Кафедра цифровой экономики

Лабораторный практикум по дисциплине

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Методические указания к лабораторным работам

для студентов направления подготовки:

38.03.05 Бизнес-информатика (степень бакалавр)

сведения о разработчиках:

Лутошкин Игорь Викторович, к.ф.-м.н., доцент,
заведующий кафедры цифровой экономики

Ульяновск
Ульяновский государственный университет
2019

Оглавление

Введение . . . 2
1. Лабораторная работа: Решение простейших динамических задач . . . 2
 1.1. Постановка . . . 2
 1.2. Теоретические сведения . . . 2
2. Лабораторная работа: Решение задач вариационного исчисления . . . 7
 2.1. Постановка . . . 7
 2.2. Теоретические сведения . . . 8
3. Лабораторная работа: Метод локальных вариаций . . . 10
 3.1. Постановка . . . 10
 3.2. Теоретические сведения . . . 11
4. Лабораторная работа: Метод Крылова-Черноусько . . . 14
 4.1. Постановка . . . 14
 4.2. Теоретические сведения . . . 14
5. Лабораторная работа: Метод параметризации . . . 17
 5.1. Постановка . . . 17
 5.2. Теоретические сведения . . . 17
  5.2.1. Постановка задачи и ее параметризация . . . 17
  5.2.2. Производные параметризованных функционалов . . . 19
 5.3. Методы, использующие функции штрафа . . . 21
  5.3.1. Ограничение на конец траектории . . . 21
  5.3.2. Снятие ограничение на управление . . . 22
  5.3.3. Снятие фазовых ограничений . . . 23
  5.3.4. Сведение к автономной системе . . . 25

Введение

Динамичное развитие экономики предъявляет повышенные требования к набору компетенций, навыков и умений выпускников как бакалавриата, так и магистратуры. Формирование цифровых компетенций, аналитических навыков и умений является важной задачей при обучении студентов по УГСН "Экономика и управление".

Дисциплина "Оптимальное управление в экономических процессах"входит в учебный план для студентов направления бакалавриата "Бизнес-информатика". В рамках дисциплины предусмотрено выполнение лабораторных работ с целью получения и закрепления практических навыков по моделированию задач экономической динамики с помощью специализированных математических пакетов.

Методические указания по дисциплине "Оптимальное управление в экономических процессах"предназначены для обеспечения самостоятельной работы студентов при выполнении лабораторных работ.

1. Лабораторная работа: Решение простейших динамических задач

1.1. Постановка

Цель: Сформировать представление о применении функций математических пакетов к моделированию задач экономической динамики.

Результат: Получены навыки решения задач Коши и представления результатов решения в пакете Maple.

Задание: Решить задачу Коши численно (аналитически) согласно варианта, выданного на занятии. Представить решение в графическом виде на заданном интервале.

1.2. Теоретические сведения

Материал данного раздела основан на [3].

Пакет Maple является системой аналитических вычислений, предназначенной для решения математических задач, следовательно, может быть применим для математического моделирования финансовых, экономических задач. Пакет Maple работает под управлением операционной системы Windows, и его интерфейс пользователя является стандартным для программ, разработанных для выполнения под управлением этой операционной системы.

По сути Maple является интерпретатором. Пользователь с помощью клавиатуры набирает команды (функции) в рабочем поле, которые передаются на обработку основному компоненту системы, называемому ядром системы. Названия или имена команд и функций соответствуют тем действиям, которые они выполняют. Любая, введенная пользователем правильная команда Maple, немедленно интерпретируется исполняющей системой, и пользователь видит результат.

Кроме непосредственного ввода последовательности необходимых команд для решения задачи Maple предоставляет собственный язык программирования, операторы которого похожи на операторы любого языка программирования высокого уровня. Это позволяет создавать собственную последовательность действий для решения конкретной выполняемой задачи, оформить ее в виде процедуры, которую впоследствии можно вызывать в любое время.

При создании нового рабочего листа устанавливается режим ввода команд и операторов. Указанием на это является приглашение ввода в строке рабочего листа – символ '>', сразу же после которого расположен мерцающий курсор. Пользователь вводит с клавиатуры команды и нажатием клавиши <Enter> передает их на обработку символьному анализатору Maple, который отображает в поле вывода либо результат выполнения команды, либо сообщение об ошибке.

Каждый оператор или команда должны заканчиваться разделителем. В одной строке можно вводить несколько операторов, разделенных точкой с запятой (;) или двоеточием (:), можно задать несколько операторов по одному на строке, но так, чтобы при нажатии <Enter> они одновременно были переданы символьному анализатору на выполнение. Это осуществляется нажатием комбинации клавиш <Shift> + <Enter> по завершении ввода оператора. В этом случае введенный оператор не пересылается на обработку интерпретатору, а система ожидает ввода пользователя, автоматически переместив курсор на новую строку, причем в новой строке приглашение на ввод не появляется. Таким способом можно ввести несколько операторов по одному на каждой строке, и после нажатия <Enter> все введенные операторы последовательно будут выполнены. Если предложение завершается точкой с запятой, то оно вычисляется, а в области вывода отображается результат. При использовании двоеточия в качестве разделителя команда выполняется, но результаты ее работы не отображаются в области вывода рабочего листа.

В Maple (как и большинстве специализированных математических пакетов) реализованы методы поиска аналитического решения обыкновенного дифференциального уравнения (задачи Коши) и численного решения задачи Коши.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка, разрешенным относительно производной, называется уравнение вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \tag{1.2.1}$$

где t – независимый скалярный аргумент (время), $x(t)$ – искомая функция (в общем случае вектор-функция, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$).

Если к уравнению (1.2.1) добавить условие определенности функции $x(t)$ в момент времени t_0 :

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2.2}$$

то задача (1.2.1), (1.2.2) называется задачей Коши.

Для аналитического решения ОДУ в Maple используется функция `dsolve`. Функция `dsolve` может вызываться с различными параметрами:

- `dsolve(ODE,x(t))`
- `dsolve(ODE,x(t),opts)`
- `dsolve({ODE,ICs},x(t),opts)`
- `dsolve({sysODE,ICs},{funcs},opts)`

Здесь, `ODE` – единственное ОДУ или система из ОДУ первого порядка; `opts` – параметр, определяющий тип решения; `ICs` – выражение, задающее начальные условия; `sysODE` – множество дифференциальных уравнений; {`funcs`} – множество искомых функций.

Функция `dsolve` в зависимости от вида уравнения и значений параметров может решать различные типы задач для ОДУ:

- поиск решений в замкнутой форме ОДУ или системы таких уравнений;
- решение ОДУ или системы таких уравнений с заданными начальными или граничными условиями (задача Коши, краевая задача);
- поиск решений в виде формального степенного ряд для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами;
- поиск решений с помощью интегральных преобразований (Лапласа, Фурье и др.);
- поиск численного решения или решения в виде ряда ОДУ или системы таких уравнений.

Для указания производной при задании уравнения можно использовать функции `diff`, `Diff` или оператор `D`, а для обозначения производной в дополнительных условиях используется только оператор `D`. Если в выражении нужно написать первую производную $\dfrac{dx}{dt}$, то в Maple это можно записать в виде `diff(x(t),t)`. Если требуется записать производную высокого порядка, то можно использовать одну из альтернатив. Например, требуется записать $\dfrac{d^3x}{dt^3}$. Для этого есть варианты: `diff(x(t),t,t,t)` или `diff(x(t),t$3)`.

Теперь перейдем к примерам. Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{dx}{dt} = t^2x^4 - \frac{x}{t}.$$

На листе Maple введем переменную `eq1` присвоим ей выражение, содержащее описание дифференциального уравнения.

```
> x:='x':
> eq1:=diff(x(t),t)=t^2*x(t)^4-x(t)/t;
```

Если нажать <Enter>, то на листе после набранного текста отобразится следующее:

$$eq1 := \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) = t^2x(t)^4 - \frac{x(t)}{t}$$

Теперь для решения дифференциального уравнения можно вызвать функцию `dsolve`:

```
> r1:=dsolve(eq1,x(t));
```

$$r1 := x(t) = \frac{(-(3\ln(t) - \_C1)^2)^{(1/3)}}{(3\ln(t) - \_C1)t}$$

Полученное решение содержит $\_C1$, это неизвестная константа, которая может быть определена при добавление дополнительных условий. Также можно отметить, что полученное решение дано в явном виде, однако, указав соответствующий параметр, можно получить решение в неявном виде:

```
> x:='x':
> r2:=dsolve(eq1,x(t),'implicit');
```

$$r2 := \frac{1}{x(t)^3} - (-3\ln(t) + \_C1)t^3 = 0$$

Рассмотрим ситуацию, когда требуется решить систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \frac{dx_2}{dt} = 2x_2 + x_3, \frac{dx_3}{dt} = 2x_3 + x_1.$$

Введем три дифференциальных уравнения:

```
eq1:=diff(x1(t),t)=2*x1(t)+x2(t);
eq2:=diff(x2(t),t)=2*x2(t)+x3(t);
eq3:=diff(x3(t),t)=2*x3(t)+x1(t);
```

$$eq1 := \frac{d}{dt}x1(t) = 2x1(t) + x2(t)$$

$$eq2 := \frac{d}{dt}x2(t) = 2x2(t) + x3(t)$$

$$eq3 := \frac{d}{dt}x3(t) = 2x3(t) + x1(t)$$

В этом случае вызов функции `dsolve` для решения системы требует введение множеств уравнений и функций:

```
> rs:=dsolve({eq1,eq2,eq3},{x1(t),x2(t),x3(t)});
```

$$\begin{aligned} rs := \ & \{x1(t) = \_C1e^{(3t)} + \_C2e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \_C3e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), x2(t) = \\ & \_C1e^{(3t)} - \frac{1}{2}\_C2e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{1}{2}\_C2e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\sqrt{3} \\ & -\frac{1}{2}\_C3e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{2}\_C3e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\sqrt{3}, x3(t) = \_C1e^{(3t)} \\ & -\frac{1}{2}\_C2e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{2}\_C2e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\sqrt{3} - \frac{1}{2}\_C3e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ & +\frac{1}{2}\_C3e^{\left(\frac{3t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

В полученном решении $\_C1$, $\_C2$, $\_C3$ – неизвестные константы.

Далее рассмотрим пример, когда искомые функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, определены в некоторой точке, т.е. требуется решить задачу Коши:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\frac{dx_2}{dt}-x_1+2x_2=1, \frac{d^2x_2}{dt^2}+2\frac{dx_1}{dt}+2x_1-x_2=t,$$

$$x_1(0)=-\frac{7}{9}, x_1'(0)=\frac{2}{3}, x_2(0)=-\frac{2}{9}, x_2'(0)=\frac{1}{3}.$$

Введем на рабочий лист два уравнения и начальные условия, а затем вызовем функцию `dsolve`:

```
> eq1:=diff(x1(t),t$2)+2*diff(x2(t),t)-x1(t)+2*x2(t)=1:
> eq2:=diff(x2(t),t$2)+2*diff(x1(t),t)+2*x1(t)-x2(t)=t:
> ICs:={x1(0)=-7/9, D(x1)(0)=2/3, x2(0)=-2/9; D(x2)(0)=1/3}:
> rs:=dsolve({eq1,eq2,ICs},{x1(t),x2(t)});
```

$$rs := \{x2(t)=-\frac{2}{9}+\frac{t}{3}, x1(t)=-\frac{7}{9}+\frac{2t}{3}\};$$

Итак, нами получено решение задачи Коши в аналитической форме.

Задачи 1 к разделу. В системе Maple найти решение следующих задач:

1. $t\dfrac{dx}{dt}+t^2+tx-x=0;$
2. $\dfrac{dx}{dt}-2xt=3t^2-2t^4;$
3. $(t+x^2)\dfrac{dx}{dt}=x-1;$
4. $2x\dfrac{d^2x}{dt^2}+1=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2, x(1/3)=1, x'(1/3)=2;$
5. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2x-t}{2t+x}, x(1)=1;$
6. $\dfrac{d^3x}{dt^3}=t+\cos(t), x(0)=0, x'(0)=0, x''(0)=0;$
7. $x^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-2tx\dfrac{dx}{dt}+2x^2-t^2=0;$
8. $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-4tx\dfrac{dx}{dt}+8x^2=0.$

Отметим, что не все дифференциальные уравнения имеют аналитическое решение, в этом случае их можно решать численно. Естественно, что в этом случае требуется обязательное определение начальных условий в соответствии с количеством уравнений. В Maple реализованы численные методы решения задачи Коши. Для этого в функции `dsolve` нужно указать соответствующее значение параметра.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_2(t)-x_1(t)-t, \frac{dx_2}{dt}=x_1(t), x_1(0)=0, x_2(0)=1.$$

Данная задача имеет аналитическое решение, но сейчас продемонстрируем как решать её численными методами. Для этого в листе Maple следует ввести:

```
> eq1:=diff(x1(t),t)=2*x2(t)-x1(t)-t:
> eq2:=diff(x2(t),t)=x1(t):
> ICs:=x1(0)=0, x2(0)=1:
> sol:=dsolve({eq1,eq2,ICs},{x1(t),x2(t)},numeric):
```

В результате этих команд численное решение будет помещено в массив sol. Значение можно посмотреть в допустимой точке, например, при $t = 2$.

```
> sol(2);
```

$$[t = 2, x1(2) = 2.9477566255468746, x2(2) = 3.72065020474031360]$$

Или построить график функции на заданном интервале, например, для построения графика $x_2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2,5$ можно написать команды:

```
> with(plots);
> plots[odeplot] (sol,[t,x2(t)],0..2.5,labels=[t,x2],color=black);
```

Использование различных значений параметров позволяет пользователю менять процедуры поиска численного решения, внешний вид графиков функций. Более подробно варианты значений параметров можно найти в помощи системы Maple или в [3].

Задачи 2 к разделу. В системе Maple найти численное решение и построить графики функций на соответствующих отрезках:

1. $2x\dfrac{d^2x}{dt^2} + 1 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2, x(1/3) = 1, x'(1/3) = 2, \quad x(t)$ при $1/3 \leqslant t \leqslant 3$;
2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x - t}{2t + x}, x(1) = 1, \quad x(t)$ при $1 \leqslant t \leqslant 4$;
3. $\dfrac{d^3x}{dt^3} = t + \cos(t), x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, \quad x(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 3$;
4. $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2\sin(5t) - x_1\cos(2t) - t, \dfrac{dx_2}{dt} = x_1, \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, \quad x_1(t), x_2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 12$.

2. Лабораторная работа: Решение задач вариационного исчисления

2.1. Постановка

Цель: Сформировать представление о применении функций математических пакетов к моделированию задач функциональной оптимизации (задача вариационное исчисление).

Результат: Получены навыки решения задач вариационного исчисления и представления результатов решения в пакете Maple.

Задание: Решить задачу вариационного исчисления согласно варианта, выданного на занятии. Представить решение в графическом виде.

2.2. Теоретические сведения

Материал данного раздела основан на [8].

Определение 2.1. *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr};\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1. \qquad (2.2.1)$$

Задача

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = J(x(\cdot)) + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr} \qquad (2.2.2)$$

называется *задачей Больца.* Здесь $x(t) \in \Re^n$ при $t \in [t_0; t_1]$, $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция ($L : \Re^{1+2n} \to \Re$), называемая *интегрантом,* $l(\xi_0, \xi_1)$ — функция ($l : \Re^{2n} \to \Re$), называемая *терминантом.* Отрезок $[t_0,\, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$.

Обозначим через L_x, $L_{\dot{x}}$ соответствующие производные по переменным x и $\dot{x}$ от функции $L(t, x, \dot{x})$:

$$L_x(t) = \left.\frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial x}\right|_{x=x(t),\dot{x}=\dot{x}(t)}, L_{\dot{x}}(t) = \left.\frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x(t),\dot{x}=\dot{x}(t)}.$$

Обозначим через $\widehat{l}_{x(t_0)}$, $\widehat{l}_{x(t_1)}$ частные производные функции от $l(\xi_0, \xi_1)$:

$$\widehat{l}_{x(t_0)} = \left.\frac{\partial l(\xi_0, \xi_1)}{\partial \xi_0}\right|_{\xi_0=\widehat{x}(t_0),\xi_1=\widehat{x}(t_1)}, \widehat{l}_{x(t_1)} = \left.\frac{\partial l(\xi_0, \xi_1)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_0=\widehat{x}(t_0),\xi_1=\widehat{x}(t_1)}.$$

Теорема 1 (уравнение Эйлера, 1744 г.). *Пусть* L, L_x, $L_{\dot{x}}$ *— непрерывны. Тогда, если* $\widehat{x}(\cdot)$ *доставляет слабый экстремум в простейшей задаче или задаче Больца, то* $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) \in C^1([t_0, t_1])$ *и выполняется уравнение Эйлера:*

$$\frac{d\widehat{L}_{\dot{x}}(t)}{dt} = \widehat{L}_x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \qquad (2.2.3)$$

где $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$, $\widehat{L}_x(t) = L_x(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$.

В задаче Больца удовлетворяются также условия трансверсальности (краевые условия): $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{l}_{x(t_0)}$, $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{l}_{x(t_1)}$.

При решении задачи вариационного исчисления в Maple можно, используя функцию символьного дифференцирования `diff`, составить дифференциальное уравнение (2.2.3), которое затем решить с помощью `dsolve`. Граничные условия выбираются из постановки исходной проблемы и/или условий трансверсальности.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 + x^2 + (\dot{x})^2\right) dt, x(-1) = 1, x(1) = 2.$$

Определим подынтегральную функцию, введя вместо $\dot{x}$ переменную $dxdt$:

```
> L:=(t,x,dxdt)->t^2+x^2+dxdt^2;
```

$$L := (t, x, dxdt) \to t^2 + x^2 + dxdt^2$$

Теперь, когда функция L определена в Maple, можно найти частные производные, необходимые для составления уравнения Эйлера (2.2.3).

```
> dL_dx:=diff(L(t,x,dxdt),x):
> dL_ddxdt:=diff(L(t,x,dxdt),dxdt):
> d2L_ddxdt_dt:=diff(dL_ddxdt,t):
> d2L_ddxdt_dx:=diff(dL_ddxdt,x):
> d2L_ddxdt_ddxdt:=diff(dL_ddxdt,dxdt):
```

Имея строковые выражения для частных производных, можно сделать шаблон для уравнения Эйлера. Принимая во внимание, что уравнение Эйлера содержит $\ddot{x}$, введем вместо $\ddot{x}$ переменную $d2xdt2$:

```
> eq:=dL_dx-d2L_ddxdt_dt-d2L_ddxdt_dx*dxdt-d2L_ddxdt_ddxdt*d2xdt2:
```

Теперь для того, чтобы применить функцию `dsolve`, необходимо вместо переменных вставить нужные выражения:

```
> eq:=subs({x=x(t),dxdt=diff(x(t),t),d2xdt2=diff(x(t),t$2)},eq)=0:
```

Решение исходной краевой задачи можно получить с помощью `dsolve`:

```
> sol:=dsolve({eq,x(-1)=1,x(1)=2},x(t));
```

Функцию $x(t)$ можно выделить из полученного выражения:

```
> assign(sol):x:evalf(x(t));
```

Построение графика полученного решения может быть выполнено командой `plot` из пакета `plots`:

```
> with(plots);
> pict_x:=plot(x,t=-1..1,color=black):
> plots[display]({pict_x});
```

Получение решения задачи вариационного исчисления становится несколько проще, если воспользоваться пакетом VariationalCalculus:

```
> with(VariationalCalculus);
> x:='x': L:=t^2+x(t)^2+diff(x(t),t)^2;
> EulerLagrange(L,t,x(t));
> sol:=dsolve({op(%)=0,x(-1)=1,x(1)=2},x(t));
> assign(sol):x:evalf(x(t));
```

Приведенный пример показывает, как можно найти функцию, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума – уравнению Эйлера.

Задачи 3 к разделу. Найти экстремумы в задачах вариационного исчисления, построить график экстремалей, определить тип экстремума:

1. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 - 8tx + 2t^2\right) dt \to \text{extr}, x(-1) = 3, x(1) = 1;$

2. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 - 4x^2 + 2tx - t^2\right) dt \to \text{extr}, x(-1) = 2, x(1) = 4;$

3. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 + 4t^2x + t\cos(t)\right) dt \to \text{extr}, x(-1) = 2, x(1) = 0,5;$

4. $J(x(\cdot)) = \int_{0}^{2} \left((\dot{x})^2 - 4\dot{x}\sin(2t) - t^2\right) dt \to \text{extr}, x(0) = 1, x(2) = -1;$

5. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big(-(\dot{x})^2 + x^2 - 2x\sin(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr}, x(-1) = 2, x(1) = 3;$

6. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big((\dot{x})^2 + 4x^2 - 8tx + 2t^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, x(-1) = 3;$

7. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big((\dot{x})^2 - 4x^2 + 2tx - t^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, x(1) = 4;$

8. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big((\dot{x})^2 + 4x^2 + 4t^2x + t\cos(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr}, x(-1) = 2;$

9. $J(x(\cdot)) = \int_{0}^{2} \big((\dot{x})^2 - 4\dot{x}\sin(2t) - t^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, x(2) = -1;$

10. $J(x(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big(-(\dot{x})^2 + x^2 - 2x\sin(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr};$

11. $J(x_1(\cdot), x_1(\cdot)) = \int_{0}^{2} \big(2\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1^2 - x_2^2 + 2x_2\exp(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr};$
$x_1(0) = 1, x_1(2) = -1, x_2(0) = -2, x_2(2) = 1;$

12. $J(x_1(\cdot), x_1(\cdot)) = \int_{-1}^{1} \big((x_1 + x_2)^2 - (\dot{x}_1)^2 - (\dot{x}_2)^2 + 2x_1x_2\big)\,dt \to \mathrm{extr};$
$x_1(-1) = 2, x_1(1) = 0, x_2(-1) = 0, x_2(1) = 2;$

13. $J(x(\cdot)) = \int_{0}^{1} \big((\dot{x})^2 - x\big)\,dt + x^2(1) \to \mathrm{extr};$

14. $J(x(\cdot)) = \int_{0}^{2} \big((\dot{x})^2 - x\big)\,dt + x(0) + x^2(2) \to \mathrm{extr};$

15. $J(x(\cdot)) = \int_{0}^{1} \big((\dot{x})^2\big)\,dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \mathrm{extr};$

16. $J(x(\cdot)) = \int_{1}^{2} \big((\dot{x})^2 + 12tx\big)\,dt + 12x(1) + x^2(2) \to \mathrm{extr}.$

3. Лабораторная работа: Метод локальных вариаций

3.1. Постановка

Цель: Сформировать умение реализовывать алгоритм решения задач вариационного исчисления.

Результат: Получены навыки решения задач вариационного исчисления и представления результатов решения в пакете Maple с помощью численных методов.

Задание: Реализовать алгоритм локальных вариаций и решить задачу вариационного исчисления согласно варианта, выданного на занятии. Представить решение в отчете.

3.2. Теоретические сведения

Очевидно, что далеко не всегда задача оптимального управления, подвергаемая анализу, может быть решена аналитически. В этом случае, используются численные методы, позволяющие находить с некоторой точностью траектории "близкие" к оптимальным.

Материал данного раздела основан на [8].

Рассмотрим функцию $x(\cdot) \in C^1([t_0, T])$, предположим, что при всех $t \in [t_0, T]$ вектор $x(t) \in U(t) \subset \Re^n$, где $U(t)$ – замкнутое, непрерывное множество. Через U обозначим $\{U(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$. Поставим задачу минимизации функционала

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f(t, x(t), \dot{x}) dt \tag{3.2.1}$$

на введенном множестве, здесь $f : \Re^{1+2n} \to \Re$.

Пусть в каждый момент $t \in [t_0, T]$ множество $U(t)$ – параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t), \tag{3.2.2}$$

где $x^-(t)$, $x^+(t)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[t_0, T]$.

Зафиксируем натуральное число N и обозначим $\Delta t = \dfrac{T - t_0}{N}$. Произведем разбиение отрезка $[t_0, T]$ на N равных частей

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad i = 0, 1 \ldots N.$$

Введем обозначение:

$$I_i(z, y) = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \frac{z + y}{2}, \frac{y - z}{\Delta t}\right) \Delta t.$$

Если $z = x(t_i)$, $y = x(t_{i+1})$, то

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t), \dot{x}) dt = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \frac{z + y}{2}, \frac{y - z}{\Delta t}\right) \Delta t + o(\Delta t) \approx I_i(z, y).$$

Обозначим $x^i = x(t_i)$, $i = 0, 1 \ldots N$, тогда функционал (3.2.1) представим в виде

$$J(x(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t), \dot{x}) dt = \sum_{i=0}^{N-1} I_i\left(x^i, x^{i+1}\right) + O(\Delta t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} I_i\left(x^i, x^{i+1}\right).$$

Возьмем достаточно малое $h \in \Re$ и некоторое нулевое приближение x^{i0}, $i = 0, 1 \ldots N$, удовлетворяющее (3.2.2): $x^-(t_i) \leqslant x^{i0} \leqslant x^+(t_i)$.

Будем считать, что приближение $(k-1)$ построено, т.е. известно $x^{i(k-1)}$, $i = 0, 1 \ldots N$. Также определены первые m векторов k -го приближения, т.е.

$x^{0k},\ldots,x^{(m-1)k}$, в векторе $x^{m(k-1)}$ первые $(j-1)$ значений $x_1^{mk},\ldots,x_{j-1}^{mk}$ определены. Все найденные значения являются допустимыми, т.е. удовлетворяют (3.2.2). Требуется найти x_j^{mk}.

В качестве претендентов на x_j^{mk} рассмотрим:

$$x_j^{m(k-1)},\quad x_j^{m(k-1)}+h,\quad x_j^{m(k-1)}-h.$$

Соответственно этим вариантам введем векторы

$$\begin{aligned}
y &= \left(x_1^{mk},\ldots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)},x_{j+1}^{m(k-1)},\ldots,x_n^{m(k-1)}\right),\\
y^+ &= \left(x_1^{mk},\ldots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)}+h,x_{j+1}^{m(k-1)},\ldots,x_n^{m(k-1)}\right),\\
y^- &= \left(x_1^{mk},\ldots,x_{j-1}^{mk},x_j^{m(k-1)}-h,x_{j+1}^{m(k-1)},\ldots,x_n^{m(k-1)}\right)
\end{aligned}$$

и подсчитаем следующие значения:

$$\begin{aligned}
\Phi &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y\right)+I_m\left(y,x^{(m+1)(k-1)}\right),\\
\Phi^+ &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y^+\right)+I_m\left(y^+,x^{(m+1)(k-1)}\right),\\
\Phi^- &= I_{m-1}\left(x^{(m-1)k},y^-\right)+I_m\left(y^-,x^{(m+1)(k-1)}\right).
\end{aligned}$$

Если y^+ не удовлетворяет условию $x^-(t_m)\leqslant y^+\leqslant x^+(t_m)$, т.е. является недопустимым, то $\Phi^+:=+\infty$. Аналогично, если y^- не удовлетворяет условию $x^-(t_m)\leqslant y^-\leqslant x^+(t_m)$, то $\Phi^-:=+\infty$. Полагаем

$$x_j^{mk}=\begin{cases}
x_j^{m(k-1)}, & \Phi\leqslant\min\{\Phi^+,\Phi^-\},\\
x_j^{m(k-1)}+h, & \Phi^+<\min\{\Phi,\Phi^-\},\\
x_j^{m(k-1)}-h, & \Phi^-<\min\{\Phi,\Phi^+\}.
\end{cases}$$

Описанная процедура позволяет определить процесс улучшения текущего приближения решения. Введем функционал

$$S^k=\sum_{i=0}^{N-1}I_i\left(x^{ik},x^{(i+1)k}\right),$$

который дает приближение $J(\cdot)$ на k -ой итерации.

Очевидно, что $S^{k+1}\leqslant S^k$, и, в силу выбора (3.2.2), множество U ограничено, тогда процесс сходится и справедливо

$$S^{k+1}=S^k\Leftrightarrow x^{i(k+1)}=x^{ik},\quad i=0,1\ldots,N.$$

Схема решения задачи (3.2.1), (3.2.2):

1. Фиксируем $h_1>0$, натуральное число N, вычисляем $\Delta t=\dfrac{T-t_0}{N}$, выбираем $h_2>h_1$, $h:=h_2$.

2. При фиксированных Δt, h находим решение, согласно описанному выше процессу.

3. $h:=\dfrac{h}{2}$ и возвращаемся к пункту 2 (мельчение h продолжается до $h=h_1$).

4. $\Delta t := \dfrac{\Delta t}{2}, \quad N := 2N, \quad h := h_2$ переход к пункту 2.

Замечание. Метод локальной вариации находит локальный минимум задачи (3.2.1), (3.2.2). Но даже если минимум единственный, то для сходимости требуется существование $p \geqslant 2$:

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{h}{(\Delta t)^p} \to 0.$$

Задачи 4 к разделу. Методом локальных вариаций решить задачи:

1. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 - 8tx + 2t^2\right) dt \to \min, x(-1) = 3, x(1) = 1;$

2. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 - 4x^2 + 2tx - t^2\right) dt \to \min, x(-1) = 2, x(1) = 4;$

3. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 + 4t^2x + t\cos(t)\right) dt \to \min, x(-1) = 2, x(1) = 0,5;$

4. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 - 8tx + 2t^2\right) dt \to \min, x(-1) = 3;$

5. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 - 4x^2 + 2tx - t^2\right) dt \to \min, x(1) = 4;$

6. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\dot{x})^2 + 4x^2 + 4t^2x + t\cos(t)\right) dt \to \min, x(-1) = 2;$

7. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{0}^{2} \left((\dot{x})^2 - 4\dot{x}\sin(2t) - t^2\right) dt \to \min, x(2) = -1;$

8. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{0}^{1} \left((\dot{x})^2 - x\right) dt + x^2(1) \to \min;$

9. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{0}^{2} \left((\dot{x})^2 - x\right) dt + x(0) + x^2(2) \to \min;$

10. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{0}^{1} \left((\dot{x})^2\right) dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \min;$

11. $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_{1}^{2} \left((\dot{x})^2 + 12tx\right) dt + 12x(1) + x^2(2) \to \min.$

4. Лабораторная работа: Метод Крылова-Черноусько

4.1. Постановка

Цель: Сформировать умение реализовывать алгоритм решения задач со свободным правым концом.

Результат: Получены навыки решения задач оптимального управления и представления результатов решения в пакете Maple.

Задание: Реализовать алгоритм метода Крылова-Черноусько и решить задачу оптимального управления (со свободным правым концом) согласно варианта, выданного на занятии. Представить решение в отчете.

4.2. Теоретические сведения

Метод Крылова-Черноусько (метод последовательных приближений) решения задач ОУ со свободным правым концом. Рассмотрим следующую постановку задачи ОУ

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{4.2.1}$$

$$u(t) \in U,\ t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.2}$$

$$J(x(\cdot)) = \Phi(x(T)) \to \min, \tag{4.2.3}$$

здесь $x(t) \in R^n$, множество $U \subset R^r$ является замкнутым, $f : \Re^{1+n+r} \to \Re^n$, $\Phi : \Re^n \to \Re$. Допустимое управление – кусочно-непрерывная функция $u(t)$, удовлетворяющая (4.2.2).

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

и задачу Коши для сопряженных переменных $p(t)$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p, \quad p(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x(T)}. \tag{4.2.4}$$

Пусть $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ – оптимальный процесс задачи (4.2.1)-(4.2.3), $p^*(\cdot)$ – соответствующее оптимальному процессу решение (4.2.4). Задача (4.2.1)-(4.2.3) – задача со свободным правым концом, для нее выполняется условие максимума

$$H(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), p^*(t), v) \tag{4.2.5}$$

в любой точке t непрерывности $u^*(t)$.

Схема алгоритма метода Крылова-Черноусько:

1. Определим функцию $u^0(t) : (4.2.2)$. Зафиксируем $\delta > 0$.

2. Пусть дано некоторое допустимое управление $u^k(t) : (4.2.2)$. Решаем задачу Коши (4.2.1) при $u(t) = u^k(t)$, результатом решения будет функция $x^k(t)$, определенная на $[t_0, T]$.

3. Решаем задачу Коши (4.2.4) в обратном времени от T до t_0, при $u(t) = u^k(t)$, $x(t) = x^k(t)$, результатом решения будет соответствующая им функция $p^k(t)$, определенная на интервале $[t_0, T]$.

4. Определяем управление $u^{k+1}(t)$ из условия максимума (4.2.5):
$$H(t, x^k(t), p^k(t), u^{k+1}(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^k(t), p^k(t), v).$$
Если $\|u^{k+1} - u^k\| > \delta$, то переход к пункту 2, иначе пункт 5.

5. Полагаем $u^*(t) \approx u^{k+1}(t)$, в качестве $x^*(t)$ берем решение (4.2.1) при $u(t) = u^*(t)$. Пара $\{u^*(t), x^*(t)\}$ – решение задачи (4.2.1)-(4.2.3).

Замечание 1. Пусть функция $f(t, x, u)$ – линейна по переменной x, т.е. представима в виде:
$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t, u),$$
для любого $t \in [t_0, T]$ задача $\max\limits_{u \in U} B(t, u)$ разрешима, функционал J линеен по $x(T)$, т.е. $J(x(T)) = \langle c, x(T) \rangle$, тогда метод Крылова-Черноусько на второй итерации даст оптимальную траекторию при любом начальном приближении.

Действительно, сопряженная переменная (4.2.4) определяется условиями $\dot{p} = -A^T(t)p(t)$, $p(T) = -c$, что дает единственное решение $p^*(t)$ для любых $x(t)$, $u(t)$.

Функция Гамильтона-Понтрягина $H(t, x, p, u) = p^T A(t)x + p^T B(t, u)$ состоит из двух слагаемых, где первое не зависит от u, тогда (4.2.5) эквивалентно $\max\limits_{u \in U} p^T B(t, u)$, последняя задача разрешима по преположению в случае нетривиальности вектора c. Таким образом, условие максимума дает единственную функцию $u^*(t)$, не зависящую от $x(t)$, $p(t)$. Решение $x^*(t)$ получается из (4.2.1) при замене $u(t)$ на $u^*(t)$.

Замечание 2. В случае поиска решения задачи в виде сеточных функций, следует учитывать, что сетку для сопряженных пременных $p(t)$ запоминать не обязательно, достаточно хранить сеточные функции $u(t)$, $x(t)$. Кроме того, в качестве нормы сеточной функции можно использовать $\|u(\cdot)\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \|u(t_i)\|^2_{E^r} \right)^{1/2}$, $\|\cdot\|_{E^r}$ – Евклидова норма в пространстве $\Re^r$.

В приведенном виде метод Крылова-Черноусько далеко не всегда сходится, поэтому, для распространения метода на более широкий класс задач вводятся дополнительные преобразования.

Улучшения сходимости:

1. Введем в систему (4.2.1)-(4.2.3) параметр $\varepsilon > 0$: при $\varepsilon = 1$ полученная система совпадает с исходной, а при $\varepsilon = 0$ итерационный процесс быстро сходится. Например: $\dot{x} = \varepsilon f(t, x(t), u(t))$ или $\dot{x} = f(t, x(t), \varepsilon u(t))$, отметим, что приведенные системы при $\varepsilon \to 0$ плохо управляемы, в этом случае обеспечивается быстрая сходимость итерационного процесса. Дальнейшее решение основывается на последовательном переходе к $\varepsilon = 1$, в качестве начального приближения выбирается решение полученное при предыдущем ε.

2. Пусть Φ – оператор, который ставит для $u(t)$ новое управление согласно последовательному выполнению условий (4.2.1), (4.2.4), (4.2.5), тогда, в качестве следующего приближения в 4-ом пункте схемы алгоритма Крылова-Черноусько используется соотношение

$$u^{k+1}(t) = (1-\alpha)u^k(t) + \alpha\Phi(u^k(t)),$$

где α – некоторый параметр, удовлетворяющий условию: $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Заметим, что α можно выбирать из условия монотонного убывания: полагаем $\alpha = 1$ и проверяем условие $J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot))$, если оно справедливо, то переходим к пункту 2 схемы алгоритма, в противном случае $\alpha := \dfrac{\alpha}{2}$ и возвращаемся к проверке введенного условия.

3. В следующем варианте приближение управления на очередном шаге итерации определяется правилом:

$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} \Phi(u^k(t)), & t \in [t', t''], \\ u^k(t), & t \in [t_0, T] \setminus [t', t'']. \end{cases}$$

Интервал $[t', t''] \subset [t_0, T]$ выбирается из условия монотонного убывания функционала:

$$J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot)).$$

Этого условия можно добиться следующим образом: вначале полагаем $t' = t_0$, $t'' = T$ и проверяем условие монотонности. В случае, если оно не выполняется, можно, например, не изменяя t'', изменить t':

$$t' := t' + (t'' - t')/2.$$

После этого опять возвращаемся к условию монотонности и все повторяем заново и т.д.

4. Последний, из приводимых способов улучшения сходимости, является синтезом двух предыдущих вариантов. В качестве следующего приближения рассматривается

$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} u^k(t), & 0 \leqslant t \leqslant t', \\ (1-\alpha)u^k(t) + \alpha\Phi(u^k(t)), & t' \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Здесь α и t' выбираются так, чтобы обеспечить условия монотонного убывания функционала:

$$J(u^{k+1}(\cdot)) < J(u^k(\cdot)).$$

Вначале фиксируем $0 < \alpha^* < 1$ и полагаем $\alpha = 1$, $t' = t_0$.

Если условие монотонности выполняется, то переходим на следующую итерацию, в противном случае $\alpha := \dfrac{\alpha}{2}$ и снова проверяем условие монотонности.

Дробление α выполняется до α^*, если уменьшения функционала добиться не удалось, то $t' := t' + (T - t')/2$, $\alpha := 1$ и возвращаемся на шаг назад: проверяем условие монотонности.

После того, как получено следующее приближение, полагаем $\alpha = 1$, а интервал $[t', T]$ либо сохраняем, либо увеличиваем (уменьшаем t').

Приведенные условия улучшения сходимости позволяют расширить область применения метода Крылова-Черноусько для поиска локального минимима в задаче ОУ со свободным правым концом.

Задачи 5 к разделу. Методом Крылова-Черноусько решить задачи:

1. $J(u(\cdot)) = \int_0^4 \left(u^2 + x\right) dt \to \min, \dot{x} = u, u \in [-1; 1], x(0) = 0;$

2. $J(u(\cdot)) = \int_0^1 (1 - u)\, x dt \to \max, \dot{x} = (u - 0,5)x, u \in [0; 1], x(0) = 1;$

3. $J(u(\cdot)) = \int_0^2 \left(2x - 3u - u^2\right) dt \to \max, \dot{x} = u + x, u \in [0; 2], x(0) = 5.$

5. Лабораторная работа: Метод параметризации

5.1. Постановка

Цель: Сформировать умение реализовывать алгоритм решения задач оптимального управления достаточно общего вида.

Результат: Получены навыки решения задач оптимального управления и представления результатов решения в пакете Maple.

Задание: Реализовать алгоритм метода параметризации и решить задачу оптимального управления согласно варианта, выданного на занятии. Представить решение в отчете.

5.2. Теоретические сведения

В [4, 5] были разработаны основы метода параметризации (конечномерной редукции) задач оптимального управления достаточно общего вида. При этом управляющая функция представляется в параметрической форме с подвижными моментами переключений и исходная функциональная задача сводится к конечномерной задаче нелинейного программирования. Вычисление целевой и ограничивающих функций и их производных заключается в решении задач Коши для исходного и сопряженных дифференциальных уравнений. Этот подход получил дальнейшее развитие в работе [7] (были получены теорема сходимости и завершение построения вторых производных), и его применение прошло успешную апробацию на ряде различных задач.

5.2.1. Постановка задачи и ее параметризация

Рассмотрим задачу оптимального управления, ограничившись для простоты изложения случаем автономной системы, закрепленного начального состояния и терминального функционала с терминальными ограничениями:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \tag{5.2.1}$$

$$u(t) \in U; \tag{5.2.2}$$

$$g_l(x(T)) \leqslant 0, \qquad l = 1, \ldots, m; \tag{5.2.3}$$

$$J = g_0(x(T)) \to \min. \tag{5.2.4}$$

Фазовая переменная $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, вектор параметров управления $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$. Функции $f_i(x(t), u(t))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $g_l(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми по всем переменным. Множество допустимых значений управления U должно иметь структуру, позволяющую применять методы дифференцируемой оптимизации. Время окончания процесса T может быть свободным и задача (5.2.1)-(5.2.4) считается разрешимой в классе кусочно-непрерывных или непрерывных функций $u(t)$. Класс непрерывных функций используется для некоторых экономических моделей, где изменение параметров соответствующей экономической системы происходит непрерывно в силу естественных ограничений проблемы, а также вариационных задач, порождаемых (как метод решения) задачами дифференциальных уравнений.

Излагаемый ниже метод параметризации легко распространяется на случай более общих терминальных условий, когда вместо начальных условий в (5.2.1) и условий (5.2.3) заданы

$$g_l\left(x(t_0), x(T)\right) \left\{ \begin{array}{c} \leqslant \\ = \end{array} \right\} 0, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

Метод [5] заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \equiv T \tag{5.2.5}$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mu = 1, \ldots, r, \tag{5.2.6}$$

где $v_\mu^k \in R^d$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \ldots, v_r^k) \in R^{d \times r}$.

В том случае, когда ищется непрерывное решение, на параметризованный класс накладываются дополнительные ограничения

$$u^k(t_k, v^k) = u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Условия непрерывности можно также наложить и на производные управления. Такое представление можно считать обобщенным сплайном или же кусочно-аналитическим представлением искомого управления.

Таким образом, при подстановке параметризованного управления (5.2.6) в (5.2.1) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров управления

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \ldots, w_{r,d}^k),$$

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$ определяется на промежутках $[t_k, t_{k+1})$ интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (5.2.1):

$$
\begin{aligned}
&z(t, v^1) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(z(s; v^1), u^1(s; v^1))ds, \qquad t_0 \leqslant t < t_1;\\
&z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}) = z(t_k; w^1, \dots, v^k) +\\
&+ \int\limits_{t_k}^{t} f(z(s; w^1, \dots, v^{k+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1}))ds, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Введем функции от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$
\varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)), \qquad l = 0, 1, \dots, m. \tag{5.2.7}
$$

В терминах этих функций задача (5.2.1)-(5.2.4) принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$
\begin{array}{l}
\varphi_0(w^1, \dots, w^N) \to \min \quad \text{при ограничениях}\\
\varphi_l(w^1, \dots, w^N) \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant l \leqslant m,\\
W = \{w^k : \ w_0^{k-1} \leqslant w_0^k, \ u^k(t; v^k) \in U, \ w_0^{k-1} \leqslant t \leqslant w_0^k,\\
\qquad\qquad k = 1, ..., N; \quad w_0^0 = t_0, w_0^N \equiv T \leqslant T^*\},
\end{array} \tag{5.2.8}
$$

где T^* – конечное действительное число.

5.2.2. Производные параметризованных функционалов

В данном пункте изложим технику дифференцирования функционалов и основной результат работы [5]. При сделанных предположениях и при разрешимости задачи Коши (5.2.1), (5.2.6) функции (5.2.7) являются дважды непрерывно дифференцируемыми и к задаче (5.2.8) можно применять такие эффективные методы, как квадратично-линейная аппроксимация и метод модифицированных функций Лагранжа [2].

Для вывода формул и уравнений дифференцирования функций (5.2.7) будем использовать векторно-матричные обозначения, сделав следующие соглашения. Производные скалярных функций по векторным аргументам

$$
\frac{\partial g_l(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial g_l}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_l}{\partial z_n}\right]
$$

будем понимать как векторы-строки, а производные векторной функции по скалярному параметру

$$
\frac{\partial z(t; w^1, \dots, w^k)}{\partial w^j_{\mu,\alpha}} = \left[\frac{\partial z_1}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}\right]^T \tag{5.2.9}
$$

$(1 \leqslant \mu \leqslant r, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant d, \ 1 \leqslant j \leqslant k)$, как векторы-столбцы. Соответственно этому будет определяться матричная структура производных векторных функций по векторным аргументам.

Продифференцируем равенство (5.2.7) по одному из параметров $w^k_{\mu,\alpha}$:

$$\frac{\partial\varphi_l(w^1,\dots,w^N)}{\partial w^k_{\mu,\alpha}} = \frac{\partial g_l(z(T;\dots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\dots,v^N)}{\partial w^k_{\mu,\alpha}}. \qquad (5.2.10)$$

Производные (5.2.9) – это вариации траектории системы (5.2.1), (5.2.6) по параметрам, определяющим управление. Обозначим их

$$y^{j\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t;v^1,\dots,v^k)}{\partial w^j_{\mu,\alpha}}, \qquad t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k, \qquad 1\leqslant j\leqslant k\leqslant N. \qquad (5.2.11)$$

Так как функция $z(t;v^1,\dots,t_k,v^{k+1})$ определяется задачей Коши, то, дифференцируя соответствующее соотношение, получим задачи Коши, определяющие функции (5.2.11). Для вариаций, отвечающих параметрам $w^k_{0,0}=t_k,\quad 1\leqslant k\leqslant N-1$, это [5]

$$\begin{cases} \dot y^{k00} = \dfrac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x}y^{k00}, \quad t_k\leqslant t\leqslant T,\\ y^{k00}(t_k) = f(x(t_k),u^k(t_k;v^k)) - f(x(t_k),u^{k+1}(t_k;v^{k+1})); \end{cases} \qquad (5.2.12)$$

и для вариаций относительно $v^k_{\mu,\alpha}$ $(1\leqslant\mu\leqslant r,\ 1\leqslant\alpha\leqslant d,\ 1\leqslant k\leqslant N)$ – это

$$\begin{cases} \dot y^{k\mu\alpha} = \dfrac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x}y^{k\mu\alpha} + \theta(t_k-t)\quad \dfrac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\dfrac{\partial u^k_\mu(t;v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t_{k-1}\leqslant t\leqslant T,\\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \qquad (5.2.13)$$

Здесь и далее функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0. \end{cases}$$

Вариация по конечному времени T конечна:

$$y^{N00}(T) = f(x(T),u(T)). \qquad (5.2.14)$$

В принципе соотношения (5.2.10)-(5.2.13) решают проблему первых производных для задачи (5.2.8). Для этого следует решить сначала задачу Коши (5.2.1), (5.2.6), а затем $N(r\times d+1)-1$ задач (5.2.12), (5.2.13). Однако трудоемкость этой процедуры существенно сокращается с помощью сопряженных переменных.

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(p(t),x(t),u(t)) = \sum_{i=1}^n p_i(t)f_i(x(t),u(t)),$$

и введем для каждой функции $g_l(z)$ исходной задачи свою сопряженную вектор-функцию $p^l(t) = (p^l_1(t),\dots,p^l_n(t))$:

$$\begin{cases} \dot p^l = -\dfrac{\partial H(p^l,x(t),u(t))}{\partial x}, & t_0\leqslant t\leqslant T,\\ p^l(T) = \dfrac{\partial g_l(x(T))}{\partial z}, & l=0,1,\dots,m. \end{cases} \qquad (5.2.15)$$

Кроме того, введем обозначение

$$M_l(t) = H(p^l(t), x(t), u(t)). \tag{5.2.16}$$

Используя свойство постоянства скалярных произведений $\langle p^l(t), y^{k\mu\alpha}(t)\rangle$ на общих промежутках определения $[t_k, T]$, конечные и начальные условия, нетрудно получить формулы [5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_l(w^1,\dots,w^N)}{\partial t_k} = M_l(t_k-0) - M_l(t_k+0), && 1 \leqslant k \leqslant N-1;\\
&\frac{\partial\varphi_l(w^1,\dots,w^N)}{\partial T} = M_l(T);\\
&\frac{\partial\varphi_l}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(t; v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}dt, && 1 \leqslant k \leqslant N,\\
& && 1 \leqslant \mu \leqslant d\times r.
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Теперь для вычисления производных (5.2.17) требуется решить помимо основной задачи Коши (5.2.1), (5.2.6) дополнительно $m+1$ задачу (5.2.15). Это число определяется количеством терминальных условий (5.2.3) и не зависит от размерности параметризованного управления (5.2.5), (5.2.6), которое в нетривиальных случаях может быть большим.

Задачи 6 к разделу. Методом параметризации решить задачи:

1. $J(u(\cdot)) = \int_0^4 \left(u^2 + x\right) dt \to \min, \dot{x} = u, u \in [-1; 1], x(0) = 0;$
2. $J(u(\cdot)) = \int_0^1 (1-u)\, xdt \to \max, \dot{x} = (u-0,5)x, u \in [0; 1], x(0) = 1;$
3. $J(u(\cdot)) = \int_0^2 \left(2x - 3u - u^2\right) dt \to \max, \dot{x} = u + x, u \in [0; 2], x(0) = 5;$
4. $J(u(\cdot)) = T \to \min, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, u \in [-3; 1],$
   $x_1(0) = 3, x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = 0.$

5.3. Методы, использующие функции штрафа

Очевидно, что описанные выше численные методы охватывают далеко не все постановки задач ОУ, в данном параграфе покажем некоторые приемы, позволяющие свести исходную постановку задачи ОУ к задаче более простого вида.

5.3.1. Ограничение на конец траектории

Рассмотрим задачу ОУ в виде

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{5.3.1}$$

$$u(t) \in U \subseteq \Re^r, \quad x(t) \in \Re^n, \quad t \in [t_0, T], \tag{5.3.2}$$

$$\varphi(x(T)) = 0, \tag{5.3.3}$$

$$F(x(T)) \to \min. \tag{5.3.4}$$

Здесь $f : \Re^{n+r+1} \to \Re^n$, $\varphi : R^n \to R^k$, $k < n$, $F : \Re^n \to \Re$.

К задаче (5.3.1)-(5.3.4) невозможно непосредственно применить численные методы решения задач со свободным правым концом (например, метод Крылова-Черноусько) в силу условия (5.3.3).

Введем функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \lambda) = F(x(T)) + \lambda \|\varphi(x(T))\|^2_{E^k}, \tag{5.3.5}$$

где $\lambda > 0$ – штрафной коэффициент.

Вместо задачи (5.3.1)-(5.3.4) рассмотрим серию задач минимизации функционала (5.3.5) с условиями (5.3.1), (5.3.2). Каждая из этих задач при фиксированном λ – суть задача ОУ со свободным правым концом, к которой применимы соответствующие численные методы.

Теорема 2. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (5.3.1)-(5.3.4), а* $\{x^*(t, \lambda), u^*(t, \lambda)\}$ *– решение задачи минимизации (5.3.5) при условии (5.3.1), (5.3.2), тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$J(x^*(\cdot, \lambda), u^*(\cdot, \lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Таким образом, можно построить минимизирующую последовательность исходной задачи ОУ.

5.3.2. Снятие ограничение на управление

Иногда учет дополнительных условий на управление представляет затруднения при численной реализации, в частности, при реализации метода параметризации со вторыми производными использование метода Ньютона требует отсутствия ограничений на управления, т.е. $U = \Re^r$.

Рассмотрим задачу (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4), где условие (5.3.2) представимо в виде

$$a(t) \leqslant u(t) \leqslant b(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{5.3.6}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ – заданные вектор-функции $a : \Re \to \Re^r$, $b : \Re \to \Re^r$.

Сведем поставленную задачу к задаче ОУ без ограничений на управление – суть задаче ВИ. Введем функции

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} (u_i(t) - b_i(t))^2, & u_i(t) \geqslant b_i(t), \\ 0, & u_i(t) \in [a_i(t), b_i(t)], \\ (u_i(t) - a_i(t))^2, & u_i(t) \leqslant a_i(t) \end{cases}$$

и определим функционал

$$J(x, u, \lambda) = F(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \lambda \sum_{i=1}^{r} \Psi_i(t) dt. \tag{5.3.7}$$

Задача минимизации (5.3.7) при условии (5.3.1) – вариационная задача без ограничений на управляющую функцию.

Теорема 3. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (5.3.1), (5.3.6), (5.3.4), а* $\{x^*(t,\lambda), u^*(t,\lambda)\}$ *– решение задачи минимизации (5.3.7) при условии (5.3.1), тогда при* $\lambda \to +\infty$
$$J(x^*(\cdot,\lambda), u^*(\cdot,\lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Примечание:

Отдельно отметим, часто встречающийся случай ограничений на управление: $U = \{u \in \Re : |u| \leqslant C,\ C > 0\}$, тогда замена $u = C\sin(\alpha)$, позволяет рассматривать управление на всем пространстве: $\alpha \in \Re$.

Вторым вариантом снятия подобного ограничения на управление (переход к рассмотрению управления на всем пространстве) может считаться прием Валентайна. Данный прием основан на введении дополнительной переменной $\beta \in \Re$ с последующей заменой ограничения типа неравенство на классическое условие типа равенство:
$$\beta^2 + (u + C)(u - C) = 0,$$
здесь управляющими параметрами являются u и β, рассматриваемые в новой постановке исходной задачи на всем пространстве.

5.3.3. Снятие фазовых ограничений

Рассмотрим задачу (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4) с ограничением на фазовые переменные в виде
$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \tag{5.3.8}$$
здесь $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – заданные вектор-функции $\alpha : \Re \to \Re^n$, $\beta : \Re \to \Re^n$. Введем штрафные функции
$$\Psi_i(x) = \begin{cases} (x_i(t) - \beta_i(t))^2, & x_i(t) \geqslant \beta_i(t), \\ 0, & x_i(t) \in [\alpha_i(t), \beta_i(t)], \\ (x_i(t) - \alpha_i(t))^2, & x_i(t) \leqslant \alpha_i(t); \end{cases}$$
и определим функционал
$$J(x, u, \lambda) = F(x(T)) + \lambda \int\limits_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(t)dt \to \min_{x,u}. \tag{5.3.9}$$

Задача (5.3.1), (5.3.2), (5.3.9) – задача ОУ без ограничений на фазовые переменные эквивалентная исходной задаче (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4), (5.3.8) в смысле следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть* $\{x^*(t), u^*(t)\}$ *– решение задачи (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4), (5.3.8), а* $\{x^*(t,\lambda), u^*(t,\lambda)\}$ *– решение (5.3.1), (5.3.2), (5.3.9), тогда при* $\lambda \to +\infty$
$$J(x^*(\cdot,\lambda), u^*(\cdot,\lambda), 0) \to F(x^*(T)).$$

Рассмотрим более сложный случай ограничений на фазовые переменные: задачу (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4) с ограничениями
$$\begin{aligned} h_1(x(t), u(t), t) \leqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \\ h_2(x(t), u(t), t) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Здесь $h_1 : \Re^{n+r+1} \to \Re^{m_1}$, $h_2 : \Re^{n+r+1} \to \Re^{m_2}$.

Такой тип ограничений вызывает наибольшие затруднения при построении численных методов решения задач ОУ приведенного класса. Теоремы, дающие необходимые условия решения задач ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями (5.3.10), носят скорее теоретический характер и не дают достаточной информации для построения эффективных методов решения.

В [6] был предложен прием сведения исходной задачи ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями к задаче ОУ без таковых. Пусть функции h_1, h_2 непрерывно-дифференцируемые и $P(x,u)$ – некоторая гладкая штрафная функция системы (5.3.10), например,

$$P(x,u,t) = \|h_1^+(x,u,t)\|^q_{E^{m_1}} + \|h_2(x,u,t)\|^q_{E^{m_2}}, \quad q \geqslant 2. \tag{5.3.11}$$

Здесь $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ – функция положительной срезки. Введем дополнительную фазовую координату x_{n+1} и свяжем её с процессом $\{x(t), u(t)\}$ условием

$$\dot{x}_{n+1} = P(x(t), u(t), t), \qquad x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{5.3.12}$$

Очевидно, процесс $\{x(t), u(t)\}$ удовлетворяет ограничениям (5.3.10) тогда и только тогда, когда

$$x_{n+1}(T) = 0. \tag{5.3.13}$$

Таким образом, исходная задача (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4), (5.3.10) эквивалентна задаче с терминальными ограничениями: минимизировать функционал (5.3.4) при условиях (5.3.1), (5.3.2), (5.3.12), (5.3.13). Отметим, что в этом преобразовании стандартный коэффициент штрафа не вводится.

Новая формулировка исходной трудной задачи оптимального управления позволяет применять для её качественного исследования и численного решения методы, ориентированные на задачи без промежуточных фазовых ограничений. Однако новая, формально упрощенная задача в общем случае оказывается вырожденной. Покажем это, выписав условие экстремума в форме принципа максимума [1].

Введем функцию Гамильтона расширенной системы (5.3.1), (5.3.12)

$$H(\bar{p}, x, u, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x,u,t) + p_{n+1} P(x,u,t).$$

Здесь расширенный вектор $\bar{p} = (p, p_{n+1})$ описывается уравнениями

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\bar{p}, x, u)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad \dot{p}_{n+1} = 0. \tag{5.3.14}$$

Условия трансверсальности новой задачи имеют вид:

$$p_i(T) = -\lambda \frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{5.3.15}$$

$$p_{n+1}(T) = \mu; \tag{5.3.16}$$

где λ, μ – числа. При этом $\lambda \geqslant 0$.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [9, 1], если $\{x(t), u(t)\}$ – оптимальный процесс новой задачи, то существует нетривиальное решение системы (5.3.14), для которого выполнены условия трансверсальности (5.3.15), (5.3.16) и условие максимума

$$u(t) = arg\max\{H(\bar{p}(t), x(t), v) : v \in R^n, t\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.3.17}$$

Для допустимых процессов, очевидно, выполняются равенства

$$P(x(t), u(t), t) = 0, \quad \frac{\partial P(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

При этом нетривиальное решение уравнений (5.3.14) может оказаться таким, что $p(t) = 0, \quad p_{n+1} = \mu \neq 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$. При этом на оптимальной траектории $H(\bar{p}(t), x(t), u(t), t) = 0$ и, соответственно, условие максимума (5.3.17) вырождается.

Таким образом, данный способ снятия фазовых ограничений сводит исходную задачу ОУ к, может быть, вырожденной задаче и требует численных методов, позволяющих решать такие задачи. Одним из методов, успешно решающих вырожденные задачи, является метод параметризации.

5.3.4. Сведение к автономной системе

В постановке задачи ОУ условие (5.3.1) в правой части дифференциальной системы в явном виде содержит независимую скалярную переменную t. Если в этом случае реализация методов решения существенно усложняется, то исходную задачу можно свести к автономной.

Определение 5.2. Система дифференциальных уравнений (5.3.1) называется *автономной* (стационарной) если ее правая часть не зависит явным образом от независимого аргумента t.

Замечание. Траектория автономной системы определяется только начальным состоянием и не зависит от времени, в котором система наблюдается.

Введем новую фазовую переменную $x_{n+1}(t)$, которую подчиним уравнению

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0;$$

решение этого уравнения очевидно $x_{n+1}(t) = t$. Обозначим $\bar{x} = (x, x_{n+1})$

В этом случае система (5.3.1) может быть записана в виде

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u), \quad \bar{x}(t_0) = (x_0, t_0),$$

где $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f(x, u, x_{n+1}), 1)$.

Таким образом, полученная система – автономная относительно фазовой переменной $\bar{x}$.

Литература

[1] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

[2] *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

[3] *Голоскоков Д.П.* Практический курс математической физики в системе Maple: учеб. пособие для вузов. – СПб.: ООО "ПаркКом", 2010 – 643 с.

[4] *Горбунов В.К.* О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18. №5. С. 1083-1095.

[5] *Горбунов В.К.* Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №2. С. 292-303.

[6] *Горбунов В.К.* Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления // Дифф. уравнения и их приложения: тезисы докл. 1й междун. научно-практ. конф. С-Пб. 1996, С. 58.

[7] *Горбунов В.К., Лутошкин И.В.* Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.

[8] *Лутошкин И.В.* Оптимальное управление в экономических процессах: электронное учебное пособие: электронный учебный курс, № гос.регистрации 0321401724 – Ульяновск, произв. ФГБОУ ВПО УлГУ, 2014. 4 п.л.

[9] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961.