, что $u=p/2$, из б) и в) $p(t)=T-t$, соответственно, $u(t)=(T-t)/2 \Rightarrow u(T)=0$, следовательно, условие г) эквивалентно $x(T)=1$. Получаем $\dot{x}=(T-t)/2 \Rightarrow x(t)=Tt/2-t^2/4+C$, так как $x(0)=0$, то $C=0$, из условия $x(T)=1$ получаем $T^2/2-T^2/4=1 \Rightarrow \hat{T}=\pm 2$.

В силу условия задачи $T \geqslant 0$ имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = t - t^2/4$, рассматриваемая на отрезке $[0,2]$. Покажем, что $(\hat{x}(\cdot), 2) \notin$ locmin. Действительно, для функции $\hat{x}(t) = t - t^2/4$

$$J(\hat{x}(\cdot), T) = \int_0^T \left(\dot{\hat{x}}^2 - \hat{x} + 1\right) dt = \int_0^T \left(\left(-\frac{t}{2} + 1\right)^2 - \left(-\frac{t^2}{4} + t\right) + 1\right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(2 - 2t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^T \frac{(t-2)^2}{2} dt = \frac{(T-2)^3}{6} - \frac{4}{3}.$$

При $T > \hat{T}$ значение функционала $J(\hat{x}(\cdot), T) > -4/3$, а при $T < \hat{T}$ $J(\hat{x}(\cdot), T) < -4/3$, следовательно, найденное решение не является локальным экстремумом поставленной задачи. Покажем, что функционал на допустимых траекториях не ограничен снизу, возьмем последовательность пар $x_n(t) = t$, $T_n = n$, тогда $J(x_n(\cdot), T_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Пример 2.10.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1.$$

Решение. Введем переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u = \ddot{x}$, тогда исходная задача примет вид задачи ОУ

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 1;$$

с минимизацией функционала $\int_0^1 u^2 dt$ для поиска локальных минимумов, минимизацией функционала $\int_0^1 (-u^2) dt$ для поиска локальных максимумов.

Найдем локальные минимумы. Составим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p, t, x, u) = -\lambda_0 u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

и терминальную функцию

$$\Phi(\lambda, x(0), x(1)) = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_1(1) + \lambda_4 (x_2(1) - 1).$$

Запишем сопряженную систему для $p(t)$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1.$$

Условия трансверсальности: $p_1(0) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1(0)} = \lambda_1$, $p_2(0) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2(0)} = \lambda_2$, $p_1(1) = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1(1)} = -\lambda_3$, $p_2(1) = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2(1)} = -\lambda_4$.

Так как на $u(t)$ нет никаких ограничений, то для условия максимума функции Гамильтона-Понтрягина необходимо $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, следовательно,

$$-2\lambda_0 u + p_2 = 0.$$

Пусть $\lambda_0 = 0 \Rightarrow p_2 \equiv 0 \Rightarrow p_1 \equiv 0 \Rightarrow$ вектор λ – тривиальный, следовательно, $\lambda_0 > 0$. Пусть $\lambda_0 = 1/2 \Rightarrow u = p_2$. Так как $p_1(t) = C_1$, то $p_2(t) = -C_1 t + C_2$, тогда $\ddot{x} = u = -C_1 t + C_2$. Интегрируя $\ddot{x}$, получаем $\dot{x} = -\dfrac{C_1}{2}t^2 + C_2 t + C_3$, из краевых условий для $\dot{x}$ имеем $C_3 = 0$, $C_1 = 2C_2 - 2$, т.е. $\dot{x} = (1 - C_2)t^2 + C_2 t$. Полученное выражение еще раз проинтегрируем $x(t) = \dfrac{1 - C_2}{3}t^3 + \dfrac{C_2}{2}t^2 + C_4$, из краевых условий для x имеем $C_4 = 0$, $\dfrac{1 - C_2}{3} + \dfrac{C_2}{2} = 0$ $\Rightarrow C_2 = -2$.

Значит, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = t^3 - t^2$. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(\cdot) \in C^2([0,1])$ и $h(0) = h(1) = \dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0$, то

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \left(\ddot{\hat{x}} + \ddot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}dt + \int_0^1 \ddot{h}^2 dt.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям первого слагаемого, получаем

$$\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}dt = \int_0^1 \ddot{\hat{x}}d\dot{h} = \ddot{\hat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - \int_0^1 \hat{x}^{(3)}\dot{h}dt = -\int_0^1 \hat{x}^{(3)}dh = -\hat{x}^{(3)}h\Big|_0^1 + \int_0^1 \hat{x}^{(4)}hdt = 0.$$

Следовательно,

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \geqslant 0,$$

$$J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = \int_0^1 (6t-2)^2 dt = 4.$$

Ответ: Функция $\hat{x}(t) = t^3 - t^2$ доставляет в задаче абсолютный минимум, $J(\hat{x}(\cdot)) = 4$.

Упражнение. Доказать, что в данном примере локальных максимумов нет, и функционал $J(x(\cdot))$ на допустимом множестве не ограничен сверху.

Пример 2.11.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4 \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to \inf, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, введя новую переменную $u = \dot{x}$:

$$\int\limits_0^4 \left(u^2+x\right)dt \to \inf, \quad \dot{x}=u, \quad u\in[-1,1], \quad x(0)=0.$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p,t,x,u) = -\lambda_0\left(u^2+x\right)+pu$$

и терминальную функцию $\Phi(\lambda, x(0), x(4)) = \lambda x(0)$.

Составим уравнение для сопряженной переменной $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0$ и условие трансверсальности $p(0) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x(0)} = \lambda$, $p(4) = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x(4)} = 0$. Отсюда получаем $p(t) = \lambda_0(t-4)$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $p(t)\equiv 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ тривиальный набор чисел λ_0, λ. Следовательно, $\lambda_0>0$, пусть $\lambda_0 = 1$.

Условие максимума по u функции Гамильтона-Понтрягина эквивалентно:

$$\max_{u\in[-1,1]}\left(-u^2+(t-4)u\right) = -\hat{u}^2+(t-4)\hat{u}.$$

Очевидно, что функция, находящаяся под знаком $\max$, относительно u есть парабола с ветвями, опущенными вниз, она достигает максимума в вершине, если вершина находится в отрезке $[-1,1]$, в противном случае на границе допустимого множества переменной u. Вершина параболы находится в точке $(t-4)/2$, корни $u_1=0$, $u_2=t-4$. Так как $t\in[0,4]$, то $u_1\geqslant u_2$ и вершина всегда лежит левее 0, следовательно

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} (t-4)/2, & (t-4)/2 \geqslant -1; \\ -1, & (t-4)/2 < -1; \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(t) = \begin{cases} (t-4)/2, & 2\leqslant t\leqslant 4; \\ -1, & 0\leqslant t<2. \end{cases}$$

Так как $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то из начального условия и условия непрерывности функции $x(t)$ находим непрерывную функцию

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, & 0\leqslant t<2; \\ t^2/4-2t+1, & 2\leqslant t\leqslant 4. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что $\hat{x}(\cdot)\in \mathrm{absmin}$. Возьмем функцию $h(\cdot)\in PC^1([0,4])$, такую, чтобы $(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию $h(\cdot)$, для которой $\left|\dot{\hat{x}}+\dot{h}\right|\leqslant 1$, $h(0)=0$. Интегрируя по частям с использованием того, что $\dot{\hat{x}}(t) = (t-4)/2$ при $2\leqslant t\leqslant 4$, получим

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int\limits_0^4\left(\left(\dot{\hat{x}}+\dot{h}\right)^2+\hat{x}+h\right)dt - \int\limits_0^4\left(\dot{\hat{x}}^2+\hat{x}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^4 2\dot{\hat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^4 hdt + \int\limits_0^4 \dot{h}^2dt \geqslant 2\int\limits_0^4 \dot{\hat{x}}dh + \int\limits_0^4 hdt =$$

$$= 2\dot{\hat{x}}(t)\,h(t)\Big|_0^4 + \int\limits_0^4\left(-2\ddot{\hat{x}}+1\right)hdt = \int\limits_0^2 hdt \geqslant 0,$$

так как $h(t) \geqslant 0$ при $t \in [0;2]$. Действительно, $\dot{\hat{x}} = -1$ при $t \in [0;2]$ и $\left|\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right| \leqslant 1 \Rightarrow \dot{h}(t) \geqslant 0$, т.е. $h(t)$ не убывает на $[0;2]$, а в силу того, что $h(0) = 0$, получаем $h(t) \geqslant 0$. Итак, $\hat{x}(\cdot) \in \text{absmin}$.

Пример 2.12.

Минимизировать время перевода управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad -3 \leqslant u \leqslant 1,$$

из начального состояния $x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 0$ в конечное $x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0.$

Это задача быстродействия с фиксированными концами и к ней применима теорема 12. В соответствии с (2.6.5) и (2.6.6)

$$H(p, x, u) = p_1 x_2 + p_2 u; \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1.$$

Так как функция H линейна по u, то, в случае нетривиальности переменной p_2, максимум достигается на границе, т.о. условие максимума H по $u \in [-3, 1]$ дает представление

$$u(t) = \begin{cases} -3, & p_2(t) < 0, \\ 1, & p_2(t) > 0 \\ ?, & p_2(t) = 0. \end{cases}$$

Уравнения для сопряженных переменных: $\dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1.$ Общее решение сопряженной системы $p_1(t) = C_1, \quad p_2(t) = -C_1 t + C_2$. Теорема 12 гарантирует существование нетривиального решения $p(t)$, т.е. $C_1^2 + C_2^2 > 0$. В силу линейности $p_2(t)$ и нетривиальности эта функция может иметь на любом промежутке $[0, T]$ не более одного нуля, поэтому оптимальное управление может иметь одну из двух структур:

$$u(t) = \begin{cases} -3, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 1, & \tau < t \leqslant T, \end{cases} \tag{a}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -3, & \tau < t \leqslant T, \end{cases} \tag{b}$$

где τ – возможный момент переключения управления с одного предельного значения на другое. Переключения может и не быть, что соответствует значению $\tau = 0$.

Предположим вначале, что переключения нет и $u(t) = -3, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$. Интегрирование исходной системы с начальными условиями дает траекторию

$$x_2(t) = -3t, \quad x_1(t) = 3 - \frac{3}{2}t^2.$$

Конечное время T должно определяться из конечных условий на состояние: $x_1(T) = 3 - \dfrac{3}{2}T^2 = 0, \quad x_2(T) = -3T = 0$. Эта система несовместна, поэтому сделанное предположение о структуре искомого управления отвергается. Аналогично отвергается предположение $u(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим теперь случай управления с переключением в варианте (a). Интегрируя исходную систему на промежутке $[0,\tau]$, получим

$$x_1(t) = 3 - \frac{3}{2}t^2, \quad x_2(t) = -3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Для интегрирования этой системы на второй части временного промежутка $[\tau, T]$ следует использовать условие непрерывности фазовой траектории, т.е. начальные условия

$$x_1(\tau) = 3 - \frac{3\tau^2}{2}, \quad x_2(\tau) = -3\tau.$$

При этом получим

$$x_2(t) = -4\tau + t, \quad x_1(t) = 3 + 2\tau^2 - 4\tau t + \frac{t^2}{2}, \quad \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Используя конечные условия $x_1(T) = x_2(T) = 0$, получим систему, определяющую параметры τ и T :

$$3 + 2\tau^2 - 4\tau T + \frac{T^2}{2} = 0, \quad -4\tau + T = 0.$$

Эта система имеет одно положительное решение $\tau = 1/\sqrt{2}$, $T = 4/\sqrt{2}$.

Осталось проверить условие неотрицательности (2.6.12) $M(T) \geqslant 0$. В нашем случае

$$M(T) = p_1(T)x_2(T) + p_2(T)u(T) = p_2(T).$$

Поскольку $u(T) = 1$, то это соответствует соотношению $p_2(T) > 0$, т.е. $M(T) > 0$, что означает выполненные условия (2.6.12).

Исследуя вариант (b), нетрудно убедиться, что соответствующая система, определяющая параметры (τ, T), не имеет решений. Таким образом, построенный процесс, удовлетворяющий принципу максимума, единственный.

3. Численные методы решения задач ОУ

Очевидно, что далеко не всегда задача оптимального управления, подвергаемая анализу, может быть решена аналитически. В этом случае, используются численные методы, позволяющие находить с некоторой точностью траектории "близкие" к оптимальным.

В этой главе приведем некоторые численные методы решения задач ОУ. Материал главы основан на [5, 14, 21, 22, 26, 27].

3.1. Метод локальных вариаций

Рассмотрим функцию $x(\cdot) \in C^1([t_0, T])$, предположим, что при всех $t \in [t_0, T]$ вектор $x(t) \in U(t) \subset \Re^n$, где $U(t)$ – замкнутое, непрерывное множество. Через U обозначим $\{U(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$. Поставим задачу минимизации функционала

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f(t, x(t), \dot{x})dt \tag{3.1.1}$$

на введенном множестве, здесь $f : \Re^{1+2n} \to \Re$.

Пусть в каждый момент $t \in [t_0, T]$ множество $U(t)$ – параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t), \tag{3.1.2}$$

где $x^-(t)$, $x^+(t)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[t_0, T]$.

Зафиксируем натуральное число N и обозначим $\Delta t = \dfrac{T - t_0}{N}$. Произведем разбиение отрезка $[t_0, T]$ на N равных частей

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad i = 0, 1 \ldots N.$$

Введем обозначение:

$$I_i(z, y) = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \frac{z+y}{2}, \frac{y-z}{\Delta t}\right)\Delta t.$$

Если $z = x(t_i)$, $y = x(t_{i+1})$, то

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t), \dot{x})dt = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \frac{z+y}{2}, \frac{y-z}{\Delta t}\right)\Delta t + o(\Delta t) \approx I_i(z, y).$$

Обозначим $x^i = x(t_i)$, $i = 0, 1 \ldots N$, тогда функционал (3.1.1) представим в виде

$$J(x(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t), \dot{x})dt = \sum_{i=0}^{N-1} I_i\left(x^i, x^{i+1}\right) + O(\Delta t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} I_i\left(x^i, x^{i+1}\right).$$

Возьмем достаточно малое $h \in \Re$ и некоторое нулевое приближение x^{i0}, $i = 0, 1 \ldots N$, удовлетворяющее (3.1.2): $x^-(t_i) \leqslant x^{i0} \leqslant x^+(t_i)$.

Будем считать, что приближение $(k-1)$ построено, т.е. известно $x^{i(k-1)}$, $i=0,1\dots N$. Также определены первые m векторов k -го приближения, т.е. $x^{0k},\dots,x^{(m-1)k}$, в векторе $x^{m(k-1)}$ первые $(j-1)$ значений $x_1^{mk},\dots,x_{j-1}^{mk}$ определены. Все найденные значения являются допустимыми, т.е. удовлетворяют (3.1.2). Требуется найти x_j^{mk}.

В качестве претендентов на x_j^{mk} рассмотрим:

$$x_j^{m(k-1)}, \quad x_j^{m(k-1)}+h, \quad x_j^{m(k-1)}-h.$$

Соответственно этим вариантам введем векторы

$$\begin{aligned}
y &= \left(x_1^{mk},\dots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)},x_{j+1}^{m(k-1)},\dots,x_n^{m(k-1)}\right),\\
y^+ &= \left(x_1^{mk},\dots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)}+h,x_{j+1}^{m(k-1)},\dots,x_n^{m(k-1)}\right),\\
y^- &= \left(x_1^{mk},\dots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)}-h,x_{j+1}^{m(k-1)},\dots,x_n^{m(k-1)}\right)
\end{aligned}$$

и подсчитаем следующие значения:

$$\begin{aligned}
\Phi &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y\right)+I_m\left(y,x^{(m+1)(k-1)}\right),\\
\Phi^+ &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y^+\right)+I_m\left(y^+,x^{(m+1)(k-1)}\right),\\
\Phi^- &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y^-\right)+I_m\left(y^-,x^{(m+1)(k-1)}\right).
\end{aligned}$$

Если y^+ не удовлетворяет условию $x^-(t_m)\leqslant y^+\leqslant x^+(t_m)$, т.е. является недопустимым, то $\Phi^+:=+\infty$. Аналогично, если y^- не удовлетворяет условию $x^-(t_m)\leqslant y^-\leqslant x^+(t_m)$, то $\Phi^-:=+\infty$. Полагаем

$$x_j^{mk}=\begin{cases} x_j^{m(k-1)}, & \Phi\leqslant\min\{\Phi^+,\Phi^-\},\\ x_j^{m(k-1)}+h, & \Phi^+<\min\{\Phi,\Phi^-\},\\ x_j^{m(k-1)}-h, & \Phi^-<\min\{\Phi,\Phi^+\}.\end{cases}$$

Описанная процедура позволяет определить процесс улучшения текущего приближения решения. Введем функционал

$$S^k=\sum_{i=0}^{N-1} I_i\left(x^{ik},x^{(i+1)k}\right),$$

который дает приближение $J(\cdot)$ на k -ой итерации.

Очевидно, что $S^{k+1}\leqslant S^k$, и, в силу выбора (3.1.2), множество U ограничено, тогда процесс сходится и справедливо

$$S^{k+1}=S^k\Leftrightarrow x^{i(k+1)}=x^{ik}, \quad i=0,1\dots,N.$$

Схема решения задачи (3.1.1), (3.1.2):

1. Фиксируем $h_1>0$, натуральное число N, вычисляем $\Delta t=\dfrac{T-t_0}{N}$, выбираем $h_2>h_1$, $h:=h_2$.
2. При фиксированных Δt, h находим решение, согласно описанному выше процессу.

3. $h := \dfrac{h}{2}$ и возвращаемся к пункту 2 (мельчение h продолжается до $h = h_1$).

4. $\Delta t := \dfrac{\Delta t}{2}$, $N := 2N$, $h := h_2$ переход к пункту 2.

Замечание. Метод локальной вариации находит локальный минимум задачи (3.1.1), (3.1.2). Но даже если минимум единственный, то для сходимости требуется существование $p \geqslant 2$:

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{h}{(\Delta t)^p} \to 0.$$

3.2. Метод Крылова-Черноусько

Метод Крылова-Черноусько (метод последовательных приближений) решения задач ОУ со свободным правым концом. Рассмотрим следующую постановку задачи ОУ

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{3.2.1}$$

$$u(t) \in U, \ t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2.2}$$

$$J(x(\cdot)) = \Phi(x(T)) \to \min, \tag{3.2.3}$$

здесь $x(t) \in R^n$, множество $U \subset R^r$ является замкнутым, $f : \Re^{1+n+r} \to \Re^n$, $\Phi : \Re^n \to \Re$. Допустимое управление – кусочно-непрерывная функция $u(t)$, удовлетворяющая (3.2.2).

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

и задачу Коши для сопряженных переменных $p(t)$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p, \quad p(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x(T)}. \tag{3.2.4}$$

Пусть $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ – оптимальный процесс задачи (3.2.1)-(3.2.3), $p^*(\cdot)$ – соответствующее оптимальному процессу решение (3.2.4). Задача (3.2.1)-(3.2.3) – задача со свободным правым концом, для нее справедлива теорема 8 и условие максимума

$$H(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), p^*(t), v) \tag{3.2.5}$$

в любой точке t непрерывности $u^*(t)$.

Схема алгоритма метода Крылова-Черноусько:

1. Определим функцию $u^0(t) : (3.2.2)$. Зафиксируем $\delta > 0$.

2. Пусть дано некоторое допустимое управление $u^k(t) : (3.2.2)$. Решаем задачу Коши (3.2.1) при $u(t) = u^k(t)$, результатом решения будет функция $x^k(t)$, определенная на $[t_0, T]$.

3. Решаем задачу Коши (3.2.4) в обратном времени от T до t_0, при $u(t) = u^k(t)$, $x(t) = x^k(t)$, результатом решения будет соответствующая им функция $p^k(t)$, определенная на интервале $[t_0, T]$.

4. Определяем управление $u^{k+1}(t)$ из условия максимума (3.2.5):

$$H(t, x^k(t), p^k(t), u^{k+1}(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^k(t), p^k(t), v).$$

   Если $\|u^{k+1} - u^k\| > \delta$, то переход к пункту 2, иначе пункт 5.

5. Полагаем $u^*(t) \approx u^{k+1}(t)$, в качестве $x^*(t)$ берем решение (3.2.1) при $u(t) = u^*(t)$. Пара $\{u^*(t), x^*(t)\}$ – решение задачи (3.2.1)-(3.2.3).

Замечание 1. Пусть функция $f(t, x, u)$ – линейна по переменной x, т.е. представима в виде:

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t, u),$$

для любого $t \in [t_0, T]$ задача $\max\limits_{u \in U} B(t, u)$ разрешима, функционал J линеен по $x(T)$, т.е. $J(x(T)) = \langle c, x(T) \rangle$, тогда метод Крылова-Черноусько на второй итерации даст оптимальную траекторию при любом начальном приближении.

Действительно, сопряженная переменная (3.2.4) определяется условиями $\dot{p} = -A^T(t)p(t)$, $p(T) = -c$, что дает единственное решение $p^*(t)$ для любых $x(t)$, $u(t)$.

Функция Гамильтона-Понтрягина $H(t, x, p, u) = p^T A(t)x + p^T B(t, u)$ состоит из двух слагаемых, где первое не зависит от u, тогда (3.2.5) эквивалентно $\max\limits_{u \in U} p^T B(t, u)$, последняя задача разрешима по преположению в случае нетривиальности вектора c. Таким образом, условие максимума дает единственную функцию $u^*(t)$, не зависящую от $x(t)$, $p(t)$. Решение $x^*(t)$ получается из (3.2.1) при замене $u(t)$ на $u^*(t)$.

Замечание 2. В случае поиска решения задачи в виде сеточных функций, следует учитывать, что сетку для сопряженных пременных $p(t)$ запоминать не обязательно, достаточно хранить сеточные функции $u(t)$, $x(t)$. Кроме того, в качестве нормы сеточной функции можно использовать $\|u(\cdot)\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \|u(t_i)\|^2_{E^r} \right)^{1/2}$, $\|\cdot\|_{E^r}$ – Евклидова норма в пространстве $\Re^r$.

В приведенном виде метод Крылова-Черноусько далеко не всегда сходится, поэтому, для распространения метода на более широкий класс задач вводятся дополнительные преобразования.

Улучшения сходимости:

1. Введем в систему (3.2.1)-(3.2.3) параметр $\varepsilon > 0$: при $\varepsilon = 1$ полученная система совпадает с исходной, а при $\varepsilon = 0$ итерационный процесс быстро сходится. Например: $\dot{x} = \varepsilon f(t, x(t), u(t))$ или $\dot{x} = f(t, x(t), \varepsilon u(t))$, отметим, что приведенные системы при $\varepsilon \to 0$ плохо управляемы, в этом случае обеспечивается быстрая сходимость итерационного процесса. Дальнейшее решение основывается на последовательном переходе к $\varepsilon = 1$, в качестве начального приближения выбирается решение полученное при предыдущем ε.

2. Пусть Φ – оператор, который ставит для $u(t)$ новое управление согласно последовательному выполнению условий (3.2.1), (3.2.4), (3.2.5), тогда, в качестве следующего приближения в 4-ом пункте схемы алгоритма Крылова-Черноусько используется соотношение
$$u^{k+1}(t) = (1-\alpha)u^k(t) + \alpha\Phi(u^k(t)),$$
где α – некоторый параметр, удовлетворяющий условию: $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Заметим, что α можно выбирать из условия монотонного убывания: полагаем $\alpha = 1$ и проверяем условие $J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot))$, если оно справедливо, то переходим к пункту 2 схемы алгоритма, в противном случае $\alpha := \dfrac{\alpha}{2}$ и возвращаемся к проверке введенного условия.

3. В следующем варианте приближение управления на очередном шаге итерации определяется правилом:
$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} \Phi(u^k(t)), & t \in [t', t''], \\ u^k(t), & t \in [t_0, T] \setminus [t', t'']. \end{cases}$$
Интервал $[t', t''] \subset [t_0, T]$ выбирается из условия монотонного убывания функционала:
$$J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot)).$$
Этого условия можно добиться следующим образом: вначале полагаем $t' = t_0$, $t'' = T$ и проверяем условие монотонности. В случае, если оно не выполняется, можно, например, не изменяя t'', изменить t' :
$$t' := t' + (t'' - t')/2.$$
После этого опять возвращаемся к условию монотонности и все повторяем заново и т.д.

4. Последний, из приводимых способов улучшения сходимости, является синтезом двух предыдущих вариантов. В качестве следующего приближения рассматривается
$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} u^k(t), & 0 \leqslant t \leqslant t', \\ (1-\alpha)u^k(t) + \alpha\Phi(u^k(t)), & t' \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$
Здесь α и t' выбираются так, чтобы обеспечить условия монотонного убывания функционала:
$$J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot)).$$
Вначале фиксируем $0 < \alpha^* < 1$ и полагаем $\alpha = 1$, $t' = t_0$.

   Если условие монотонности выполняется, то переходим на следующую итерацию, в противном случае $\alpha := \dfrac{\alpha}{2}$ и снова проверяем условие монотонности.

   Дробление α выполняется до α^*, если уменьшения функционала добиться не удалось, то $t' := t' + (T - t')/2$, $\alpha := 1$ и возвращаемся на шаг назад: проверяем условие монотонности.

   После того, как получено следующее приближение, полагаем $\alpha = 1$, а интервал $[t', T]$ либо сохраняем, либо увеличиваем (уменьшаем t').

Приведенные условия улучшения сходимости позволяют расширить область применения метода Крылова-Черноусько для поиска локального минимима в задаче ОУ со свободным правым концом.

3.3. Метод параметризации

В [9, 10] были разработаны основы метода параметризации (конечномерной редукции) задач оптимального управления достаточно общего вида. При этом управляющая функция представляется в параметрической форме с подвижными моментами переключений и исходная функциональная задача сводится к конечномерной задаче нелинейного программирования. Вычисление целевой и ограничивающих функций и их производных заключается в решении задач Коши для исходного и сопряженных дифференциальных уравнений. Этот подход получил дальнейшее развитие в работе [14] (были получены теорема сходимости и завершение построения вторых производных), и его применение прошло успешную апробацию на ряде различных задач [20].

3.3.1. Постановка задачи и ее параметризация

Рассмотрим задачу оптимального управления, ограничившись для простоты изложения случаем автономной системы, закрепленного начального состояния и терминального функционала с терминальными ограничениями:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.3.1}$$

$$u(t) \in U; \tag{3.3.2}$$

$$g_l(x(T)) \leqslant 0, \qquad l = 1, \ldots, m; \tag{3.3.3}$$

$$J = g_0(x(T)) \to \min . \tag{3.3.4}$$

Фазовая переменная $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, вектор параметров управления $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$. Функции $f_i(x(t), u(t))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $g_l(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми по всем переменным. Множество допустимых значений управления U должно иметь структуру, позволяющую применять методы дифференцируемой оптимизации. Время окончания процесса T может быть свободным и задача (3.3.1)-(3.3.4) считается разрешимой в классе кусочно-непрерывных или непрерывных функций $u(t)$. Класс непрерывных функций используется для некоторых экономических моделей, где изменение параметров соответствующей экономической системы происходит непрерывно в силу естественных ограничений проблемы, а также вариационных задач, порождаемых (как метод решения) задачами дифференциальных уравнений.

Излагаемый ниже метод параметризации легко распространяется на случай более общих терминальных условий, когда вместо начальных условий в (3.3.1) и условий (3.3.3) заданы

$$g_l\left(x(t_0), x(T)\right) \left\{ \begin{array}{c} \leqslant \\ = \end{array} \right\} 0, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

Метод [10] заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \equiv T \tag{3.3.5}$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \tag{3.3.6}$$

где $v_\mu^k \in R^d$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \dots, v_r^k) \in R^{d \times r}$.

В том случае, когда ищется непрерывное решение, на параметризованный класс накладываются дополнительные ограничения

$$u^k(t_k, v^k) = u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Условия непрерывности можно также наложить и на производные управления. Такое представление можно считать обобщенным сплайном или же кусочно-аналитическим представлением искомого управления.

Таким образом, при подстановке параметризованного управления (3.3.6) в (3.3.1) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров управления

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k),$$

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется на промежутках $[t_k, t_{k+1})$ интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (3.3.1):

$$\begin{aligned}
&z(t, v^1) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(z(s; v^1), u^1(s; v^1))ds, \qquad t_0 \leqslant t < t_1;\\
&z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}) = z(t_k; w^1, \dots, v^k) + \\
&+ \int_{t_k}^{t} f(z(s; w^1, \dots, v^{k+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1}))ds, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}.
\end{aligned}$$

Введем функции от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$\varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)), \qquad l = 0, 1, \dots, m. \tag{3.3.7}$$

В терминах этих функций задача (3.3.1)-(3.3.4) принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$\begin{array}{l}
\varphi_0(w^1, \dots, w^N) \to \min \quad \text{при ограничениях} \\
\varphi_l(w^1, \dots, w^N) \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant l \leqslant m, \\
W = \{w^k: \ w_0^{k-1} \leqslant w_0^k, \ u^k(t; v^k) \in U, \ w_0^{k-1} \leqslant t \leqslant w_0^k, \\
\qquad k = 1, ..., N; \quad w_0^0 = t_0, w_0^N \equiv T \leqslant T^*\},
\end{array} \tag{3.3.8}$$

где T^* – конечное действительное число.

3.3.2. Производные параметризованных функционалов

В данном пункте изложим технику дифференцирования функционалов и основной результат работы [10]. При сделанных предположениях и при разрешимости задачи Коши (3.3.1), (3.3.6) функции (3.3.7) являются дважды непрерывно дифференцируемыми и к задаче (3.3.8) можно применять такие эффективные методы, как квадратично-линейная аппроксимация и метод модифицированных функций Лагранжа [8].

Для вывода формул и уравнений дифференцирования функций (3.3.7) будем использовать векторно-матричные обозначения, сделав следующие соглашения. Производные скалярных функций по векторным аргументам

$$\frac{\partial g_l(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial g_l}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_l}{\partial z_n}\right]$$

будем понимать как векторы-строки, а производные векторной функции по скалярному параметру

$$\frac{\partial z(t; w^1, \dots, w^k)}{\partial w^j_{\mu,\alpha}} = \left[\frac{\partial z_1}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}\right]^T \tag{3.3.9}$$

$(1 \leqslant \mu \leqslant r,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$, как векторы-столбцы. Соответственно этому будет определяться матричная структура производных векторных функций по векторным аргументам.

Продифференцируем равенство (3.3.7) по одному из параметров $w^k_{\mu,\alpha}$:

$$\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial w^k_{\mu,\alpha}} = \frac{\partial g_l(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w^k_{\mu,\alpha}}. \tag{3.3.10}$$

Производные (3.3.9) – это вариации траектории системы (3.3.1), (3.3.6) по параметрам, определяющим управление. Обозначим их

$$y^{j\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; v^1, \dots, v^k)}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}, \qquad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant N. \tag{3.3.11}$$

Так как функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется задачей Коши, то, дифференцируя соответствующее соотношение, получим задачи Коши, определяющие функции (3.3.11). Для вариаций, отвечающих параметрам $w^k_{0,0} = t_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1$, это [10]

$$\begin{cases} \dot{y}^{k00} = \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}, \quad t_k \leqslant t \leqslant T, \\ y^{k00}(t_k) = f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1})); \end{cases} \tag{3.3.12}$$

и для вариаций относительно $v^k_{\mu,\alpha}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant r,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant d,\ 1 \leqslant k \leqslant N)$ – это

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha} = \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha} + \theta(t_k - t) \quad \dfrac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \dfrac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}, \\ \qquad\qquad t_{k-1} \leqslant t \leqslant T, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

Здесь и далее функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Вариация по конечному времени T конечна:

$$y^{N00}(T) = f(x(T), u(T)). \tag{3.3.14}$$

В принципе соотношения (3.3.10)-(3.3.13) решают проблему первых производных для задачи (3.3.8). Для этого следует решить сначала задачу Коши (3.3.1), (3.3.6), а затем $N(r \times d + 1) - 1$ задач (3.3.12), (3.3.13). Однако трудоемкость этой процедуры существенно сокращается с помощью сопряженных переменных.

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p(t), x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(x(t), u(t)),$$

и введем для каждой функции $g_l(z)$ исходной задачи свою сопряженную вектор-функцию $p^l(t) = (p_1^l(t), \ldots, p_n^l(t))$:

$$\begin{cases} \dot{p}^l = -\dfrac{\partial H(p^l, x(t), u(t))}{\partial x}, & t_0 \leqslant t \leqslant T, \\ p^l(T) = \dfrac{\partial g_l(x(T))}{\partial z}, & l = 0, 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.3.15}$$

Кроме того, введем обозначение

$$M_l(t) = H(p^l(t), x(t), u(t)). \tag{3.3.16}$$

Используя свойство постоянства скалярных произведений $\langle p^l(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle$ на общих промежутках определения $[t_k, T]$, конечные и начальные условия, нетрудно получить формулы [10]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_l(w^1, \ldots, w^N)}{\partial t_k} = M_l(t_k - 0) - M_l(t_k + 0), && 1 \leqslant k \leqslant N - 1; \\ &\frac{\partial \varphi_l(w^1, \ldots, w^N)}{\partial T} = M_l(T); && \\ &\frac{\partial \varphi_l}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} dt, && 1 \leqslant k \leqslant N, \\ & && 1 \leqslant \mu \leqslant d \times r. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Теперь для вычисления производных (3.3.17) требуется решить помимо основной задачи Коши (3.3.1), (3.3.6) дополнительно $m + 1$ задачу (3.3.15). Это число определяется количеством терминальных условий (3.3.3) и не зависит от размерности параметризованного управления (3.3.5), (3.3.6), которое в нетривиальных случаях может быть большим.

3.4. Методы, использующие функции штрафа

Очевидно, что описанные выше численные методы охватывают далеко не все постановки задач ОУ, в данном параграфе покажем некоторые приемы, позволяющие свести исходную постановку задачи ОУ к задаче более простого вида.

3.4.1. Ограничение на конец траектории

Рассмотрим задачу ОУ в виде

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{3.4.1}$$

$$u(t) \in U \subseteq \Re^r, \quad x(t) \in \Re^n, \quad t \in [t_0, T], \tag{3.4.2}$$

$$\varphi(x(T)) = 0, \tag{3.4.3}$$

$$F(x(T)) \to \min. \tag{3.4.4}$$

Здесь $f : \Re^{n+r+1} \to \Re^n$, $\varphi : R^n \to R^k$, $k < n$, $F : \Re^n \to \Re$.

К задаче (3.4.1)-(3.4.4) невозможно непосредственно применить численные методы решения задач со свободным правым концом (например, метод Крылова-Черноусько) в силу условия (3.4.3).

Введем функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \lambda) = F(x(T)) + \lambda \|\varphi(x(T))\|^2_{E^k}, \tag{3.4.5}$$

где $\lambda > 0$ – штрафной коэффициент.

Вместо задачи (3.4.1)-(3.4.4) рассмотрим серию задач минимизации функционала (3.4.5) с условиями (3.4.1), (3.4.2). Каждая из этих задач при фиксированном λ – суть задача ОУ со свободным правым концом, к которой применимы соответствующие численные методы.

Теорема 13. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (3.4.1)-(3.4.4), а* $\{x^*(t, \lambda), u^*(t, \lambda)\}$ *– решение задачи минимизации (3.4.5) при условии (3.4.1), (3.4.2), тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$J(x^*(\cdot, \lambda), u^*(\cdot, \lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Таким образом, можно построить минимизирующую последовательность исходной задачи ОУ.

3.4.2. Снятие ограничение на управление

Иногда учет дополнительных условий на управление представляет затруднения при численной реализации, в частности, при реализации метода параметризации со вторыми производными использование метода Ньютона требует отсутствия ограничений на управления, т.е. $U = \Re^r$.

Рассмотрим задачу (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4), где условие (3.4.2) представимо в виде

$$a(t) \leqslant u(t) \leqslant b(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{3.4.6}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ – заданные вектор-функции $a : \Re \to \Re^r$, $b : \Re \to \Re^r$.

Сведем поставленную задачу к задаче ОУ без ограничений на управление – суть задаче ВИ. Введем функции

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} (u_i(t) - b_i(t))^2, & u_i(t) \geqslant b_i(t), \\ 0, & u_i(t) \in [a_i(t), b_i(t)], \\ (u_i(t) - a_i(t))^2, & u_i(t) \leqslant a_i(t) \end{cases}$$

и определим функционал

$$J(x, u, \lambda) = F(x(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} \lambda \sum_{i=1}^{r} \Psi_i(t) dt. \tag{3.4.7}$$

Задача минимизации (3.4.7) при условии (3.4.1) – вариационная задача без ограничений на управляющую функцию.

Теорема 14. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (3.4.1), (3.4.6), (3.4.4), а* $\{x^*(t, \lambda), u^*(t, \lambda)\}$ *– решение задачи минимизации (3.4.7) при условии (3.4.1), тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$J(x^*(\cdot, \lambda), u^*(\cdot, \lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Примечание:

Отдельно отметим, часто встречающийся случай ограничений на управление: $U = \{u \in \Re : |u| \leqslant C, \ C > 0\}$, тогда замена $u = C \sin(\alpha)$, позволяет рассматривать управление на всем пространстве: $\alpha \in \Re$.

Вторым вариантом снятия подобного ограничения на управление (переход к рассмотрению управления на всем пространстве) может считаться прием Валентайна. Данный прием основан на введении дополнительной переменной $\beta \in \Re$ с последующей заменой ограничения типа неравенство на классическое условие типа равенство:

$$\beta^2 + (u + C)(u - C) = 0,$$

здесь управляющими параметрами являются u и β, рассматриваемые в новой постановке исходной задачи на всем пространстве.

3.4.3. Снятие фазовых ограничений

Рассмотрим задачу (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4) с ограничением на фазовые переменные в виде

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \tag{3.4.8}$$

здесь $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – заданные вектор-функции $\alpha : \Re \to \Re^n$, $\beta : \Re \to \Re^n$. Введем штрафные функции

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} (x_i(t) - \beta_i(t))^2, & x_i(t) \geqslant \beta_i(t), \\ 0, & x_i(t) \in [\alpha_i(t), \beta_i(t)], \\ (x_i(t) - \alpha_i(t))^2, & x_i(t) \leqslant \alpha_i(t); \end{cases}$$

и определим функционал

$$J(x, u, \lambda) = F(x(T)) + \lambda \int\limits_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(t) dt \to \min_{x,u}. \tag{3.4.9}$$

Задача (3.4.1), (3.4.2), (3.4.9) – задача ОУ без ограничений на фазовые переменные эквивалентная исходной задаче (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4), (3.4.8) в смысле следующей теоремы:

Теорема 15. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4), (3.4.8), а* $\{x^*(t,\lambda), u^*(t,\lambda)\}$ *– решение (3.4.1), (3.4.2), (3.4.9), тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$J(x^*(\cdot,\lambda), u^*(\cdot,\lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Рассмотрим более сложный случай ограничений на фазовые переменные: задачу (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4) с ограничениями

$$\begin{aligned} &h_1(x(t), u(t), t) \leqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \\ &h_2(x(t), u(t), t) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Здесь $h_1 : \Re^{n+r+1} \to \Re^{m_1}$, $h_2 : \Re^{n+r+1} \to \Re^{m_2}$.

Такой тип ограничений вызывает наибольшие затруднения при построении численных методов решения задач ОУ приведенного класса. Теоремы, дающие необходимые условия решения задач ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями (3.4.10), носят скорее теоретический характер и не дают достаточной информации для построения эффективных методов решения.

В [13] был предложен прием сведения исходной задачи ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями к задаче ОУ без таковых. Пусть функции h_1, h_2 непрерывно-дифференцируемые и $P(x,u)$ – некоторая гладкая штрафная функция системы (3.4.10), например,

$$P(x,u,t) = \|h_1^+(x,u,t)\|^q_{E^{m_1}} + \|h_2(x,u,t)\|^q_{E^{m_2}}, \quad q \geqslant 2. \tag{3.4.11}$$

Здесь $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ – функция положительной срезки. Введем дополнительную фазовую координату x_{n+1} и свяжем её с процессом $\{x(t), u(t)\}$ условием

$$\dot{x}_{n+1} = P(x(t), u(t), t), \qquad x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{3.4.12}$$

Очевидно, процесс $\{x(t), u(t)\}$ удовлетворяет ограничениям (3.4.10) тогда и только тогда, когда

$$x_{n+1}(T) = 0. \tag{3.4.13}$$

Таким образом, исходная задача (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4), (3.4.10) эквивалентна задаче с терминальными ограничениями: минимизировать функционал (3.4.4) при условиях (3.4.1), (3.4.2), (3.4.12), (3.4.13). Отметим, что в этом преобразовании стандартный коэффициент штрафа не вводится.

Новая формулировка исходной трудной задачи оптимального управления позволяет применять для её качественного исследования и численного решения методы, ориентированные на задачи без промежуточных фазовых ограничений. Однако новая, формально упрощенная задача в общем случае оказывается вырожденной. Покажем это, выписав условие экстремума в форме принципа максимума [2].

Введем функцию Гамильтона расширенной системы (3.4.1), (3.4.12)

$$H(\bar{p}, x, u, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x,u,t) + p_{n+1} P(x,u,t).$$

Здесь расширенный вектор $\bar{p} = (p, p_{n+1})$ описывается уравнениями

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\bar{p}, x, u)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n; \qquad \dot{p}_{n+1} = 0. \tag{3.4.14}$$

Условия трансверсальности новой задачи имеют вид:

$$p_i(T) = -\lambda \frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n; \tag{3.4.15}$$

$$p_{n+1}(T) = \mu; \tag{3.4.16}$$

где λ, μ – числа. При этом $\lambda \geqslant 0$.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [25, 2], если $\{x(t), u(t)\}$ – оптимальный процесс новой задачи, то существует нетривиальное решение системы (3.4.14), для которого выполнены условия трансверсальности (3.4.15), (3.4.16) и условие максимума

$$u(t) = arg\max\{H(\bar{p}(t), x(t), v) : v \in R^n, t\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4.17}$$

Для допустимых процессов, очевидно, выполняются равенства

$$P(x(t), u(t), t) = 0, \quad \frac{\partial P(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

При этом нетривиальное решение уравнений (3.4.14) может оказаться таким, что $p(t) = 0$, $p_{n+1} = \mu \neq 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. При этом на оптимальной траектории $H(\bar{p}(t), x(t), u(t), t) = 0$ и, соответственно, условие максимума (3.4.17) вырождается.

Таким образом, данный способ снятия фазовых ограничений сводит исходную задачу ОУ к, может быть, вырожденной задаче и требует численных методов, позволяющих решать такие задачи. Одним из методов, успешно решающих вырожденные задачи, является метод параметризации.

3.4.4. Сведение к автономной системе

В постановке задачи ОУ условие (3.4.1) в правой части дифференциальной системы в явном виде содержит независимую скалярную переменную t. Если в этом случае реализация методов решения существенно усложняется, то исходную задачу можно свести к автономной.

Определение 3.16. Система дифференциальных уравнений (3.4.1) называется *автономной* (стационарной) если ее правая часть не зависит явным образом от независимого аргумента t.

Замечание. Траектория автономной системы определяется только начальным состоянием и не зависит от времени, в котором система наблюдается.

Введем новую фазовую переменную $x_{n+1}(t)$, которую подчиним уравнению

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0;$$

решение этого уравнения очевидно $x_{n+1}(t) = t$. Обозначим $\bar{x} = (x, x_{n+1})$

В этом случае система (3.4.1) может быть записана в виде

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u), \quad \bar{x}(t_0) = (x_0, t_0),$$

где $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f(x, u, x_{n+1}), 1)$.

Таким образом, полученная система – автономная относительно фазовой переменной $\bar{x}$.

3.5. Двухпродуктовая макроэкономическая модель

3.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим подробнее модель двухсекторной экономики, которая приведена во введении. Пусть дана некоторая замкнутая экономика как совокупность двух секторов: А – производство средств производства и Б – производство предметов потребления. Средства производства (фонды) в обоих секторах будем считать однотипными, их количества в секторах обозначим через x_1, x_2. Коэффициент фондоотдачи в секторе А равен α, а коэффициент амортизации фондов в обоих секторах будем считать одинаковым и равным μ, заметим, что данное условие не является принципиальным ограничением в задаче. Все величины, в силу естественных предположений, положительны.

Справедливо балансовое соотношение

$$\alpha x_1(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \mu[x_1(t) + x_2(t)]. \tag{3.5.1}$$

Величины $\dot{x}_i + \mu x_i$ $(i = 1, 2)$ обозначают количества выпускаемых фондов, направляемых в соответствующий сектор. Обозначим

$$u = \frac{\dot{x}_1 + \mu x_1}{\alpha x_1}. \tag{3.5.2}$$

Эта величина – доля новых фондов, направляемых в А. Из соотношений (3.5.1), (3.5.2) следуют уравнения динамики фондов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u x_1 - \mu x_1, \\ \dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1 - \mu x_2. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Параметр u здесь управляющий, он может выбираться из условия

$$0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{3.5.4}$$

Начальное состояние системы задано:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \tag{3.5.5}$$

Целью планирования распределения выпускаемых фондов $x_1(t)$ будем считать максимизацию выпуска предметов потребления за период T. Этот выпуск определяется функционалом

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^T x_2(t)dt. \tag{3.5.6}$$

Таким образом, поставлена задача оптимального управления с фиксированным временем и свободным правым концом. Задача (3.5.3)-(3.5.6) может быть решена на основе принципа максимума Понтрягина.

3.5.2. Задача планирования без амортизации

Для простоты выкладок положим, что амортизация фондов отсутствует, т.е. $\mu = 0$. Прежде всего отметим, что максимизация функционала (3.5.6) с интегрантом $x_2(t)$ эквивалентна минимизации функционала с интегрантом $(-x_2(t))$. Соответственно, функция Гамильтона-Понтрягина будет

$$\begin{aligned} H(p,x,u) &= x_2 + p_1\alpha u x_1 + p_2\alpha(1-u)x_1 = \\ &= x_2 + \alpha x_1 p_2 + \alpha x_1(p_1 - p_2)u, \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot p_1 = -\alpha u p_1 - \alpha(1-u)p_2, \\ \dot p_2 = -1. \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Конечные условия для $p(t)$:

$$p_1(T) = p_2(T) = 0. \tag{3.5.9}$$

Условие максимума функции H при $x = x(t)$, $p = p(t)$ по параметру управления дает закон

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p_1(t) < p_2(t), \\ 1, & \text{если} \quad p_1(t) > p_2(t), \\ ?, & \text{если} \quad p_1(t) = p_2(t). \end{cases} \tag{3.5.10}$$

Знак вопроса означает неопределенность выбора $u(t)$.

Из (3.5.8) и (3.5.9) следует, что

$$p_2(t) = T - t. \tag{3.5.11}$$

Управление, удовлетворяющее условию максимума, будет построено, если выяснить поведение $p_1(t)$.

Исследуем возможность неопределенности $p_1(t) = p_2(t)$ на некотором интервале. В этом случае уравнение для p_1 в (3.5.8) в силу (3.5.11) принимает вид $-1 = -\alpha(T-t)$. Это равенство невозможно на интервале, поэтому неопределенность выбора $u(t)$ в (3.5.10) возможна лишь в отдельных точках, что несущественно для дифференциальных уравнений (3.5.8). Таким образом, оптимальное управление $u(t)$ может быть только кусочно-постоянной функцией со значениями 0 и 1.

Рассмотрим последний интервал постоянства управления $[\tau, T]$. Предположим, что $u(t) = 1$ при $\tau < t < T$. Тогда из (3.5.8) получаем $\dot p_1 = -\alpha p_1$, что дает в силу (3.5.9) $p_1(t) = 0 < (T-t) = p_2(t)$ для $\tau < t < T$. Но это противоречит (3.5.10).

Итак, $u(t) = 0$ при $\tau < t < T$. При этом $\dot p_1 = -\alpha(T-t)$, что в силу (3.5.9) дает

$$p_1(t) = \frac{\alpha(T-t)^2}{2}, \quad \tau < t \leqslant T. \tag{3.5.12}$$

Момент τ возможного переключения значения $u(t)$ с 1 на 0 определяется условием $p_1(\tau) = p_2(\tau)$. Сравнивая (3.5.11) и (3.5.12), получим

$$\tau = T - \frac{2}{\alpha}. \tag{3.5.13}$$

Переключение управления произойдет, если точка (3.5.13) принадлежит промежутку $[0, T]$, т.е. при условии $\tau > 0$, или

$$\alpha T > 2. \tag{3.5.14}$$

Пусть это условие выполнено и $u(t) = 1$ при $s < t < \tau$. На этом интервале $\dot{p}_1 = -ap_1$, причем $p_1(\tau) = T - \tau$. Из этого следует, что

$$p_1(t) = (T - \tau)e^{-a(t-\tau)}. \tag{3.5.15}$$

Рассмотрим разность функций p_1 и p_2 для $s < t < \tau$, т.е. $q(t) = p_1(t) - p_2(t)$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\dot{q}(t) = -\alpha p_1(t) + 1, \quad \ddot{q}(t) = \alpha^2 p_1(t).$$

Так как функция (3.5.15) положительная, то $q(t)$ – выпуклая функция. Кроме того,

$$q(\tau) = 0, \quad \dot{q}(\tau) = -\alpha(T - \tau) + 1 = -1 < 0.$$

Из этого следует, что $q(t) > 0$ при $t < \tau$, а значит, $u(t) = 1$ при всех $0 \leqslant t < \tau$, и других нулей нет. Итак, в случае (3.5.14) оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.5.16}$$

В противном случае переключения нет и $u(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$.

Таким образом, в рассмотренной задаче имеется единственное управление, удовлетворяющее принципу максимума. Считая, что решение задачи существует, остается принять полученное управление за решение задачи. Вид оптимальной траектории легко получить, проинтегрировав уравнение (3.5.3) с условиями (3.5.5) и управляющей функцией (3.5.16).

Структура оптимального управления (3.5.16) имеет простую экономическую интерпретацию. Если промежуток планирования T достаточно велик, т.е. выполнено условие (3.5.16), то на первом этапе следует развивать первый сектор, направляя в него все создаваемые фонды. После момента времени (3.5.13) все новые фонды направляются во второй сектор, производящий конечную продукцию. Если времени мало, то все фонды направляются сразу во второй сектор.

На рисунках 5, 6, 7 представлены графики изменения переменных модели при отстутствии амортизации основных фондов ($T = 10, \quad \alpha = 0.27, \quad x_1^0 = x_2^0 = 1$).

3.5.3. Задача планирования с амортизацией

При наличии амортизации решение задачи (3.5.3)-(3.5.6) практически не представляется возможным найти аналитически, поэтому полученная модель анализировалась численно при различных параметрах $\alpha, \quad \mu, \quad T$.

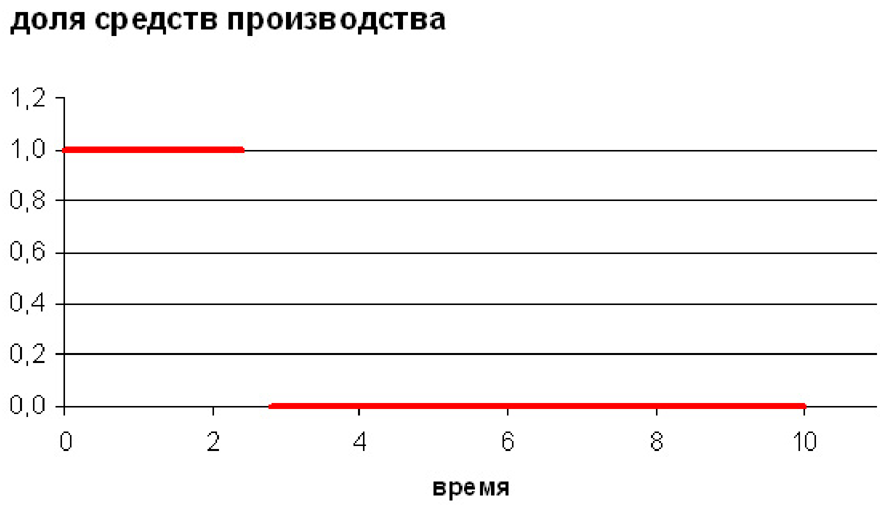

Рис. 5: Доля средств производства при отсутствии амортизации основных фондов

Рис. 6: Потребление при отсутствии амортизации основных фондов

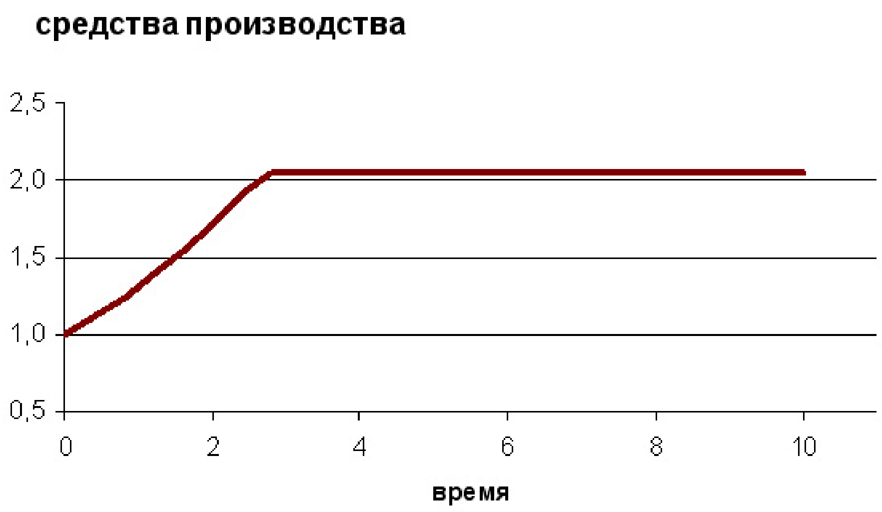

Рис. 7: Средства производства при отсутствии амортизации основных фондов

Характер получаемых оптимальных управлений в этом случае соответствует варианту модели с нулевой амортизацией (в зависимости от параметров α, μ, T): первый вариант характеризуется одной точкой переключения и соотношением

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T; \end{cases}$$

во втором варианте переключения нет и $u(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$.

Дадим интерпретацию. Когда T достаточно велико, мы получаем первый вариант: вначале происходит период накопления средств производства, при этом потребление опускается ниже начального, затем экономика работает только на потребление, производственные фонды в это время разрушаются; во втором варианте (T относительно мало) сразу же с начального момента времени происходит разрушение производственных фондов и накопление товаров потребления.

Типичное решение первого варианта модели представлено на рисунках 8, 9, 10 ($T = 10, \quad x_1^0 = x_2^0 = 1, \quad \alpha = 0.27, \quad \mu = 0.07$).

3.5.4. Ограничения по уровню фазовых переменных

Очевидно, что вариант модели, предложенный в предыдущем пункте, может быть применен только для экономики депрессивного характера, так как к концу планируемого периода может быть даже $x_1(T) < x_1(0)$ (при наличии амортизации и достаточно длительного периода планирования) и, таким образом, развитие средств производства является затухающим. Логично было бы дополнить модель дополнительными условиями, устраняющими указанный недостаток. Рассмотрим фазовые ограничения вида

$$x_1(t) \geqslant x_1(0), \quad x_2(t) \geqslant x_2(0). \tag{3.5.17}$$

Экономическая интерпретация этих фазовых ограничений очевидна: на всем протяжении времени планирования ($0 \leqslant t \leqslant T$) требуется, чтобы выпуск обоих секторов не опускался ниже начального.

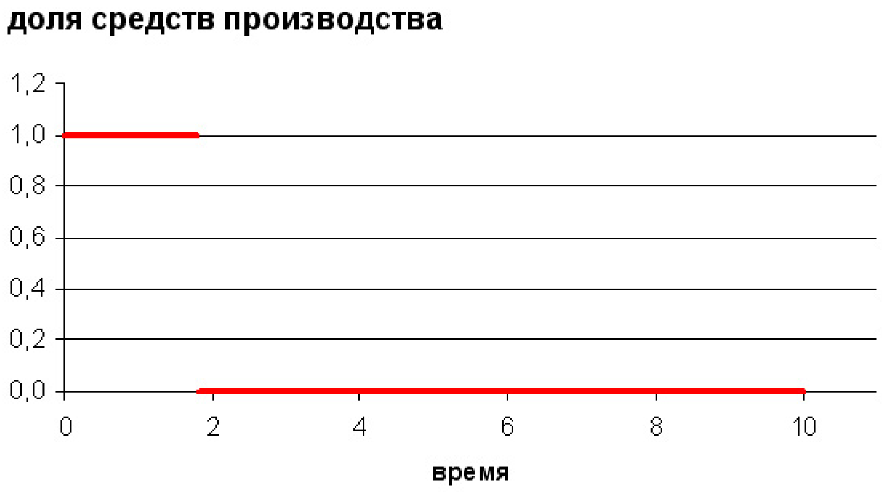

Рис. 8: Доля средств производства с амортизацией основных фондов

Рис. 9: Потребление с амортизацией основных фондов

Рис. 10: Средства производства с амортизацией основных фондов

Теперь, используя метод снятия фазовых ограничений, сведем задачу (3.5.3)-(3.5.6), (3.5.17) к задаче без фазовых ограничений.

Динамика будет описываться следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha u x_1 - \mu x_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(1-u)x_1 - \mu x_2, \\ \dot{x}_3 &= ([x_1^0 - x_1(t)]^+)^2 + ([x_2^0 - x_2(t)]^+)^2, \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0, \qquad x_3(0) = x_3(T) = 0. \tag{3.5.19}$$

Ограничение на управление (3.5.4) и целевая функция (3.5.6) остаются без изменений. Отметим, что при $\mu = 0$ решение задачи (3.5.4), (3.5.18), (3.5.19), (3.5.6) совпадает с решением задачи (3.5.3) - (3.5.6).

Для анализа поведения динамики экономических характеристик поставленной задачи использование аналитических методов чрезвычайно затруднительно, поэтому задача анализировалась численно, в частности, использовался метод параметризации.

Наиболее типичные оптимальные решения (получаемые при "разумном"выборе параметров α, μ) содержат два периода управления:

– в первом периоде накапливаются средства производства, при этом уровень предметов потребления поддерживается на начальном состоянии;

– второй период характеризуется тем, что все ресурсы переходят на производство товаров потребления, производственный фонд разрушается, но, в отличии от модели предыдущего пункта, к конечному моменту времени состояние производственного фонда не опускается ниже начального.

На графиках 11, 12 представлены основные фонды при $T = 10$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\alpha = 0.27$, $\mu = 0.07$.

Рис. 11: Потребление с ограничением на уровень фондов

Рис. 12: Средства производства с ограничением на уровень фондов

3.5.5. Ограничения по монотонности фазовых переменных

Второй вариацией модели (3.5.3)-(3.5.6) может служить добавление к ней условия

$$\dot{x}_1 \geqslant 0, \quad \dot{x}_2 \geqslant 0. \tag{3.5.20}$$

Экономическая интерпретация этих фазовых ограничений следующая: на всем протяжении времени планирования ($0 \leqslant t \leqslant T$) требуется, чтобы выпуск обоих секторов был неубывающим.

Аналогично задаче (3.5.3)-(3.5.6), (3.5.17), используя метод снятия фазовых ограничений, сведем задачу (3.5.3)-(3.5.6), (3.5.20), к задаче без фазовых ограничений.

В этом случае динамика будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \alpha u x_1 - \mu x_1, \\ &\dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1 - \mu x_2, \\ &\dot{x}_3 = ([-\alpha u x_1 + \mu x_1]^+)^2 + ([-\alpha(1-u)x_1 + \mu x_2]^+)^2, \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0, \qquad x_3(0) = x_3(T) = 0. \tag{3.5.22}$$

Ограничение на управление (3.5.4) и целевая функция (3.5.6) остаются без изменений.

Анализ динамики экономических показателей, также, как и в предыдущем пункте, проводился численно с помощью метода параметризации.

При анализе были выявлены два наиболее типичных управления. Первое управление получалось при относительно небольших T : на всем промежутке времени уровень производственных фондов поддерживается на начальном состоянии, товары потребления накапливаются. Второй тип оптимального управления получался при достаточно большом T и "разумном"выборе параметров α, μ. Такое управление содержит два периода:

– в первом периоде накапливаются средства производства, при этом уровень предметов потребления поддерживается на начальном состоянии;

– во втором периоде накапливаются товары потребления, при этом производственный фонд поддерживается на том уровне, которого он достиг к концу первого этапа.

На рисунках 13, 14 приведена динамика изменения фондов при $T = 10$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\alpha = 0.3$, $\mu = 0.04$, характерная для второго типа управления.

Рис. 13: Потребление с ограничением на неубывание фондов

Рис. 14: Средства производства с ограничением на неубывание фондов

4. Приложение

4.1. Основные обозначения, понятия и определения

$\Re$ – множество действительных чисел;
$\Re^n$ – n -мерное арифметическое пространство;
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярное произведение в $\Re^n$. Пусть $x, y \in \Re^n$, тогда $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Список пространств, в которых рассматриваются задачи оптимального управления. Пусть $G \subset \Re^n$, тогда

- $C(G)$ – пространство непрерывных на области G функций;
- $PC([t_0;t_1])$ – пространство кусочно непрерывных на отрезке $[t_0;t_1] \subset \Re$ функций (функция называется кусочно непрерывной, если она непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода);
- $C^1(G)$ – пространство непрерывно дифференцируемых на области G функций (функция называется непрерывно дифференцируемой, если она и все ее частные производные существуют и определены непрерывно);
- $PC^1(G)$ – пространство кусочно непрерывно дифференцируемых на области G функций (функция называется кусочно непрерывно дифференцируемой, если она непрерывна, а ее частные производные кусочно непрерывны);

Используемые нормы. В пространстве непрерывных функций C справедлива норма
$$\|x(\cdot)\|_C = \max_{t\in G} |x(t)|, \quad x(\cdot) \in C(G).$$

В пространстве C^1 непрерывно дифференцируемых функций норма
$$\|x(\cdot)\|_{C^1} = \max\{\|x(\cdot)\|_C, \|\dot{x}(\cdot)\|_C\}, \quad x(\cdot) \in C^1(G).$$

Тот факт, что данные функции являются нормами, проверяется достаточно легко, предлагается сделать это самостоятельно.

4.2. Некоторые вопросы математического анализа

Актуальность этого раздела обосновывается тем, что далеко не все вопросы математического анализа рассматриваются в учебных дисциплинах специальностей экономического направления.

Теорема о дифференцировании интеграла по параметру

Пусть x – числовой параметр, для любого $x \in (x_1, x_2)$ функции $f(t,x)$ и $\partial f(t,x)/\partial x$ $(f : \Re^2 \to \Re)$, зависящие от переменного t, интегрируемы на отрезке $[a(x), b(x)]$, где $a(\cdot), b(\cdot) \in C^1(x_1, x_2)$, тогда определена функция
$$\varphi(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)dt,$$

$\varphi(x)$ – дифференцируема и

$$\varphi'(x) = f(b(x), x)b'(x) - f(a(x), x)a'(x) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt.$$

Формула Тэйлора для функции нескольких переменных

Теорема (о разложении функции в степенной ряд). Пусть $a, x \in \Re^n$, функция $f : \Re^n \to \Re$ имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно, тогда справедлива формула Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \ldots + \frac{d^k f}{k!} + o\left(\|x - a\|^k\right),$$

где

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|_{x=a} (x_i - a_i),$$

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=a} (x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

$$\ldots$$

$$d^k f = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left.\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right|_{x=a} (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \ldots (x_{i_k} - a_{i_k});$$

$$\|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}.$$

Теорема существования и единственности

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

здесь $u(t) \in \Re^r$, $x(t) \in \Re^n$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Решение задачи будем рассматривать в классе функций $u(\cdot) \in PC([t_0; t_1])$, $x(\cdot) \in C([t_0; t_1])$.

Справедлива теорема [5]:

Пусть функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна по всем переменным $(t, x, u) \in [t_0; t_1] \times \Re^n \times \Re^r$ и выполняется условие

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| \leqslant L(t)\|x - y\|$$

при всех $(t, x, u), (t, y, u) \in [t_0; t_1] \times \Re^n \times \Re^r$, где $L(t)$ – неотрицательная функция из $PC([t_0; t_1])$. Тогда для любого $u(\cdot) \in PC([t_0; t_1])$ и начального условия x^0 поставленная задача Коши имеет единственное решение $x = x(t)$, определенное непрерывно на всем отрезке $[t_0; t_1]$. Это решение имеет производную $\dot{x}(t) \in PC([t_0; t_1])$.

Приведенные теоремы носят вспомогательный справочный характер, их доказательство и полное обсуждение можно найти в учебной и справочной литературе, например [5, 23].

4.3. Тематический план и программа лекций

4.3.1. Темы лекций

1. Основные проблемы теории ОУ. Введение. Основные проблемы теории оптимального управления. Задача построения оптимальных программных движений.

2. Модельдвухсекторной экономики. Рассматривается случай замкнутой экономики, в которой взаимодействуют два основных фонда: производство средств производства и производство товаров потребления.

3. Достаточные условия оптимальности. Непрерывные процессы. Рассматриваются условия при которых обеспечивается оптимальность заданного процесса для вариационных задач. Вводятся функции, на основе которых строится теория о достаточных условиях.

4. Многошаговые процессы. Условия оптимальности, полученные для непрерывных процессов, здесь обосновываются для многошаговых.

5. Линейные по управлению процессы. Отдельно рассматривается случай задач с линейным управлением, здесь удается найти достаточные условия оптимальности в эффективной форме.

6. Необходимые условия оптимальности. Задачи ВИ. Основные понятия вариационного исчисления. Примеры содержательных задач о поиске экстремумов. Общая постановка задачи вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Простейшая (основная) задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера, случаи его упрощения. Вариационная задача с незакреплёнными границами. Условия трансверсальности. Условия Вейерштрасса-Эрдмана. Задачи с ограничениями. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача.

7. Принцип максимума для задачи со свободным правым концом. Принцип максимума - необходимое условие экстремума. Постановка задачи. Понятие игольчатой вариации управления. Доказательство принципа максимума и его соотношение с принципом Вейерштрасса.

8. Общая задача ОУ. Постановка задачи ОУ достаточно общего вида, формулировка необходимых условий решения задачи ОУ в виде принципа максимума Понтрягина.

9. Задача быстродействия. Рассматривается достаточно важный случай задачи ОУ - задача быстродействия, формулируется ПМП для поставленной задачи.

10. Связь задач ВИ и ОУ. Формулируются необходимые условия оптимальности в задачах ОУ и ВИ, показывается дуализм этих условий и задач соответственно.

11. Метод локальных вариаций. Численные методы решения задач оптимального управления. Полная дискретизация и сведение к задаче нелинейного программирования. Отдельно рассматривается метод решения задач ВИ с ограничениями на управление.

12. Метод Крылова-Черноусько. Метод решения задач ОУ со свободным правым концом. Формулируются соотношения, позволяющие реализовать метод практически.

13. Метод параметризации. Метод решения задач ОУ и ВИ достаточно общего вида. Приводится полная схема метода первого порядка.

4.3.2. Темы практических и семинарских занятий

1. Основные проблемы теории ОУ. Рассматриваются некоторые методы аналитического решения ОДУ.

2. Модель двухсекторной экономики. Рассматривается случай замкнутой экономики, в которой взаимодействуют два основных фонда: производство средств производства и производство товаров потребления.

3. Непрерывные процессы. Рассматриваются условия при которых обеспечивается оптимальность заданного процесса для вариационных задач. Приводятся примеры, в которых можно выделить требуемый процесс.

4. Многошаговые процессы. Приводятся некоторые примеры многошаговых процессов.

5. Линейные по управлению процессы. Рассматривается модель односекторной экономики.

6. Задачи ВИ. Простейшая (основная) задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче. Уравнение Эйлера, случаи его упрощения. Вариационная задача с незакреплёнными границами. Условия трансверсальности. Условия Вейерштрасса-Эрдмана. Задачи с ограничениями. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача.

7. Принцип максимума для задачи со свободным правым концом. Рассматриваются задачи со свободным правым концом.

8. Общая задача ОУ. Рассматриваются задачи ОУ достаточно общего вида, решение задач ищется на основе условий принципа максимума Понтрягина.

9. Задача быстродействия. Рассматривается достаточно важный случай задачи ОУ - задача быстродействия.

10. Метод локальных вариаций. Полная дискретизация и сведение к задаче нелинейного программирования. Отдельно рассматривается метод решения задач ВИ с ограничениями на управление.

11. Метод Крылова-Черноусько. Метод решения задач ОУ со свободным правым концом. Формулируются соотношения, позволяющие реализовать метод практически.

12. Метод параметризации. Метод решения задач ОУ и ВИ достаточно общего вида. Приводится полная схема метода первого порядка.

4.3.3. Перечень экзаменационных вопросов

1. Основные проблемы теории оптимального управления. Задача построения оптимальных программных движений.

2. Модель двухсекторной экономики.

3. Основные понятия вариационного исчисления. Общая постановка задачи вариационного исчисления. Классификация экстремумов.

4. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче. Основные леммы вариационного исчисления.

5. Уравнение Эйлера. Случаи упрощения уравнения Эйлера.

6. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Вариационная задача с незакреплёнными границами. Условия трансверсальности.

7. Условия Вейерштрасса-Эрдмана. Задачи с ограничениями.

8. Достаточные условия экстремума в непрерывном случае.

9. Достаточные условия экстремума в многошаговых процессах.

10. Частные ситуации при задании дифференциальных связей в нормальной форме. Изопериметрическая задача.

11. Классификация задач теории оптимального управления.

12. Принцип максимума - необходимое условие экстремума в задаче со свободным правым концом.

13. Понятие игольчатой вариации управления.

14. Принцип максимума достаточно общего вида.

15. Соотношение принципа максимума и необходимых условий в задаче ВИ.

16. Методы редукции различных форм задачи оптимального управления к терминальной форме.

17. Численные методы решения задач оптимального управления. Полная дискретизация и сведение к задаче нелинейного программирования.

18. Метод локальных вариаций.

19. Метод Крылова-Черноусько.

20. Метод параметризации задач оптимального управления.

Литература

[1] *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.

[2] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

[3] *Анрион Р.* Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1979.

[4] *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления./ Пер. с англ. - М.:Мир, 1972. - 544с. – М.: Наука, 1979.

[5] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.

[6] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.

[7] *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. - 204 с.

[8] *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

[9] *Горбунов В.К.* О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18. №5. С. 1083-1095.

[10] *Горбунов В.К.* Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №2. С. 292-303.

[11] *Горбунов В.К.* Сист. анализ экономического и демографического роста// Изв.АН СССР, Техническая кибернетика, 1981. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №2. С. 292-303

[12] *Горбунов В.К.* Оптимальное управление: принцип максимума Понтрягина. – Ульяновск: ФМГУ, 1994.

[13] *Горбунов В.К.* Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления // Дифф. уравнения и их приложения: тезисы докл. $1^{\text{й}}$ междун. научно-практ. конф. С-Пб. 1996, С. 58.

[14] *Горбунов В.К., Лутошкин И.В.* Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.

[15] *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. – М.: Физматлит, 2000.

[16] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.

[17] *Колемаев В.А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

[18] *Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М., Данилина Н.И., Сергеев С.И.* Основы теории оптимального управления. – М.: Высш.шк., 1990.

[19] *Лагоша Б.А.* Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. -192 с.

[20] *Лутошкин И.В.* Численное решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями// Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механики". Выпуск 5 – Ульяновск. 1998. С. 85-91.

[21] *Любушин А.А., Черноусько Ф.Л.* Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления. Изв. АН СССР, Техн. киб. 1983. №2. С. 147-159.

[22] *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука. 1971.

[23] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I, II. – М.: Наука. 1973.

[24] *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974.

[25] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961.

[26] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.

[27] *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). – М.: Наука, 1973.

[28] *Эроу К.* Применение теории управления к экономическому росту. // Математическая экономика. Сб. переводов/Ред. Б.С.Митягина, - М.:Мир, 1974.

[29] *M.Blok* Dynamic Models of the Firm. – Berlin, Springer, 1996.