А.Б. ВЕРЁВКИН

КОМБИНАТОРИКА

А.Б. ВЕРЁВКИН

КОМБИНАТОРИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ульяновск
2018

MSC2010 05 Combinatorics
ББК 22.176
УДК 519.1
В313

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук,
профессор С.П. Мищенко;
Кандидат физико-математических наук,
доцент Е.А. Михеева.

Верёвкин, Андрей Борисович
В313 ***Комбинаторика. Учебное пособие***. /
А.Б. Верёвкин. – Ульяновск: Издатель Качалин
Александр Васильевич, 2018. – 134 с.

ISBN 978-5-6040503-6-1

Учебное пособие составлено на основе записей лекций, прочитанных автором в 1998–2017 годах в Ульяновском государственном университете студентам и аспирантам специальностей «Математика», «Фундаментальная и прикладная алгебра» и «Компьютерная безопасность». В книге изложены некоторые разделы комбинаторики, в основном опирающиеся на теорию производящих функций, востребованные в фундаментальной математике и теоретической информатике.

Пособие предназначено студентам математических и информационных специальностей, а также исследователям, интересующимся комбинаторными методами.

MSC2010 05 Combinatorics
ББК 22.176
УДК 519.1

ISBN 978-5-6040503-6-1

1. ЧТО ТАКОЕ КОМБИНАТОРИКА?

Комбинаторика – сравнительно молодая математическая дисциплина. Геометрия, арифметика и алгебра – старше неё, а математический анализ и теория вероятностей могут считаться её сверстниками. Все разделы математики используют комбинаторные результаты. Труднообозримы замечательные работы в этой области. И здесь найдётся место для новых задач и методов. Советский математик И.М. Гельфанд заметил, что все математические проблемы сводятся к комбинаторике. Потенциально она охватывает всю науку. Поэтому нельзя чётко и навсегда очертить её границы. Профессор Московского университета К.А. Рыбников написал о своём понимании этой дисциплины в книге ([25]). Интересен взгляд на комбинаторику американского алгебраиста М. Холла: „Содержание комбинаторного анализа нелегко определить. Его можно сравнить с теорией чисел в том отношении, что он возник из совокупности разнообразных задач, которые даже в наше время не охватываются никакой единой теорией или методом. Делая попытку дать определение, будем говорить, что в комбинаторном анализе рассматриваются задачи о расположениях элементов в соответствии с точно определёнными правилами и выясняется, сколькими путями такие расположения могут быть осуществлены.“ ([36, с. 7])

Одно из первых определений комбинаторики дал петербургский академик В.Я. Буняковский (цит. по [17, с. 122]): „Комбинаторный анализ – это особая отрасль математики, которая занимается 1) исследованием различных образов изменения порядка и мест вещей, подлежащих или не подлежащих определённой зависимости, 2) разысканием законов, по которым эти изменения или перемещения могут быть измерены и вычислены, наконец, 3) приложением выводимых таким образом следствий к другим областям математики." (Лексикон чистой и прикладной математики.– СПб, 1839, с. 204)

Московский математик Н.Б. Делоне написал в энциклопедической заметке: „Комбинаторный анализ – математическая теория, занимающаяся определением числа различных способов распределения данных предметов в известном порядке; имеет особенно важное значение в теории уравнений и в теории вероятностей. ..." (Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона, т. XVa (30).– СПб, 1895, с. 818)

Следующее определение дал академик А.Н. Колмогоров: „Комбинаторика (мат.), учение о числе способов, к-рыми можно переставить то или другое число предметов при тех или других дополнительных условиях. Начало К. теряется в глубокой древности. Например, Ксенократ (397–314 до хр. э.), ученик Платона, определял число слогов, к-рые можно составить из всех букв греч. алфавита. Основоположниками К. как математич. дисциплины считаются Паскаль, Лейбниц, Валлис, Як. Бернулли, Муавр. ... К. имеет приложение в ряде отделов математики, особенно в теории вероятностей." (Большая Советская Энциклопедия, I изд., т. 33.– М.: ОГИЗ, 1938, с. 559-560)

Определение комбинаторики для советской "Математической Энциклопедии" написано криптографом, доктором физ.-мат. наук, заместителем начальника 8-го Главного управления КГБ при Совете Министров СССР, генерал-майором В.Н. Сачковым (сейчас он – вице-президент Академии криптографии России): „Комбинаторный анализ, комбинаторная математика, комбинаторика – раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью К.А. является изучение комбинаторных конфигураций. ... “ (МЭ, т. 2.– М.: Сов. Энц., 1979, с. 974)

Интересные сведения об истории предмета сообщил американский математик венгерского происхождения Д. Пойа. Рождение комбинаторики (или этого термина) он связал с Лейбницем: „Готтфрид Вильгельм Лейбниц был, кажется, первым автором, который использовал термин "комбинаторный" в том смысле, в каком мы употребляем его сегодня, говоря о комбинаторном анализе или о комбинаторной математике.

Лейбницу едва исполнилось двадцать лет, когда он написал свою "Dissertatio de Arte Combinatoria", напечатанную в 1666 г. Её титульный лист обещал приложения во всех сферах науки и "новый подход к логике изобретения". Во вступлении провозглашалось приложение теории к замка́м, орга́нам и силлогизмам, к смешиванию цветов и к "протейскому" стиху, к логике геометрии, военному искусству, грамматике, юриспруденции, медицине и теологии.

На самом деле диссертация содержит, помимо блестящей демонстрации схоластической эрудиции, некоторые математические результаты. Она объясняет и решает основные комбинаторные задачи, приводящие к биномиальным коэффициентам и к факториалу, но почти ничего больше. Эти задачи в 1666 году не были так тривиальны, как в наше время, но многие из результатов Лейбница были известны до него. За математическими предложениями следуют приложения, большинство которых представляются современному читателю бесплодными или фантастическими, что в некоторых случаях было ясно самому Лейбницу.

Эта "Диссертация о комбинаторном искусстве" была, однако, только началом большой работы, которая всю жизнь занимала Лейбница. Он часто упоминает об этой работе в своих письмах и в печатных трудах, и к ней относятся многие записи, найденные в его рукописях, оставшихся неопубликованными. Некоторые из этих заметок были посмертно напечатаны. Из них мы видим, что Лейбниц планировал всё новые и новые применения для своего комбинаторного искусства или "комбинаторики": к кодированию и декодированию, к играм, к статистике смертности, к комбинации наблюдений. Он также всё больше и больше расширял сферу применения комбинаторики. Иногда он рассматривал комбинаторику как половину общего Искусства Изобретения, эта половина относится к синтезу, в то время как другая – к анализу. Комбинаторика должна заниматься, говорит он в другом месте, одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью. Наконец, он приписывает комбинаторике широчайшую сферу применения, рассматривая её как почти или полностью совпадающей со своей "Characteristica Universalis". Он проектировал "универсальную характеристику" как нечто вроде обобщённой математики, которая будет рассматривать всё что угодно, и которая сведёт мышление к чему-то вроде вычисления с помощью соответствующих цифр и символов.

Были ли эти проекты Лейбница просто мечтами? В них был некоторый смысл, и, возможно, его мечты были пророческими. Используя свою "Characteristica Universalis", он намеревался свести понятия к символам, символы к числам и, наконец, с помощью цифр и символов подвергнуть понятия механическому вычислению. Этот проект казался абсурдным и фантастическим многим, обычно здраво рассуждающим людям, но сегодня вычислительные машины реализуют часть этого фантастического плана. Лейбниц знал некоторые основы математической логики, важность которой он признал задолго до кого бы то ни было, а математическая логика лежит где-то на пути к "Characteristica Universalis". Правда, применения его Ars Combinatoria были фантастическими, тривиальными или бесплодными, но он, конечно, предвидел громадное разнообразие приложений и расширяющуюся сферу применения комбинаторики, поэтому имя Готтфрида Вильгельма Лейбница, великого математика, философа и прожектёра с полным правом заслуживает упоминания во введении в настоящую книгу." ([20, с. 7-8])

Авторство Лейбница в изобретении "комбинаторного искусства" не признаётся столь однозначно. Некоторые авторы, разделяя комбинаторику и комбинаторный анализ, полагают, что последний начался в трудах Ж.Л. Лагранжа 1766-87 гг. (см. [17, с. 123]). Другие исследователи, напротив, ищут у комбинаторики более древние истоки. Например, "Трактат об арифметическом треугольнике" Б. Паскаля 1665 г., древнекитайские или арабские математические сочинения.

Возможно, лейбницева “Dissertatio de Arte Combinatoria” 1666 г. – первая книга, где комбинаторика упоминается в заглавии. Лейбниц не объясняет, что он называет комбинаторикой. Скорее всего, этот термин уже был известен. Вскоре в 1669 г. учёный-иезуит А. Кирхер опубликовал своё сочинение “Ars Magna Sciendi, sive Combinatoria: in XII libros digesta” (Великое Искусство Знания или Комбинаторика, изложенное в 12 книгах).

Слова *комбинаторика* и *комбинаторный* – новые. Классической латыни они не ведомы. Но давно было слово *combino* (сочетать, связывать по два), происходящее от *bini* (по два) и *bis* (дважды). Тем самым, *комбинаторика* означает науку о сочетаниях и счёте вообще. В комбинаторике развивают методы исчисления и перечисления сконструированных математических обьектов – конфигураций (лат. *configo* – скреплять, *figura* – расположение). Компьютерные расчёты требуют вычисления эффективности используемых операций. К этим трём связанным задачам сводится современная комбинаторика. М. Холл замечает: „Большинство задач о перечислении таковы, что для них вопрос о существовании и построении решений по существу тривиален. Однако следует оговориться, что тривиальные методы построений могут оказаться чересчур трудоёмкими. Как и следует ожидать, для отыскания менее громоздких методов необходимы дополнительная теория и значительное мастерство. ...“ ([36, с. 7-8])

Эта оценка опирается на возможность полного перебора конфигураций. Но если обратиться к задачам комбинаторной топологии или алгебраической комбинаторики, с мнением Холла трудно согласиться. Прояснение структуры конфигураций может представлять самостоятельную ценность.

Например, рассмотрим задачу о перестановках n различных элементов. Здесь прост подсчёт количества перестановок. Но построение всех различных перестановок неочевидно. Алгоритмы предложены в книгах Липского ([15, с. 19-29]) и Кнута ([13, с. 369-396]). Метод Симса ([13, с. 378]) оказался удобен для вычисления кратностей неприводимых представлений симметрической группы S_n ([7]).

Для примера укажем биекцию между S_n и произведением циклических групп $C_2 \times C_3 \times \cdots \times C_n$ порядков 2, 3, …, n, соответственно.

1.1. Определение. Обозначим $St\,(n)$ – подгруппу S_n:

$$St\,(n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\,\} \cong Symm\{1, \ldots, n{-}1\} \cong S_{n-1}$$

и выберем c – циклическую перестановку длины n из S_n.

1.2. Лемма. Пусть $\tau \in S_n$, тогда

1. подстановка τ однозначно представима в виде $\sigma \cdot c^{\,a}$, где $\sigma \in St\,(n)$ и $0 \leq a < n$;

2. для $1 < k \leq n$ однозначно определены целые показатели $0 \leq a_k < k$, такие что:

$$\tau = (12)^{\,a_2} \cdot (123)^{\,a_3} \cdot \ldots \cdot (12 \ldots n)^{\,a_n}\,.$$

Доказательство: пусть $\sigma \cdot c^{a} = \varsigma \cdot c^{\,b}$, где $\sigma, \varsigma \in St\,(n)$ и $0 \leq a \leq b < n$. Тогда получим равенство:

$$c^{\,b\,-\,a} = \varsigma^{-1} \cdot \sigma \in St\,(n) \quad \text{и} \quad 0 \leq b - a < n\,,$$

поэтому $a = b$ и $\sigma = \varsigma$. Таким образом, выражения вида $\sigma \cdot c^a$ с разными сомножителями – различны. А их общее количество $n \cdot (n-1)! = n!$ равно порядку группы S_n. Поэтому все элементы S_n однозначно представимы в виде $\sigma \cdot c^a$. Что доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из первого индукцией по n.

1.3. Замечание. Предыдущая лемма обеспечивает биекцию коммутативной группы $C_2 \times C_3 \times \dots \times C_n$ на S_n:

$$f(a_2, a_3, \dots, a_n) = (12)^{a_2} \cdot (123)^{a_3} \cdot \dots \cdot (12\dots n)^{a_n}.$$

Что даёт способ перечисления перестановок. Но отображение f при $n > 2$ – негомоморфно. Связь между наборами чисел $a_2, a_3, \dots, a_n$ и подстановками $f(a_2, a_3, \dots, a_n)$ неочевидная. Ясны ответы только на самые простые вопросы. Например, – чётность $f(a_2, a_3, \dots, a_n)$ совпадает с чётностью суммы $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$. А уже зависимость циклического типа подстановки от соответствующих наборов непонятна.

В книге обсуждены некоторые разделы комбинаторики, где применяются производящие функции. В этой искусственно ограниченной области удаётся показать многообразие работающих приёмов и перспективу существующих методов. Приветствуется предварительное знакомство читателя с началами математического анализа и высшей алгебры. В списке литературы ([8]–[37]) упомянуты монографии, полезные для более глубокого изучения тем. Авторские тексты ([1]–[7]) содержат более подробный разбор рассмотренных примеров.

2. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Считают, что производящие функции были открыты Лапласом для решения вероятностных задач. Но они оказались полезными в математике для изучения последовательностей и, более общо, – бесконечных (бесконечномерных) объектов, являющихся локально конечными. Хорошее введение в тему даёт первый отдел знаменитой книги Полиа и Сегё ([19]). Разберём идею метода.

2.1. Определение. Назовём множество X взвешенным, если задана "взвешивающая" функция:

$$w_X\colon X \to \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \text{ с конечными } X_n = w_X^{-1}(n).$$

Если X, Y – взвешены, то такое же и $X \cup Y$. Можно задать (тотальное) взвешивание произведения $X \times Y$, полагая

$$w_{X\times Y}(x, y) = w_X(x) + w_Y(y)\,,\ (X\times Y)_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k \times Y_{n-k}\,.$$

Взвешенному X сопоставим производящую функцию (символом $\sharp$ обозначим мощность конечного множества):

$$X(t) = \sum\nolimits_{n\geq 1} \sharp\,(X_n)\cdot t^n\,.$$

Тогда очевидны свойства:

$$(X \cup Y)(t) = X(t) + Y(t)\,,\ (X\times Y)(t) = X(t)\cdot Y(t)\,.$$

2.2. Пример. Пользу данного определения проиллюстрируем подсчётом порождающих подмоноида Веронезе свободного ассоциативного моноида (см. [2]).

Будем рассматривать X как возможно бесконечный алфавит из букв натурального веса. Будем составлять конечные слова – упорядоченные последовательности букв. Слово ω длины n можно считать элементом тотально взвешенного множества $X \times \cdots \times X = X^n$. Вес ω – сумма весов входящих в него букв. Мы допускаем пустое слово нулевого веса – $\emptyset$. Это единственный элемент X^0. Приписывание слов задаёт умножение на множестве $\Omega = \cup_{k\geq 0} X^k$ – свободном ассоциативном моноиде с единицей $\emptyset$. Тогда

$$\Omega(t) = \sum\nolimits_{k\geq 0} (X^k)(t) = \sum\nolimits_{k\geq 0} \big(X(t)\big)^k = \big(1 - X(t)\big)^{-1}.$$

Зафиксируем натуральное $d \geq 1$ и рассмотрим $\Omega^{(d)}$ – множество слов веса, кратного d. Относительно приписывания слов $\Omega^{(d)}$ – `подмоноид Веронезе` Ω, для которого:

$$\Omega^{(d)}(t) = \sum_{n\geq 0} \sharp\,(\Omega_{nd}) \cdot t^{nd} = d^{-1} \cdot \sum_{r=1}^{d} \Omega\left(t \cdot \exp\{2\pi i r/d\}\right),$$

поскольку

$$\sum_{r=1}^{d} \exp\{2\pi i r n/d\} = d \cdot [\, d \setminus n \,].$$

Здесь и далее использована числовая `функция Айверсона`. Для логического высказывания S определяется значение:

$$[\, S \,] = \begin{cases} 0\,, & \text{если } S \text{ ложно;} \\ 1\,, & \text{если } S \text{ истинно.} \end{cases}$$

Рассмотрим $X^{(d)}$ – подмножество слов $\Omega^{(d)}$ строго положительной длины (положительного веса), никакое собственное начало которых не лежит в $\Omega^{(d)}$. Тогда $X^{(d)}$ порождает $\Omega^{(d)}$ и любое слово из $\Omega^{(d)}$ представляется в виде произведения слов из $X^{(d)}$ единственным образом. То есть, $\Omega^{(d)}$ – ассоциативный моноид, свободно порождённый $X^{(d)}$. Для $\Omega^{(d)}(t)$ применимо ранее приведённое рассуждение, и мы получаем равенство:

$$\left(1 - X^{(d)}(t)\right)^{-1} = d^{-1} \cdot \sum_{r=1}^{d} \Big(1 - X\big(t \cdot \exp\{2\pi i r/d\}\big)\Big)^{-1}.$$

Для $d = 1$ нет ничего нового: $X^{(d)} = X$, $\Omega^{(d)} = \Omega$. Рассмотрим более содержательный случай.

Пусть $X = \{x, y\}$, где $w_X(x) = 1$, $w_X(y) = 2$. Получаем:

$$X(t) = t + t^2, \quad \Omega(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_{k \ge 0} F_k \cdot t^k,$$

где $(F_k)_{k \ge 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ – `числа Фибоначчи`. Тогда

$$\left(1 - X^{(2)}(t)\right)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - t - t^2} + \frac{1}{1 + t - t^2}\right) = \frac{1 - t^2}{1 - 3t^2 + t^4}\ ,$$

$$X^{(2)}(t) = 1 - \frac{1 - 3t^2 + t^4}{1 - t^2} = t^2 + \frac{t^2}{1 - t^2} = 2t^2 + t^4 + t^6 + \cdots\ ,$$

Моноид $\Omega^{(2)}$ свободно порождён бесконечным множеством слов чётного веса:

$$X^{(2)} = \{y\,,\ x \cdot y^s \cdot x\,;\ s \ge 0\}\,.$$

В общем случае можно получить формулу, доказывающую бесконечную порождённость моноида $\Omega^{(d)}$ при $d > 1$:

$$X^{(d)}(t) = \frac{F_d \cdot t^d - (-1)^d \cdot t^{2d}}{1 - F_{d-2} \cdot t^d}\ ,\ \text{где } F_{-1} := 0\,.$$

Бесконечная пророждённость $\Omega^{(d)}$ в предыдущем примере – следствие более общего факта, доказанного в ([2]).

2.3. Предложение. Пусть Ω – ассоциативный моноид, свободно порождённый взвешенным множеством X и $d \geq 1$. Тогда равносильно:

1. $\Omega^{(d)}$ – конечнопорождена;

2. для некоторого многочлена $P(t)$, $X(t) = t^n \cdot P(t^d)$.

Поэтому, если X содержит элементы различных весов, то моноид $\Omega^{(d)}$ – конечнопорождён лишь для конечного числа значений d.

2.4. Замечание. Из взвешенного множества X можно организовать иные объекты. Например, S – `ассоциативно-коммутативный` моноид, свободно порождённый X, состоящий из мультимножеств, собираемых из элементов X, с операцией объединения мультимножеств (при этом кратности вхождения элементов складываются). Или Λ – `ассоциативно-антикоммутативную` алгебру, свободно порождённую X. Её базисом можно считать подмножества X с фиксированным порядком. В этих случаях

$$S(t) = \prod\nolimits_{k \geq 1} \left(1 - t^k\right)^{-\sharp(X_k)}, \ \Lambda(t) = \prod\nolimits_{k \geq 1} \left(1 + t^k\right)^{\sharp(X_k)}.$$

Но соответствующие подобъекты Веронезе $S^{(d)}$ и $\Lambda^{(d)}$ уже не обязательно будут свободно порождены, что затрудняет вычисление производящих функций их порождающих множеств. Хотя нахождение их в каждом конкретном случае при небольшом X не представляет труда.

Последние формулы дают пример производящих функций нового вида. Поэтому проведём систематизацию предмета.

2.5. Определение. Пусть $(a_n,\ n \geq 0)$ – числовая последовательность. Определим её ряды Гильберта и Гурвица:

$$H_a(t) = \sum\nolimits_{n \geq 0} a_n \cdot t^n\,,\ G_a(t) = \sum\nolimits_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{t^n}{n!}\ .$$

О втором ряде сказано в ([19, т. II, с. 159]). Его также называют экспоненциальным, и с ним работал Лаплас. Такие производящие функции применяются в теории вероятностей ([26, с. 58-62]). Они удобны для линейно-рекуррентных последовательностей ([19, т. II, с. 117], [31, гл. 4]), для исчисления Блиссара ([26, с. 53]), поскольку линейны по индексу:

$$H_{a+b}(t) = H_a(t) + H_b(t)\,, \quad H_{\lambda \cdot a}(t) = \lambda \cdot H_a(t)\,;$$
$$G_{a+b}(t) = G_a(t) + G_b(t)\,, \quad G_{\lambda \cdot a}(t) = \lambda \cdot G_a(t)\,.$$

Они согласованы со сдвигом последовательности: если

$$(a_0, a_1, \dots)\Uparrow = (0, a_0, a_1, \dots), (a_0, a_1, \dots)\Downarrow = (a_1, a_2, \dots)\,,\ \text{то}$$

$$H_{a\Uparrow}(t) = t \cdot H_a(t)\,, \quad G_{a\Uparrow}(t) = \int_0^t G_a(x)\,dx\,;$$
$$H_{a\Downarrow}(t) = (H_a(t) - H_a(0))/\,t\,, \quad G_{a\Downarrow}(t) = {G_a}'(x)\,.$$

Линейны ряд Дирихле и ряды Ламберта, важные в арифметических задачах:

$$D_a(s) = \sum\nolimits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}\,, \quad L_a^{\mp}(t) = \sum\nolimits_{n \geq 1} a_n \cdot \frac{t^n}{1 \mp t^n}\ .$$

В алгебраической комбинаторике полезны функции Эйлера и дзета-функция Вейля:

$$E_a^{\mp}(t) = \prod\nolimits_{n \geq 1} (1 \mp t^n)^{\mp a_n}, \quad Z_a(t) = \exp\Bigl(\sum\nolimits_{n \geq 1} a_n \cdot \frac{t^n}{n}\Bigr)\,.$$

Своей мультипликативностью они похожи на экспоненту:

$$E^{\mp}_{a+b}(t) = E^{\mp}_{a}(t) \cdot E^{\mp}_{b}(t)\ , \quad Z_{a+b}(t) = Z_a(t) \cdot Z_b(t)\ .$$

Дзета функция А. Вейля связана с гипотезами в алгебраической геометрии (см. [35, с. 559-570]). Функции Эйлера связаны с разбиениями чисел и перестановками. Замечательным результатом тут является `Пентагональная лемма Эйлера` (см. [37, с. 24-27]):

$$\prod_{n \geq 1} (1 - t^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \dots =$$

$$= \sum\nolimits_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{\,k} \cdot t^{\,k \cdot (3k+1)/2}\ .$$

Смысл её в том, что при разложении натуральных чисел в сумму различных слагаемых, количество разбиений на чётное число слагаемых от количества разбиений на нечётное число слагаемых отличается не более, чем на единицу. И Эйлер указал – когда и каково это единичное отклонение.

Видимо, ещё не изученным фактом является аналогичное наблюдение о разбиении в сумму чисел Фибоначчи:

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^8)\cdot(1-x^{13})\cdot \ldots =$$

$$= 1 - x - x^2 + x^4 + x^7 - x^8 + x^{11} - x^{12} - x^{13} + x^{14} + \ldots\ .$$

Ясно, что перечисленным набором производящие функции не исчерпываются. Линейные варианты сворачивают последовательности с некоторой системой функций, мультипликативные – экспонируют такие представления. Мыслимы иные способы вовлечения последовательностей в алгебраические или аналитические выражения с неограниченным количеством операций, которые можно рассматривать либо как функции, либо как формальные комбинации. Действия с ними всегда подразумевают некоторое обоснование. Свойства производящих функций должны быть предварительно исследованы. Наиболее изучены степенные ряды (см. [9, 10, 11, 19]), поэтому популярны производящие функции на их основе. Вышеуказанные производящие функции зависимы:

$$E_a^{\mp}(t) = \exp\left\{\sum\nolimits_{k\geq 1} \frac{(\pm 1)^{k-1}}{k} \cdot \big(H_a(t^k) - H_a(0)\big)\right\} ,$$

$$L_a^{\mp}(t) = \sum\nolimits_{k\geq 1} (\pm 1)^{k-1} \cdot \big(H_a(t^k) - H_a(0)\big) ,$$

$$D_a(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^{+\infty} \big(H_a(e^{-x}) - H_a(0)\big) \cdot x^{s-1} dx ,$$

$$Z_a(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{H_a(x) - H_a(0)}{x}\, dx\right\} ,$$

$$H_a(t) = \int_0^{+\infty} G_a(tx) \cdot e^{-x} dx .$$

Но “символически-операционно” все производящие функции эквивалентны. Различаются они только тем, насколько свёрнуто могут представлять изучаемые конфигурации. Поэтому, гипотетически, для каждой задачи должна быть своя “идеально подходящая” производящая функция. Удивительно, что некоторые из них подходят ко многим, на первый взгляд несходным задачам.

3. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Комбинаторный анализ в математике начался с биномиального разложения. Слово **бином** означает некоторую двусоставленность, передаваемую латинским словом *binominis* – двуимённый. До середины XVI в. слово „бином“ означало арифметический двучлен любого рода. Современный смысл понятие приобрело у голландца Стевина в “La Disme” 1585 г. Отдельные случаи разложения степени бинома появлялись и ранее. Открытие биномиальной теоремы приписывают древнекитайским и арабским математикам. Известно, что немец Штифель в “Arithmetica integra” 1544 г. разобрал бином 17-ой степени. Предполагают, что англичанин Бриггс в “Arithmetica logarithmica” 1624 г. для вычисления логарифмов использовал биномы с дробными показателями. В XVII в. бином знали уже многие математики, например, – Паскаль, Лейбниц, Грегори и Валлис.

Смысл **биномиальной теоремы** в том, что для натурального n разложение n-ой степени бинома содержит 2^n слагаемых. Но перестановочность сомножителей позволяет привести подобные слагаемые в сумме, уменьшив их до $(n+1)$-го:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \ , \text{ где } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \ .$$

Современная формула биномиальных коэффициентов появилась после того, как немецкий математик Крамп в 1808 г. предложил обозначение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Такое произведение множителей (факторов) называется **факториалом**. Ранее его обозначали символом Эйлера $\Pi(n)$.

Ньютон в письме Ольденбургу 1676 г. сообщил биномиальное правило для вещественных показателей. Абель в 1826 г. обосновал применение комплексных степеней, и так появилась `формула Ньютона-Абеля`:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum\nolimits_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k \tag{$\aleph$}$$

3.1. Замечание. Коэффициенты ряда ($\aleph$) легко получить из формулы Тейлора. Но сходимость ряда к указанной функции не очевидна. Она следует из регулярности композиции:

$$(1+z)^{\alpha} = \exp\big(\alpha \cdot \ln(1+z)\big) \text{ в области } \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}\ .$$

Вещественное обоснование формулы Ньютона-Абеля таково. Найдём коэффициенты ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, удовлетворяющего свойствам функции $f(x) = (1+x)^{\alpha}$:

$$f\,'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} \cdot f(x)\,, \quad f(0) = 1\,.$$

При подстановке ряда получим равенства:

$$(1+x) \cdot \sum\nolimits_{k\geq 0} k a_k \cdot x^{k-1} = \alpha \cdot \sum\nolimits_{k\geq 0} a_k \cdot x^k\,, \quad a_0 = 1\,;$$

$$a_1 + \sum\nolimits_{k\geq 1} (k a_k + (k+1) a_{k+1}) \cdot x^k = \alpha + \sum\nolimits_{k\geq 1} \alpha\, a_k \cdot x^k\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим цепочку равенств:

$$a_0 = 1\ ;\ a_1 = \alpha\ ;\ k \cdot a_k + (k+1) \cdot a_{k+1} = \alpha \cdot a_k\,,\ k \geq 1\,;$$

$$a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot a_k = \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot \frac{\alpha-(k-1)}{k} \cdot \ \ldots\ \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-0}{1}\ .$$

И окончательно находим:

$$\binom{\alpha}{k} = a_k = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-(k-1))}{k!}\ ,\ \binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

При $\alpha \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ все слагаемые разложения бинома, начиная с $k = \alpha+1$, содержат нулевой сомножитель в числителе дроби и поэтому обнуляются. Ненулевые коэффициенты при этом преобразуются к известному факториальному виду. Биномиальный ряд и $f(x)$ в этом случае являются всюду совпадающими полиномами степени α.

При $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ все коэффициенты разложения бинома – ненулевые. Существует предел отношения их модулей:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1\,.$$

Поэтому радиус сходимости формального степенного ряда равен 1. На интервале $(-\delta, \delta\,)$, при $0 < \delta < 1$, он сходится равномерно к бесконечно дифференцируемой функции, удовлетворяющей дифференциальным условиям $f(x)$. Поэтому биномиальный ряд сходится к $f(x)$ на $(-1, 1)$.

Мы считаем, что биномиальные коэффициенты с отрицательными или нецелыми нижними индексами – нулевые.

3.2. Замечание. Биномиальные коэффициенты подчиняются многим закономерностям. Авторы книги ([10]) отмечают:

> „Биномиальные коэффициенты подобны хамелеонам, с лёгкостью изменяющим свою внешность.“(с. 232)

Из несложных формул могут вытекать интересные следствия. Например, при $n, k \in \mathbb{N}_0$ имеем равенства:

$$k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}\ ,\ (n-k)\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k} \qquad (\bowtie)$$

Далее, при $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим биномиальное тождество:

$$1 = (1 - x + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (1 - x)^{k} \cdot x^{n-k} .$$

Справа, чисто формально, стоит полином степени n, но фактически его степень нулевая – ведь он тождественно равен единице. Теперь для целых $0 \le s \le n$ определим полиномы – `неполные биномиальные суммы`:

$$_nB_s(x) = \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot (1 - x)^{k} \cdot x^{n-k} ;$$

$$_nB_0(x) = x^n, \ _nB_1(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n, \ \ldots, \ _nB_n(x) = 1 .$$

Они имеют целые коэффициенты и составляют базис пространства $\mathbb{Q}[x]_{\le n}$, – полиномов над $\mathbb{Q}$ степени не выше n , – что следует из линейной независимости системы:

$$x^n , \ (1-x)\cdot x^{n-1} , \ (1-x)^2\cdot x^{n-2} , \ \ldots , \ (1-x)^{n-1}\cdot x , \ (1-x)^n .$$

Некоторые свойства $_nB_s(x)$ очевидны, другие – не очень:

$$_nB_s(0) = [\, s = n \,] , \ _nB_s(1) = 1 .$$

3.3. Лемма. Полиномы $_nB_s(x)$ монотонно растут на $[0, 1]$.

Доказательство. Вычислим производные $_nB_s(x)$:

$$_nB_s'(x) = \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot \left((1 - x)^{k} \cdot x^{n-k}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot \left\{ -k \cdot (1-x)^{k-1} \cdot x^{n-k} + (n-k) \cdot (1-x)^{k} \cdot x^{n-k-1} \right\} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\cdot k(1-x)^{k-1}x^{n-k} + \sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\cdot(n-k)\cdot(1-x)^{k}x^{n-k-1} =$$

$$= n\cdot\left(-\sum_{k=1}^{s}\binom{n-1}{k-1}(1-x)^{k-1}x^{n-k} + \sum_{k=0}^{s}\binom{n-1}{k}(1-x)^{k}x^{n-k-1}\right) =$$

$$= n\cdot\left(-\sum_{k=0}^{s-1}\binom{n-1}{k}(1-x)^{k}x^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{s}\binom{n-1}{k}(1-x)^{k}x^{n-k-1}\right) =$$

$$= n\cdot\binom{n-1}{s}\cdot(1-x)^{s}\cdot x^{n-s-1} = (n-s)\cdot\binom{n}{s}\cdot(1-x)^{s}\cdot x^{n-s-1}.$$

Здесь мы использовали формулы ($\bowtie$) на стр. 18. Итак, ясно, что ${}_nB_s'(x) \geq 0$ на $[0,1]$, что доказывает Лемму 3.3. Заметим, что для $s < n$ здесь же доказана строгая монотонность полиномов ${}_nB_s(x)$ на $[0,1]$.

3.4. Следствие. При фиксированном s и $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} {}_nB_s(x) = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}\cdot(1-x)^{k}\cdot x^{n-k} = 1\,.$$

Доказательство. Можно считать, что $s < n$. Рассмотрим два случая: $0 < x \leq 0.5$ и $0.5 < x < 1$. В первом случае имеется оценка:

$$0 < {}_nB_s(x) \leq {}_nB_s(0.5) = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}.$$

Сумма в правой части является полиномом от n степени s, и поэтому по оценочному признаку получаем:

$$\lim_{n\to\infty} {}_nB_s(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k} = 0\,.$$

Во втором случае имеем $0 < (1-x)/x < 1$ и поэтому:

$$0 < {}_nB_s(x) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^k < x^n \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.$$

По аналогичным соображениям получаем равенство:

$$\lim_{n\to\infty} {}_nB_s(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} = 0\,.$$

Тем самым, первая часть Следствия 3.4 доказана. Для доказательства второй части достаточно заметить равенство:

$$\sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} \cdot (1-x)^k \cdot x^{n-k} = {}_nB_n(x) - {}_nB_{s-1}(x) = 1 - {}_nB_{s-1}(x)\,.$$

3.5. Замечание. При доказательстве Следствия 3.4 были получены простые, но интересные выражения:

$${}_nB_s(x) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^k, \ {}_nB_s(0.5) = 2^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.$$

В первом из них можно сделать замену $(1-x)/x = a-1$. Тогда $x = 1/a$ и первое выражение принимает вид:

$${}_nB_s\left(a^{-1}\right) = a^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \cdot (a-1)^k\,.$$

Второе получается подстановкой $a = 2$. Эти выражения имеют смысл в теории помехоустойчивого блочного кодирования. Вспомним соответствующие определения.

Пусть $\mathcal{A}$ – конечный алфавит, $\sharp(\mathcal{A}) = a \geq 1$, $n \geq 1$. Рассмотрим слова (блоки) длины n: $w = w(1)\cdots w(n) \in \mathcal{A}^n$.

Множество $\mathcal{A}^n$ можно снабдить `метрикой Хэмминга`:

$$d(w,\widetilde{w}\,) = \sharp\left\{i = 1,\ldots,n \mid w(i) \neq \widetilde{w}(i)\right\}.$$

Определим замкнутый шар в $\mathcal{A}^n$ радиуса s с центром w:

$$\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(w) = \{\widetilde{w} \in \mathcal{A}^n \mid d(w,\widetilde{w}\,) \leq s\}.$$

Очевидно, $\overline{\text{Ш}}_0^{(n)}(w) = \{w\}$; $\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(w) = \mathcal{A}^n$, при $s \geq n$. Простое комбинаторное рассуждение показывает, что количество элементов множества $\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(w)$ не зависит от w:

$$\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(w)\right) = \sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\cdot(a-1)^k.$$

Поэтому значение неполных биномиальных сумм приобретает вполне конкретный смысл:

$${}_nB_s\left(a^{-1}\right) = \sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right)\Big/\,\sharp\,(\mathcal{A}^n).$$

Предположим, что при передаче блоки w и $\widetilde{w}$ подвергаются не более, чем s искажениям, каждый. Тогда для однозначного восстановления значения искажённого блока – w это или $\widetilde{w}$ – необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(w) \cap \overline{\text{Ш}}_s^{(n)}(\widetilde{w}\,) = \emptyset.$$

Таким образом, для надёжного исправления не более s искажений в передаваемых блоках, эти блоки должны окружать непересекающиеся замкнутые шары радиуса s. Что даёт верхнюю границу количества разных передаваемых блоков:

$$\sharp\,(\mathcal{A}^n)\Big/\,\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right) = \left({}_nB_s\left(a^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

Следовательно, информационная ёмкость блока построенного кода имеет верхнюю границу:

$$\log_a\!\Big(\sharp\,(\mathcal{A}^n)\Big/\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right)\Big) = n - \log_a\!\Big(\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right)\Big)\,.$$

Соответственно, нижняя граница количества избыточных или проверочных символов в блоке, обеспечивающих исправление s искажений, равна

$$\log_a\!\Big(\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right)\Big) = \log_a\left(\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\cdot(a-1)^k\right).$$

Это мотивирует важность функции $\sharp\left(\overline{\text{Ш}}_s^{(n)}\right)$, для которой хотелось бы иметь компактное выражение. В случае двоичного кодирования, при $a = 2$, $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$, проясняется интерес к неполным биномиальным суммам по нижнему индексу, о которых авторы книги ([10]) сообщают:

> „...для частичной суммы элементов ряда треугольника Паскаля не существует замкнутого выражения."(с. 191)

В этом утверждении речь идёт о выражении специального, гипергеометрического вида, пригодного сразу для всех n и s. Что не исключает потенциальной возможности компактного представления функциями иной природы, и замкнутых выражений для отдельных n или s. Например, при $s \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{s}\binom{-1}{k} = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k = [\,s\text{– чётное}\,] = (1+(-1)^s)/\,2\,,$$

$$\sum_{k=0}^{s}\binom{1}{k} = 1 + [\,s \geq 1\,]\,,\ \sum_{k=0}^{s}\binom{2}{k} = 1 + 2\cdot[\,s \geq 1\,] + [\,s \geq 2\,]\,.$$

Поначалу может показаться удивительным тождество, дающее пример замкнутых, компактных выражений:

$$\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k=(-1)^s\cdot\binom{n-1}{s}.$$

Но с точки зрения производящих функций, сумма слева – это коэффициент при x^s в разложении Маклорена функции:

$$\sum_{a\geq 0}x^a\cdot\sum_{b\geq 0}\binom{n}{b}\cdot(-x)^b=\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)^n=(1-x)^{n-1}.$$

Указанные равенства обеспечивают простоту выражения знакопеременной суммы биномиальных коэффициентов. Тот же приём для неполной суммы биномиальных коэффициентов не даёт ничего коротко разворачиваемого:

$$\sum_{s\geq 0}x^s\cdot\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}=\sum_{a\geq 0}x^a\cdot\sum_{b\geq 0}\binom{n}{b}\cdot x^b=\frac{1}{1-x}\cdot(1+x)^n.$$

Это рассуждение, конечно, не доказывает категоричного утверждения о несуществовании компактного выражения для рассматриваемой суммы. Вопрос остаётся открытым.

Прежде наши производящие функции вовлекали биномиальные коэффициенты по нижнему индексу. Включение верхнего индекса также даёт полезные формулы.

3.6. Лемма. Для $u\geq 0$ и $|z|<1$ имеется тождество:

$$\sum\nolimits_{v\geq 0}\binom{v}{u}\cdot z^{\,v}=\frac{z^{\,u}}{(1-z)^{\,u+1}}\,.$$

Доказательство.

$$\sum\nolimits_{v\geq 0}\binom{v}{u}\cdot z^{\,v}=\sum\nolimits_{v\geq u}\binom{v}{u}\cdot z^{\,v}=\sum\nolimits_{v\geq u}\binom{v}{v-u}\cdot z^{\,v}=$$

$$= z^{u}\cdot\sum\nolimits_{v\ge u}\frac{v\cdot(v-1)\cdot\ldots\cdot(v-(v-u)+1)}{(v-u)!}\cdot z^{v-u} =$$

$$= z^{u}\cdot\sum\nolimits_{v\ge u}\frac{v\cdot(v-1)\cdot\ldots\cdot(u+1)}{(v-u)!}\cdot z^{v-u} =$$

$$= z^{u}\cdot\sum\nolimits_{v\ge u}\frac{(-v)\cdot(-v+1)\cdot\ldots\cdot(-u-1)}{(v-u)!}\cdot(-z)^{v-u} =$$

$$= z^{u}\cdot\sum_{v\ge u}\frac{(-u-1)\cdot(-u-2)\cdot\ldots\cdot(-u-1-(v-u)+1)}{(v-u)!}\cdot(-z)^{v-u} =$$

$$= z^{u}\cdot\sum\nolimits_{s\ge 0}\binom{-u-1}{s}\cdot(-z)^{s} = z^{u}\cdot(1-z)^{-u-1} = \frac{z^{u}}{(1-z)^{u+1}}\ .$$

Только что полученное биномиальное тождество дополним его полезным усечённым вариантом.

3.7. Лемма. При $u, m \ge 0$ и $|z| < 1$ имеется равенство:

$$\sum_{v=0}^{m}\binom{v}{u}\cdot z^{v} = \frac{z^{u}}{(1-z)^{u+1}} - z^{m+1}\cdot\sum_{s=0}^{u}\binom{m+1}{s}\cdot\frac{z^{u-s}}{(1-z)^{u-s+1}}\ .$$

Доказательство. Левую часть равенства обозначим $F_u(z)$ и при $-1 < \theta < (1-z)/|z|$ изучим производящую функцию:

$$\sum\nolimits_{u\ge 0}F_u(z)\cdot\theta^{u} = \sum\nolimits_{u\ge 0}\theta^{u}\cdot\sum_{v=0}^{m}\binom{v}{u}\cdot z^{v} =$$

$$= \sum_{v=0}^{m} z^{v}\cdot\sum_{u\ge 0}\binom{v}{u}\cdot\theta^{u} = \sum_{v=0}^{m} z^{v}\cdot(1+\theta)^{v} = \frac{1-(z(1+\theta))^{m+1}}{1-z(1+\theta)} =$$

$$= \frac{1-z^{m+1}\cdot(1+\theta)^{m+1}}{1-z-z\cdot\theta} = \frac{1-z^{m+1}\cdot(1+\theta)^{m+1}}{1-z}\Bigg/\left(1-\frac{z}{1-z}\cdot\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z} \cdot \bigl(1 - z^{\,m+1} \cdot (1+\theta)^{\,m+1}\bigr) \cdot \sum\nolimits_{k\,\ge\,0} \frac{z^{\,k}}{(1-z)^{\,k}} \cdot \theta^{\,k} =$$

$$= \bigl(1 - z^{\,m+1} \cdot (1+\theta)^{\,m+1}\bigr) \cdot \sum\nolimits_{k\,\ge\,0} \frac{z^{\,k}}{(1-z)^{\,k+1}} \cdot \theta^{\,k} =$$

$$= \sum_{u\,\ge\,0} \frac{z^{\,u}}{(1-z)^{\,u+1}} \cdot \theta^{\,u} - z^{\,m+1} \cdot (1+\theta)^{\,m+1} \cdot \sum_{k\,\ge\,0} \frac{z^{\,k}}{(1-z)^{\,k+1}} \cdot \theta^{\,k}\,.$$

Искомая формула получается при сравнении множителей при $\theta^{\,u}$, с учётом равенства:

$$(1+\theta)^{\,m+1} \cdot \sum_{k\,\ge\,0} \frac{z^{\,k} \cdot \theta^{\,k}}{(1-z)^{\,k+1}} = \sum_{s\,=\,0}^{m+1} \binom{m+1}{s} \cdot \theta^{\,s} \cdot \sum_{k\,\ge\,0} \frac{z^{\,k} \cdot \theta^{\,k}}{(1-z)^{\,k+1}} =$$

$$= \sum\nolimits_{u\,\ge\,0} \theta^{\,u} \cdot \sum_{s\,=\,0}^{\min(u,\,m+1)} \binom{m+1}{s} \cdot \frac{z^{\,u-s}}{(1-z)^{\,u-s+1}}\,.$$

Лемма 3.7 доказана. При подстановке в её формулу $z = 1/2$ получим полезное тождество.

3.8. Следствие. При $u, m \ge 0$ имеется равенство:

$$\sum_{v\,=\,0}^{m} \binom{v}{u} \cdot \frac{1}{2^{\,v+1}} = 1 - \frac{1}{2^{\,m+1}} \cdot \sum_{s\,=\,0}^{\min(u,\,m+1)} \binom{m+1}{s}\,.$$

Двойные числовые и степенные ряды исследованы в учебнике ([9, Гл. 13, с. 229-251]). Свойства биномиальных коэффициентов изложены в книге ([10, Гл. 5, с. 178-232]). Много тождеств дано в справочнике ([21, Гл. 4, с. 606-635; Прил. 1, с. 772]). Монографии ([22, 23]) почти полностью посвящены биномиальным тождествам. В статье ([1]) мы с коллегами применили несколько неочевидных биномиальных формул, способ доказательства которых представляет методический интерес для этого раздела книги. Сами формулы не столь поучительны и не появятся в последующем тексте.

3.9. Лемма. Далее можно считать $s \geq 4$, но некоторые формулы после сокращения верны и при меньших s:

1) $$\binom{s-m}{m} = \frac{4^m}{2^s} \cdot \sum_{u \geq 0} \binom{s+1}{2u+1} \cdot \binom{u}{m},$$

2) $$\sum_{m=0}^{\sigma} \binom{\sigma-m}{m} \cdot \left(\frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^m = \frac{(s-2)^{\sigma+1} - 1}{(s-3) \cdot (s-1)^{\sigma}}\ ;$$

3) $$\sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot (2-s)^m \cdot (s-1)^{s-2m} = \frac{(s-2)^{s+1} - 1}{s-3}\ ;$$

4) $$\sum_{m=1}^{s-1} m \cdot \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^m \cdot (s-1)^{s-2m}}{s-m} =$$
$$= \frac{(s-2) \cdot \left(1 - (s-2)^{s-1}\right)}{s-3}\ ;$$

5) $$\sum_{m=0}^{s-1} \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^m \cdot (s-1)^{s-2m}}{s-m} = \frac{(s-2)^s + 1}{s}\ ;$$

6) $$\sum_{m=2}^{s-2} m \cdot (m-1) \cdot \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^m \cdot (s-1)^{s-2m}}{(s-m) \cdot (s-m-1)} =$$
$$= \frac{(s-2)^2 \cdot \left((s-2)^{s-3} - 1\right)}{s-3}\ ;$$

7) $$\sum_{m=1}^{s-2} m \cdot \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m}}{(s-m) \cdot (s-m-1)} =$$
$$= -(s-2)^{s-2} - 1 \ ;$$

8) $$\sum_{m=1}^{s-2} m \cdot \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m}}{s-m-1} =$$
$$= \frac{1-(s-2)^{s-2} \cdot (s^2-3s+1)}{s-3} \ ;$$

9) $$\sum_{m=0}^{s-2} \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m}}{s-m-1} =$$
$$= (s-3) \cdot (s-2)^{s-2} \ ;$$

10) $$\sum_{m=0}^{s-2} \binom{s-m}{m} \cdot \frac{(2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m}}{(s-m) \cdot (s-m-1)} =$$
$$= \frac{(s-4) \cdot (s-2)^{s-2} - 1}{s} \ .$$

Доказательство. Порядок формул в этой лемме выбран таким образом, что последующие выводятся из предыдущих.

Для доказательства формулы 1, соберём левый биномиальный коэффициент в двойную производящую функцию и преобразуем её, разложив в сумму простейших дробей по y:

$$\sum_{s\geq 0} y^s \cdot \sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot x^m = \sum_{k,m\geq 0} \binom{k}{m} \cdot x^m \cdot y^{k+m} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} y^k \cdot \sum_{m\geq 0} \binom{k}{m} \cdot x^m \cdot y^m = \sum_{k\geq 0} y^k \cdot (1+xy)^k = \frac{1}{1-y-xy^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+4x}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{1-\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\cdot y} - \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1-\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\cdot y} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \cdot \sum_{s\geq 0} \left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{s+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{s+1} \right) \cdot y^s,$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получаем равенство полиномов от x:

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot x^m =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{s+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{s+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{s+1}\cdot\sqrt{1+4x}} \cdot \sum\nolimits_{k\geq 0} \binom{s+1}{k} \cdot \left(\sqrt{1+4x}\right)^k \cdot (1-(-1)^k) =$$

$$= \frac{1}{2^s \cdot \sqrt{1+4x}} \cdot \sum\nolimits_{u\geq 0} \binom{s+1}{2u+1} \cdot \left(\sqrt{1+4x}\right)^{2u+1} =$$

$$= \frac{1}{2^s} \sum_{u\geq 0} \binom{s+1}{2u+1} \cdot (1+4x)^u = \frac{1}{2^s} \sum_{u\geq 0} \binom{s+1}{2u+1} \sum_{m\geq 0} \binom{u}{m} \cdot (4x)^m =$$

$$= \frac{1}{2^s} \cdot \sum_{m \geq 0} 4^m \cdot x^m \cdot \sum_{u \geq 0} \binom{s+1}{2u+1} \cdot \binom{u}{m}.$$

Теперь сравнение коэффициентов при x^m даёт искомое равенство 1. Отметим, что по пути доказано участие указанных биномиальных коэффициентов в интересных суммах:

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot (-1)^m = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{(s+1)\pi}{3} \ ,$$

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} = F_s \ ,$$

где F_s – числа Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, \dots)$.

Для получения равенства 2 мы используем предыдущую формулу 1:

$$\sum_{m=0}^{\sigma} \binom{\sigma-m}{m} \cdot \left(\frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^m =$$

$$= \sum\nolimits_{m \geq 0} \frac{4^m}{2^\sigma} \cdot \sum\nolimits_{u \geq 0} \binom{\sigma+1}{2u+1} \cdot \binom{u}{m} \cdot \left(\frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{2^\sigma} \cdot \sum\nolimits_{u \geq 0} \binom{\sigma+1}{2u+1} \cdot \sum\nolimits_{m \geq 0} \binom{u}{m} \cdot \left(4 \cdot \frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{2^\sigma} \cdot \sum\nolimits_{u \geq 0} \binom{\sigma+1}{2u+1} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^u =$$

$$= \frac{1}{2^\sigma} \cdot \sum\nolimits_{u \geq 0} \binom{\sigma+1}{2u+1} \cdot \left(\frac{s-3}{s-1}\right)^{2u} =$$

$$= \frac{1}{2^\sigma} \cdot \frac{s-1}{s-3} \cdot \sum\nolimits_{u \geq 0} \binom{\sigma+1}{2u+1} \cdot \left(\frac{s-3}{s-1}\right)^{2u+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{\sigma+1}} \cdot \frac{s-1}{s-3} \cdot \left(\left(1+\frac{s-3}{s-1}\right)^{\sigma+1} - \left(1-\frac{s-3}{s-1}\right)^{\sigma+1}\right) =$$

$$= \frac{(s-2)^{\sigma+1}-1}{(s-3)\cdot(s-1)^{\sigma}} \,.$$

Для доказательства 3 мы используем 2, полагая $\sigma = s$:

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot (2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m} =$$

$$= (s-1)^{s} \cdot \sum_{m=0}^{s} \binom{s-m}{m} \cdot \left(\frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^{m} =$$

$$= \frac{(s-2)^{s+1}-1}{s-3} = \sum_{k=0}^{s} (s-2)^{k} \,.$$

Для доказательства 4 мы используем 2, полагая $\sigma = s-2$:

$$\sum_{m=1}^{s-1} \frac{m}{s-m} \cdot \binom{s-m}{m} \cdot (2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{s-1} \binom{s-m-1}{m-1} \cdot (2-s)^{m} \cdot (s-1)^{s-2m} =$$

$$= (s-1)^{s-2} \cdot (2-s) \cdot \sum_{m=0}^{s-2} \binom{s-2-m}{m} \cdot \left(\frac{2-s}{(s-1)^2}\right)^{m} =$$

$$= \frac{(s-2)\cdot\left(1-(s-2)^{s-1}\right)}{s-3} \,.$$

Для доказательства 5 мы используем формулы 3 и 4 , заметив равенство:

$$\frac{1}{s-m} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{m}{s-m}\right).$$

Тождество 6 доказывается аналогично 4 , с последующей подстановкой $\sigma = s - 4$.

Для доказательства 7 мы используем формулы 4 и 6 , применяя равенство:

$$\frac{m}{(s-m)\cdot(s-m-1)} =$$

$$= \frac{1}{s-2} \cdot \left(\frac{m}{s-m} + \frac{m\cdot(m-1)}{(s-m)\cdot(s-m-1)}\right).$$

Для доказательства 8 мы используем формулы 6 и 7 , заметив равенство:

$$\frac{m}{s-m-1} =$$

$$= (s-1)\cdot\frac{m}{(s-m)\cdot(s-m-1)} - \frac{m\cdot(m-1)}{(s-m)\cdot(s-m-1)} .$$

Для доказательства 9 мы используем формулы 3 и 8 , заметив равенство:

$$\frac{1}{s-m-1} = \frac{1}{s-1} \cdot \left(1 + \frac{m}{s-m-1}\right).$$

Тождество 10 следует из 5 и 9 , поскольку верно равенство:

$$\frac{1}{(s-m)\cdot(s-m-1)} = \frac{1}{s-m-1} - \frac{1}{s-m} .$$

Что завершает доказательство всех формул Леммы 3.9.

Следующий пример иллюстрирует пользу комбинаторики в аналитических разделах математики:

3.10. Пример. Возьмём вещественно гладкую функцию:

$$f(0) = 0\,;\ f(x) = \exp\left\{-1/x^2\right\} \text{ при } x \neq 0\,.$$

Её ряд Маклорена нулевой, но $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Обнуление всех производных $f^{(k)}(0)$ даёт оценка, следующая из правила Лопиталя: $f(x) = o\,(x^k)$ при $k \geq 0$. Немного сложнее это выводится из явного вида $f^{(k)}(x)$ при $k \geq 0$. И нахождение высших производных является отдельной интересной задачей. Действительно, начальные производные таковы:

$$\begin{aligned}
\left(\exp\left\{-1/x^2\right\}\right)^{(0)} &= 1 \cdot \exp\left\{-1/x^2\right\}\ , \\
\left(\exp\left\{-1/x^2\right\}\right)^{(1)} &= \frac{2}{x^3} \cdot \exp\left\{-1/x^2\right\}\ , \\
\left(\exp\left\{-1/x^2\right\}\right)^{(2)} &= \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \cdot \exp\left\{-1/x^2\right\}\ , \\
\left(\exp\left\{-1/x^2\right\}\right)^{(3)} &= \left(\frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5}\right) \cdot \exp\left\{-1/x^2\right\}\ .
\end{aligned}$$

Индукцией по k легко доказать, что

$$\left(\exp\left\{-1/x^2\right\}\right)^{(k)} = P_k(1/x) \cdot \exp\left\{-1/x^2\right\},\ \deg P_k(t) = 3k\,.$$

В частности,

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = 2t^3,\ P_2(t) = 4t^6 - 6t^4,$$

$$P_3(t) = 8t^9 - 36t^7 + 24t^5.$$

В общем случае получаем:

$$P_k(1/x) = \exp\{-1/x^2\} \cdot \left(\exp\{-1/x^2\}\right)^{(k)} =$$

$$= \sum\nolimits_{s\geq 0} \frac{1}{s!\,x^{2s}} \cdot \left(\sum\nolimits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\,x^{2n}}\right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{1}{s!\,x^{2s}} \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(-2n)(-2n-1)\dots(-2n-(k-1))}{n!\,x^{2n+k}} =$$

$$= \frac{k!}{x^k} \cdot \sum_{s,\,n\geq 0} \frac{(-1)^n}{s!\,n!} \cdot \binom{-2n}{k} \cdot \frac{1}{x^{2(s+n)}} = \begin{vmatrix} m{=}s{+}n,\ n\geq 0 \\ s = m-n \geq 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{k!}{x^k} \cdot \sum_{m\geq 0} \frac{1}{x^{2m}} \cdot \sum_{m\geq n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(m-n)!\,n!} \cdot \binom{-2n}{k} =$$

$$= \frac{k!}{x^k} \cdot \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!\,x^{2m}} \cdot \sum_{m\geq n\geq 0} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \binom{-2n}{k}.$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид:

$$P_k(t) = k!\,t^k \cdot \sum_{m\geq 0} \frac{t^{2m}}{m!} \cdot \sum_{m\geq n\geq 0} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \binom{-2n}{k}.$$

Обозначим вспомогательный многочлен:

$$Q_k(t) = k! \cdot \sum_{m\geq 0} \frac{t^m}{m!} \cdot \sum_{m\geq n\geq 0} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \binom{-2n}{k}.$$

Тогда получим равенства:

$$P_k(t) = t^k \cdot Q_k(t^2)\,,\ \deg Q_k(t) = k\,.$$

Начальные многочлены $Q_k(t)$ таковы:

$$Q_0(t) = 1\,,\ Q_1(t) = 2t\,,\ Q_2(t) = 4t^2 - 6t\,,$$

$$Q_3(t) = 8t^3 - 36t^2 + 24t\,.$$

Из формулы следует, что $Q_k(0) = [\,k = 0\,]$. Из сравнения степеней многочленов, и того, что старший коэффициент $P_k(t)$ равен $2^{\,k}$, получим тождества:

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \binom{-2n}{k} = 0 \quad \text{при} \quad m > k\,,$$

$$\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \cdot \binom{k}{n} \cdot \binom{-2n}{k} = 2^{\,k}\,.$$

Остальные суммы можно пересчитать из иных комбинаторных соображений. Соберём из $Q_k(t)$ экспоненциальную производящую функцию:

$$G_{Q(t)}(z) = \sum\nolimits_{k \geq 0} \frac{Q_k(t)}{k!} \cdot z^{\,k} =$$

$$= \sum\nolimits_{k\,\geq\,0} z^{\,k} \cdot \sum\nolimits_{m\,\geq\,0} \frac{t^m}{m!} \cdot \sum\nolimits_{n\,=\,0}^{m} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \binom{-2n}{k} =$$

$$= \sum\nolimits_{m\,\geq\,0} \frac{t^m}{m!} \cdot \sum\nolimits_{n\,=\,0}^{m} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \sum\nolimits_{k\,\geq\,0} \binom{-2n}{k} \cdot z^{\,k} =$$

$$= \sum\nolimits_{m\,\geq\,0} \frac{t^m}{m!} \cdot \sum\nolimits_{n\,=\,0}^{m} (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot (1 + z)^{-2n} =$$

$$= \sum\nolimits_{m\,\geq\,0} \frac{t^m}{m!} \cdot \sum\nolimits_{n\,=\,0}^{m} \binom{m}{n} \cdot \bigl(-(1 + z)^{-2}\bigr)^n =$$

$$= \sum\nolimits_{m\,\geq\,0} \frac{t^m}{m!} \cdot \bigl(1 - (1 + z)^{-2}\bigr)^m = \exp\bigl\{t \cdot \bigl(1 - (1 + z)^{-2}\,\bigr)\bigr\} =$$

$$= \exp\left\{-t\cdot\sum_{s\,\geq\,1}\binom{-2}{s}\cdot z^{\,s}\right\} = \exp\left\{t\cdot\sum_{s\,\geq\,1}(-1)^{s+1}\cdot(s+1)\cdot z^{\,s}\right\} =$$

$$= \prod\nolimits_{s\,\geq\,1} \exp\left\{\, t\cdot(-1)^{s+1}\cdot(s+1)\cdot z^{\,s}\right\} =$$

$$= \prod\nolimits_{s\,\geq\,1} \sum\nolimits_{n_s\,\geq\,0} \bigl(t\cdot(-1)^{s+1}\cdot(s+1)\cdot z^{\,s}\bigr)^{\,n_s} \big/\, n_s! =$$

$$= \prod\nolimits_{s\,\geq\,1} \sum\nolimits_{n_s\,\geq\,0} \,(-t\cdot(s+1)\cdot(-z)^{\,s}\,)^{\,n_s} \big/\, n_s! \;=$$

$$= \sum_{k\,\geq\,0}(-z)^{\,k}\cdot \sum_{\substack{n_1,\,n_2,\,\ldots\,\geq\,0\\ 1\cdot n_1+2\cdot n_2+\ldots\,=\,k}} (-t)^{\,n_1+n_2+\ldots}\cdot \frac{2^{\,n_1}\cdot 3^{\,n_2}\cdot\ldots}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots}\;.$$

Поэтому $Q_k(t)$ выражается через `разбиения` числа k – разложения в сумму невозрастающих натуральных слагаемых:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash k:\;\; \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r = k\;,$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0\;.$$

Слагаемые λ_i называются `частями разбиения`, их количество $r = l(\lambda)$ – `длиной разбиения`, разбиваемое число $k = |\lambda|$ – `мощностью разбиения`, а количество повторений конкретного слагаемого в разбиении – `кратностью` этого слагаемого:

$$n_s(\lambda) = \sharp\{\lambda_i = s \mid i = 1, \ldots, l(\lambda)\}\;,$$

$$n_1(\lambda) + n_2(\lambda) + n_3(\lambda) + \ldots = l(\lambda)\;,$$

$$1\cdot n_1(\lambda) + 2\cdot n_2(\lambda) + 3\cdot n_3(\lambda) + \ldots = |\lambda|\;.$$

В этих обозначениях при $k \geq 1$ получаем:

$$Q_k(t) = (-1)^{\,k}\cdot k!\cdot \sum_{\lambda\,\vdash\,k}(-t)^{\,l(\lambda)}\cdot \prod_{s\,\geq\,1}\frac{(s+1)^{\,n_s(\lambda)}}{n_s(\lambda)!}\;;$$

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\cdot\binom{m}{n}\cdot\binom{-2n}{k} = (-1)^{k-m}\cdot m!\cdot\sum_{\substack{\lambda\vdash k\\ l(\lambda)=m}}\prod_{s\ge 1}\frac{(s+1)^{n_s(\lambda)}}{n_s(\lambda)!}\ .$$

Многочлены $Q_k(t)$ можно определять рекуррентно:

$$\frac{1}{x^{k+1}}\cdot Q_{k+1}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\} = \left(\left(\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\}\right)^{(k)}\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x^k}\cdot Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\}\right)' = \frac{-k}{x^{k+1}}\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\} +$$

$$+\frac{1}{x^k}\,Q_k'\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{-2}{x^3}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\}+\frac{1}{x^k}\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\}\cdot\frac{2}{x^3} =$$

$$= \left(\frac{-k}{x^{k+1}}\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{-2}{x^{k+3}}\,Q_k'\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^{k+3}}\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{x^2}\right\}.$$

Следовательно, получаем соотношение ($t = 1/x^2$, $\partial = \dfrac{d}{dt}$):

$$Q_{k+1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -k\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2}\,Q_k'\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^2}\,Q_k\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$Q_{k+1}(t) = (2t-k)\cdot Q_k(t) - 2t\cdot Q_k'(t) = \{2t-k-2t\cdot\partial\}Q_k(t)\,.$$

Откуда следует "дифференциальная" формула:

$$Q_{k+1}(t) = \{2t-k-2t\cdot\partial\}\cdot\{2t-k+1-2t\cdot\partial\}\cdot\ldots\cdot\{2t-1-2t\cdot\partial\}2t\,,$$

и её символическое "биномиальное" представление:

$$Q_{k+1}(t) = (-1)^k\cdot k!\cdot\binom{2t\cdot\partial+k-2t}{k}2t.$$

4. ПОЧТИ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Следующая комбинаторная задача возникла из анализа производящих функций Эйлера вида $E_a^-(t)$. О ней сообщалось в заметке ([6]).

4.1. Определение. Пусть $(a_n,\ n \geq 1)$ – вещественная последовательность. Сопоставим ей произведение:

$$I_a(x) = x \cdot E_a^-(t) = x \Big/ \prod\nolimits_{k \geq 1} \left(1 - x^k\right)^{a_k} .$$

Разложим это выражение по степеням x:

$$I_a(x) = x \prod_{k \geq 1} \left(1 - x^k\right)^{-a_k} = x \prod_{k \geq 1} \sum_{n_k \geq 0} (-1)^{n_k} \binom{-a_k}{n_k} \cdot x^{k \cdot n_k} =$$

$$= x \cdot \sum\nolimits_{m \geq 0} x^m \cdot \sum\nolimits_{\lambda \vdash m} (-1)^{l(\lambda)} \cdot \prod\nolimits_{k \geq 1} \binom{-a_k}{n_k(\lambda)} =$$

$$= x \cdot \left\{ 1 + x \cdot a_1 + x^2 \cdot \left(a_2 + \frac{a_1 \cdot (a_1 + 1)}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + x^3 \cdot \left(a_3 + a_1 \cdot a_2 + \frac{a_1 \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_1 + 2)}{6} \right) + \ldots \right\} =$$

$$= x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \cdots = x + o(x) .$$

Любой вещественный степенной ряд вида $x + o(x)$ однозначно представим некоторым произведением $I_a(x)$, поскольку коэффициенты его – $(b_n,\ n \geq 2)$ выражаются разрешимыми относительно $(a_k,\ k \geq 1)$ полиномами:

$$b_{m+1} = \sum\nolimits_{\lambda \vdash m} (-1)^{l(\lambda)} \cdot \prod\nolimits_{k \geq 1} \binom{-a_k}{n_k(\lambda)} = a_m + \ldots .$$

Из вида уравнений следует, например, что связанные коэффициенты (a_k) и (b_n) являются целочисленными одновременно. Ясно, что из неотрицательности (a_k) следует неотрицательность (b_n), но обратное утверждение без дополнительных предположений неверно. Что иллюстрируется примером:

$$x + x^2 = x \cdot (1 + x) = x \cdot (1 - x)^{-1} \cdot (1 - x^2)^{-(-1)}.$$

4.2. Замечание. Области сходимости $H_a(x)$ и $I_a(x)$ могут не совпадать. Например, для $a_n = [\, n = 1 \,]$ имеем:

$$I_a(x) = x \big/ (1 - x)^1 \,, \; H_a(x) = x \,;$$

а для $a_n = \mu(n)/n$, $n \geq 1$ наоборот – радиус сходимости ряда $H_a(x)$ равен 1, но $I_a(x) = x \cdot e^x$ – функция целая.

Здесь $\mu(n)$ – `функция Мёбиуса`, входящая в `формулу обращения` Дедекинда и Лиувилля ([10], с. 160-161).

Но различие сходимости $I_a(x)$ и $H_a(x)$, как свидетельствует следующее утверждение, не может быть фатальным.

4.3. Лемма. Регулярность в нуле функции $I_a(x)$ равносильна регулярности в нуле $H_a(x)$.

Доказательство. Регулярность в нуле функции $I_a(x)$ равносильна регулярности в нуле $\ln(I_a(x)/x)$, для которой можно получить степенное разложение:

$$\ln\left\{\prod\nolimits_{k \geq 1} \left(1 - x^k\right)^{-a_k}\right\} = \sum\nolimits_{k \geq 1} a_k \cdot \ln\left\{\left(1 - x^k\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \sum\nolimits_{k \geq 1} a_k \cdot \sum\nolimits_{s \geq 1} \frac{x^{ks}}{s} = \sum\nolimits_{k,\, s \geq 1} \frac{a_k \cdot x^{ks}}{s} = \left| \begin{matrix} ks = m \\ k \backslash m \end{matrix} \right| =$$

$$= \sum\nolimits_{m \geq 1} \frac{x^m}{m} \cdot \sum\nolimits_{k \,\backslash\, m} k \cdot a_k = \sum\nolimits_{m \geq 1} \beta_m \cdot x^m.$$

Коэффициенты степенного разложения $(\beta_m,\ m \geq 1)$ функции $\ln(I_a(x)/x)$ с показателями $(a_k,\ k \geq 1)$ связаны соотношениями:

$$m{\cdot}\beta_m = \sum\nolimits_{k\,\backslash\,m} k{\cdot}\, a_k\ , \quad k{\cdot}\, a_k = \sum\nolimits_{m\,\backslash\,k} \mu\left(\frac{k}{m}\right){\cdot}\, m{\cdot}\beta_m\ .$$

Регулярный степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости. По формуле Коши-Адамара, это равносильно экспоненциальной ограниченности его коэффициентов. Предположим такую ограниченность всех показателей $|a_k| < M^k$. Можно считать, что $M > 1$. Тогда получаем оценку:

$$|m{\cdot}\beta_m| \leq \sum\nolimits_{k\,\backslash\,m} k{\cdot}\,|a_k|\ <\ \sum\nolimits_{1\,\leq\,k\,\leq\,m} m{\cdot}M^m = m^2{\cdot}M^m\,,$$

$$|\beta_m| < m{\cdot}M^m\ <\ 2^m{\cdot}M^m = (2M)^m\,.$$

Аналогично, из оценки коэффициентов $|\beta_k| < L^k$, с учётом неравенств $L > 1$ и $|\mu(s)| \leq 1$, получаем:

$$|k{\cdot}\, a_k| \leq \sum_{m\,\backslash\,k} \left|\mu\left(\frac{k}{m}\right)\right|{\cdot}\, m{\cdot}|\beta_m| < \sum_{1\,\leq\,m\,\leq\,k} k{\cdot}L^k = k^2{\cdot}L^k\,,$$

$$|a_k| < k{\cdot}L^k < 2^k{\cdot}L^k = (2L)^k\,.$$

Поэтому экспоненциальные ограниченности (a_k) и (β_n) равносильны, что и доказывает лемму.

Произведение $I_a(x) = x + o\,(x)$ интересно не только функционально, но и символически,– оно выражает комбинаторные свойства любых вещественных последовательностей (a_k). Например, степенные ряды вида $x + o\,(x)$ образуют группу относительно подстановок, поэтому на числовых последовательностях можно задать новую групповую операцию:

$$I_{\,a\,*\,b}\,(x) = I_{\,a}\,(I_{\,b}\,(x))\,.$$

Поскольку $I_0(x) = x$, нулевая последовательность является нейтральным элементом этой группы:

$$(a_k) * 0 = 0 * (a_k) = (a_k)\,.$$

4.4. Пример. Пусть $a_n = [\,n = 1\,]$, тогда $I_a\,(x) = x/(1{-}x)$ и мы получим равенства:

$$I_{\,a^2}\,(x) = I_{\,a}\,(I_{\,a}\,(x)) = \frac{x}{1-x}\bigg/\!\left(1 - \frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{1-2x}\;.$$

Теперь вычислим эйлеровы показатели $(u_s(\alpha))$ рациональной функции $I_{\,u(\alpha)}\,(x) = x/(1-\alpha\cdot x)$:

$$\ln\!\left\{I_{u(\alpha)}(x)/x\right\} = \ln\!\left\{\prod\nolimits_{s\,\ge\,1}\big(1{-}x^s\big)^{-u_s(\alpha)}\right\} = \ln\!\left\{(1{-}\alpha{\cdot}x)^{-1}\right\},$$

$$\sum\nolimits_{m\,\ge\,1}\frac{x^m}{m}\cdot\sum\nolimits_{s\,\backslash\,m} s\cdot u_s(\alpha) = \sum\nolimits_{m\,\ge\,1}\frac{\alpha^m\cdot x^m}{m}\;,$$

$$\alpha^{\,m} = \sum_{s\,\backslash\,m} s\cdot u_s(\alpha)\;,\quad u_s(\alpha) = s^{-1}\cdot\sum_{m\,\backslash\,s}\mu\,(s/m)\cdot\alpha^{\,m}\;.$$

Если $q = p^{\,a}$ – степень простого, тогда $u_s(q)$ – число неприводимых над полем $\mathbb{F}_q$ полиномов степени s с единичным старшим коэффициентом. Этот факт теории конечных полей имеет комбинаторное доказательство, опирающееся на факториальность кольца полиномов над полем.

Обозначим R_m – множество унитальных над $\mathbb{F}_q$ полиномов степени m. У них m свободных коэффициентов (кроме единичного старшего), их количество $\sharp\,(R_m) = q^m$. Множество неприводимых унитальных над $\mathbb{F}_q$ полиномов степени s обозначим $U_s \subset R_{\,s} : \sharp\,(U_s) = u_{\,s}(q)$. Пусть $U = \bigcup_{s\,\ge\,1} U_s$ – множество всех неприводимых унитальных над $\mathbb{F}_q$ полиномов.

Тогда получим равенства:

$$\prod_{u\in U}\bigl(1-t^{\deg(u)}\cdot u\bigr)^{-1}=\prod_{u\in U}\sum_{n_u\ge 0}t^{\deg(u)\cdot n_u}\cdot u^{n_u}=$$

$$=1+\sum_{m\ge 1}t^m\cdot\sum\nolimits_{\left\{\substack{n_u\ge 0,\\ \sum_{u\in U}\deg(u)\cdot n_u=m}\right\}}\prod_{u\in U}u^{n_u}=$$

$$=1+\sum\nolimits_{m\ge 1}t^m\cdot\sum\nolimits_{r\in R_m}r\ .$$

Если в это равенство вместо переменной-полинома u подставить единицу, то получим $r=\prod_{u\in U}u^{n_u}=1$ и, наконец:

$$\prod\nolimits_{s\ge 1}\bigl(1-x^s\bigr)^{-u_s(q)}=\prod\nolimits_{u\in U}\bigl(1-t^{\deg(u)}\bigr)^{-1}=$$

$$=1+\sum_{m\ge 1}t^m\cdot\sharp\,(R_m)=1+\sum_{m\ge 1}q^m\cdot t^m=\bigl(1-q\cdot t\bigr)^{-1}.$$

Поэтому, искомая последовательность

$$a^2=([\,n=1\,])^2=u(2)=(2,\,1,\,2,\,3,\,6,\,9,\,18,\,30,\,\dots)$$

считает неприводимые унитальные полиномы над $\mathbb{F}_2$.

4.5. Пример. Пусть $b_n=[\,n=2\,]$, тогда $I_b(x)=x/(1-x^2)$ и мы получим равенства:

$$I_{b*a}(x)=I_b(I_a(x))=\frac{x}{1-x}\Bigg/\!\left(1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)=\frac{x\cdot(1-x)}{1-2x}=$$

$$=\frac{x}{(1-x)^{-1}\cdot(1-2x)}=I_{u(2)-a}(x)\ ;$$

$$I_{a*b}(x)=I_a(I_b(x))=\frac{x}{1-x^2}\Bigg/\!\left(1-\frac{x}{1-x^2}\right)=\frac{x}{1-x-x^2}=$$

$$= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots = \sum\nolimits_{n\geq 0} F_n {\cdot} x^{n+1}.$$

Здесь (F_n) – числа Фибоначчи. Мы убеждаемся, что умножение последовательностей некоммутативно $b{*}a \neq a{*}b$. При этом результат $a * b$ можно вычислить точнее.

Пусть $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x) \cdot (1 - \beta x)$. Тогда

$$(a * b)_k = u_k(\alpha) + u_k(\beta) = k^{-1} \cdot \sum_{m \setminus k} \mu\,(k/m) \cdot (\alpha^{\,m} + \beta^{\,m})\,.$$

Далее можно обойтись без вычисления значений α и β, воспользовавшись следующей леммой.

4.6. Лемма. Пусть $P(x) = (1 - \alpha x){\cdot}(1 - \beta x){\cdot} \dots {\cdot}(1 - \theta x)$ – полином, тогда

$$(\alpha + \ldots + \theta) + (\alpha^2 + \ldots + \theta^{\,2}){\cdot}x + (\alpha^3 + \ldots + \theta^{\,3}){\cdot}x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha x} + \ldots + \frac{\theta}{1 - \theta x} = -\frac{P\,'(x)}{P(x)}\;.$$

Доказательство. Искомое тождество мы получим, продифференцировав равенство:

$$-\ln(P(x)) = -\ln(1 - \alpha x) - \ldots - \ln(1 - \theta x)\;.$$

Применим эту лемму к нашему частному примеру:

$$\sum_{n\,\geq\,0} \left(\alpha^{\,n+1} + \beta^{\,n+1}\right) \cdot x^n = -\frac{(1 - x - x^2)'}{1 - x - x^2} = \frac{1 + 2x}{1 - x - x^2} =$$

$$= (1 + 2x) \cdot \sum_{n\geq 0} F_n \cdot x^n = F_0 + \sum_{n\geq 1} (F_n + 2F_{n-1}) \cdot x^n =$$

$$= 1 + \sum\nolimits_{n\,\geq\,1} (F_{n+1} + F_{n-1}) {\cdot}\, x^n.$$

Таким образом (полагая $F_{-1} = 0$), получаем равенства:

$$\alpha^m + \beta^m = F_m + F_{m-2}\ , \quad m \geq 1\ ;$$

$$(a * b)_k = k^{-1} \cdot \sum_{m \setminus k} \mu\,(k/m) \cdot (F_m + F_{m-2})\,, \quad k \geq 1\ .$$

В итоге, последовательность $a * b$ такова:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 18, 25, 40, 58, 90, 135, ...

И теперь у нас есть задел для вычисления b^2:

$$I_{b^2}(x) = I_b\,(I_b\,(x)) = \frac{x}{1-x^2} \Bigg/ \left(1 - \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{x \cdot (1-x^2)}{(1-x^2)^2 - x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{-1} \cdot (1-x-x^2) \cdot (1+x-x^2)}\ .$$

Мы уже нашли разложение:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{I_{a*b}\,(x)}{x} = \prod\nolimits_{n \geq 1} (1-x^n)^{-(ab)_n}\,.$$

Из него следует:

$$\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{1-(-x)-(-x)^2} = \prod\nolimits_{n \geq 1} (1-(-x)^n)^{-(ab)_n} =$$

$$= \prod_{2 \setminus n \geq 1} (1-x^n)^{-(ab)_n} \cdot \prod_{2 \not\setminus n \geq 1} (1+x^n)^{-(ab)_n} =$$

$$= \prod_{2 \setminus n \geq 1} (1-x^n)^{-(ab)_n} \cdot \prod_{2 \not\setminus n \geq 1} \left(\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}\right)^{-(ab)_n} =$$

$$= \prod_{2 \not\setminus n} (1-x^n)^{(ab)_n} \cdot \prod_{4 \setminus n} (1-x^n)^{-(ab)_n} \cdot \prod_{4 \not\setminus n \,\vdots\, 2} (1-x^n)^{-(ab)_n - (ab)_{n/2}}\ .$$

Отсюда вытекает окончательное выражение b^2:

$$(b^2)_n = \begin{cases} 0\,, & \text{если } n \equiv 1 \bmod 2 \\ 2\,, & \text{если } n = 2 \\ 2\cdot(ab)_n - (ab)_{n/2}\,, & \text{если } 2 < n \equiv 2 \bmod 4 \\ 2\cdot(ab)_n\,, & \text{если } n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

$$(b^2) = (0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 11,\ 0,\ 24,\ 0,\ 52,\ 0,\ 120,\ 0,\ 275,\ \ldots)\,.$$

Иных усилий требует обращение последовательностей. Начнём с очевидного $0^{-1} = 0$, которое означает эквивалентность равенств $y = x$ и $x = y$.

Следующий по простоте случай такой:

$$([\,n = 1\,])^{-1} = ([\,n = 2\,] - [\,n = 1\,])\,,$$

поскольку равенство $y = x/(1-x)$ равносильно выражению:

$$x = \frac{y}{1+y} = \frac{y\cdot(1-y)}{1-y^2} = \frac{y}{(1-y)^{-1}\cdot(1-y^2)^1}\ .$$

4.7. Пример. Перейдём к более общей задаче вычисления

$$(a\cdot[\,n = 1\,])^{-1} = (a,\ 0,\ 0,\ \ldots)^{-1} =: (c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots) = c\,(a)\,.$$

У нас есть два эквивалентных равенства:

$$y = x\cdot(1-x)^{-a}\ , \quad x = y\cdot\prod\nolimits_{n\ge 1}(1-y^n)^{-c_n}\ .$$

Умножая их, получим тождества:

$$yx = xy\cdot(1-x)^{-a}\cdot\prod\nolimits_{n\ge 1}(1-y^n)^{-c_n}\ ,$$

$$(1-x)^{a} = \prod\nolimits_{n\ge 1}(1-y^n)^{-c_n}\ ,$$

$$a \cdot \ln(1-x) = \sum_{n\,\geq\,1} c_n \cdot \ln\left(\frac{1}{1-y^n}\right) = \sum_{n\,\geq\,1} c_n \cdot \sum_{k\,\geq\,1} \frac{y^{nk}}{k}\ .$$

Для удобства записи введём новое обозначение:

$$\gamma_m(a) = \gamma_m = \sum_{n\backslash m} nc_n\ ; \quad c_n = n^{-1} \cdot \sum_{m\backslash n} \mu(n/m) \cdot \gamma_m\ .$$

Тогда получим интересное выражение:

$$a \cdot \ln(1-x) = \sum_{m\,\geq\,1} \frac{y^m}{m} \cdot \gamma_m = \sum_{m\,\geq\,1} \frac{\gamma_m}{m} \cdot \frac{x^m}{(1-x)^{\,am}}\ .$$

Это равенство немного упрощается при дифференцировании:

$$\frac{-ax}{1+(a-1)\cdot x} = \sum\nolimits_{m\,\geq\,1} \gamma_m \cdot \frac{x^m}{(1-x)^{\,am}} \qquad (\partial)$$

Мы вычислим показатели $\gamma_m(a)$, и на этом пути у нас появятся биномиальные коэффициенты:

$$a\cdot \ln(1-x) = -a\cdot \sum_{k\,\geq\,1} \frac{x^k}{k} = \sum_{m\,\geq\,1} \frac{\gamma_m}{m} \cdot x^m \cdot \sum_{s\,\geq\,0} \binom{-am}{s} (-x)^{\,s} =$$

$$= \sum_{m\,\geq\,1} \sum_{s\,\geq\,0} \frac{\gamma_m}{m} \binom{-am}{s} (-1)^s x^{m+s} = \sum_{k\geq 1} x^k \sum_{m=1}^{k} \frac{\gamma_m}{m} \binom{-am}{k-m} (-1)^{k-m}.$$

Таким образом, получаем равенства:

$$-\frac{a}{k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\gamma_m}{m} \cdot \binom{-am}{k-m} \cdot (-1)^{\,k-m},\ \ k \geq 1\,.$$

Это бесконечная система линейных уравнений от (γ_m), определённая из-за строгой треугольности – главная неизвестная γ_k входит в k-ое уравнение с коэффициентом $1/k$.

Аналогично, уравнение (∂) равносильно треугольной системе линейных уравнений относительно тех же (γ_m):

$$a \cdot (a-1)^{k-1} = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m \cdot \binom{-am}{k-m} \cdot (-1)^m\,,\ k \geq 1\,.$$

Из уравнений легко вывести начальные значения γ_m :

$$\gamma_1 = -a\,,\ \gamma_2 = 2a{\cdot}(2a{-}1)/2\,,\ \gamma_3 = -3a{\cdot}(3a{-}1){\cdot}(3a{-}2)/6\,,$$

$$\gamma_4 = 4a \cdot (4a-1) \cdot (4a-2) \cdot (4a-3)/24\,.$$

4.8. Гипотеза. Похоже, что неизвестные γ_m имеют вид:

$$\gamma_m = (-1)^m \cdot \binom{am}{m}, \quad m \geq 1 \tag{Г}$$

В силу определённости вышеуказанных систем линейных уравнений, для доказательства предположения (Г) достаточно обосновать одно из двух эквивалентных тождеств:

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \cdot \binom{am}{m} \cdot \binom{-am}{k-m} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{a}{k}\,, \quad k \geq 1 \tag{ℓ}$$

$$\sum_{m=1}^{k} \binom{am}{m} \cdot \binom{-am}{k-m} = a \cdot (a-1)^{k-1}\,, \quad k \geq 1\,.$$

Преобразуем левые слагаемые (ℓ) – первого из них:

$$\frac{1}{m} \cdot \binom{am}{m} \cdot \binom{-am}{k-m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{am{\cdot}(am{-}1){\cdot}\ldots{\cdot}(am{-}m{+}1)}{m!} \times$$

$$\times \frac{(-am)\cdot(-am-1)\cdot\ldots\cdot(-am-(k-m)+1)}{(k-m)!} =$$

$$= a \cdot \frac{(am-1)\cdot\ldots\cdot(am-m+1)}{m!} \times$$

$$\times (-1)^{k-m} \cdot \frac{am\cdot(am+1)\cdot\ldots\cdot(am+(k-m)-1)}{(k-m)!} =$$

$$= (-1)^{k-m} \cdot \frac{(am+(k-m)-1)\cdot\ldots\cdot(am+1)\cdot am}{(k-m)!} \times$$

$$\times \frac{(am-1)\cdot\ldots\cdot(am-m+1)}{m!} \cdot a =$$

$$= (-1)^{k-m} \cdot \binom{am+(k-m)-1}{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{m!\cdot(k-m)!} \cdot a =$$

$$= (-1)^{k-m} \cdot \binom{(a-1)\cdot m+k-1}{k-1} \cdot \binom{k}{m} \cdot \frac{a}{k} \; .$$

И, следовательно, тождество (ℓ) принимает вид:

$$\sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} \cdot \binom{(a-1)\cdot m+k-1}{k-1} \cdot \binom{k}{m} \cdot \frac{a}{k} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{a}{k} \; ,$$

$$\sum_{m=1}^{k} (-1)^{m} \cdot \binom{(a-1)\cdot m+k-1}{k-1} \cdot \binom{k}{m} = -1 \; , \quad k \geq 1 \, .$$

При $m = 0$ все множители суммы равны единице, поэтому гипотетическое тождество (ℓ) эквивалентно следующему:

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m} \cdot \binom{(a-1)\cdot m+k-1}{k-1} \cdot \binom{k}{m} = 0 \; , \quad k \geq 1 \, .$$

Его истинность вытекает из следующего утверждения.

4.9. Лемма. При всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и натуральных $k \geq 1$ выполняется равенство:

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m} \cdot \binom{\alpha m + \beta}{k-1} \cdot \binom{k}{m} = 0 \ .$$

Доказательство. Сначала привлечём удобные обозначения. На мультипликативной группе $z^{\mathbb{C}} = \{ z^{a} \mid a \in \mathbb{C} \}$ символических степеней определим "распознающую функцию":

$$[\, z^{s} \,] : z^{\mathbb{C}} \to \{0, 1\} \,, \ [\, z^{s} \,](z^{a}) = [\, s = a \,] \,.$$

По линейности она продолжатся до "коэффициентного оператора" ([11, с. 11]) на пространстве формальных рядов:

$$[\, z^{s} \,] : \ \mathbb{C} \langle\langle \, z^{\mathbb{C}} \, \rangle\rangle \to \mathbb{C} \,, \ [\, z^{s} \,] \Big(\sum\nolimits_{a \in \mathbb{C}} \lambda_{a} z^{a} \Big) = \lambda_{s} \,.$$

Оператор $[\, z^{s} \,]$ хорошо определён на формальных рядах, но его безусловное применение к функциям может приводить к недоразумениям, поскольку функции могут представляться формальными рядами неоднозначно. Рассмотрим пример:

$$\sum\nolimits_{k \geq 0} z^{k} = (1 - z)^{-1} = -z^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{z} \right)^{-1} = - \sum\nolimits_{k \leq -1} z^{k} \,,$$

$$[\, z^{s} \,] \big((1 - z)^{-1} \big) = 2 \cdot [\, s \geq 0 \,] - 1 \,, \ s \in \mathbb{Z} \,.$$

Поэтому функции могут не обладать некоторыми бесспорными свойствами формальных рядов:

$$F(z) = \sum\nolimits_{a \in \mathbb{C}} [\, z^{a} \,](F(z)) \cdot z^{a} \,.$$

Но некоторые свойства оператора $[\, z^{s} \,]$ универсальны:

$$[\, z^{s} \,](F(\alpha z)) = \alpha^{s} \cdot [\, z^{s} \,](F(z)) \,, \ \alpha \neq 0 \,,$$

$$[\,z^{\alpha s}\,](F(z^{\alpha})) = [\,z^{\,s}\,](F(z))\,,\ \alpha \neq 0\,,$$

$$[\,z^{\,s}\,](F(z){\cdot}z^{t}) = \left[\,z^{\,s-t}\,\right](F(z))\,.$$

Отображение $[\,z^{\,s}\,]$ – новое проявление хорошо известной операции. Упомянутое пространство рядов изоморфно пространству функций $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$. Функции f соответствует ряд вида $\sum_{a\in\mathbb{C}} f(a){\cdot}z^{\,a}$, а оператору $[\,z^{\,s}\,]$ – отображение подстановки $f \to f(s)$. Обычные степенные ряды (или ряды Лорана) соответствуют комплекснозначным функциям, определённым на множестве натуральных (или целых) чисел. Для наших целей их может оказаться недостаточно. Но в итоге наше определение формальных рядов слишком широкое, чтобы снабдить их множество структурой алгебры. Не все формальные ряды умножаемы по стандартному правилу:

$$\left(\sum\nolimits_{a\in\mathbb{C}} \lambda_a z^{\,a}\right){\cdot}\left(\sum\nolimits_{b\in\mathbb{C}} \mu_b z^{\,b}\right) = \sum\nolimits_{s\in\mathbb{C}} z^{\,s}{\cdot}\left(\sum\nolimits_{a+b=s} \lambda_a \mu_b\right).$$

Чтобы не иметь проблем с коэффициентами при $z^{\,s}$, нужны какие-то ограничения на один или оба сомножителя. Здесь достаточно фактической конечности сумм $\sum_{a+b=s} \lambda_a \mu_b$ при всех $s \in \mathbb{C}$. То есть,– конечности множества пар:

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid a+b=s\,,\ \lambda_a{\cdot}\mu_b \neq 0\right\}.$$

А это может случиться, например, при фактической конечности суммы в одном из сомножителей, или если оба множителя являются несущественными рядами Лорана. Полный список достаточных условий трудноисчерпаем, и его составление не входит в нашу задачу. Мы будем умножать формальные ряды только в допустимой ситуации, и сможем применять правило:

$$[\,z^{\,s}\,](F(z)\cdot G(z)) = \sum\nolimits_{a+b\,=\,s}[\,z^{\,a}\,](F(z))\cdot\left[\,z^{\,b}\,\right](G(z))\,.$$

Покажем, как оно работает в нашей задаче.

Ранее, в Лемме 3.6 на стр. 24, для $u \geq 0$ было доказано тождество:

$$\sum\nolimits_{v\,\geq\,0}\binom{v}{u}\cdot z^{\,v} = \frac{z^{\,u}}{(1-z)^{\,u+1}}\ .$$

Из него для $u, s \in \mathbb{N}_0$ следует:

$$[\,z^{\,s}\,]\left(\frac{z^{\,u}}{(1-z)^{\,u+1}}\right) = \binom{s}{u}\,.$$

При $\alpha > 0$ и $t \geq 0$ получаем равенства:

$$\left[\,z^{\,t}\,\right]((1-z)^k) = (-1)^{\,t}\cdot\binom{k}{t} = \left[\,z^{\,-\alpha t}\,\right]((1-z^{-\alpha})^{\,k}\,) =$$

$$= \left[\,z^{\,-\alpha t}\,\right]\left(\left(\frac{z^{\,\alpha}-1}{z^{\,\alpha}}\right)^{k}\right);$$

$$[\,z^{\,s}\,]\left(\left(\frac{z^{\,\alpha}-1}{z^{\,\alpha}}\right)^{k}\right) = 0\,,\quad \text{при } s > 0 \text{ или } s \not\vdots\, \alpha \in \mathbb{N}\,.$$

Следовательно, при $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ у нас есть выражение для фигурирующей в лемме суммы:

$$[z^{\,\beta}]\left(\left(\frac{z^{\,\alpha}-1}{z^{\,\alpha}}\right)^{k}\cdot\frac{z^{\,k-1}}{(1-z)^k}\right) = \sum_{s,\,t\,\geq\,0}(-1)^t\binom{k}{t}\cdot\binom{s}{k-1}\cdot[\,s-\alpha t=\beta\,] =$$

$$= \sum_{t\,\geq\,0}(-1)^t\binom{k}{t}\cdot\binom{\alpha t+\beta}{k-1} = \sum_{m\,=\,0}^{k}(-1)^{\,m}\cdot\binom{\alpha m+\beta}{k-1}\cdot\binom{k}{m}.$$

С другой стороны, при $\alpha \in \mathbb{N}$ можно записать:

$$\frac{z^{k-1}}{(1-z)^k} \cdot \left(\frac{z^{\alpha}-1}{z^{\alpha}}\right)^k = \frac{z^{k-1}}{z^{\alpha k}} \cdot \left(\frac{z^{\alpha}-1}{1-z}\right)^k =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{z^{k-1}}{z^{\alpha k}} \cdot (z^{\alpha-1} + \ldots + z + 1)^k \,.$$

Это многочлен Лорана со степенями z, изменяющимися от $k-1-\alpha k \le -1$ до $k-1-\alpha k+(\alpha-1)\cdot k = -1$. Поэтому при любых натуральных α, β и k доказано равенство:

$$[\,z^{\beta}\,]\left(\left(\frac{z^{\alpha}-1}{z^{\alpha}}\right)^k \cdot \frac{z^{k-1}}{(1-z)^k}\right) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \cdot \binom{\alpha m+\beta}{k-1} \cdot \binom{k}{m} = 0\,.$$

Но сумма справа является полиномом от α и β тотальной степени, меньшей k. При фиксированном натуральном k его можно считать полиномом от β с полиномиальными по α коэффициентами. При каждом натуральном α этот полином от β имеет бесконечно много корней, следовательно, его коэффициенты – полиномы от α – обнуляются при любых натуральных подстановках α. Поэтому эти полиномы от α вместе с исходным полиномом от α и β – тождественно нулевые. Значит, последнее равенство выполняется для любых комплексных α, β, и доказательство леммы завершено. Тем самым, доказана и гипотеза (Г). В частности, при $a \in \mathbb{R}$

$$(a,\, 0,\, 0,\, \ldots)^{-1} = (c_1,\, c_2,\, c_3,\, \ldots)\,, \quad \text{где}$$

$$c_n = n^{-1} \cdot \sum_{m \setminus n} \mu(n/m) \cdot (-1)^m \cdot \binom{am}{m}\,.$$

4.10. Лемма. Пусть $d, n \geq 1$ и (a_n), (b_n), $(\widetilde{a}_n)$, $(\widetilde{b}_n)$ – такие вещественные последовательности, что

$$(d \cdot a_1, d \cdot a_2, \dots)^{-1} = (d \cdot b_1, d \cdot b_2, \dots)\,,$$

$$\widetilde{a}_n = a_{n/d} \cdot [\, d \setminus n\,]\,,\ \widetilde{b}_n = b_{n/d} \cdot [\, d \setminus n\,]\,.$$

Тогда $(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \dots)^{-1} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \dots)\,.$

Доказательство. По условию, равносильны равенства:

$$y = x \Big/ \prod\nolimits_{n\,\geq\,1} (1 - x^{\,n})^{d \cdot a_n}\ , \quad x = y \Big/ \prod\nolimits_{m\,\geq\,1} (1 - y^{\,m})^{d \cdot b_m}\ .$$

Применив подстановки $x = t^d$, $y = w^d$, получим:

$$w^d = t^d \Big/ \prod\nolimits_{n\,\geq\,1} \big(1 - t^{\,d\cdot n}\big)^{d \cdot a_n},\ t^d = w^d \Big/ \prod\nolimits_{m\,\geq\,1} \big(1 - w^{\,d\cdot m}\big)^{d \cdot b_m}.$$

Теперь, извлекая корень степени d, получаем эквивалентные равенства, доказывающие Лемму 4.10:

$$w = t \Big/ \prod\nolimits_{n\,\geq\,1} \big(1 - t^{\,d\cdot n}\big)^{a_n}\ ,\ t = w \Big/ \prod\nolimits_{m\,\geq\,1} \big(1 - w^{\,d\cdot m}\big)^{b_m}\ .$$

Лемма 4.10 позволяет обобщить Пример 4.7 на стр. 45.

4.11. Следствие. Если $d \geq 1$, то $(a\cdot[\, n = d\,])^{-1} = (\widetilde{b}_n)$, где

$$\widetilde{b}_n = n^{-1} \cdot \sum\nolimits_{m \,\setminus\, (n/d)} \mu\Big(\frac{n}{m \cdot d}\Big) \cdot (-1)^{\,m} \cdot \binom{a \cdot m \cdot d}{m} \cdot [\, d \setminus n\,]\ .$$

5. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Одним из применений линейных операторов в комбинаторике является `символическое исчисление` Дж. Блиссара (иначе – `теневой анализ` [24]). Для иллюстрации некоторых идей метода в этой главе мы рассмотрим `конечные разности` и разберём формулу суммирования Эйлера, их использующую.

5.1. Определение. На числовых последовательностях вида $u = (u_n,\, n \geq 0)$ зададим преобразование `разности`:

$$\Delta : u \to \Delta u,\ \ \Delta u_n = u_n - u_{n+1}\,.$$

Степени его определим обычным образом:

$$\Delta^0 u = u\,;\ \ \Delta^{k+1} u = \Delta(\Delta^k u)\,,\ \ k \geq 0\,.$$

Найдём первое выражение степеней оператора Δ – конечных разностей. Вскоре мы получим другие формулы для них. И все они вовлекают биномиальные суммы или их коэффициенты. Тем самым, эта глава будет приложением Главы 3, на результаты которой мы будем постоянно опираться.

5.2. Лемма. Пусть $k, n \geq 0$, тогда

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{0\,\leq\, s\,\leq\, k} (-1)^{\,s} \cdot \binom{k}{s} \cdot u_{n+s} \qquad (\delta)$$

Доказательство. Поднимем индексы $u_n \nearrow u^n$, тогда

$$\Delta u_n \nearrow u^n - u^{n+1} = (1-u)\cdot u^n\,;$$

$$\Delta^k u_n \nearrow (1-u)^{\,k} \cdot u^n = \sum_{s\,=\,0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \cdot u^s \cdot u^n = \sum_{s\,=\,0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \cdot u^{n+s}.$$

Теперь, опуская индексы $u^n \searrow u_n$, получим искомое равенство. И такое рассуждение требует комментария.

5.3. Комментарий. Это – пример "теневого доказательства". Формула (δ) легко подтверждается разными традиционными способами – индукцией или через выражение Δ посредством более ясных линейных операций (см. стр. 13):

$$\Delta u = u - u\Downarrow = (I - \Downarrow)u\,;$$

$$\Delta^k u = (I - \Downarrow)^k u = \sum\nolimits_{0 \le s \le k} (-1)^s \cdot \binom{k}{s} \cdot u\Downarrow^s .$$

Объясним – почему "теневое" рассуждение привело к правильной формуле. Это позволит учитывать ограничения метода в менее очевидных ситуациях. В разобранном случае причин три. Во-первых, – линейность Δ и Δ^k, как операторов на пространстве числовых последовательностей. Вторая причина – такие последовательности хорошо интерполируются конечными линейными комбинациями геометрических прогресссий. Ведь конечная система `Вандермонда`

$$\sum\nolimits_{0 \le s \le n} x_s \cdot (a_s)^k = u_k\,,\ 0 \le k \le n$$

разрешима для любых $u_0, \ldots, u_n$ и различных $a_0, \ldots, a_n$. Следовательно, любой начальный отрезок последовательности u выглядит как конечная линейная комбинация геометрических прогрессий $\big((a_s)^k, k \ge 0\big)$. Третья причина учитывает характер равенства (δ). Его правая часть линейна по u, вовлекая ограниченный набор элементов. Это позволяет проверять равенство только на геометрических прогрессиях подъёмом индексов. Доказательство Леммы 5.2 прояснено.

Приведём другие полезные выражения для степеней разностей через новые характеристики последовательности.

5.4. Определение. Для $u = (u_n,\, n \geq 0)$ обозначим частичные суммы S_n, знакопеременные частичные суммы A_n и частичные суммы более общего, гильбертового вида Q_n :

$$S_{<0} := 0\,; \quad S_n = \sum\nolimits_{0 \leq m \leq n} u_m\,, \text{ при } n \geq 0\,;$$
$$A_{<0} := 0\,; \quad A_n = \sum\nolimits_{0 \leq m \leq n} (-1)^m \cdot u_m\,, \text{ при } n \geq 0\,;$$
$$Q_{<0} := 0\,; \quad Q_n = \sum\nolimits_{0 \leq m \leq n} q^m \cdot u_m\,, \text{ при } n \geq 0,\ q \neq 0\,.$$

5.5. Лемма. При $k, n \geq 0$ имеются выражения:

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{-1 \leq s \leq k} S_{n+s} \cdot (-1)^s \cdot \binom{k+1}{s+1}\,;$$

$$\Delta^k u_n = (-1)^n \cdot \sum\nolimits_{-1 \leq s \leq k} A_{n+s} \cdot \left(\binom{k}{s} - \binom{k}{s+1}\right);$$

$$\Delta^k u_n = q^{-n} \cdot \sum\nolimits_{-1 \leq s \leq k} Q_{n+s} \cdot (-q)^{-s} \cdot \left(\binom{k}{s} + q^{-1} \cdot \binom{k}{s+1}\right).$$

Доказательство. В формулу (δ) из Леммы 5.2 со стр. 54 поочерёдно подставим выражения:

$$u_\alpha = S_\alpha - S_{\alpha-1} = (-1)^\alpha \cdot (A_\alpha - A_{\alpha-1})\,,\ \alpha \geq 0\,.$$

Тогда преобразование конечных сумм даст равенства:

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{0 \leq a \leq k} (-1)^a \cdot \binom{k}{a} \cdot (S_{n+a} - S_{n+a-1}) =$$

$$= \sum\nolimits_{0 \leq a} (-1)^a \cdot \binom{k}{a} \cdot S_{n+a} - \sum\nolimits_{0 \leq a} (-1)^a \cdot \binom{k}{a} \cdot S_{n+a-1} =$$

$$= \sum_{-1 \le a} (-1)^{a} \cdot \binom{k}{a} \cdot S_{n+a} - \sum_{-1 \le a} (-1)^{a+1} \cdot \binom{k}{a+1} \cdot S_{n+a} =$$

$$= \sum_{-1 \le a} (-1)^{a} \cdot S_{n+a} \cdot \left(\binom{k}{a} + \binom{k}{a+1} \right) = \sum_{-1 \le a} (-1)^{a} \cdot S_{n+a} \cdot \binom{k+1}{a+1}.$$

Далее, тем же способом:

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{0 \le b \le k} (-1)^{b} \cdot \binom{k}{b} \cdot (-1)^{n+b} \cdot (A_{n+b} - A_{n+b-1}) =$$

$$= (-1)^{n} \cdot \sum_{0 \le b} \binom{k}{b} \cdot A_{n+b} - (-1)^{n} \cdot \sum_{0 \le b} \binom{k}{b} \cdot A_{n+b-1} =$$

$$= (-1)^{n} \cdot \sum_{-1 \le b} \binom{k}{b} \cdot A_{n+b} - (-1)^{n} \cdot \sum_{-1 \le b} \binom{k}{b+1} \cdot A_{n+b} =$$

$$= (-1)^{n} \cdot \sum\nolimits_{-1 \le b} A_{n+b} \cdot \left(\binom{k}{b} - \binom{k}{b+1} \right).$$

Третья формула доказывается аналогично первым двум, при этом используется подстановка в формулу (δ):

$$u_\alpha = q^{-\alpha} \cdot (Q_{\alpha} - Q_{\alpha-1}), \ \alpha \ge 0.$$

И, тем самым, Лемму 5.5 можно считать доказанной.

5.6. Замечание. В предположении ограниченности частичных сумм (S_n, $n \ge 0$), (A_n, $n \ge 0$) или (Q_n, $n \ge 0$) вытекают интересные оценки разностей ($\Delta^k u_n$, $k, n \ge 0$).

Пусть сначала $|S_n| \le C_1$ для всех $n \ge 0$, тогда

$$|\Delta^k u_n| \le C_1 \cdot \sum\nolimits_{-1 \le s \le k} \binom{k+1}{s+1} = C_1 \cdot 2^{k+1}.$$

Для второй оценки предварительно исследуем знак разности при $k > s$:

$$\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1} = \binom{k}{s+1}\cdot\left(\frac{s+1}{k-s}-1\right) = \binom{k}{s+1}\cdot\frac{2\cdot s+1-k}{k-s}\ .$$

Так аргументируется известное наблюдение – биномиальные коэффициенты монотонно растут до середины строки треугольника Паскаля, а потом они симметрично убывают. Математически это выражается эквивалентностями, выполняющимися для всех целых $s \geq -1$ и $k \geq 0$:

$$\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ s \geq \frac{k-1}{2} \ \Leftrightarrow\ s \geq \left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil = \left[\frac{k}{2}\right].$$

Теперь если $|A_n| \leq C_2$ для всех $n \geq 0$, то получаем:

$$|\Delta^k u_n| \leq C_2 \cdot \sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}\left|\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right| =$$

$$= C_2 \cdot \sum_{s<[k/2]}\left(\binom{k}{s+1}-\binom{k}{s}\right) - C_2 \cdot \sum_{s\geq[k/2]}\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right) =$$

$$= C_2 \cdot \binom{k}{[k/2]} - C_2 \cdot \left(-\binom{k}{[k/2]}\right) = 2 \cdot C_2 \cdot \binom{k}{[k/2]}.$$

Из формулы Стирлинга для факториала следует:

$$\binom{k}{[k/2]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cdot 2^k,\ \text{при } k \to \infty\,.$$

Поэтому при ограниченных A_n существует C_3 такое, что

$$|\Delta^k u_n| \leq C_3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cdot 2^k\,.$$

Две предыдущие оценки разностей можно обобщить. Если $|Q_n| \le D$ для всех $n \ge 0$, то получаем:

$$|\Delta^k u_n| \le 2 \cdot D \cdot q^{-n} \cdot (1+q^{-1})^k, \text{ при } q > 0\,;$$

$$|\Delta^k u_n| \le 2 \cdot D \cdot |q|^{-n-\lceil (k+q)/(1-q)\rceil} \cdot \binom{k}{\lceil (k+q)/(1-q)\rceil}, \text{ при } q < 0\,.$$

Здесь выражение $\lceil (k+q)/(1-q)\rceil$ указывает нижнюю границу целых $s \ge -1$, для которых при $q < 0$

$$\binom{k}{s} + q^{-1} \cdot \binom{k}{s+1} \ge 0\,.$$

Формула Стирлинга в этом случае при $k \to \infty$ даёт:

$$\binom{k}{\lceil (k+q)/(1-q)\rceil} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \left(|q|^{1/2} + |q|^{-1/2}\right) \cdot \left(|q|^{1/(1+|q|)} + |q|^{-|q|/(1+|q|)}\right)^k,$$

и окончательная оценка разностей при $q < 0$ упрощается:

$$|\Delta^k u_n| \le \frac{\widetilde{D}}{\sqrt{2\pi k}} \cdot |q|^{-n} \cdot (1+|q|^{-1})^k.$$

Мы видим, что при $|q| = 1$ оценки наиболее просты. И это мотивирует использование частичных сумм S_n и A_n, для которых получаем очевидное следствие.

5.7. Следствие.

а) если частичные суммы $(S_n,\ n \ge 0)$ ограничены, то ограничены $(\Delta^k u_n / 2^k,\ k, n \ge 0)$.

б) если ограничены знакопеременные суммы $(A_n,\ n \ge 0)$, то существует равномерный по $n \ge 0$ предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Delta^k u_n}{2^k} = 0\,.$$

Поскольку сходящиеся последовательности ограничены, б) выполняется при сходимости $A_n \to A = H_u(-1)$.

5.8. Лемма. Если частичные суммы $(S_n,\ n \geq 0)$ сходятся к $S = H_u(1)$, то существует равномерный по $k \geq 0$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^k u_n}{2^k} = 2^{-k}\cdot \lim_{n\to\infty} \Delta^k u_n = 0\,,$$

а также – равномерный по $n \geq 0$ предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^k u_n}{2^k} = 0\,.$$

Доказательство. Пусть имеется сходимость:

$$S_n \to S = \sum\nolimits_{0\leq m} u_m = H_u(1)\,.$$

Тогда $u_n \to 0$ и по формуле (δ) со стр. 54 при любом фиксированном k существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^k u_n = 0\,.$$

Но скорость сходимости может серьёзно зависеть от k. Например, возьмём последовательность

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{(-1)^n\cdot(2n+3)}{(n+1)\cdot(n+2)}\,.$$

Для неё легко вычисляются частичные суммы:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{(-1)^m}{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+2}\right) = 1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \to 1 = S\,.$$

По Лемме 5.5 получаем:

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}\left(1 - \frac{(-1)^{n+s+1}}{n+s+2}\right)\cdot(-1)^{s}\cdot\binom{k+1}{s+1} =$$

$$= \sum_{s=-1}^{k} (-1)^{s} \cdot \binom{k+1}{s+1} + (-1)^{n} \cdot \sum_{s=-1}^{k} \frac{1}{n+s+2} \cdot \binom{k+1}{s+1} =$$

$$= -(1-1)^{k+1} + (-1)^{n} \cdot \sum_{-1 \le s \le k} \frac{1}{n+s+2} \cdot \binom{k+1}{s+1}.$$

Поэтому

$$\left| \Delta^{k} u_{n} \right| = \sum_{s=-1}^{k} \frac{1}{n+s+2} \cdot \binom{k+1}{s+1} > \frac{1}{n+2} \cdot \binom{k+1}{1} = \frac{k+1}{n+2}.$$

Таким образом, содержательным утверждением о первом пределе в текущей Лемме является не его существование и значение, а равномерный характер этой сходимости.

Выведем ещё одну формулу конечной разности. Для этого обозначим R_n – остатки бесконечной суммы S:

$$R_n = S - S_n = \sum\nolimits_{n<m} u_m \;\Rightarrow\; S_n = S - R_n .$$

Тогда, по Лемме 5.5, получим важное для ближайших расчётов выражение:

$$\Delta^{k} u_{n} = \sum\nolimits_{-1 \le s \le k} (S - R_{n+s}) \cdot (-1)^{s} \cdot \binom{k+1}{s+1} =$$

$$= S \cdot \sum_{s=-1}^{k} (-1)^{s} \cdot \binom{k+1}{s+1} - \sum_{s=-1}^{k} R_{n+s} \cdot (-1)^{s} \cdot \binom{k+1}{s+1} =$$

$$= -\sum\nolimits_{-1 \le s \le k} R_{n+s} \cdot (-1)^{s} \cdot \binom{k+1}{s+1} \qquad (\varrho)$$

Сходимость $S_n \to S$ означает, что $R_n \to 0$, и поэтому

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, m_0 \;\forall\, m \ge m_0 \quad |R_m| < \varepsilon .$$

Пусть $n \geq m_0 + 1$, тогда для всех $k \geq 0$ получаем:

$$\left|\Delta^k u_n / 2^k\right| \leq 2^{-k} \cdot \sum_{s=-1}^{k} |R_{n+s}| \cdot \binom{k+1}{s+1} \leq$$

$$\leq 2^{-k} \cdot \varepsilon \cdot \sum_{s=-1}^{k} \binom{k+1}{s+1} = 2^{-k} \cdot \varepsilon \cdot (1+1)^{k+1} = 2 \cdot \varepsilon \,.$$

Полученная оценка доказывает равномерную сходимость в первом случае.

Для исследования второго предела мы используем приём из доказательства Следствия 3.4. Величины ε и m_0 – такие же, как и ранее. Заметим, что из сходимости R_n следует её ограниченность: $|R_n| < C$ для некоторой C. Используем новое выражение для конечной разности следующим образом:

$$|\,\Delta^k u_n| = \left| -\sum_{s=-1}^{m_0-1} R_{n+s}(-1)^s \binom{k+1}{s+1} - \sum_{s=m_0}^{k} R_{n+s}(-1)^s \binom{k+1}{s+1} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{s=-1}^{m_0-1} |R_{n+s}| \cdot \binom{k+1}{s+1} + \sum_{s=m_0}^{k} |R_{n+s}| \cdot \binom{k+1}{s+1} \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{s=-1}^{m_0-1} \binom{k+1}{s+1} + \varepsilon \cdot \sum_{s=m_0}^{k} \binom{k+1}{s+1}.$$

Здесь мы считаем $k \geq m_0$, и, поскольку $n \geq 0$, при $s \geq m_0$ оказывается выполненным неравенство $n + s \geq m_0$.

Следовательно, мы получаем оценку:

$$\left|\frac{\Delta^k u_n}{2^k}\right| \leq C \cdot 2^{-k} \cdot \sum_{s=-1}^{m_0-1} \binom{k+1}{s+1} + \varepsilon \cdot 2^{-k} \cdot \sum_{s=m_0}^{k} \binom{k+1}{s+1} \leq$$

$$\leq C \cdot 2^{-k} \cdot \sum_{s=-1}^{m_0-1} \binom{k+1}{s+1} + \varepsilon \cdot 2^{-k} \cdot \sum_{s=-1}^{k} \binom{k+1}{s+1} =$$

$$= C \cdot 2^{-k} \cdot \sum\nolimits_{-1 \leq s < m_0} \binom{k+1}{s+1} + \varepsilon \,.$$

Оставшаяся ограниченная сумма биномиальных коэффициентов является полиномом от k степени m_0. Поэтому существует предел:

$$\lim_{k \to \infty} 2^{-k} \cdot \sum\nolimits_{-1 \leq s < m_0} \binom{k+1}{s+1} = 0 \,,$$

и найдётся k_0 такое, что для $k \geq k_0$ будет выполнено:

$$2^{-k} \cdot \sum\nolimits_{-1 \leq s < m_0} \binom{k+1}{s+1} \leq \varepsilon / C \,;$$

$$\left| \frac{\Delta^k u_n}{2^k} \right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2{\cdot}\varepsilon \quad \text{для всех } n \geq 0 \,.$$

Доказательство Леммы 5.8 закончено.

5.9. Пример. Рассмотрим интересный и важный для понимания конечных разностей случай. Пусть $d \geq 0$ – целое число. Возьмём последовательность u очень простого вида:

$$u_n = [\, n = d \,] \,,\ H_u(t) = t^d \,.$$

Её конечные разности и их производящие функции вычислим по Лемме 5.2. Для $k, n \geq 0$ получим:

$$\Delta^k u_n = \sum\nolimits_{0 \leq s \leq k} (-1)^s \cdot \binom{k}{s} \cdot [\, n + s = d \,] =$$

$$= \sum\nolimits_{0 \leq s \leq k} (-1)^s \cdot \binom{k}{s} \cdot [\, s = d - n \,] = (-1)^{d-n} \cdot \binom{k}{d-n};$$

$$H_{\Delta^k u}(t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} \Delta^k u_n \cdot t^n = \sum_{n=0}^{d} (-1)^{\,d-n} \cdot \binom{k}{d-n} \cdot t^n =$$

$$= \sum\nolimits_{0 \le m \le \min(k,d)} (-1)^{\,m} \cdot \binom{k}{m} \cdot t^{\,d-m}\,.$$

В рассмотренном случае $H_{\Delta^k u}(t) = t^d + \ldots$ – полином степени d. В частности, при $d \ge k$:

$$H_{\Delta^k u}(t) = t^d \cdot (1 - t^{-1})^k = t^{d-k} \cdot (t-1)^k\,;$$

$$H_{\Delta^k u}(0) = \Delta^k u_0 = (-1)^{\,d} \cdot \binom{k}{d} = (-1)^{\,d} \cdot [\,k = d\,]\,;$$

$$H_{\Delta^k u}(1) = [\,k = 0\,]\,; \quad H_{\Delta^k u}(-1) = (-1)^{\,d} \cdot 2^{\,k}\,.$$

При $d < k$ значения полинома $H_{\Delta^k u}(t)$ более замысловаты:

$$H_{\Delta^k u}(1) = \sum_{m=0}^{d} (-1)^{\,m} \cdot \binom{k}{m} = (-1)^{\,d} \cdot \binom{k-1}{d}\,;$$

$$H_{\Delta^k u}(-1) = (-1)^{\,d} \cdot \sum_{m=0}^{d} \binom{k}{m} = (-1)^{\,d} \cdot \sharp\Big(\overline{\text{Ш}}{}_d^{(k)}\Big)\,,$$

здесь $\overline{\text{Ш}}{}_d^{(k)}$ – замкнутый шар радиуса d в пространстве $\mathbb{F}_2^k$ с метрикой Хэмминга (см. Замечание 3.5 на стр. 21).

В силу линейности Δ^k и функции Гильберта по u из рассмотренного Примера 5.9 получаем полезные факты:

5.10. Следствие. Если последовательность u финитна, – то есть, $H_u(t)$ является полиномом, – тогда $H_{\Delta^k u}(t)$ – полином той же степени и с тем же самым старшим коэффициентом для всех $k \ge 1$. Но обратное неверно: для нефинитной

u последовательность $\Delta^k u$ может быть финитной при всех $k \geq 1$. Так, для постоянных u все разности $\Delta^k u_n$ – нулевые.

Связь рядов Гильберта последовательности и её k-ой разности в общем случае описывается правилом: $H_{\Delta^k u}(t)$ является регулярной (маклореновской) частью ряда Лорана:

$$H_{\Delta^k u}(t) = \operatorname{reg}_0\Big(H_u(t) \cdot \big(1 - t^{-1}\big)^k\Big)\,.$$

Иное представление возможно при сходимости ряда

$$\sum\nolimits_{s \geq 0} (-1)^s \cdot u_s = H_u(-1)\,.$$

В этом случае, по леммам Абеля, степенной ряд $H_u(t)$ сходится равномерно на отрезке $[-1, \alpha]$, для любого $\alpha \in (0, 1)$, а радиус сходимости его не меньше 1:

$$R^{-1} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leq 1\,.$$

Несложно оценить первую разность:

$$|\Delta u_n| = |u_n - u_{n+1}| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2 \cdot \max\left(|u_n|, |u_{n+1}|\right).$$

Из этой оценки следует неравенство:

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\Delta u_n|} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|}\,.$$

Поэтому, радиусы сходимости рядов $H_{\Delta^k u}(t)$ не убывают с ростом k, и все они не меньше 1. Эта совместная регулярность в окрестности нуля в $\mathbb{C}$ производящих функций $H_{\Delta^k u}(t)$ при $k \geq 0$ приводит их к функциональной связи, которую подсказывают геометрические прогрессии.

Выразимость последовательности u через такие прогрессии отражается на ряде Гильберта рациональным образом:

$$u_n = \sum_{s=1}^{d} \lambda_s \cdot (a_s)^n\,,\ n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad H_u(t) = \sum_{s=1}^{d} \frac{\lambda_s}{1 - a_s \cdot t}\ .$$

Комплексная формула Коши позволяет мыслить u бесконечной линейной комбинацией геометрических прогрессий:

$$H_u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w|=r<1} \frac{H_u(w)}{w-t}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{H_u(w)/w}{1-(t/w)}\,dw\,,\ |t| < r\,.$$

Эта формула выполняется, поскольку $H_u(z)$ регулярна внутри и в окрестности контура $|w| = r < 1$.

Найдём такое же интегральное представление $H_{\Delta^k u}(t)$. Для $w \neq 0$ несложно выводится выражение:

$$H_{\Delta u}(w) = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2)\cdot w + (u_2 - u_3)\cdot w^2 + \cdots =$$

$$= H_u(w) - \frac{H_u(w) - H_u(0)}{w} = \left(1 - \frac{1}{w}\right)\cdot H_u(w) + \frac{1}{w}\cdot H_u(0)\,.$$

Следовательно, на том же контуре $|w| = r < 1$ получаем:

$$H_{\Delta u}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\left(1 - \frac{1}{w}\right)\cdot H_u(w) + \frac{1}{w}\cdot H_u(0)\right)\cdot \frac{dw}{w-t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{w}\right)\cdot \frac{H_u(w)}{w-t}\,dw\ +\ \frac{H_u(0)}{2\pi i}\cdot \oint \frac{dw}{w\cdot(w-t)}\ .$$

Но по той же формуле Коши при $t \neq 0$ получаем:

$$\oint \frac{dw}{w(w-t)} = \frac{1}{t} \oint \left(\frac{1}{w-t} - \frac{1}{w}\right) dw = \frac{2\pi i - 2\pi i}{t} = 0\,.$$

При $t = 0$ этот интеграл также нулевой, поэтому

$$H_{\Delta u}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w|=r<1} \left(1 - \frac{1}{w}\right) \cdot \frac{H_u(w)}{w-t}\, dw\,,\ \ |t| < r\,.$$

5.11. Лемма. При целых $s \geq 0$ и $|t| < r$:

$$H_{\Delta^s u}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w|=r<1} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^s \cdot \frac{H_u(w)}{w-t}\, dw\,.$$

Доказательство. Эту формулу докажем индукцией по s. Мы уже убедились, что она верна при $s = 0,\ 1$. При $s \geq 2$:

$$H_{\Delta^s u}(t) = H_{\Delta^{s-1}(\Delta u)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{s-1} \cdot \frac{H_{\Delta u}(w)}{w-t}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{s-1} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{w}\right) \cdot H_u(w) + \frac{1}{w} \cdot H_u(0)\right) \cdot \frac{dw}{w-t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{w}\right)^s \cdot \frac{H_u(w)}{w-t}\, dw + \frac{H_u(0)}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{s-1} \cdot \frac{dw}{w(w-t)}\,.$$

Во втором интеграле заменим $z = 1/w$, при $|t| < r$, $s \geq 2$:

$$\oint\limits_{|w|=r<1} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{s-1} \cdot \frac{dw/w^2}{1-(t/w)} = \oint\limits_{|z|=1/r>1} \frac{(1-z)^{s-1}}{1-t\cdot z}\, dz\,.$$

Подинтегральная функция регулярна внутри контура и в его окрестности. Поэтому, этот интеграл нулевой, что завершает индукционный шаг. Лемма 5.11 доказана.

В частности, что при целых $s \geq 0$ доказана формула:

$$\Delta^s u_0 = H_{\Delta^s u}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r<1} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^s \cdot \frac{H_u(w)}{w}\, dw\,.$$

Перейдём к основному утверждению этой главы, немного иначе доказанному в книге ([9, с. 269-272]).

5.12. Теорема (формула суммирования Эйлера).
При условии существования левой части, есть равенство:

$$\sum\nolimits_{s\geq 0}(-1)^{s}\cdot u_s=\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}\,.$$

Доказательство. Сначала, по символическому методу, поднимем и опустим индексы:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}\nearrow\sum_{k\geq 0}\frac{(1-u)^{k}\cdot u^0}{2^{k+1}}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-u}{2}\right)^{k}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1-u}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{1+u}=\sum_{s\geq 0}(-1)^{s}\cdot u^{s}\searrow\sum_{s\geq 0}(-1)^{s}\cdot u_s\,.$$

Эти преобразования требовали ограничения $|u|<1$, из которого следуют другие необходимые неравенства:

$$0<\frac{1-u}{2}<1\quad\text{и}\quad\left|\frac{1-u}{2}\right|<1\,.$$

В силу линейности по u формулы Эйлера, её справедливость доказана для конечных линейных комбинаций геометрических прогрессий $((a_s)^n,\ n\geq 0)$ с множителями $|a_s|<1$.

Однако, для выполнения формулы Эйлера достаточно сходимости знакопеременной суммы $u_0-u_1+u_2-\ldots$. Разобранный случай вытекает из этого слабого условия.

Заметим, что формула Эйлера вовлекает все элементы последовательности u. Поэтому интерполяция геометрическими прогрессиями не даёт полное доказательство формулы без привлечения какой-то теории сходимости. Такие же проблемы со сходимостью есть у операторного метода:

$$\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{\Delta^k}{2^{k+1}}=\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{(I-\Downarrow)^k}{2^{k+1}}=\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\Downarrow}{2}\right)^k=$$

$$=(1+\Downarrow)^{-1}=\sum\nolimits_{s\geq 0}(-1)^s\cdot\Downarrow^s.$$

Для полного обоснования формулы Эйлера получим выражение, подобное (ϱ) со стр. 61 из доказательства Леммы 5.8. Обозначим r_n – остатки бесконечной суммы $A=H_u(-1)$:

$$r_n=A-A_n=\sum\nolimits_{n<m}(-1)^m\cdot u_m\ \Rightarrow\ A_n=A-r_n.$$

Тогда, по Лемме 5.5, получим формулу:

$$\Delta^k u_n=(-1)^n\cdot\sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}(A-r_{n+s})\cdot\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right)=$$

$$=(-1)^n\cdot A\cdot\sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right)-$$

$$-(-1)^n\cdot\sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}r_{n+s}\cdot\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right)=$$

$$=0-(-1)^n\cdot\sum\nolimits_{-1\leq s\leq k}r_{n+s}\cdot\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right).$$

Теперь мы выразим конечную сумму, используя формулу Следствия 3.8 со стр. 26:

$$\sum_{k=0}^{d}\frac{\Delta^k u_n}{2^{k+1}}=-(-1)^n\cdot\sum_{k=0}^{d}\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\sum_{s=-1}^{k}r_{n+s}\cdot\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right)=$$

$$=-(-1)^n\cdot\sum_{k=0}^{d}\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\left(-r_{n-1}+\sum_{s=0}^{k}r_{n+s}\cdot\left(\binom{k}{s}-\binom{k}{s+1}\right)\right)=$$

$$= (-1)^n \cdot r_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{d+1}}\right) -$$

$$-(-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \sum_{s=0}^{k} r_{n+s} \cdot \left(\binom{k}{s} - \binom{k}{s+1}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot r_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{d+1}}\right) -$$

$$-(-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{d} r_{n+s} \cdot \sum_{k=s}^{d} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \left(\binom{k}{s} - \binom{k}{s+1}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot r_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{d+1}}\right) -$$

$$-(-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{d} r_{n+s} \cdot \frac{1}{2^{d+1}} \cdot \left(\sum_{v=0}^{s+1} \binom{d+1}{v} - \sum_{v=0}^{s} \binom{d+1}{v}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot r_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{d+1}}\right) - \frac{(-1)^n}{2^{d+1}} \cdot \sum_{s=0}^{d} r_{n+s} \cdot \binom{d+1}{s+1}.$$

Очевидно, что при $d \to \infty$ уменьшаемое этой разности стремится к $(-1)^n \cdot r_{n-1}$. Поскольку при фиксированном n и $s \to \infty$ разность r_{n+s} стремится к 0, при $d \to \infty$ вычитаемое стремится к 0. Этот факт был установлен при доказательстве Леммы 5.8. Поэтому при фиксированном n получено:

$$\lim_{d \to \infty} \sum_{k=0}^{d} \frac{\Delta^k u_n}{2^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{\Delta^k u_n}{2^{k+1}} = (-1)^n \cdot r_{n-1} \qquad (\mathcal{E})$$

В частности, получена искомая формула Эйлера:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}} = r_{-1} = A - A_{-1} = A\,.$$

Заметим, что формула суммирования Эйлера через производящие функции выражается следующим образом:

$$H_u(-1) = \sum\nolimits_{k\ge 0} H_{\Delta^k u}(0) \big/ 2^{k+1} \ .$$

Есть её обобщение, вовлекающее производящие функции по существу. Вид такой формулы найдём в частном случае из примера 5.9 со стр. 63: $u_n = [\,n = d\,]$, $n, d \ge 0$.

$$\sum_{k\ge 0} \frac{H_{\Delta^k u}(t)}{2^{k+1}} = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \sum_{m=0}^{\min(k,d)} (-1)^m \cdot \binom{k}{m} \cdot t^{d-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{d} \frac{(-1)^m \cdot t^{d-m}}{2} \sum_{k\ge 0} \binom{k}{m} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{m=0}^{d} \frac{(-1)^m \cdot t^{d-m}}{2} \cdot \frac{2^{-m}}{2^{-m-1}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \cdot t^{d-m} = \frac{t^{d+1} + (-1)^d}{t+1} = \frac{t \cdot H_u(t) + H_u(-1)}{t+1} \ .$$

Во второй строке применено биномиальное тождество из Леммы 3.6 со стр. 24. Окончательное выражение получено благодаря линейности выведенного равенства по u. Следовательно, это выражение истинно для финитных u, – для которых $H_u(t)$ является полиномом.

Теперь, вооружённые знакомством с этой формулой, мы можем доказать её в более общем случае.

5.13. Предложение. При условии сходимости числовой суммы $H_u(-1)$ выполняется равенство степенных рядов:

$$\sum\nolimits_{k\ge 0} \frac{H_{\Delta^k u}(t)}{2^{k+1}} = \frac{H_u(-1) + t \cdot H_u(t)}{1+t} \qquad (\hbar)$$

Доказательство. Воспользуемся полученной ранее формулой ($\mathcal{E}$) со стр. 70:

$$(1+t)\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{H_{\Delta^k u}(t)}{2^{k+1}}=(1+t)\cdot\sum_{k\geq 0}2^{-k-1}\cdot\sum_{n\geq 0}\Delta^k u_n\cdot t^n=$$

$$=(1+t)\cdot\sum_{n\geq 0}t^n\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{\Delta^k u_n}{2^{k+1}}=(1+t)\cdot\sum_{n\geq 0}t^n\cdot(-1)^n\cdot r_{n-1}=$$

$$=\sum\nolimits_{n\geq 0}t^n\cdot(-1)^n\cdot r_{n-1}+\sum\nolimits_{n\geq 0}t^{n+1}\cdot(-1)^n\cdot r_{n-1}=$$

$$=\sum\nolimits_{n\geq 0}t^n\cdot(-1)^n\cdot r_{n-1}+\sum\nolimits_{n\geq 1}t^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot r_{n-2}=$$

$$=r_{-1}+\sum\nolimits_{n\geq 1}t^n\cdot(-1)^n\cdot(r_{n-1}-r_{n-2})=$$

$$=A-\sum_{n\geq 1}t^n\cdot(-1)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot u_{n-1}=H_u(-1)+t\cdot H_u(t)\,.$$

Проведённые вычисления доказывают тождественность соответствующих формальных степенных рядов. Для обоснования равенства функций, ими представляемых, и правильности выполненных преобразований надо учесть функциональные свойства $H_{\Delta^k u}(t)$ и $H_u(t)$.

Вспомним, что из сходимости числового ряда $H_u(-1)$ следует регулярность всех $H_{\Delta^k u}(t)$ в круге радиуса 1. Поэтому, предыдущие преобразования степенных рядов справедливы на любом компакте внутри этого круга, а функциональное равенство ($\hbar$) со стр. 71 выполняется для $|t|<1$, где двойной ряд в левой части сходится абсолютно.

Эффективность формулы суммирования Эйлера проиллюстрируем примером из книги ([9, с. 274]).

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}(1)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^1\Big(\sum\nolimits_{n\geq 0}(-1)^n\cdot x^{2n}\Big)dx=$$

$$= \sum\nolimits_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \int_0^1 x^{2n} dx = \sum\nolimits_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \bigg|_0^1 =$$

$$= \sum\nolimits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Возьмём последовательность: $u_n = (2n+1)^{-1}$. Несложно найти и обосновать по индукции вид её разностей:

$$\Delta^m u_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot \ldots \cdot (2n+2m+1)} =$$

$$= 2^m \cdot \frac{m!}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot \ldots \cdot (2n+2m+1)} =$$

$$= \frac{2^{2m+1}}{m+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \binom{n+m+1}{n}^{-1} \cdot \binom{2n+2m+2}{n+m+1}^{-1}.$$

В частности, получаем выражение:

$$\Delta^m u_0 = 2^m \cdot \frac{m!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} = \frac{2^{2m+1}}{m+1} \cdot \binom{2m+2}{m+1}^{-1}.$$

Таким образом, формула Эйлера даёт равенство:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m \geq 0} \frac{2^m}{m+1} \cdot \binom{2m+2}{m+1}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots .$$

Слагаемые можно оценить по формуле Стирлинга:

$$\frac{\Delta^m u_0}{2^{m+1}} \sim \frac{2^m}{m+1} \cdot \sqrt{\frac{\pi(m+1)}{2}} \cdot 2^{-2m-2} = \frac{1}{2^{m+2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(m+1)}} .$$

6. ЧИСЛА КАТАЛАНА

Изобретение последовательности $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$ приписывают китайскому математику Мин Ан-ту, нашедшему её рекуррентные соотношения в 1730 году ([32, с. 273]). Геометрическую интерпретацию этих чисел дал санкт-петербургский академик Н.И. Фусс в 1791 г., первое основательное сочинение о них в 1838 г. опубликовал бельгиец Э.Ш. Каталан ([10, с. 231, 396]). Числа стали называться "каталановыми" после выхода в 1900 г. учебника по комбинаторике Е. Нетто. Найдено около сотни комбинаторных и алгебраических интерпретаций чисел Каталана ([32, с. 272, 283-306, 322-331]). Ограничимся одной: C_n считает правильные расстановки скобок на неассоциативном произведении $n+1$ сомножителей $x_0 \times x_1 \times \ldots \times x_n$, $n \geq 0$. Начальные варианты расстановок скобок таковы:

$$a;\ (a \times b);\ \big((a \times b) \times c\big),\ \big(a \times (b \times c)\big);$$

$$\Big(\big((a \times b) \times c\big) \times d\Big), \Big(\big(a \times (b \times c)\big) \times d\Big), \Big(a \times \big((b \times c) \times d\big)\Big),$$

$$\Big(a \times \big(b \times (c \times d)\big)\Big),\ \big((a \times b) \times (c \times d)\big);\ \ldots$$

Всякая последовательность с правильно расставленными скобками имеет арифметические характеристики, не зависящие от скобок – длину и состав, то есть, кратности входящих символов. Но они не всегда определяют саму последовательность из-за возможности скобочного различия. Что видно на простейшем примере:

$$\big((x \times x) \times x\big) \neq \big(x \times (x \times x)\big)\ .$$

Чтобы прояснить смысл расстановок скобок, мы зададим алгебраическую структуру на множестве конечных последовательностей со скобками. Мы обнаружим, что помимо нелинейных графических особенностей, правильным расстановкам скобок свойственны и числовые показатели. Так возникает комбинаторная задача подсчёта различных последовательностей с одинаковыми показателями и другими числовыми характеристиками.

6.1. Определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – непустое конечное множество. Оно порождает множество `неассоциативных мономов` от X – конечных последовательностей символов x_i оснащённых скобками:

$$W(X) = \bigcup\nolimits_{m\geq 1} W_m(X)\,,\ \text{где}\quad W_1(X) = X \quad \text{и}$$

$$W_k(X) = \bigcup_{s=1}^{k-1} \big(W_s(X) \times W_{k-s}(X)\big)\,,\ \text{при}\quad k \geq 2\,.$$

Множество $W(X)$ называется `свободным группоидом` с неассоциативным умножением "$\times$". Из этого определения вытекает рекуррентный критерий равенства мономов.

6.2. Лемма. $w_1 = w_2 \in W(X)$, если и только если выполнены два условия:

1. w_1 и $w_2 \in W_k(X)$ для их общего $k \geq 1$;
2. при $k = 1$ равенство $w_1 = w_2$ выполняется в X, а при $k \geq 2$ есть однозначное разложение $w_i = (u_i{\times}v_i)$, где $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$ в $W_{<k}(X)$.

6.3. Определение. Нижний индекс $W_k(X)$ указывает длину элементов $W(X)$. При $w \in W_k(X)$ обозначим $|w| := k$.

Поскольку $\big|(u{\times}v)\big| = |u| + |v|$, длина определяет вес (натуральную градуировку) на $W(X)$:

$$\big(W_s\,(X) \times W_t\,(X)\big) \subset W_{s+t}\,(X)\,.$$

6.4. Определение. Среди рассмотренных свободных группоидов есть простейший $B = W\big(\{x\}\big)$ – *группоид скобочных шаблонов*. Любой $W(X)$ отображается на B стиранием индексов x_i и с сохранением произведения:

$$\beta\colon W(X) \twoheadrightarrow B,\ \text{где}\ \beta(x_i) = x,\ \ \beta\big((u \times v)\big) = \big(\beta(u) \times \beta(v)\big).$$

Если $w \in W(X)$, то $\beta(w) \in B$ называется *скобочной структурой* неассоциативного монома w. Определим множество мономов одной скобочной структуры $b \in B$:

$$W^{(b)}(X) = \beta^{-1}(b) = \{w \in W(X) \mid \beta(w) = b\}\,.$$

Тогда разбиение $W(X) = \bigcup_{b\,\in\,B} W^{(b)}(X)$ является неассоциативной мультипликативной градуировкой $W(X)$:

$$\big(W^{(b)}(X) \times W^{(b')}(X)\big) = W^{\left((\,b\,\times\,b'\,)\right)}(X)\,.$$

Скобочная структура помнит длину: $\big|\beta(w)\big| = |w|$, поэтому

$$W_s(X) = \bigcup\nolimits_{|b|\,=\,s} W_s^{(b)}(X)\,.$$

Здесь $W_s^{(b)}(X) = W^{(b)}(X)$, при $|b| = s$, но $W_s^{(b)}(X) = \emptyset$, иначе.

Поскольку скобочная структура задаёт расстановку скобок, вид неассоциативного монома фиксированной структуры определяется только порядком вхождения в моном символов x_i. Поэтому нетрудно найти количество неассоциативных мономов структуры $b \in B$:

$$\sharp\big(B^{(b)}\big) = \sharp\big(W^{(b)}\big(\{x\}\big)\big) = 1\,, \quad \sharp\big(W^{(b)}(X)\big) = \sharp(X)^{|b|}\,.$$

6.5. Следствие. Скобочные структуры в $W(X)$ связаны с числами Каталана:

$$\sharp\,(B_s) = C_{s-1}\,, \quad \sharp\big(W_s(X)\big) = C_{s-1}\cdot\sharp\,(X)^s.$$

Надо помнить, что вес скобочного шаблона равен его длине, а индекс числа Каталана измеряет количество умножений в шаблоне, которое на 1 меньше. Точные формулы будут выведены позднее. Мы увидим, что они отражают расщепление, называемое *гнездовым*.

6.6. Определение. Для $X \neq \emptyset$ обозначим множество

$${}_1I = {}_1I(X) := W_{\geq 2}\,(X) = \bigcup\nolimits_{s\,\geq\,2} W_s(X)\,.$$

Тогда ${}_1I(X)$ выдерживает умножение на элементы $W(X)$:

$$\big({}_1I \times W(X)\big),\ \big(W(X) \times {}_1I\,\big) \subset {}_1I\,.$$

Говорят, что ${}_1I$ – *идеал* группоида $W(X)$. В этом смысле сам $W(X) = W_{\geq 1}\,(X)$ является своим идеалом – обозначим его следующим образом ${}_0I = {}_0I(X) := W(X)$.

Для непустого $M \subset W(X)$ обозначим $\langle\, M\,\rangle$ – идеальное замыкание M в $W(X)$, то есть, – наименьший по включению идеал $W(X)$, содержащий M.

Теперь мы можем определить следующие идеалы (компоненты последующих объединений могут пересекаться):

$${}_2I = {}_2I(X) := \big\langle({}_1I \times {}_1I\,)\big\rangle\,,$$

$${}_sI = {}_sI(X) := \bigcup_{t\,=\,1}^{s\,-\,1} \big\langle({}_tI \times {}_{s-t}I\,)\big\rangle\,,\ \text{при}\ s > 2\,.$$

Мономы из ${}_sI$ являются неассоциативными произведениями некоторого набора элементов $W(X)$, не менее s из которых лежат в $W_{\geq 2}(X)$. Устройство ${}_sI$ мы проясним позднее.

Эти идеалы вложены друг в друга,– то есть,– определяют **убывающую фильтрацию** на $W(X)$:

$$W(X) = {}_0I \supset {}_1I \supset \dots \supset {}_sI \supset {}_{s+1}I \supset \dots\ , \quad \bigcap_{s\geq 0} {}_sI = \emptyset\,.$$

Теперь определим последовательные дополнения предыдущего ряда множеств:

$${}_sG = {}_sG\,(X) := {}_sI \setminus {}_{s+1}I\,,\ s \geq 0\,.$$

Возникают непересекающиеся (**дизъюнктные**) объединения:

$${}_sI = \bigcup_{t\geq s} {}_tG\,, \quad \text{в частности,} \quad W(X) = \bigcup_{t\geq 0} {}_tG\,.$$

6.7. Замечание. Множество ${}_sG$ состоит из неассоциативных мономов, ровно s сомножителей которых лежат в $W_{\geq 2}(X)$, а остальные – в X. И это вполне определяет скобочный шаблон: $w \in {}_sG\,(X)$ если и только если $\beta(w) \in {}_sG\,\big(\{x\}\big)$. Так, мономы шаблона $((((x\times(x\times x))\times x)\times((x\times x)\times x))\times x)$ принадлежат множеству ${}_2G$ – элементы отсюда содержат ровно два вхождения вида $(x_i \times x_j)$.

6.8. Определение. Подмономы $w \in W(X)$ вида $(x_i \times x_j)$ назовём *гнёздами* в w. Количество гнёзд определяет принадлежность монома ${}_sG$ и ${}_sI$: $w \in {}_sG$, если w имеет s гнёзд, и наоборот. Кроме того, $|w| \geq 2s$, и в итоге получаем:

$${}_sG = \bigcup_{m\geq 2s}\ \bigcup_{b\in B} {}_sG_m^{(b)}\,, \quad \text{где} \quad {}_sG_m^{(b)} = {}_sG \bigcap W_m^{(b)}(X)\,.$$

Безгнездовые мономы имеют вид x_i, – они принадлежат множеству $X = {}_0G = {}_0G_1^{(x)}$.

6.9. Замечание. Разбиение $\{{}_sG \mid s \geq 0\}$ задаёт на множестве $W(X)$ *частичную градуировку* в следующем смысле:

$$(\,{}_sG \times {}_tG\,) \subset {}_{s+t}G \text{ при } (s,t) \neq (0,0), \text{ но } (\,{}_0G \times {}_0G\,) \subset {}_1G\,.$$

Благодаря этому можно вычислить производящую функцию группоида $W(X)$, учитывающую гнездовую структуру мономов и их длину (тут $\sharp(X) = n$):

$$F(y,z) = \sharp\,\big(G(X)\big)(y,z) := \sum_{m\geq 1}\,\sum_{s\geq 0} \sharp\,({}_sG_m)\cdot y^m \cdot z^s =$$
$$= ny + n^2y^2z + 2n^3y^3z + \cdots\,.$$

6.10. Лемма. Функция $F(y,z)$ – алгебраична:

$$F(y,z) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - (1{-}2ny)\cdot\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1{-}2ny)^2}\cdot z\right)^{1/2}\right).$$

Доказательство. Функциональная связь для $F = F(y,z)$, с учётом вышеуказанного сбоя градуировки ${}_sG$, следует из равенств взвешенных множеств и производящих функций:

$$X \cup \big(W(X) \times W(X)\big) = W(X)\,,$$
$$ny + F(y,z)^2 = F(y,z) - n^2y^2z + n^2y^2\,.$$

Откуда получается квадратичное уравнение:

$$F^2 - F + (n^2y^2z - n^2y^2 + ny) = 0\,.$$

Преобразуем дискриминант этого выражения:

$$D = 1 - 4n^2y^2z + 4n^2y^2 - 4ny = (1-2ny)^2 - 4n^2y^2z\,.$$

Для F имеются две возможности:

$$F_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm (1-2ny)\cdot\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1-2ny)^2}\cdot z\right)^{1/2}\right).$$

Но $F(0,z)=0$, поэтому $F = F_-$, что доказывает Лемму 2.2.

6.11. Замечание. При $n=1$, $z=1$ получим $D = 1-4y$ и

$$F(y,1) = \sum_{m\,\geq\,1} \sharp(B_m)y^m = \left(1 - \sqrt{1{-}4y}\,\right)\Big/2 = \sum_{m\,\geq\,1} C_{m-1}\cdot y^m\,,$$

где C_{m-1} – числа Каталана, считающие скобочные шаблоны длины m. Получаем для них известную формулу:

$$C_{m-1} = -\frac{1}{2}\cdot\binom{1/2}{m}\cdot(-4)^m =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-(m{-}1)\right)\right)\cdot(-4)^m =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}\cdot m!}\cdot\Big(\big(2(m{-}1){-}1\big)\cdot\big(2(m{-}2){-}1\big)\cdot\ldots\cdot\big(2{-}1\big)\Big)\cdot 4^m =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\big((2m-3)\cdot(2m-5)\cdot\ldots\cdot 1\big)\cdot 2^{\,m-1} =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\frac{(2m-2)!\cdot 2^{\,m-1}}{(2m-2)\cdot(2m-4)\cdot\ldots\cdot 2} =$$

$$= \frac{(2m-2)!}{m!\cdot(m-1)!} = \frac{1}{2\cdot(2m-1)}\cdot\binom{2m}{m}.$$

И так же можно найти мощность компонент ${}_sG_m(X)$.

6.12. Теорема. При $m \geq 2$, $s \geq 1$:

$$\sharp\,({}_sG_m) = C_{s-1}\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{\,m-2s}\cdot\big(\sharp\,(X)\big)^m\,.$$

Доказательство. Обозначим $n = \sharp(X)$ и вычислим радикальную часть алгебраического выражения $F(y,z)$:

$$\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1-2ny)^2}\cdot z\right)^{1/2} = \sum_{s\,\geq\,0}\binom{1/2}{s}\cdot\frac{(-4)^s(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s}} =$$

$$= 1 - 2\cdot\sum_{s\,\geq\,1} C_{s-1}\cdot\frac{(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s}}\,.$$

Далее, из Леммы 6.10 получаем выражение для $F(y,z)$:

$$F(y,z) = \sum_{m\,\geq\,1}\sum_{s\,\geq\,0}\sharp\left({}_sG_m\right)\cdot y^m\cdot z^s =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - (1-2ny)\cdot\left(1 - 2\cdot\sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1}\cdot\frac{(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s}}\right)\right) =$$

$$= \; ny + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1}\cdot\frac{(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s-1}} \; =$$

$$= ny + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1}\cdot(n^2y^2z)^s\cdot\sum\nolimits_{u\,\geq\,0}\binom{-2s+1}{u}\cdot(-2ny)^u =$$

$$= ny + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1}\cdot(n^2y^2z)^s\cdot\sum\nolimits_{u\,\geq\,0}\binom{2s+u-2}{u}\cdot(2ny)^u =$$

$$= ny + \sum_{s\,\geq\,1}\sum_{u\,\geq\,0} C_{s-1}\cdot\binom{2s+u-2}{2s-2}\cdot 2^u\cdot(ny)^{2s+u}\cdot z^s =$$

Сделаем замену $2s+u = m \geq 2s$ и продолжим равенство:

$$= ny + \sum_{s\,\geq\,1}\sum_{m\,\geq\,2s} C_{s-1}\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{m-2s}\cdot n^m\cdot y^m\cdot z^s\,.$$

Следовательно, получаем искомые тождества:

$$\sharp\,({}_sG_m) = C_{s-1}\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{m-2s}\cdot n^m\,,\ \text{при } s\ge 1\,,\ m\ge 2s\,;$$

$$\sharp\,({}_0G_1) = n\,.\ \text{Остальные } \sharp\,({}_sG_m) = 0\,.$$

В частности, доказаны равенства:

$$\sharp\,\big({}_sG_{2s}\big(\{x\}\big)\big) = C_{s-1}\,,\quad \sharp\,\big({}_1G_m\big(\{x\}\big)\big) = 2^{m-2}\,.$$

Они имеют содержательное наполнение. Действительно, обозначим для удобства $x^2 := (x\times x)$. Тогда

$${}_sG_{2s}\big(\{x\}\big) = \bigcup_{k\ge 0} {}_kG_s\big(\{x^2\}\big)\,,$$

$${}_1G_m\big(\{x\}\big) = \Big\{\big(x\times\big(\cdots\times\big(x\times x^2\big)\ldots\big)\big), \big(x\times\big(\cdots\times\big(x^2\times x\big)\ldots\big)\big),$$
$$\ldots, \big(\big(\ldots\big(x^2\times x\big)\times\cdots\big)\times x\big)\Big\}\,.$$

Последнее равенство подсказывает описание `одногнездовых` шаблонов.

6.13. Определение. Для $b\in B$ обозначим $L(b) := (x\times b)$ и $R(b) := (b\times x)$. Операции L и R – преобразования множества шаблонов B, и поэтому их композиция ассоциативна. Определим отображение μ из множества `ассоциативных` мономов от символов L и R, которое обозначим $\{L,R\}^*$, в B:

$$\mu\colon \{L,R\}^*\to B,\quad \mu(\emptyset) = x^2,\quad \mu\big(w(L,R)\big) = w(L,R)\big(x^2\big)\,.$$

Оно продолжает отображение $\mu(L) = L\big(x^2\big)$, $\mu(R) = R\big(x^2\big)$. Ясно, что $\big|\mu(w)\big| = |w| + 2$, и можно считать, что $\deg\mu = 2$.

6.14. Лемма. μ – биекция $\{L,R\}^*$ на ${}_1G\big(\{x\}\big)$.

Доказательство: Поскольку μ однороден степени 2 относительно длины мономов, достаточно убедиться в биективности однородной части отображения

$$\mu\colon \{L, R\}^s \to {}_1G_{s+2}\big(\{x\}\big)\,.$$

Рассуждение проведём индукцией по s. Начальные случаи $s = 0, 1$ – очевидны. Сперва докажем инъективность μ.

Заметим, если $\mu\big(w_1(L, R\,)\big) = \mu\big(w_2(L, R\,)\big)$, то $|w_1| = |w_2|\,$. Пусть для неких $w_1 \neq w_2 \in \{L, R\}^s$ выполнено равенство $\mu(w_1) = \mu(w_2)$. Здесь s можно считать наименьшим из возможных – ясно, что $s \geq 2\,$.

Воспользуемся критерием равенства ассоциативных мономов положительной длины: в моноиде $X^* = \{x_1, \dots\}^*$ равенство $w_1 = w_2$ выполнено, если и только если $|w_1| = |w_2|$ и $w_i = x_{j_i} \cdot v_i\,$, где $j_1 = j_2\,$, $v_1 = v_2\,$.

В нашей ситуации $w_i = U_i \cdot v_i(L, R)$, где $U_i \in \{L, R\}$. По предположению, ассоциативные пары $(U_1\,, v_1)$ и $(U_2\,, v_2)$ – различны, но равны неассоциативные мономы в B:

$$\mu(w_1) = \big(U_1 \cdot v_1(L, R\,)\big)\big(x^2\big) = \big(U_2 \cdot v_2(L, R\,)\big)\big(x^2\big) = \mu(w_2)\,;$$
$$U_1\big(v_1(L, R)\big(x^2\big)\big) = U_2\big(v_2(L, R)\big(x^2\big)\big)\,.$$

По критерию равенства в B, получаем: $U_1 = U_2$ и

$$v_1(L, R)\big(x^2\big) = \mu(v_1) = \mu(v_2) = v_2(L, R)\big(x^2\big).$$

При этом ассоциативные мономы $v_1(L, R)$ и $v_2(L, R)$ оказываются разными, но имеют длину $s - 1 < s$. Полученное противоречие доказывает инъективность отображения μ.

Теперь докажем сюръективность μ. Пусть $m \in {}_1G\big(\{x\}\big)$. Но, по определению:

$${}_1G\big(\{x\}\big) = {}_1I\big(\{x\}\big) \setminus {}_2I\big(\{x\}\big) =$$

$$= {}_1I\big(\{x\}\big) \setminus \big\langle {}_1I\big(\{x\}\big) \times {}_1I\big(\{x\}\big)\big\rangle = B_{\geq 2} \setminus \langle B_{\geq 2} \times B_{\geq 2}\rangle \,.$$

Таким образом, $m \in B_{\geq 2}$ и $m = u \times v$. Но оба сомножителя u и v не могут принадлежать $B_{\geq 2}$, поскольку тогда

$$m \in \langle B_{\geq 2} \times B_{\geq 2}\rangle = {}_2I\big(\{x\}\big) \not\subseteq {}_1G\big(\{x\}\big).$$

Поэтому один из них лежит в $B_1 = \{x\}$. Для определённости ограничимся случаем $u = x$. Если $|v| = 1$, тогда $v = x$ и $m = x^2 = \mu(\emptyset)$ – утверждение доказано. Если же $|v| \geq 2$, тогда $v \in B_{\geq 2}$, но надо учесть:

$$v \notin \langle B_{\geq 2} \times B_{\geq 2}\rangle = \big\langle {}_1I\big(\{x\}\big) \times {}_1I\big(\{x\}\big)\big\rangle = {}_2I\big(\{x\}\big)\,,$$

поскольку иначе $m = x \times v \in {}_2I\big(\{x\}\big) \not\subseteq {}_1G\big(\{x\}\big)$. Поэтому

$$v \in {}_1I\big(\{x\}\big) \setminus {}_2I\big(\{x\}\big) = {}_1G\big(\{x\}\big)\,,\ |v| = |m| - 1\,.$$

По индукционной гипотезе, для некого $w(L,R) \in \{L,R\}^*$ есть равенство $v = \mu(w)$. И тогда

$$m = x \times v = L(v) = L\big(\mu(w)\big) = \mu(L \cdot w)\,.$$

Тем самым, индукция завершена и Лемма 6.14 доказана.

Из Теоремы 6.12 следуют частично свёрнутые формулы:

6.15. Лемма. Пусть $s \geq 1$, $m \geq 2$, тогда

$$\sharp\big({}_sG(X)\big)(y) := \sum\nolimits_{m\geq 1} \sharp\big({}_sG_m(X)\big) \cdot y^m = \frac{C_{s-1} \cdot n^{2s} \cdot y^{2s}}{(1-2ny)^{2s-1}}\ ;$$

$$\sharp\big(G_m(X)\big)(z) := \sum\nolimits_{s\geq 1} \sharp\big({}_sG_m(X)\big) \cdot z^s =$$

$$= \big(\sharp\,(X)\big)^m \cdot \sum\nolimits_{s\geq 1} C_{s-1} \cdot \binom{m-2}{2s-2} \cdot 2^{m-2s} \cdot z^s\ ;$$

$$C_{m-1} = \sharp\,(B_m) = \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} \sharp\,\big({}_sG_m\big(\{x\}\big)\big) =$$

$$= \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1} \cdot \binom{m-2}{2s-2} \cdot 2^{\,m-2s}\,.$$

Доказательство. При выводе утверждения Теоремы 6.12 было получено выражение:

$$F(y,z) = \sum_{m\,\geq\,1}\,\sum_{s\,\geq\,0} \sharp\,({}_sG_m)\cdot y^m \cdot z^s = \sum_{s\,\geq\,0} z^s \cdot \sum_{m\,\geq\,1} \sharp\,({}_sG_m)\cdot y^m =$$

$$= \ ny + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} C_{s-1} \cdot \frac{(n^2\cdot y^2)^{\,s}}{(1-2ny)^{2s-1}} \cdot z^s\,.$$

Сравнение коэффициентов при z^s даёт первую формулу. Вторая и третья – применение результата Теоремы 6.12. В отличие от первой, суммы в них конечны: $s \leq \lfloor m/2 \rfloor$.

В нашей совместной работе ([7]) скобочные структуры изучены более подробно. С их помощью найдены размерности тождеств одной интересной неассоциативной алгебры.

7. ДВОИЧНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Натуральные числа неоднозначно представляются суммами степеней двойки. Разнообразие может быть обеспечено слиянием степеней: $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. И это соображение среди возможных представлений выделяет нетривиальное, состоящее из сумм различных степеней двоек:

$$n = 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_d}, \text{ где } 0 \leq k_1 < \ldots < k_d\ .$$

Показатель k_d ограничен сверху числом $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ – целой частью $\log_2(n)$. Такое представление локально минимально: если в разложении есть повторения степеней, то за счёт слияния можно получить разложение без повторений, короче прежнего. Но из этого не следует, что любое разложение без повторений – кратчайшее из возможных. За отсутствие разнообразия разложений без повторов отвечает арифметика.

Действительно, допустим, что какое-то n раскладывается в сумму разных степеней двоек неоднозначно:

$$n = 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_d} = 2^{t_1} + \ldots + 2^{t_a},$$

$$\text{где } 0 \leq k_1 < \ldots < k_d\ ;\ 0 \leq t_1 < \ldots < t_a\ .$$

Число n можно считать наименьшим из возможных, и тогда старшие степени этих его разложений различны. Можно считать, что $k_d < t_a$. И тогда получаем неравенство:

$$n \ =\ 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_d}\ \leq\ \sum\nolimits_{0 \leq b \leq k_d} 2^b\ =\ 2^{k_d+1} - 1\ <$$

$$<\ 2^{k_d+1}\ \leq\ 2^{t_a}\ \leq\ 2^{t_1} + \ldots + 2^{t_a}\ =\ n\,.$$

Полученное противоречие доказывает однозначность разложения любого натурального n в сумму разных степеней двойки, и, тем самым, – его тотальную минимальность – оно кратчайшее из разложений n по степеням двоек. Количество слагаемых такого разложения называется `двоичным весом` числа n. Следуя тексту ([10, с. 29, 596]), обозначим его $\nu\,(n)$. В этой главе мы изучим свойства двоичного веса. Интерес к теме вызван IV разделом книги ([30, с. 172-200]).

Разложение натурального числа по степеням можно изучать разными способами. Сначала напомним алгоритм разложения $n > 0$ в сумму разных степеней двоек.

7.1. Алгоритм.

Возьмём такое целое K, что выполняются неравенства:

$$2^{K} \leq n \leq 2^{K+1}.$$

Ясно, что $K = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Полученное 2^K будет старшей степенью двойки в разложении n. Вычтем его из всех сторон неравенства:

$$0 \leq n' = n - 2^{K} \leq 2^{K+1} - 2^{K} = 2^{K}.$$

При $n' = 0$ разложение завершается: $n = 2^K$. Если же $n' > 0$, то $2^{K'}$ – старшая степень двойки в разложении n' будет строго меньше 2^K. В этом случае $n' < n$ (и более того: $n' < n/2$), что даёт нам индуктивный шаг разложения. Количество таких шагов ограничено и равно $\nu(n)$.

Алгоритм 7.1 даёт экономную рекурсию для вычисления двоичного веса, – она предложена в ([30, с. 173]):

$$\nu\,(n) = \nu\,(n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}) + 1\,, \quad \nu\,(0) = 0\,.$$

Арифметическую природу алгоритма и рекурсии проясняет полезное утверждение.

7.2. Лемма. Следующее уравнение разрешимо только при вещественных неотрицательных a:

$$x - 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor} = a \ .$$

Если $a = 0$, то $x = 2^k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Если $a > 0$, то $x = a + 2^k$, где $k > \lfloor \log_2(a) \rfloor$.

Доказательство. Заметим, что функция $\lfloor \log_2(x) \rfloor$ задана только для вещественных положительных x. Поэтому уравнение может быть совместно лишь при вещественных a.

Представим вещественное $x > 0$ в двоичном редуцированном виде – без 2-ичного периода 1 в разложении. Целочисленный набор $\big(m_i\big)$ может быть конечным, но непустым:

$$x = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \ldots \ , \quad m_0 > m_1 > \ldots \ .$$

Тогда имеются неравенства:

$$2^{m_0} \le x < \sum\nolimits_{k \le m_0} 2^k = 2^{m_0 + 1} \ ;$$

$$m_0 \le \log_2(x) < m_0 + 1 \ .$$

Следовательно, $\lfloor \log_2(x) \rfloor = m_0$, и есть оценки:

$$0 \le x - 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor} = x - 2^{m_0} = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots <$$

$$< 2^{m_1 + 1} \le 2^{m_0} \le x \ .$$

Итак, преобразование $\phi(x) = x - 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor}$ убирает из редуцированной двоичной записи x старший разряд. Простое исследование образа ϕ доказывает Лемму 7.2.

На ином пути изучения двоичных разложений можно развернуть следующее произведение в степенной ряд:

$$f(t) = \prod\nolimits_{k \ge 0} \big(1 + t^{2^k}\big) = 1 + \sum\nolimits_{n \ge 1} A(n) \cdot t^n \ .$$

И вывести постоянство его коэффициентов: $A(n) \equiv 1$. Что докажет единственность разложения натуральных чисел в сумму разных неотрицательных степеней двойки, ведь $A(n)$ считает количество таких разложений n. Заметим:

$$f(t) = (1+t) \cdot f(t^2) \quad \Rightarrow \quad (1-t) \cdot f(t) = (1-t^2) \cdot f(t^2)\,;$$

$$g(t) := (1-t) \cdot f(t) = g(t^2) = g(t^4) = \ldots = g(t^{2^k})\ \forall\, k \geq 0\,.$$

Поэтому разложение $g(t)$ в степенной ряд не содержит положительных степеней t:

$$g(t) = g(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = (1-t)^{-1} = 1 + \sum\nolimits_{n\,\geq\,1} t^n\,.$$

Равенство $f(t) = (1+t) \cdot f(t^2)$ подсказывает простой алгоритм двоичного разложения. Для этого запишем:

$$1 + \sum\nolimits_{n\,\geq\,1} A(n) \cdot t^n = (1+t) \cdot \big(1 + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} A(s) \cdot t^{2s}\big) =$$

$$= 1 + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} A(s) \cdot t^{2s} + t + \sum\nolimits_{s\,\geq\,1} A(s) \cdot t^{2s+1}\,.$$

Теперь приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим рекуррентное выражение $A(n)$:

$$A(1) = 1\,; \quad A(n) = A(\lfloor n/2 \rfloor) \text{ при } n > 1\,.$$

Обозначим $\mathcal{A}(n)$ – разложение n в сумму разных степеней двойки. Укажем правило и пример построения $\mathcal{A}(n)$:

7.3. Рекурсия.

1 : $\mathcal{A}(1) =$ “ 1 ” ;

n > 1 – нечётное : $\mathcal{A}(n) = \mathcal{A}(n-1) + 1\,;$

n ≥ 2 – чётное : $\mathcal{A}(n) = 2 \cdot \mathcal{A}(n/2)\,.$

7.4. Пример.

$$\mathbf{2:}\ \mathcal{A}(2) = 2\cdot\mathcal{A}(1) = 2\cdot\text{“}\,1\,\text{”} = \text{“}\,2\,\text{”}\,;$$

$$\mathbf{4:}\ \mathcal{A}(4) = 2\cdot\mathcal{A}(2) = 2\cdot\text{“}\,2\,\text{”} = \text{“}\,2^2\,\text{”}\,;$$

$$\mathbf{5:}\ \mathcal{A}(5) = \mathcal{A}(4)+1 = \text{“}\,2^2\,\text{”}+1 = \text{“}\,2^2+1\,\text{”}\,;$$

$$\mathbf{10:}\ \mathcal{A}(10) = 2\cdot\mathcal{A}(5) = 2\cdot\text{“}\,2^2+1\,\text{”} = \text{“}\,2^3+2\,\text{”}\,.$$

Для разнообразия разберём задачу, интересную возможными обобщениями. Найти $D(n)$ – количество разложений n в сумму степеней двоек, если каждая степень может повторяться не чаще 3-х раз. В этом случае мы получаем:

$$1+\sum\nolimits_{n\geq 1} D(n)\cdot t^n = \prod\nolimits_{k\geq 0}\bigl(1+t^{2^k}+t^{2\cdot 2^k}+t^{3\cdot 2^k}\bigr) =$$

$$= \prod_{k\geq 0}\frac{1-t^{4\cdot 2^k}}{1-t^{2^k}} = \prod_{k\geq 0}\frac{1-t^{2^{k+2}}}{1-t^{2^k}} = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2} =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} t^k\cdot\sum\nolimits_{s\geq 0} t^{2s} = \sum\nolimits_{k\,,\,s\geq 0} t^{2s+k} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} t^n\cdot\sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor} 1 = \sum_{n\geq 0}\bigl(\lfloor n/2\rfloor+1\bigr)\cdot t^n\,.$$

Поэтому $D(n)=\lfloor n/2\rfloor+1$. Но если разложить производящую функцию $D(n)$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{1+t} = \frac{1/2}{(1-t)^2}+\frac{1/4}{1-t}+\frac{1/4}{1+t}\,,$$

то получается выражение иного вида:

$$D(n) = \frac{n+1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}\,.$$

Последовательность подчиняется рекуррентным правилам:

$$D(2n+1) = D(2n) = D(n) + D(n-1) = n+1\,.$$

С начальными условиями $D(1) = 1$, $D(2) = 2$ они вполне задают $\big(D(n),\, n \geq 1\big)$. И более того, позволяют строить соответствующие двоичные разложения. Для демонстрации алгоритма обозначим $\mathcal{D}(n)$ – набор разложений n в сумму степеней двойки с не более, чем тройными повторениями каждой степени. Заметим, что такое разложение нечётного числа содержит одно или три вхождения $1 = 2^0$, а разложение чётного содержит либо две 1, либо не имеет их вообще – и тогда все степени двойки в разложении строго положительны. По этим признакам $\mathcal{D}(n)$ распадается на непересекающиеся множества искомых разложений.

7.5. Рекурсия.

$\mathbf{1,\ 2:}\ \mathcal{D}(1) =$“ 1 ”; $\mathcal{D}(2) =$“ 2, 1 + 1 ”;

$\mathbf{n > 1}$ **– нечётное:** $\mathcal{D}(n) = \mathcal{D}(n-1) + 1\,;$

$\mathbf{n > 2}$ **– чётное:** $\mathcal{D}(n) = 2{\cdot}\mathcal{D}(n/2) \cup \big\{2{\cdot}\mathcal{D}\big((n/2){-}1\big){+}1{+}1\big\}.$

Проясним этот алгоритм на примере.

7.6. Пример.

$$\mathbf{4:}\ \mathcal{D}(4) = 2\cdot\mathcal{D}(2) \cup \big\{2\cdot\mathcal{D}(1)+1+1\big\} =$$
$$= 2{\cdot}\text{“ }2\,,\ 1+1\text{ ”} \cup \big\{2{\cdot}\text{“ }1\text{ ”}+1+1\big\} = \text{“ }2^2,\ 2+2\,,\ 2+1+1\text{ ”};$$

$$\mathbf{5:}\ \mathcal{D}(5) = \mathcal{D}(4)+1 = \text{“ }2^2+1\,,\ 2+2+1\,,\ 2+1+1+1\text{ ”};$$

$$\mathbf{10:}\ \mathcal{D}(10) = 2\cdot\mathcal{D}(5) \cup \big\{2\cdot\mathcal{D}(4)+1+1\big\} =$$
$$= \text{“ }2^3+2\,,\ 2^2+2^2+2\,,\ 2^2+2+2+2\,,\ 2^3+1+1\,,$$
$$2^2+2^2+1+1\,,\ 2^2+2+2+1+1\text{ ”}.$$

7.7. Замечание. Алгоритм 7.1 предлагает последовательное разложение натурального числа в сумму различных степеней двойки – от старших степеней к младшим. Вместе с тем, известна процедура, указывающая – входит ли в искомое разложение n конкретная степень двойки или нет.

7.8. Определение. Для всех $k \geq 0$ зададим целые числа:

$$a_k(n) = 2^k \cdot \lfloor n/\,2^k \rfloor\,.$$

В частности:

$$a_0(n) = n\,,\ a_1(n) = 2\lfloor n/\,2\rfloor, \ldots,\ a_k(n) = 0\,,\ \text{при } k > \log_2(n)\,.$$

Докажем, что последовательность $\big(a_k(n)\big)$ не растёт по k:

$$a_k(n) - a_{k+1}(n) = 2^k \cdot \lfloor n/\,2^k \rfloor - 2^{k+1} \cdot \lfloor n/\,2^{k+1} \rfloor =$$

$$= 2^k \cdot \big(\lfloor n/\,2^k \rfloor - 2 \cdot \lfloor n/\,2^{k+1} \rfloor\big) = 2^k \cdot \left\lfloor \frac{n}{2^k} - 2 \cdot \lfloor n/\,2^{k+1} \rfloor \right\rfloor =$$

$$= 2^k \cdot \left\lfloor 2 \cdot \left(\frac{n}{2^{k+1}} - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor\right)\right\rfloor \leq 2^k \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{n}{2^{k+1}} - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor\right)\right) =$$

$$= 2^{k+1} \cdot \left(\frac{n}{2^{k+1}} - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor\right) < 2^{k+1}\,.$$

Таким образом, имеем оценки:

$$0 \leq 2^{-k} \cdot \big(a_k(n) - a_{k+1}(n)\big) = \left\lfloor 2 \cdot \left(\frac{n}{2^{k+1}} - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor\right)\right\rfloor < 2\,.$$

Из целочисленности предпоследнего выражения следует:

$$\varepsilon_k(n) := 2^{-k} \cdot \big(a_k(n) - a_{k+1}(n)\big) \in \{0, 1\}\,;$$

$$a_k(n) - a_{k+1}(n) = \varepsilon_k(n) \cdot 2^k\,.$$

Из этого, в итоге, вытекает двоичное разложение n:

$$n = a_0(n) = \big(a_0(n) - a_1(n)\big) + \big(a_1(n) - a_2(n)\big) + \ldots =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \big(a_k(n) - a_{k+1}(n)\big) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \big(a_k(n) - a_{k+1}(n)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \varepsilon_k(n) \cdot 2^k = \varepsilon_{\lfloor \log_2(n) \rfloor}(n) \ldots \varepsilon_2(n)\varepsilon_1(n)\varepsilon_0(n)_{(2)} \,.$$

Вспомним, что количество ненулевых слагаемых двоичного разложения n мы называем двоичным весом – $\nu(n)$. Сейчас мы готовы найти его вид (обобщения см. [16, с. 7-12]).

7.9. Теорема (формулы двоичного веса).

$$\nu(n) = n - \sum\nolimits_{k\geq 1} \lfloor n/2^k \rfloor = \sum\nolimits_{k\geq 1} \{n/2^k\} = n - \operatorname{ord}_2(n!)\,;$$

Доказательство. Воспользуемся формулой двоичного разложения (учтём, что начальные значения $k \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor$):

$$\nu(n) = \sum\nolimits_{k\geq 0} \varepsilon_k(n) = \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-k} \cdot \big(a_k(n) - a_{k+1}(n)\big) =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-k} \cdot a_k(n) - \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-k} \cdot a_{k+1}(n) =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-k} \cdot a_k(n) - 2 \cdot \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-(k+1)} \cdot a_{k+1}(n) =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^{-k} \cdot a_k(n) - 2 \cdot \sum\nolimits_{k\geq 1} 2^{-k} \cdot a_k(n) =$$

$$= 2^0 \cdot a_0\,(n) - \sum\nolimits_{k\geq 1} 2^{-k} \cdot a_k(n) =$$

$$= n - \sum\nolimits_{k\geq 1} \lfloor n/\, 2^k \rfloor = n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \lfloor n/\, 2^k \rfloor \,.$$

Далее продолжим равенство, представив n суммой геометрической прогрессии с множителем $1/2$:

$$\nu(n) = \sum_{k=1}^{\infty} n/2^k - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \lfloor n/2^k \rfloor =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^k} - \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \right) = \sum\nolimits_{k \ge 1} \{n/2^k\}.$$

Эту формулу можно вывести из более простых соображений, использовав равенство $\nu(2^k) = 1$. Усиление её упомянуто в ([10, с. 596, упр. 6.37]). Последнее выражение можно свернуть к конечной сумме:

$$\nu(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \{n/2^k\} + \sum\nolimits_{k > \lfloor \log_2(n) \rfloor} \{n/2^k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \{n/2^k\} + \sum_{k > \lfloor \log_2(n) \rfloor} n/2^k = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \{n/2^k\} + \frac{n}{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}.$$

Завершающее равенство теоремы открыл А.-М. Лежандр. Для доказательства найдём количество $1 \le m \le n$, кратных 2^k, но не 2^{k+1}. Оно равно $\lfloor n/2^k \rfloor - \lfloor n/2^{k+1} \rfloor$. Поэтому кратность двойки в $n!$ выражается формулой:

$$\operatorname{ord}_2(n!) = \sum\nolimits_{k \ge 1} k \cdot \left(\lfloor n/2^k \rfloor - \lfloor n/2^{k+1} \rfloor \right) =$$

$$= \sum\nolimits_{k \ge 1} k \cdot \lfloor n/2^k \rfloor - \sum\nolimits_{k \ge 1} k \cdot \lfloor n/2^{k+1} \rfloor =$$

$$= \lfloor n/2 \rfloor + \sum\nolimits_{k \ge 2} k \cdot \lfloor n/2^k \rfloor - \sum\nolimits_{k \ge 2} (k-1) \cdot \lfloor n/2^k \rfloor =$$

$$= \lfloor n/2 \rfloor + \sum\nolimits_{k \ge 2} \lfloor n/2^k \rfloor = \sum\nolimits_{k \ge 1} \lfloor n/2^k \rfloor.$$

Следовательно, при $n \geq 0$ получаем искомое равенство:

$$\nu(n) = n - \sum\nolimits_{k \geq 1} \lfloor n/\, 2^k \rfloor = n - \operatorname{ord}_2(n!)\,.$$

7.10. Следствие. При $n, m \geq 1$ есть соотношения:

$$\nu\,(n) - \nu\,(n-1) = 1 - \operatorname{ord}_2(n)\,;$$

$$\nu\,(n) + \nu\,(m) \geq \nu\,(n+m)\,; \quad \nu\,(n) \cdot \nu\,(m) \geq \nu\,(n \cdot m)\,.$$

Доказательство. Рекурсия вытекает из предыдущего:

$$\nu(n) - \nu(n{-}1) = n - \operatorname{ord}_2(n!) - \big((n{-}1) - \operatorname{ord}_2\big((n{-}1)!\big)\big) =$$

$$= 1 - \operatorname{ord}_2(n!\,/\,(n-1)!) = 1 - \operatorname{ord}_2(n)\,.$$

Аналогично получаем неравенство:

$$\nu(n) + \nu(m) - \nu(n+m) = n - \operatorname{ord}_2(n!) +$$

$$+\, m - \operatorname{ord}_2(m!) - \big(n + m - \operatorname{ord}_2\big((n+m)!\big)\big) =$$

$$= \operatorname{ord}_2\big((n{+}m)!\big) - \operatorname{ord}_2(n!) - \operatorname{ord}_2(m!) = \operatorname{ord}_2\left(\binom{n{+}m}{n}\right) \geq 0\,.$$

Для вывода мультипликативного неравенства разложим m в сумму разных степеней двойки, воспользуемся аддитивным неравенством и очевидным тождеством $\nu\big(n \cdot 2^k\big) = \nu\,(n)$:

$$m = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_d}\,,\ \text{где}\ \ 0 \leq k_1 < \ldots < k_d\,,\ \nu\,(m) = d\,;$$

$$\nu\,(n \cdot m) = \nu\big(n \cdot 2^{k_1} + \ \ldots\ + n \cdot 2^{k_d}\big) \leq$$

$$\leq \nu\big(n \cdot 2^{k_1}\big) + \cdots + \nu\big(n \cdot 2^{k_d}\big) = \underbrace{\nu\,(n) + \ \ldots\ + \nu\,(n)}_{d} =$$

$$= \nu\,(n) \cdot d = \nu\,(n) \cdot \nu\,(m)\,.$$

Другое доказательство этого неравенства даёт минимальность длины разложения в сумму разных степеней двоек. Действительно, произведение суммы $\nu(n)$ степеней двоек разложения n на сумму $\nu(m)$ степеней разложения m даёт сумму $\nu(n)\cdot\nu(m)$ степеней двоек разложения $n\cdot m$, – но, возможно, с повторами. Сливая одинаковые степени, получим $\nu(n\cdot m)$ различных степеней двоек. Поэтому $\nu(n\cdot m)\le\nu(n)\cdot\nu(m)$. Причём, неравенство становится равенством при отсутствии повторов в вышеупомянутой сумме из $\nu(n)\cdot\nu(m)$ степеней.

7.11. Замечание. Равенство $\nu(2^k-1)=k$ свидетельствует о неограниченности последовательности $\bigl(\nu(n)\bigr)$. Осмысленно дополнив её – $\nu(0)=0$, укажем начальные значения:

$$0112122312232334122323342334344512232334 2\ldots$$

Они выглядят несколько запутанно. И это не случайно. Рассмотрим её остатки от деления на 2:

$$011010011001011010010110011010011001011 00\ldots$$

Это `бесконечное слово Туэ-Морса`. Оно не содержит последовательных троекратных повторений своих частей и даже `сильнобескубно` (см. [38, с. 229] или [27, с. 11-16]). Следовательно, и последовательность двоичных весов обладает этими же свойствами.

7.12. Определение. Двоичным весам можно сопоставить разные производящие функции. Одна из них такова:

$$N(t,z):=\sum\nolimits_{n\ge 0} z^{\nu(n)}\cdot t^n=\prod\nolimits_{k\ge 0}\Bigl(1+z\cdot t^{2^k}\Bigr).$$

Она участвует во многих тождествах. Так, через неё выражаются производящие функции этой главы:

$$\frac{N(t^2,-1)}{N(t,-1)} = N(t,1) = \prod\nolimits_{k\geq 0}\Bigl(1+t^{2^k}\Bigr) = \sum\nolimits_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}\ ;$$

$$\frac{N(t^4,-1)}{N(t,-1)} = 1+\sum\nolimits_{n\geq 1} D(n)\cdot t^n = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2}\ .$$

Перемена знаков в степенном разложении $N(t,-1)$ совпадает с чередованием 0 и 1 в последовательности Туэ-Морса:

$$N(t,-1) = \prod\nolimits_{k\geq 0}\Bigl(1-t^{2^k}\Bigr) = \sum\nolimits_{n\geq 0}(-1)^{\nu(n)}\cdot t^n\ .$$

Ряд $\bigl(N(t,-1)\bigr)^{-1}$ считает количество представлений n суммой степеней двоек без ограничений на повторения.

Из формулы Теоремы 7.9. $\operatorname{ord}_2(n!) = n-\nu(n)$ вытекают интересные разложения:

$$N(t,t^{-1}) = \prod\nolimits_{k\geq 0}\Bigl(1+t^{2^k-1}\Bigr) = \sum\nolimits_{n\geq 0} t^{n-\nu(n)} =$$

$$= \sum\nolimits_{n\geq 0} t^{\operatorname{ord}_2\bigl(n!\bigr)} = 2\cdot\sum\nolimits_{m\geq 0} t^{\operatorname{ord}_2\bigl((2m)!\bigr)} =$$

$$= 2\cdot\bigl(1+t+t^3+t^4+t^7+t^8+t^{10}+t^{11}+t^{15}+\ldots\bigr)\,;$$

$$N(t,t) = \prod\nolimits_{k\geq 0}\Bigl(1+t^{2^k+1}\Bigr) = \sum\nolimits_{n\geq 0} t^{n+\nu(n)} =$$

$$= \sum\nolimits_{n\geq 0} t^{2n-\operatorname{ord}_2\bigl(n!\bigr)} = 1+t^2+t^3+2t^5+t^7+t^8+\ldots$$

Функцию $N(t,z)$ можно разложить по степеням z:

$$N(t,z) = \sum_{s\geq 0} z^s\cdot T_s(t)\,,\quad \text{где}\quad T_s(t) = \sum_{n\geq 0;\ \nu(n)=s} t^n\,.$$

В частности, $T_{<0}(t) = 0$, $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = \sum_{k\geq 0} t^{2^k}$ – и этот ряд в комплексной плоскости определяет функцию с областью голоморфности $|z| < 1$.

7.13. Лемма. Ряды $T_s(t)$ подчиняются соотношениям:

$$T_s(t) = T_s(t^2) + t \cdot T_{s-1}(t^2);$$

$$T_1(t) = \sum_{k\geq 0} \mu(2k+1) \cdot \frac{t^{2k+1}}{1-t^{2k+1}} =$$
$$= \sum_{m\geq 1} 2^{\operatorname{ord}_2(m)} \cdot \mu\Big(m\big/2^{\operatorname{ord}_2(m)}\Big) \cdot \frac{t^m}{1+t^m}.$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством:

$$N(t,z) = (1+zt) \cdot \prod_{k\geq 0} \Big(1 + z \cdot t^{2\cdot 2^k}\Big) = (1+zt) \cdot N(t^2, z);$$

$$\sum_{s\geq 0} z^s \cdot T_s(t) = (1+zt) \cdot \sum_{s\geq 0} z^s \cdot T_s(t^2) =$$
$$= \sum_{s\geq 0} z^s \cdot T_s(t^2) + \sum_{s\geq 0} z^{s+1} \cdot t \cdot T_s(t^2) =$$
$$= 1 + \sum_{s\geq 1} z^s \cdot \big(T_s(t^2) + t \cdot T_{s-1}(t^2)\big).$$

Сравнение степенных рядов от t при одинаковых степенях z даёт первое из соотношений. В частности, получаем рекурсию, определяющую $T_1(t)$:

$$T_1(t) = t + T_1(t^2) = t + t^2 + T_1(t^4) = t + t^2 + t^4 + T_1(t^8) = \ldots$$

В начале 4 главы упоминалась `функция Мёбиуса` $\mu(k)$. Её свойства разобраны в книге ([10], с. 160-161). Определим ряд $f(t) = t + o(t)$:

$$f(t) := \sum_{k\geq 0} \mu(2k+1) \cdot \frac{t^{2k+1}}{1-t^{2k+1}}.$$

Из определения функции Мёбиуса получим равенство:

$$\sum\nolimits_{n\geq 1}\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n}=\sum\nolimits_{n\geq 1}\mu(n)\cdot\sum\nolimits_{m\geq 1}t^{nm}=$$
$$=\sum\nolimits_{u\geq 1}t^u\cdot\sum\nolimits_{n\setminus u}\mu(n)=t\,.$$

Заметим, что это равенство так же получается из логарифмической производной известного тождества:

$$e^t=\prod\nolimits_{n\geq 1}(1-t^n)^{-\mu(n)/n}\,.$$

Разложение t преобразуем с учётом $\mu(n)=0$, при $4\setminus n$:

$$\sum_{n\geq 1}\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n}=\sum_{2\not\setminus n\geq 1}\left(\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n}+\mu(2n)\cdot\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}}\right)=$$
$$=\sum_{2\not\setminus n\geq 1}\left(\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n}-\mu(n)\cdot\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}}\right)=f(t)-f(t^2)\,.$$

Так как ряд $f(t)$ связан той же рекурсией, что и $T_1(t)$, – они совпадают. Чтобы привести $T_1(t)$ к ряду Ламберта противоположного вида, воспользуемся арифметической связью базовых функций $L^+(t)$ и $L^-(t)$, вытекающей из логарифмической производной равенства $1+t^n=(1-t^{2n})/(1-t^n)$:

$$\frac{t}{1+t}-\frac{t}{1-t}=-2\cdot\frac{t^2}{1-t^2}\;;$$
$$\frac{t}{1+t}=\frac{t}{1-t}-2\cdot\frac{t^2}{1-t^2}\,,\qquad\frac{t^n}{1+t^n}=\frac{t^n}{1-t^n}-2\cdot\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}}\,.$$

Для обращения предыдущих равенств используем единственность разложения в ряды Ламберта $L^+(t)$ и $L^-(t)$:

$$\frac{t}{1-t}=\sum_{n\geq 1}a_n\cdot\frac{t^n}{1+t^n}=\sum_{n\geq 1}a_n\cdot\left(\frac{t^n}{1-t^n}-2\cdot\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}}\right)=$$

$$= \sum\nolimits_{n\geq 1} a_n\cdot\frac{t^n}{1-t^n} - \sum\nolimits_{n\geq 1} 2\cdot a_n\cdot\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}} =$$
$$= \sum_{2\nmid n\geq 1} a_n\cdot\frac{t^n}{1-t^n} - \sum_{2\,\backslash\, n\geq 1}(a_n - 2\cdot a_{n/2})\cdot\frac{t^n}{1-t^n}\ .$$

Поэтому для нечётных индексов n: $a_n = [\,n = 1\,]$, а для чётных: $a_n = 2\cdot a_{n/2}$. Следовательно, $a_n = n\cdot[\,n = 2^d, d\geq 0\,]$, и мы получаем выражения:

$$\frac{t}{1-t} = \sum_{d\geq 0} 2^d\cdot\frac{t^{2^d}}{1+t^{2^d}}\ ;\quad \frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{d\geq 0} 2^d\cdot\frac{t^{2^d\cdot n}}{1+t^{2^d\cdot n}}\ .$$

Снова отметим, что это равенство можно вывести из логарифмической производной полученного ранее тождества:

$$(1-t)^{-1} = \prod\nolimits_{n\geq 0}\left(1+t^{2^n}\right).$$

Теперь несложно пересчитать $T_1(t)$:

$$T_1(t) = \sum_{2\nmid n\geq 1}\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{2\nmid n\geq 1}\mu(n)\cdot\sum_{d\geq 0} 2^d\cdot\frac{t^{2^d\cdot n}}{1+t^{2^d\cdot n}} =$$

$$= \sum_{m\geq 1}\frac{t^m}{1+t^m}\cdot\sum_{d\geq 0} 2^d\cdot\mu(m/2^d)\cdot[\,2^d\backslash m\ \&\ m/2^d\text{– нечётное}\,] =$$
$$= \sum\nolimits_{m\geq 1} 2^{\operatorname{ord}_2(m)}\cdot\mu\Big(m\Big/2^{\operatorname{ord}_2(m)}\Big)\cdot\frac{t^m}{1+t^m}\ .$$

И, тем самым, Лемма 7.13 полностью доказана.

7.14. Замечание. Из указанного выше правила:

$$N(t,z) = (1+zt)\cdot N(t^2,z)$$

вытекает рекурсия, вполне определяющая значения двоичного веса $\big(\nu(n),\, n \ge 0\big)$:

$$\sum\nolimits_{n\ge 0} z^{\nu(n)}\cdot t^n = (1+zt)\cdot \sum\nolimits_{m\ge 0} z^{\nu(m)}\cdot t^{2m} =$$
$$= \sum\nolimits_{m\ge 0} z^{\nu(m)}\cdot t^{2m} + \sum\nolimits_{m\ge 0} z^{\nu(m)+1}\cdot t^{2m+1}\,;$$

$$\nu(2m+1) = \nu(m)+1\,, \quad \nu(2m) = \nu(m)\,, \quad \nu(0) = 0\,.$$

7.15. Замечание. Предыдущие соотношения позволяют переразложить гильбертову производящую функцию последовательности $\big(\nu(n),\, n \ge 0\big)$:

$$H_\nu(t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} \nu(n)\cdot t^n =$$
$$= \sum\nolimits_{k\ge 0} \nu(2k)\cdot t^{2k} + \sum\nolimits_{k\ge 0} \nu(2k+1)\cdot t^{2k+1} =$$
$$= \sum\nolimits_{k\ge 0} \nu(k)\cdot t^{2k} + \sum\nolimits_{k\ge 0} \big(\nu(k)+1\big)\cdot t^{2k+1} =$$
$$= H_\nu(t^2) + \sum\nolimits_{k\ge 0} \nu(k)\cdot t^{2k+1} + \sum\nolimits_{k\ge 0} t^{2k+1} =$$
$$= H_\nu(t^2) + t\cdot H_\nu(t^2) + \frac{t}{1-t^2} = (1+t)\cdot H_\nu(t^2) + \frac{t}{1-t^2}\,;$$

Умножим это равенство на $(1-t)$ и получим:

$$(1-t)\cdot H_\nu(t) = \frac{t}{1+t} + (1-t^2)\cdot H_\nu(t^2) =$$
$$= \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + (1-t^4)\cdot H_\nu(t^4) =$$
$$= \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{t^4}{1+t^4} + \cdots = \sum\nolimits_{d\ge 0} \frac{t^{2^d}}{1+t^{2^d}}\,.$$

Производящая функция $H_\nu(t)$ аналитически выражается через $N(t,z)$ (см. определение 7.12, стр. 96):

$$H_\nu(t) = \sum\nolimits_{n\geq 0} \frac{\partial}{\partial z}\, z^{\nu(n)}\Big|_{z=1} \cdot t^n = \frac{\partial}{\partial z}\, N(t,z)\Big|_{z=1}\,;$$

$$H_\nu(t) = \Big(N(t,z)\cdot \frac{\partial}{\partial z}\,\ln\big(N(t,z)\big)\Big)\Big|_{z=1} =$$

$$= N(t,1)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ln\big(N(t,z)\big)\Big|_{z=1} = N(t,1)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ln\prod_{k\geq 0}\Big(1+zt^{2^k}\Big)\Big|_{z=1} =$$

$$= N(t,1)\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{\partial}{\partial z}\ln\Big(1+zt^{2^k}\Big)\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-t}\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{t^{2^k}}{1+t^{2^k}}\,.$$

Из этого уже известного равенства вытекает, что

$$H_\nu(t) = \frac{1}{1-t}\cdot\sum\nolimits_{s\geq 0}(-1)^s\cdot T_1\big(t^{s+1}\big)\,.$$

Утверждения этой главы можно распространить с двоичного случая при хороших формулировках. Например, таково обобщение Леммы 7.13 (здесь $G_{(2)}(t) = T_1(t)$):

7.16. Лемма. Пусть $P = (p_1,\ldots,p_k)$ – набор разных простых чисел, $I = (i_1,\ldots,i_k)$ – целочисленный мультииндекс. Если $\perp$ означает взаимную простоту, а $P^I = p_1^{i_1}\cdot\dots\cdot p_k^{i_k}$, тогда

$$G_P(t) := \sum\nolimits_{I\geq 0} t^{P^I} = \sum\nolimits_{n\perp P}\mu(n)\cdot\frac{t^n}{1-t^n}\,.$$

8. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОМБИНАТОРИКА

К алгебраической комбинаторике можно отнести любые алгебраические подсчёты. Например, – вычисления в группах, кольцах, алгебрах и модулях; изучение действий групп на множествах и алгебраических структурах; поиск характеристик линейных операторов. Из необъятного множества задач здесь будет упомянуто малое. В этой главе основное поле k является подполем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Начнём с алгебраического обобщения комбинаторной леммы Пойа. Её исходная формулировка и применения сообщены в книгах ([34, гл. 15, с. 209-231], [18, Пойа, с. 36-138; де Брёйн, с. 229-255]).

8.1. Определение. Пусть A – k-пространство и на него диагонализируемо действует коммутативная группа $\mathcal{H}$:

$$\omega_A : \mathcal{H} \to \mathrm{Aut}_k(A)\,,$$

т.е., A имеет базис из собственных векторов a действия $\mathcal{H}$:

$$\omega_A(h)(a) = h(a) = \chi(h)\cdot a\,, \quad \forall\ h \in \mathcal{H}\,.$$

Тогда функциональные множители χ принадлежат группе характеров $X(\mathcal{H}) := \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, k^*)$ исходной группы $\mathcal{H}$. Порождая базисными векторами A одного характера χ подпространства $A_\chi = \{a \in A \,|\, h(a) = \chi(h)\cdot a\,,\ \forall\ h \in \mathcal{H}\}$, получим `весовое разложение` A:

$$A \cong \oplus_{\chi \in X(\mathcal{H})} A_\chi\,.$$

Если пространство A является k-алгеброй, мы считаем, что действие $\mathcal{H}$ сохраняет умножение:

$$\omega_A : \mathcal{H} \to \mathrm{Aut}_{k-alg}(A)\,.$$

Весовое разложение является $X(\mathcal{H})$-градуировкой A, поскольку для всех однородных $a, b \in A$ и $h \in \mathcal{H}$ имеем:

$$h(a\cdot b) = h(a)\cdot h(b) = \chi_a(h)\cdot a \cdot \chi_b(h)\cdot b = (\chi_a \cdot \chi_b)(h)\cdot a\cdot b\,,$$

$$A_{\chi_a} \cdot A_{\chi_b} \subseteq A_{\chi_a \cdot \chi_b}\,.$$

Приведённая конструкция отчасти обратима: если A градуирована коммутативной группой Δ, тогда группа характеров $X(\Delta)$ диагонализируемо действует на A:

$$\phi\,(a_\delta) = \phi\,(\delta)\cdot a_\delta\,, \quad \phi \in X(\Delta)\,,\, a_\delta \in A_\delta\,,\, A = \oplus_{\delta \in \Delta} A_\delta\,.$$

При наличии умножения в A, действие $X(\Delta)$ сохраняет его:

$$\phi\,(a_\delta\,\cdot\,a_{\delta'}) = \phi\,(a_{\delta\cdot\delta'}) = \phi\,(\delta\cdot\delta')\cdot a_{\delta\cdot\delta'} =$$

$$= \phi\,(\delta)\cdot\phi\,(\delta')\cdot a_\delta\cdot a_{\delta'} = \phi\,(a_\delta)\cdot\phi\,(a_{\delta'})\,.$$

8.2. Замечание. Этим способом можно описать все абелевы групповые градуировки объекта A. Необходимо найти максимальные абелевы подгруппы $\mathcal{H} \le \mathrm{Aut}(A)$, действующие диагонализируемо на A, и тогда все градуировки на A факторизуются с $X(\mathcal{H})$.

Итак, по условию, действие $\mathcal{H}$ расщепляется на скалярные компоненты. При $h \in \mathcal{H}$ и $\chi \in X(\mathcal{H})$ имеем разложение:

$$\omega_A(h)\,|_{A_\chi} = \chi(h)\cdot \mathrm{id}_{A_\chi}\,.$$

Поэтому представление ω_A задаётся `мультипликатором`:

$$\Omega_A = \oplus_{\chi \in X(\mathcal{H})}\,\mathrm{id}_{A_\chi}\cdot\chi:\ \mathcal{H}\times A \to A\,,$$

который для конечномерной A или конечной $\mathcal{H}$ можно считать элементом $\mathrm{End}\,(A)\otimes k\,[X(\mathcal{H})]$, а в более общем случае – некоторым символическим оператором.

8.3. Определение. Если $\dim A_\chi < \infty$ при всех χ, то в пополнении групповой алгебры $k\,[[X(\mathcal{H})]]$ определён след Ω_A, называемый `рядом Гильберта` $X(\mathcal{H})$–градуированного A:

$$H_A = \operatorname{tr}(\Omega_A) = \sum\nolimits_{\chi \in X(\mathcal{H})} \dim A_\chi \cdot \chi \,.$$

Ряд Гильберта определения 2.5 со стр. 13 возникает при $k = \mathbb{C}$ и $\mathcal{H} \cong S^1 \cong \{\, w \in \mathbb{C} \;\big|\; |w| = 1 \,\}$. Тогда группа характеров $X(\mathcal{H}) \cong \mathbb{Z}$ мультипликативно реализуется возведениями в целочисленную степень $t^n : w \to w^n$.

Далее мы предполагаем конечномерность компонент всех рассматриваемых объектов: $\forall\, \chi \in X(\mathcal{H}) \quad \dim A_\chi < \infty$.

Поскольку для $X(\mathcal{H})$–градуированных k–линейных объектов A и B имеются изоморфизмы:

$$\Omega_{A \oplus B} \cong \Omega_A \oplus \Omega_B \ , \quad \Omega_{A \otimes B} \cong \Omega_A \otimes \Omega_B \ ,$$

мы получаем известные свойства рядов Гильберта:

$$H_{A \oplus B} = \operatorname{tr}(\Omega_{A \oplus B}) = \operatorname{tr}(\Omega_A) + \operatorname{tr}(\Omega_B) = H_A + H_B \ ,$$

$$H_{A \otimes B} = \operatorname{tr}(\Omega_{A \otimes B}) = \operatorname{tr}(\Omega_A) \cdot \operatorname{tr}(\Omega_B) = H_A \cdot H_B \ .$$

Теперь пусть другая, не обязательно абелева, но конечная группа $\mathcal{G}$ действует на A, сохраняя $X(\mathcal{H})$–градуировку и, при наличии,– мультипликативную структуру. Это означает перестановочность действия $\mathcal{G}$ и Ω_A. Тогда определено линейное усреднение по $\mathcal{G}$:

$$P = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} g : A \to A^{\mathcal{G}} .$$

Его называют `оператором Рейнольдса`. Он идемпотентен и проектирует A на подпространство $\mathcal{G}$–инвариантов $A^{\mathcal{G}}$.

8.4. Определение. Для оператора $\Phi \in \mathrm{End}\,(A)$, сохраняющего весовое разложение A и поэтому перестановочного с Ω_A, определим формальный ряд

$$H_A\,(\Phi) := \mathrm{tr}\,(\Phi \cdot \Omega_A) = \sum\nolimits_{\chi \in X(\mathcal{H})} \mathrm{tr}\,(\Phi\,|_{A_\chi}) \cdot \chi\,.$$

8.5. Лемма. В предыдущих обозначениях получаем:

$$H_A = H_A\,(\mathrm{id}_A)\,; \quad H_{A^{\mathcal{G}}} = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} H_A\,(g)\,.$$

Доказательство. Первое равенство следует из определений. Второе вытекает из линейности следа:

$$H_{A^{\mathcal{G}}} = \mathrm{tr}\,(\Omega_{A^{\mathcal{G}}}) = \mathrm{tr}\,(\Omega_{\,P\,(A)}) = \mathrm{tr}\,(P \cdot \Omega_A) =$$
$$= \mathrm{tr}\,\Big(\,|\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} g \cdot \Omega_A\Big) = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} \mathrm{tr}\,(g \cdot \Omega_A) =$$
$$= |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} H_A\,(g)\,.$$

Перейдём к `формуле Бернсайда`. Напомним её начальный вид и взвешенное усиление Пойа (см. [34, гл. 15]).

Формула Бернсайда ([34, с. 212, Следствие 15.3(a)]) выражает количество орбит $N_{\mathcal{G}}$ действия $\mathcal{G}$ на множестве M через циклические параметры действия элементов g:

$$N_{\mathcal{G}} = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} j_1(g)\,,$$

здесь $j_u\,(g)$ – количество независимых циклов длины u образа элемента $g \in \mathcal{G}$ при гомоморфизме $\mathcal{G} \to \mathcal{S}_M$.

Пусть на взвешенном множестве M действует группа $\mathcal{G}$, сохраняя значение веса. Тогда любая $\mathcal{G}$–орбита $\theta \subseteq M$ лежит в подмножестве элементов M одного веса. Вес орбиты примем по этой принадлежности: $\omega(\theta) := \omega(m \in \theta)$. Согласно результату Пойа, ([34, с. 211, теорема 15.3]) сумма весов орбит $\mathcal{G}$–действия вычисляется по формуле:

$$\sum \omega(\theta_i) = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{m = g(m)} \omega(m).$$

Формула Бернсайда непосредственно следует из её взвешенного обобщения тривиализацией веса: $\omega(m) \equiv 1$. Обобщённую же формулу Бернсайда легче доказывать в линеаризированном градуированном виде.

8.6. Определение. Взвешенным абелевой группой Δ множеством M, как базисом, породим Δ–градуированное пространство $V = {}_k\langle M \rangle$ k–линейных комбинаций $m \in M$. Тогда действие $\mathcal{G}$ на M продолжается до её представления в V. Каждой $\mathcal{G}$–орбите $\theta \subseteq M$ соответствует вектор

$$|\theta|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{m \in \theta} m = P(m_0) \quad \forall\, m_0 \in \theta.$$

Такие вектора образуют базис подпространства $\mathcal{G}$– инвариантов $V^{\mathcal{G}}$, и поэтому мы имеем равенства:

$$\sum \omega(\theta_i) = H_{V^{\mathcal{G}}}, \quad \sum\nolimits_{m = g(m)} \omega(m) = \operatorname{tr}(g \cdot \Omega_V) = H_V(g).$$

Тем самым, обобщённная формула Бернсайда непосредственно следует из леммы 8.5, а исходная формула Бернсайда получается из неё свёрткой с $1_{X(\Delta)} \in X(\Delta)$:

$$N_{\mathcal{G}} = \langle H_{V^{\mathcal{G}}}, 1_{X(\Delta)} \rangle = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} \langle H_V(g), 1_{X(\Delta)} \rangle =$$

$$= |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} \operatorname{tr}(g),$$

поскольку $\langle \Omega_V\,,\, 1_{X(\Delta)} \rangle = \mathrm{id}_V$, а правомерность свёртки обеспечена конечномерностью V, следующей из конечности M.

Перейдём к `теореме перечисления Пойа`. Сначала вспомним её авторскую формулировку (см. [18, Пойа, с. 46-53; де Брёйн, с. 229-231], [34, с. 213, Теорема 15.4], [12, с. 42]).

Пусть группа $\mathcal{G}$ действует на множестве D, а на множестве R задана весовая функция ω. Тогда $\mathcal{G}$ действует на R^D – множестве функций из D в R – по правилу:

$$(F \cdot g)(d) = F\big(g\,(d\,)\big)\,, \quad \forall\, d \in D\,,\, \forall\, g \in \mathcal{G}\,,\, \forall\, F \in R^D\,.$$

Вес функции из D в R принимается равным произведению весов всех её значений:

$$W(F\,) = \prod\nolimits_{d \in D} \omega\,(d\,)\,.$$

Пойа выразил $C(X)$ – перечисляющий ряд для $\mathcal{G}$–орбит на R^D через перечисляющий ряд $c\,(X)$ для R и `цикловой индекс` действия $\mathcal{G}$ на D

$$Z(\mathcal{G}; a_1, \ldots, a_{|D|}) := |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} \prod_{u=1}^{|D|} a_u^{\,j_u(g)}$$

формулой $C(X) = Z(\mathcal{G}; c\,(X))$. Подстановку в цикловой индекс перечисляющего ряда Пойа описал в частном случае бинатурального взвешивания. Её можно найти в указанных ранее книгах. Более общая ситуация идейно вытекает из конструкции Пойа, но требует дополнительных понятий, о которых мы позаботлись заранее. Обобщение теоремы Пойа мы проведём и докажем в линейном случае.

8.7. Теорема. Пусть $V = {}_k\langle R\,\rangle$ – градуированное пространство. Если $\mathcal{G}$ действует на множестве D, то она действует на пространстве $V^{\otimes |D|}$ перестановкой компонент. Множество R^D является k–базисом $V^{\otimes |D|}$. Формула Пойа выражает ряд Гильберта $\mathcal{G}$–инвариантов $V^{\otimes |D|}$ через H_V и $Z(\mathcal{G})$:

$$H_{(V^{\otimes |D|})^{\mathcal{G}}} = \operatorname{tr}(\Omega_{(V^{\otimes |D|})^{\mathcal{G}}}) =$$
$$= Z\big(\mathcal{G}\,; \operatorname{tr}(\Omega_V), \operatorname{tr}(\Omega_V^2), \ldots, \operatorname{tr}(\Omega_V^{|D|})\big) =: Z(\mathcal{G}\,; H_V)\,.$$

8.8. Замечание. Оказывается, подобное равенство выполняется и до усреднения по $\mathcal{G}$, для каждого элемента $g \in \mathcal{G}$ в отдельности, что обеспечивает доказательство предыдущей теоремы 8.7 и теоремы Пойа, в частности.

8.9. Определение. Если $\mathcal{G}$ действует на множестве D, то элемент $g \in \mathcal{G}$ получает цикловой тип $\big(j_u(g), u \geq 1\big)$, где $j_u(g)$ – количество циклов длины u в разложении g на независимые циклы. Определим цикловой индекс элемента g правилом:

$$Z(g\,;\, a_1, \ldots, a_{|D|}) := \prod_{u=1}^{|D|} a_u^{\,j_u(g)}\,.$$

Цикловой индекс действия группы $\mathcal{G}$ получается усреднением цикловых индексов её элементов:

$$Z(\mathcal{G}\,;\, a_1, \ldots, a_{|D|}) = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} Z(g\,;\, a_1, \ldots, a_{|D|})\,.$$

8.10. Лемма. В предыдущих обозначениях есть равенства:

$$Z(g\,;\, H_V) := Z\big(g\,;\, \operatorname{tr}(\Omega_V), \ldots, \operatorname{tr}(\Omega_V^{|D|})\big) =$$
$$= \prod_{u=1}^{|D|} \operatorname{tr}(\Omega_V^u)^{j_u(g)} = \operatorname{tr}(g \cdot \Omega_{V^{\otimes |D|}}) = H_{V^{\otimes |D|}}(g)\,.$$

Доказательство. Неочевидным в этой цепочке равенств является лишь предпоследнее. А его достаточно установить для циклической перестановки c, поскольку обе части равенства мультипликативны по разложению g в произведение независимых циклов в силу тождества $\mathrm{tr}\,(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{tr}\,(\varphi) \cdot \mathrm{tr}\,(\psi)$.

Если же c – цикл длины d, то он оставляет на месте базисные элементы $V^{\otimes d}$ вида $v \otimes \cdots \otimes v$, переставляя остальные, не дающие вклад в след $c \cdot \Omega_{V^{\otimes d}}$. Следовательно,

$$H_{V^{\otimes d}}(c) = \mathrm{tr}\,(c \cdot \Omega_{V^{\otimes d}}) = \mathrm{tr}\,(\Omega_V^{\,d}) = Z(c\,;\,H_V)\,,$$

что завершает доказательство леммы 8.10 и теоремы 8.7.

8.11. Замечание. Если g переставляет базис тривиально градуированного V, мы получаем важное равенство, относящееся к следующей части главы:

$$Z(g\,;\,1-t) = \prod\nolimits_{u \geq 1} (1-t^{u})^{j_u(g)} = \det\,(\,\mathrm{id}_V - g \cdot t\,)\,.$$

Для примера рассмотрим действие группы на градуированной алгебре. Начнём со `свободного ассоциативно-коммутативного случая`.

Пусть Y_χ – базис V_χ, тогда есть изоморфизм алгебр:

$$k\,[\,\cup_{\chi \in X(\mathcal{H})} Y_\chi\,] \cong \otimes_{\chi \in X(\mathcal{H})}\, k\,[\,Y_\chi\,]\,.$$

Здесь правая часть, по определению, состоит из тензоров ограниченной степени. Значит, симметризованная тензорная степень подчиняется правилу:

$$S\,(\oplus_{\chi \in X(\mathcal{H})} V_\chi\,) \cong \otimes_{\chi \in X(\mathcal{H})}\, S\,(V_\chi\,)\,.$$

Для набора $\Phi_\chi \in \mathrm{End}\,(V_\chi\,)$ также имеем изоморфизм:

$$S\,(\oplus_{\chi \in X(\mathcal{H})} \Phi_\chi\,) \cong \otimes_{\chi \in X(\mathcal{H})}\, S\,(\Phi_\chi\,).$$

Поэтому для $\Phi = \oplus\, \Phi_\chi$, коммутирующего с Ω_V, симметризация $S\,(\Phi)$ коммутирует с $\Omega_{S(V)}$.

8.12. Лемма. Пусть $V \cong \oplus_{\chi \in X(\mathcal{H})} V_\chi$ – градуированное пространство с конечномерными компонентами; $\Phi \cong \oplus\, \Phi_\chi$, где $\Phi_\chi \in \operatorname{End}(V_\chi)$. Тогда выполняется равенство:

$$H_{S\,(V)}\big(S\,(\Phi)\big) = \big(\det\,(\,\mathrm{id}_V - \Phi\cdot\Omega_V\,)\big)^{-1}.$$

Доказательство. Для $\phi \in \operatorname{End}(W)$, при $\dim(W) < \infty$ известна интересная формула:

$$\big(\det\,(\,\mathrm{id}_W - \phi\,)\big)^{-1} = \mathrm{tr}\,\big(S\,(\phi)\big)\,.$$

Она следует из инвариантности её вида при расширении поля k и, по индукции, из одномерного случая:

$$\big(\det\,(1-\lambda)\big)^{-1} = (1-\lambda)^{-1} = \sum\nolimits_{k\,\geq\,0} \lambda^k =$$

$$= \mathrm{tr}\,(\oplus_{k\,\geq\,0}\,\lambda^k\,) = \mathrm{tr}\,\big(S\,(\lambda)\big)\,,$$

и мультипликативности при расширении пространства W. Поэтому при $\dim\, V_\chi < \infty\ \forall\, \chi \in X(\mathcal{H})$ есть равенства:

$$H_{S\,(V)}\big(S\,(\Phi)\big) = \mathrm{tr}\,(S\,(\Phi)\cdot\Omega_{S(V)}) = \mathrm{tr}\,\big(S\,(\Phi)\cdot S\,(\Omega_V)\big) =$$

$$= \mathrm{tr}\,\big(S\,(\Phi\cdot\Omega_V)\big) = \mathrm{tr}\,\big(\otimes_{\chi\,\in\,X(\mathcal{H})}\, S\,(\Phi_\chi\cdot\Omega_{V_\chi}\,)\big) =$$

$$= \prod_{\chi\,\in\,X(\mathcal{H})} \mathrm{tr}\,\big(S\,(\Phi_\chi\cdot\Omega_{V_\chi}\,)\big) = \prod_{\chi\,\in\,X(\mathcal{H})} \big(\det\,(\mathrm{id}_{V_\chi} - \Phi_\chi\cdot\Omega_{V_\chi}\,)\big)^{-1} =$$

$$= \big(\det\,(\,\mathrm{id}_V - \Phi\cdot\Omega_V\,)\big)^{-1}.$$

8.13. Замечание. Для $\phi \in \operatorname{End}(W)$, при $\dim(W) < \infty$ совершенно аналогично доказывается полезная формула:

$$\ln\big(\det\,(\,\mathrm{id}_W - \phi\,)\big) = -\sum\nolimits_{m\,>\,0} \mathrm{tr}\,(\phi^{m}\,)/m\,.$$

8.14. Следствие (Формула Ф.Э. Молина). В предыдущих предположениях о $\mathcal{G}$ и V имеются равенства:

$$H_{(S\,(V))^{\mathcal{G}}} = \operatorname{tr}\left(P \cdot \Omega_{S\,(V)}\right) = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} H_{S\,(V)}\big(S\,(g)\big) =$$

$$= |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} \big(\det\left(\mathrm{id}_V - g \cdot \Omega_V\right)\big)^{-1}.$$

При тривиальном действии группы $\mathcal{G}$ получаем:

$$H_{S\,(V)} = H_{(S\,(V))^e} = \operatorname{tr}\left(\Omega_{S\,(V)}\right) = \big(\det\left(\mathrm{id}_V - \Omega_V\right)\big)^{-1}.$$

Аналогично, для любого $n \geq 1$ выводятся формулы:

$$\operatorname{tr}\left(\Omega^n_{S\,(V)}\right) = \operatorname{tr}\big(S\,(\Omega^n_V)\big) = \big(\det\left(\mathrm{id}_V - \Omega^n_V\right)\big)^{-1};$$

$$\ln\big(\operatorname{tr}\left(\Omega^n_{S\,(V)}\right)\big) = -\ln\big(\det\left(\mathrm{id}_V - \Omega^n_V\right)\big) = \sum_{m \geq 1} \frac{\operatorname{tr}\left(\Omega^{nm}_V\right)}{m}.$$

Из второй формулы обращением Мёбиуса и экспонированием можно получить равенство:

$$\exp\left(H_V\right) = \exp\big(\operatorname{tr}\left(\Omega_V\right)\big) = \prod\nolimits_{n \geq 1} \big(\operatorname{tr}\left(\Omega^n_{S\,(V)}\right)\big)^{\mu(n)/n}.$$

Эти формулы проясняются в случае $V = \oplus_{m \geq 1} V_m$. Тогда

$$H_V = H_V(t) = \operatorname{tr}\left(\Omega_V\right) = \sum\nolimits_{m \geq 1} \dim\left(V_m\right) \cdot t^m,$$

$$H_{S\,(V)} = H_{S\,(V)}(t) = \big(\det\left(\mathrm{id}_V - \Omega_V\right)\big)^{-1} =$$

$$= \Big(\det\big(\oplus_{m \geq 1} \mathrm{id}_{V_m} \cdot (1 - t^m)\big)\Big)^{-1} = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{-\dim\left(V_m\right)},$$

$$\exp\big(H_V(t)\big) = \prod\nolimits_{n \geq 1} \big(H_{S\,(V)}(t^n)\big)^{\mu(n)/n}.$$

Предыдущее равенство известно нам в частном случае:

$$e^t = \prod\nolimits_{n \geq 1} (1 - t^n)^{-\mu(n)/n}.$$

Перейдём к `свободному ассоциативному случаю`. Обозначим знаком T функтор тензорной степени $T(V) := \oplus_{m \geq 0} V^{\otimes m}$. Он совместим с $X(\mathcal{H})$–градуировкой на пространстве V. Тогда для $\Phi \in \operatorname{End}(V)$, коммутирующего с Ω_V, $T(\Phi)$ будет коммутировать с $\Omega_{T(V)}$. И мы получаем равенства:

$$H_{T(V)}\big(T(\Phi)\big) = \operatorname{tr}\big(T(\Phi) \cdot \Omega_{T(V)}\big) = \operatorname{tr}\Big(T(\Phi \cdot \Omega_V)\Big) =$$

$$= \operatorname{tr}\Big(\bigoplus_{m \geq 0} (\Phi \cdot \Omega_V)^{\otimes m}\Big) = \sum_{m \geq 0} \Big(\operatorname{tr}(\Phi \cdot \Omega_V)\Big)^m = \Big(1 - H_V(\Phi)\Big)^{-1}.$$

В частности, получаем известную алгебраическую формулу:

$$H_{T(V)} = (1 - H_V)^{-1},$$

которая обобщается на “свободные инварианты”.

8.15. Следствие (Формула Дикса–Форманека). В предыдущих предположениях, если действие группы $\mathcal{G}$ сохраняет градуировку V, то выполняются равенства:

$$H_{(T(V))^{\mathcal{G}}} = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} H_{T(V)}\big(T(g)\big) = |\mathcal{G}|^{-1} \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} \big(1 - H_V(g)\big)^{-1}.$$

Изложенное ранее приводит к `свободному лиевому случаю`.

Пусть $L(V)$ – свободная алгебра Ли над градуированным пространством V. Известно, что тогда универсальная обёртывающая алгебра $U(L(V))$ изоморфна свободной ассоциативной алгебре $T(V)$. Если оператор Φ действует на V с сохранением $X(\mathcal{H})$–градуировки, тогда он продолжается до таковых же операторов на $L(V)$ и $U(L(V))$. При этом оператор $U(L(\Phi))$ будет сохранять стандартную фильтрацию универсальной обёртывающей алгебры и, следовательно, Φ определяет сохраняющий $X(\mathcal{H})$–градуировку оператор на алгебре $\mathrm{gr}\,(U(L(V))) \cong S(L(V))$. Поскольку весовое разложение, по существу, использует лишь k–линейную структуру объектов, оно не замечает функтора gr на $U(L(V))$:

$$\Omega_{T(V)} \cong \Omega_{U(L(V))} \simeq \Omega_{\mathrm{gr}\,(U(L(V)))} \cong \Omega_{S(L(V))}\,.$$

Более того, для целых $n \geq 0$ есть изоморфизмы:

$$T(\Phi)\cdot\Omega^n_{T(V)} \cong U(L(\Phi))\cdot\Omega^n_{U(L(V))} \simeq S(L(\Phi))\cdot\Omega^n_{S(L(V))}\,.$$

Теперь можно связать операторы на $T(V)$, $L(V)$ и V:

$$\mathrm{tr}\,(T(\Phi)\cdot\Omega^n_{T(V)}) = \mathrm{tr}\,(T(\Phi\cdot\Omega^n_V)) = \big(1-\mathrm{tr}\,(\Phi\cdot\Omega^n_V)\big)^{-1} =$$

$$= \mathrm{tr}\,(U(L(\Phi))\cdot\Omega^n_{U(L(V))}) = \mathrm{tr}\,(S(L(\Phi))\cdot\Omega^n_{S(L(V))}) =$$

$$= \mathrm{tr}\,(S(L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)})) = \big(\det(\mathrm{id}_{L(V)} - L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)})\big)^{-1}.$$

Сведём формулы, связывающие комбинаторные свойства пространств V, $T(V)$ и $L(V)$:

8.16. Лемма. В предыдущих условиях и нулевой характеристике поля k имеем равенства:

1) $$\mathrm{tr}\,(\Phi\cdot\Omega^n_V) = 1 - \big(\mathrm{tr}\,(T(\Phi)\cdot\Omega^n_{T(V)})\big)^{-1};$$

2) $$\mathrm{tr}\,(T(\Phi)\cdot\Omega^n_{T(V)}) = \big(1-\mathrm{tr}\,(\Phi\cdot\Omega^n_V)\big)^{-1};$$

3) $$\mathrm{tr}\,(T(\Phi)\cdot\Omega^n_{T(V)}) = \big(\det(\mathrm{id}_{L(V)} - L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)})\big)^{-1} =$$

$$= \exp\Big(-\ln\big(\det(\mathrm{id}_{L(V)} - L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)})\big)\Big) =$$

$$= \exp\Big(\sum\nolimits_{j>0} \mathrm{tr}\,(L(\Phi)^j \cdot \Omega^{nj}_{L(V)})/j\Big);$$

4) $$\mathrm{tr}\,(L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)}) = \sum\nolimits_{j>0} \mu(j)\cdot\ln\big(\mathrm{tr}\,(T(\Phi)^j\cdot\Omega^{nj}_{T(V)})\big)/j;$$

5) $$\mathrm{tr}\,(\Phi\cdot\Omega^n_V) = 1 - \det(\mathrm{id}_{L(V)} - L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)});$$

6) $$\mathrm{tr}\,(L(\Phi)\cdot\Omega^n_{L(V)}) = -\sum\nolimits_{j>0} \mu(j)\cdot\ln\big(1-\mathrm{tr}\,(\Phi^j\cdot\Omega^{nj}_V)\big)/j =$$

$$= \sum\nolimits_{j>0} \mu(j)\cdot\sum\nolimits_{i>0}\big(\mathrm{tr}\,(\Phi^j\cdot\Omega^{nj}_V)\big)^i/ij.$$

Доказательство. Первые два равенства доказаны в части об инвариантах свободных ассоциативных алгебр; третье – перед текущим предложением; четвёртое получается из третьего по формуле обращения Мёбиуса; пятое и шестое – аналогично предыдущим.

8.17. Следствие. Пусть $\mathcal{G}$ действует на V сохраняя абелеву $X(\mathcal{H})$–градуировку, тогда $\mathcal{G}$ действует на $L(V)$ и ряд Гильберта алгебры Ли $L(V)^{\mathcal{G}}$ задаётся выражениями:

$$H_{L(V)^{\mathcal{G}}} = |\mathcal{G}|^{-1}\cdot\sum\nolimits_{g\in\mathcal{G}} H_{L(V)}\big(L(g)\big) =$$

$$= |\mathcal{G}|^{-1}\cdot\sum_{g\in G}\sum_{j>0}\mu(j)\cdot\ln\big(\mathrm{tr}\,(T(g)^j\cdot\Omega^j_{T(V)})\big)/j =$$

$$= -|\mathcal{G}|^{-1}\cdot\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{j>0}\mu(j)\cdot\ln\big(1-\mathrm{tr}\,(g^j\cdot\Omega^j_V)\big)/j =$$

$$= |\mathcal{G}|^{-1}\cdot\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{i,j>0}\mu(j)\cdot\big(\mathrm{tr}\,(g^j\cdot\Omega^j_V)\big)^i/ij =$$

$$= \ln\Big(\prod_{g\in\mathcal{G}}\prod_{j>0}\big(1-\mathrm{tr}\,(g^j\cdot\Omega_V^j)\big)^{-\mu(j)/|\mathcal{G}|j}\Big).$$

В частности, для $\mathcal{G}=\{e\}$ получаем:

$$\exp\big(H_{L(V)}\big)=\prod\nolimits_{j>0}\big(1-\mathrm{tr}(\Omega_V^j)\big)^{-\mu(j)/j}.$$

Если $V=\oplus_{m\ge 1}V_m$, то следует равенство:

$$H_{L(V)}(t)=\ln\Big(\prod_{j>0}\big(1-H_V(t^j)\big)^{-\mu(j)/j}\Big)=\sum_{i,j>0}\frac{\mu(j)}{ij}\cdot H_V^i(t^j).$$

8.18. Замечание. В свободном ассоциативном и лиевом случаях возможно перечисление базисных инвариантов, поскольку инвариантные подалгебры являются свободными по теоремам В.К. Харченко (1978) и А.И. Ширшова (1953):

$$H_{BT}=1-\Big(|\mathcal{G}|^{-1}\cdot\sum\nolimits_{g\in\mathcal{G}}\big(1-\mathrm{tr}\,(g\cdot\Omega_V)\big)^{-1}\Big)^{-1};$$

$$H_{BL}=1-\prod_{g\in\mathcal{G}}\prod_{m>0}\prod_{j\setminus m}\big(1-\mathrm{tr}\,(g^j\cdot\Omega_V^m)\big)^{\mu(j)/|\mathcal{G}|m}.$$

И при этом базисные инварианты свободных (анти)коммутативных алгебр представляются более загадочными, хотя в каждом конкретном случае перечисляются без труда.

В заключительной части главы мы изучим `циклическое строение линейных операторов`. Ранее на стр. 109 и 110 (см. Определение 8.9 и Замечание 8.11) был рассмотрен цикловой тип перестановки конечного множества и его линейное проявление, которое мы применим для определения циклового типа линейного оператора.

Итак, если линейный оператор φ действует перестановкой на базисе конечномерного пространства V, тогда для его циклового типа $(j_u(\varphi)\,,\ u \geq 1)$ выполняется формула:

$$\det(\,\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t\,) = \prod\nolimits_{u \geq 1} (1 - t^u)^{j_u(\varphi)} \qquad (\circlearrowleft)$$

8.19. Определение. Зададим цикловой тип любого линейного оператора φ, действующего на конечномерном пространстве V, вышезаписанным выражением $(\circlearrowleft)$. В отличие от “перестановочного” случая, цикловой тип $(j_u(\varphi)\,,\ u \geq 1)$ уже не обязан быть финитным – произведение справа может оказаться существенно бесконечным. При этом у нильпотентного оператора все `цикловые показатели` $j_u(\varphi)$ нулевые.

Слева в формуле $(\circlearrowleft)$ записана регулярная замена характеристического многочлена оператора φ, игнорирующая его нулевые собственные значения. Это – полином от t степени не выше $\dim V$ с единичным свободным коэффициентом, представимый поэтому эйлеровым произведением $E^-(t)$.

8.20. Лемма. Цикловые показатели $j_u(\varphi)$ оператора φ арифметически связаны со следами его степеней:

$$\mathrm{tr}\,(\varphi^m) = \sum_{u \setminus m} u \cdot j_u(\varphi)\,, \quad j_u(\varphi) = \frac{1}{u} \cdot \sum_{m \setminus u} \mu\left(\frac{u}{m}\right) \cdot \mathrm{tr}\,(\varphi^m)\,.$$

Доказательство. Искомые равенства следуют из логарифмирования определяющего равенства $(\circlearrowleft)$:

$$\det(\,\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t\,) = \prod\nolimits_{u \geq 1} (1 - t^u)^{j_u(\varphi)}\,.$$

$$\ln\big(\det(\,\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t\,)\big) = -\sum\nolimits_{m \geq 1} \mathrm{tr}\,(\varphi^m) \cdot t^m/m\;;$$

$$\ln\left(\prod\nolimits_{u\geq 1}(1-t^{u})^{j_u(\varphi)}\right) = \sum\nolimits_{u\geq 1} j_u(\varphi)\cdot \ln(1-t^{u}) =$$
$$= -\sum_{u\geq 1} j_u(\varphi)\cdot\sum_{v\geq 1} t^{uv}/v = -\sum_{m\geq 1}\frac{t^m}{m}\cdot\sum_{u\setminus m} u\cdot j_u(\varphi)\,.$$

8.21. Примеры. Пусть сначала $V\cong\mathbb{R}^1$, $\varphi=-\mathrm{id}_V$. Тогда

$$\det(\,\mathrm{id}_V-\varphi\cdot t\,) = 1+t = (1-t)^{-1}\cdot(1-t^2)^1\,.$$

Поэтому $j_1(\varphi) = -1$, $j_2(\varphi) = 1$, $j_{>2}(\varphi) = 0$. В некотором смысле оператор φ разлагается на один цикл длины 2 и "минус один" цикл длины 1. Это можно понять следующим образом. Рассмотрим двумерное пространство $\widetilde{V}$, порождённое векторами x и y. Пусть линейный оператор $\widetilde{\varphi}$ действует на нём перестановкой x и y. Таким образом, $\widetilde{\varphi}$ – линеаризация цикла длины 2. Но $\widetilde{V}$, относительно $\widetilde{\varphi}$, распадается на два одномерных инвариантных подпространства V_+ и V_-, порождённых векторами $x+y$ и $x-y$, соответственно. На первом $\widetilde{\varphi}$ действует тривиально, т.е., является линеаризацией цикла единичной длины. На втором $\widetilde{\varphi}=-\mathrm{id}$, т.е., изоморфен φ на $V\cong\widetilde{V}/V_+$. Заметим также, что формула (⟳) мультипликативна относительно расширений. Поэтому равенство "баланса циклов": $1\cdot 2-1\cdot 1=1$ означает точность последовательности пространств с операторами:

$$0\longrightarrow(V_+\,,\;\widetilde{\varphi}\,)\longrightarrow(\widetilde{V}\,,\;\widetilde{\varphi}\,)\longrightarrow(V\,,\;\varphi\,)\longrightarrow 0\,.$$

Теперь зададим оператор $\varphi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ матрицей:

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix};$$

$$\det(\,\mathrm{id}_V-\varphi\cdot t\,) = 1+t^2 = (1-t^2)^{-1}\cdot(1-t^4)^1\,.$$

Баланс циклов: $1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2$ в этой ситуации также выполняется и означает точность последовательности, аналогичной предыдущему примеру:

$$0 \longrightarrow (V', \, \widetilde{\varphi}) \longrightarrow (\widetilde{V}, \, \widetilde{\varphi}) \longrightarrow (V, \, \varphi) \longrightarrow 0\,.$$

Здесь $\widetilde{V} \cong \mathbb{C}^4$, а оператор $\widetilde{\varphi}$ действует на $\widetilde{V}$ циклической перестановкой базисных векторов: $x \to y \to z \to w \to x$. V' – инвариантное подпространство $\widetilde{V}$, порождённое $x+z$ и $y+w$: $\widetilde{\varphi}$ действует на них перестановкой. Тогда $\widetilde{\varphi}$ действует на факторе $\widetilde{V}/V'$ как φ на V. Действительно, этот фактор порождён $x+V'$ и $y+V'$, а действие $\widetilde{\varphi}$ таково:

$$\widetilde{\varphi}\,(x+V') = y+V'\,; \quad \widetilde{\varphi}\,(y+V') = z+V' = -x+V'\,.$$

Заметим, что `баланс циклов` для линеаризации перестановки конечного множества имеет вид:

$$\sum\nolimits_{u \geq 1} u \cdot j_u(\varphi) = \dim V \qquad (\mathring{=})$$

Примеры 8.21 показали, что такой баланс наблюдается и в более общей ситуации. Однако, он заведомо нарушается для нулевого или нильпотентного оператора.

8.22. Лемма. Пусть невырожденный оператор φ действует на конечномерном пространстве V, обладает финитными цикловыми показателями $(j_u(\varphi)\,,\ u \geq 1)$ и в некотором базисе V имеет рациональную матрицу. Тогда справедливо равенство баланса циклов $(\mathring{=})$.

Доказательство. Формула баланса циклов обобщается для вырожденного оператора φ. Тогда сумма равна $\operatorname{srk}(\varphi)$ – стабильному рангу φ, т.е., – количеству его ненулевых собственных значений, с учётом их кратности.

Сначала проведём доказательство для целочисленной матрицы оператора. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ – все ненулевые собственные значения φ. Тогда формула (↺) приобретает вид:

$$\det(\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t) = \prod_{a=1}^{d} (1 - \lambda_a \cdot t) = \prod_{u \geq 1} (1 - t^u)^{j_u(\varphi)}.$$

Поэтому слева стоит целочисленный полином степени d с единичным свободным коэффициентом. В главе 4 о почти тождественных функциях (стр. 39) была отмечена целочисленность всех цикловых показателей $j_u(\varphi)$ в этой ситуации. Следовательно, записанная формула – есть равенство конечных произведений и частных полиномов, приводящее к совпадению степеней полиномов в левой и правой части:

$$\mathrm{srk}(\varphi) = d = \sum_{u \geq 1} u \cdot j_u(\varphi).$$

Пусть теперь матрица оператора φ в некотором базисе V рациональна. Тогда все цикловые показатели $j_u(\varphi)$ также рациональны. Если они обнуляются при $u > n$, то формула (↺) уточняется следующим образом:

$$\det(\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t) = \prod_{a=1}^{d} (1 - \lambda_a \cdot t) = \prod_{u=1}^{n} (1 - t^u)^{j_u(\varphi)}.$$

Если M – общий знаменатель первых n цикловых показателей $j_u(\varphi)$, то существует равенство полиномов, из которого пройденным способом выводимо искомое тождество:

$$\big(\det(\mathrm{id}_V - \varphi \cdot t)\big)^M = \prod_{a=1}^{d} (1 - \lambda_a \cdot t)^M = \prod_{u=1}^{n} (1 - t^u)^{M \cdot j_u(\varphi)}.$$

Дополнительно, из этого равенства следует, что ненулевые собственные значения φ являются корнями из 1 степени $n!$, что проясняет смысл баланса циклов в этой ситуации:

$$\sum_{u \geq 1} u \cdot j_u(\varphi) = \sum_{u=1}^{n} u \cdot j_u(\varphi) = \sum_{u \setminus n!} u \cdot j_u(\varphi) = \mathrm{tr}\,(\varphi^{n!})\,.$$

Тем самым, лемма 8.22 доказана.

Предыдущие примеры давали повод считать, что циклическая финитность оператора φ при каких-то условиях связана с конечностью его порядка. Следующий пример предостерегает от наивных выводов по этому поводу.

8.23. Пример. Сначала для удобства обозначим:

$$\phi = (\sqrt{5} - 1)/\,2 \approx 0.618\,.$$

Определим оператор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и вычислим его степени:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \phi \end{pmatrix},\ \varphi^2 = \begin{pmatrix} -1 & -\phi \\ \phi & -\phi \end{pmatrix},\ \varphi^3 = \begin{pmatrix} -\phi & \phi \\ -\phi & -1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^4 = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \varphi^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi^6 = \varphi\,,\ \ldots$$

Итак, оператор φ – пятого порядка, что также подтверждается равенствами:

$$\det(\,\mathrm{id} - \varphi \cdot t\,) = 1 - \phi \cdot t + t^2 \setminus 1 - t^5\,,$$

$$1 - t^5 = (1 - t) \cdot (1 - \phi \cdot t + t^2) \cdot (1 - \phi^{-1} \cdot t + t^2)\,.$$

Операторы конечного порядка вызывают особенный интерес в контексте действий конечных групп. У простейших из них циклические показатели финитны, но не в этом случае:

$$\mathrm{tr}\,(\varphi^{5s}) = 2\,,\ \mathrm{tr}\,(\varphi^{5s\,\pm\,1}) = \phi\,,\ \mathrm{tr}\,(\varphi^{5s\,\pm\,2}) = -\phi^{-1}\,;$$

$$j_{2^v}(\varphi) = 2^{-v} \cdot \sum\nolimits_{m \setminus 2^v} \mu\left(\frac{2^v}{m}\right) \cdot \operatorname{tr}(\varphi^m) =$$

$$= 2^{-v} \cdot \left(\operatorname{tr}\left(\varphi^{2^v}\right) - \operatorname{tr}\left(\varphi^{2^{v-1}}\right)\right) =$$

$$= 2^{-v} \cdot \left(\operatorname{tr}\left(\varphi^{2^v \pmod 5}\right) - \operatorname{tr}\left(\varphi^{2^{v-1} \pmod 5}\right)\right) =$$

$$= 2^{-v} \cdot \left(\operatorname{tr}\left(\varphi^{2^{v \pmod 4}}\right) - \operatorname{tr}\left(\varphi^{2^{v-1 \pmod 4}}\right)\right) =$$

$$= 2^{-v} \cdot (-1)^v \cdot \sqrt{5} \neq 0\,.$$

Последнее равенство получено перебором 4-х возможных ситуаций, здесь предполагается $v \geq 1$.

Этот пример показывает, что из конечности порядка оператора не следует финитность его циклических показателей. Очевидно, верно и обратное: жорданова клетка с единичным собственным значением показывает, что из финитности циклических показателей оператора, даже при условии его невырожденности, не следует конечность его порядка. Критерии цилической финитности операторов пока что неясны. Но в скалярном случае ответ прост.

8.24. Лемма. Пусть V – конечномерно, а $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. Тогда φ циклически финитен только при $\lambda = \pm 1$ или 0.

Доказательство. Можно считать, что $\dim V = 1$. В этом случае обозначим $j_u(\varphi) = j_u(\lambda)$, $u \geq 1$. Ясно, что следующие последовательности показателей финитны:

$$j_u(0) \equiv 0\,;\; j_u(1) = [\,u = 1\,]\,;\; j_u(-1) = [\,u = 2\,] - [\,u = 1\,]\,.$$

Пусть $\lambda \neq \pm 1$ или 0, тогда запишем:

$$j_u(\lambda) = u^{-1} \cdot \sum\nolimits_{a \setminus u} \mu\left(\frac{u}{a}\right) \cdot \lambda^a\,.$$

Предположим, $\big(j_u(\lambda)\big)$ – финитна. Тогда для всех достаточно больших n и m должно выполняться:

$$j_{2^n}(\lambda) = 2^{-n} \cdot \sum\nolimits_{a \setminus 2^n} \mu\left(\frac{2^n}{a}\right) \cdot \lambda^a = 2^{-n} \cdot \left(\lambda^{2^n} - \lambda^{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 2^{-n} \cdot \lambda^{2^{n-1}} \cdot \left(\lambda^{2^{n-1}} - 1\right) = 0\,;$$

$$j_{3^m}(\lambda) = 3^{-m} \cdot \sum\nolimits_{a \setminus 3^m} \mu\left(\frac{3^m}{a}\right) \cdot \lambda^a = 3^{-m} \cdot \left(\lambda^{3^m} - \lambda^{3^{m-1}}\right) =$$

$$= 3^{-m} \cdot \lambda^{3^{m-1}} \cdot \left(\lambda^{2 \cdot 3^{m-1}} - 1\right) = 0\,;$$

Обозначим $\rho = \lambda^2$, согласно выбору, имеем $\rho \neq 1$ или 0. Но для всех достаточно больших n и m выполняется:

$$\rho^{2^{n-2}} = 1\,,\ \rho^{3^{m-1}} = 1\,.$$

Показатели, участвующие в этих равенствах, взаимно просты. Поэтому найдутся целые a и b такие, что:

$$2^{n-2} \cdot a + 3^{m-1} \cdot b = 1\,.$$

Из этого следуют равенства:

$$\rho = \rho^1 = \rho^{2^{n-2} \cdot a + 3^{m-1} \cdot b} = \left(\rho^{2^{n-2}}\right)^a \cdot \left(\rho^{3^{m-1}}\right)^b = 1\,.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 8.24.

8.25. Замечание. Исследование скаляров полезно для подсчёта баланса циклов (стр. 119). Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения оператора φ, тогда при некоторых условиях сходимости имеются равенства:

$$\sum\nolimits_{u \geq 1} u \cdot j_u(\varphi) = \sum\nolimits_{u \geq 1} \sum\nolimits_{m \setminus u} \mu(u/m) \cdot \mathrm{tr}\,(\varphi^m) =$$

$$= \sum_{u\ge 1} \sum_{m \setminus u} \mu(u/m) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m =$$
$$= \sum_{u\ge 1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{m \setminus u} \mu(u/m) \cdot \lambda_i^m =$$
$$= \sum_{u\ge 1} \sum_{i=1}^{n} u \cdot j_u(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{u\ge 1} u \cdot j_u(\lambda_i)\,.$$

При этом было показано, что $\lambda = 0$ не пополняет баланс циклов, а $\lambda = \pm 1$ вносят в него по 1. Если $\lambda \ne 0, \pm 1$, то соответствующий ряд, рассматриваемый как предел частичных сумм, расходится, поскольку слагаемые $u \cdot j_u(\lambda)$ не стремятся к нулю. Но есть процедуры, приписывающие рядам некоторые числовые значения (см. [9, гл. 15]). Один способ можно назвать `суммированием по Ламберту`. Рассмотрим выражение следующего вида:

$$\sum_{u\ge 1} u \cdot j_u(\lambda) \cdot \frac{t^{u-1}}{1+t^u} = \sum_{u\ge 1} j_u(\lambda) \cdot \big(\ln(1+t^u)\big)' =$$
$$= \sum_{u\ge 1} j_u(\lambda) \cdot \big(\ln(1-t^{2u}) - \ln(1-t^u)\big)' =$$
$$= \Big(\ln\big(\prod_{u\ge 1}(1-t^{2u})^{j_u(\lambda)}\big) - \ln\big(\prod_{u\ge 1}(1-t^u)^{j_u(\lambda)}\big)\Big)' =$$
$$= \big(\ln(1-\lambda\cdot t^2) - \ln(1-\lambda\cdot t)\big)' = \frac{\lambda}{1-\lambda\cdot t} - \frac{2\lambda\cdot t}{1-\lambda\cdot t^2}\,.$$

Очевидно, что для $\lambda \ne 1$ результат суммирования непрерывен при $t = 1$. В левой же части ламбертовский множитель в единице принимает значение $1/2$. Поэтому мы зададим значение в общем-то расходящейся суммы правилом:

$$\sum_{u\ge 1} u \cdot j_u(\lambda) \rightsquigarrow 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{1-\lambda\cdot t} - \frac{2\lambda\cdot t}{1-\lambda\cdot t^2}\right)\Bigg|_{t=1} = \frac{2\lambda}{\lambda-1}\,.$$

Иначе применим `суммирование по Дирихле`. Преобразуем полилогарифмическую функцию (A. Jonquière, 1888), используя формулу леммы 8.20 для $\lambda \in \mathbb{C}$ (стр. 117):

$$\mathrm{Li}_s(\lambda) = \sum\nolimits_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n^s} = \sum\nolimits_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum\nolimits_{u \setminus n} u \cdot j_u(\lambda) =$$

$$= \sum\nolimits_{u \geq 1} u \cdot j_u(\lambda) \cdot \sum\nolimits_{m \geq 1} \frac{1}{(u \cdot m)^s} =$$

$$= \sum\nolimits_{u \geq 1} \frac{u \cdot j_u(\lambda)}{u^s} \cdot \sum\nolimits_{m \geq 1} \frac{1}{m^s} = D_{j(\lambda)}(s-1) \cdot \zeta(s)\,;$$

$$D_{j(\lambda)}(s) = \sum\nolimits_{u \geq 1} \frac{j_u(\lambda)}{u^s} = \mathrm{Li}_{s+1}(\lambda)/\zeta(s+1)\,.$$

Дзета–функция Римана $\zeta(s)$ аналитически продолжается в область $s \neq 1$, при этом $\zeta(0) = -1/2$. Полилогарифм Жонкье $\mathrm{Li}_s(\lambda)$ также продолжается за свою очевидную область определения $\{|\lambda| < 1\,,\ s \in \mathbb{C}\}$, принимая при $s = 0$ рациональное значение $\lambda\big/(1-\lambda)$. Поэтому аналитически продолжается ряд Дирихле $D_{j(\lambda)}(s)$, и можно задать значение искомой сумме:

$$\sum_{u \geq 1} u \cdot j_u(\lambda) \rightsquigarrow D_{j(\lambda)}(-1) = \mathrm{Li}_0(\lambda)/\zeta(0) = \frac{2\lambda}{\lambda - 1}\,.$$

Когеренция разных суммирующих процедур вдохновляет на основательное исследование цикловых разложений.

8.26. Лемма. Пусть φ – оператор конечного порядка на вещественном конечномерном пространстве V. Тогда для φ выполнено равенство баланса циклов:

$$\sum\nolimits_{u \geq 1} u \cdot j_u(\varphi) \rightsquigarrow \dim V\,.$$

Доказательство. Рассмотрим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все комплексные собственные значения оператора φ. Они ненулевые и являются корнями из 1. Если среди них встречаются вещественные числа, то это – циклически финитные ± 1, добавляющие в баланс циклов ровно по 1. Невещественные собственные значения циклически нефинитны и встречаются сопряжёнными парами λ и $\overline{\lambda}$, где $\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$. Используя прежние вычисления, сочтём вклад такой пары в баланс циклов:

$$\frac{2\lambda}{\lambda - 1} + \frac{2\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1} = 2 \cdot \frac{\lambda \cdot \overline{\lambda} - \lambda + \overline{\lambda} \cdot \lambda - \overline{\lambda}}{\lambda \cdot \overline{\lambda} - \lambda - \overline{\lambda} + 1} = 2\,,$$

что и доказывает лемму 8.26.

8.27. Замечание. Совмещение обобщённого циклового разложения с теорией Пойа требует построения экспоненциального функтора $(U, V) \mapsto U^V$ с ожидаемыми свойствами:

$$U^V \otimes U^W \simeq U^{V \oplus W};\ (U^V)^W \simeq U^{V \otimes W};\ (U \otimes V)^W \simeq U^W \otimes V^W;$$

$$V^k \simeq V\,;\ V^0 \simeq k\,;\ k^V \simeq k\,;\ 0^V \simeq 0\,, V \neq 0\,.$$

Частными значениями такого функтора служат симметрическая и внешняя (грассманова) степени S и Λ:

$$S(V) \simeq S(k)^V\,,\ \Lambda(V) \simeq \Lambda(k)^V\,.$$

Но эта тема заслуживает отдельного изучения.

Литература

[1] Bogdanchuk O.A., Mishchenko S.P., Verëvkin A.B. *On Lie algebras with exponential growth of the codimensions* // Serdica Math. J., v. 40, n. 3-4, 2014, p. 209-240.

[2] Верёвкин А.Б. *О порождающих подалгебры Веронезе* // Учёные записки УлГУ, Фундаментальные проблемы математики и механики, 1996, вып. 2, с. 15-16.

[3] Верёвкин А.Б. *Фрагмент инвариантной комбинаторики* // Тезисы XIII Междунар. конфер. „Проблемы теоретической Кибернетики“, 27-31 мая 2002 г., Казань, с. 34.

[4] Верёвкин А.Б. *О положительных эйлеровых произведениях* // Материалы VIII междунар. семинара „Дискретная математика и её приложения“, 2-6 февраля 2004 г.– М.: Изд. мех-мата МГУ, 2004, с. 175.

[5] Верёвкин А.Б. *О производящей функции представлений* // Материалы IX Междунар. семинара „Дискретная математика и её приложения“, посв. 75-летию академика О.Б. Лупанова, 18-23 июня 2007 г.– М.: Изд. мех-мата МГУ, 2007, с. 209.

[6] Верёвкин А.Б. *О почти тождественных функциях* // Материалы междунар. конференции по алгебре, анализу

и геометрии, посв. юбилеям П.А. и А.П. Широковых.– К.: Казанский университет, изд. АН РТ, 2016, с. 126-127.

[7] Верёвкин А.Б., Мищенко С.П. *О многообразиях с тождествами однопорождённой свободной метабелевой алгебры* // Чебышевский сборник, 2016, т. 17, в. 2, с. 21-55.

[8] Власов Н.А. *Некоторые задачи комбинаторики.*– Ул.: УлГУ, 2002, 45 с.

[9] Воробьёв Н.Н. *Теория рядов.*– М.: Наука, 1975, 368 с.

[10] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.*– М.: Мир, 1998, 703 с.

[11] Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика.*– М.: Наука, 1990, 504 с.

[12] *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Уч. пособие* / Под ред. К.А. Рыбникова.– М.: Наука, 1982, 368 с.

[13] Кнут Д.Э. *Искусство программирования, т. 4, А. Комбин. алгоритмы, ч. 1.*– М.: ИД Вильямс, 2013, 960 с.

[14] Ландо С.К. *Лекции о производящих функциях.* 2-е изд.– М.: МЦНМО, 2004, 144 с.

[15] Липский В. *Комбинаторика для программистов.*– М.: Мир, 1988, 200 с.

[16] Nowicki A. *Silnie i symbole Newtona.*– Olsztyn, Toruń, 2012, 196 p.

[17] Ожигова Е.П. *Об истоках символических и комбинаторных методов в конце XVIII – начале XIX в.* / Историко-математические исследования, вып. XXIV.– М.: Наука, 1979, с. 121-157.

[18] *Перечислительные задачи комбинаторного анализа.* Сб. переводов статей под ред. Г.П. Гаврилова.– Библиотека Кибернетического сборника.– М.: Мир, 1979, 363 с.

[19] Полиа Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа. Части I, II.*– М.: Наука, 1978, 392+432 с.

[20] *Прикладная комбинаторная математика.* Сб. статей под ред. Э. Беккенбаха.– М.: Мир, 1968, 364 с.

[21] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элемент. функции.*– М.: Наука, 1981, 800 с.

[22] Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ.*– М.: ИЛ, 1963, 287 с.

[23] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.*– М.: Наука, 1982, 255 с.

[24] Roman S. *The Umbral Calculus.*– Acad. Press, 1984, 193 p.

[25] Рыбников К.А. *Комбинаторный анализ. Очерки истории. Уч. пособие.*– М.: Изд-во Мех-мата МГУ, 1996, 125 с.

[26] Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ. 2-е изд.*– М.: Изд-во Московского университета, 1985, 308 с.

[27] Саломаа А. *Жемчужины теории формальных языков.*– М.: Мир, 1986, 159 с.

[28] Сачков В.Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.*– М.: Наука, 1982, 384 с.

[29] Sloane N.J.A. *A Handbook of Integer Sequences.*– Academic Press, 1973, 206 p.

[30] Смагин А.А. *Модели разбиений.*– Ул.: УлГУ, 2013, 207 с.

[31] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика, т. 1.*– М.: Мир, 1990, 440 с.

[32] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции, т. 2.*– М.: Мир, 2009, 767 с.

[33] Уфнаровский В.А. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре* / Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 57.– М.: ВИНИТИ, 1990, с. 5-177.

[34] Харари Ф. *Теория графов.*– М.: Мир, 1973, 300 с.

[35] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия.*– М.: Мир, 1981, 600 с.

[36] Холл М. *Комбинаторный анализ.*– М.: ИЛ, 1963, 97 с.

[37] Эндрюс Г. *Теория разбиений.*– М.: Наука, 1982, 256 с.

[38] Якобс К. *Машинно-порождённые 0-1-последовательности*/ сб. *Машины Тьюринга и рекурсивные функции.*– М.: Мир, 1972, 264 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Верёвкин Андрей Борисович
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Ульяновского государственного университета

КОМБИНАТОРИКА

Учебное пособие

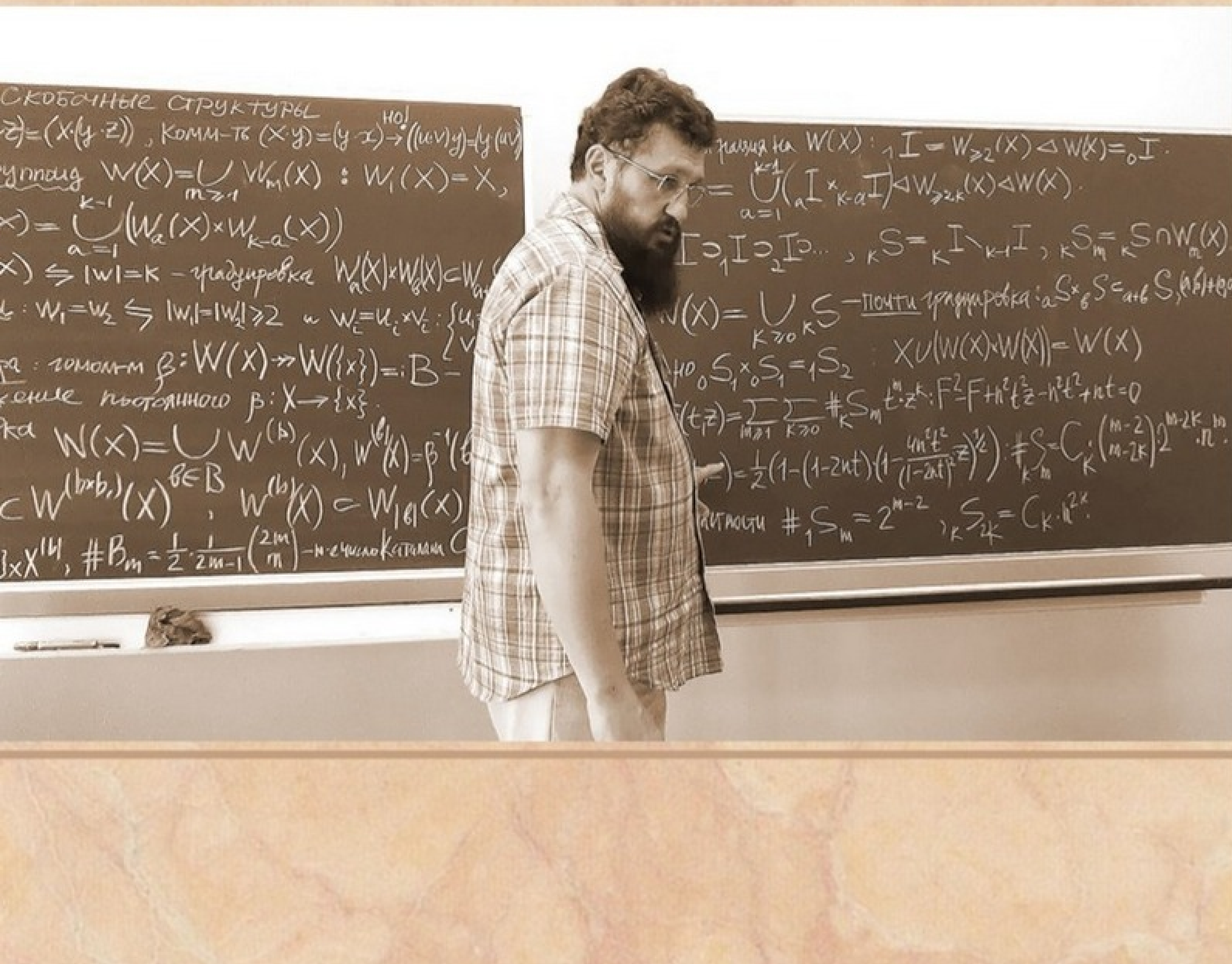
В авторской редакции

Издатель
Качалин Александр Васильевич
432042, Ульяновск, ул. Рябикова, 4.

Подписано в печать 20.02.2018.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая.
Текст набран в LaTeX2ε.
Усл.печ.л. 7,71. Заказ № 18/015

Тираж 100 экз.

Отпечатано в издательско-полиграфическом
центре «Гарт» ИП Качалин А.В.
432042, Ульяновск, ул. Рябикова, 4.



ISBN 978-5-6040503-6-1
9 785604 050361