О линейных уравнениях над инъективными модулями

Верёвкин А.Б.

Аннотация: В работе изучаются системы линейных уравнений над модулями. Доказано, что выполнимость для любой СЛУ критерия совместности Кронекера-Капелли равносильно инъективности модуля.

Ключевые слова: система линейных уравнений, признак Кронекера-Капелли, инъективный модуль.

Перенесём некоторые понятия линейной алгебры с полей и пространств на кольца и модули. Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей и ${}_AM$ – левый A-модуль. Системой линейных уравнений (СЛУ) над модулем ${}_AM$ назовём набор равенств вида:

$$\begin{cases} r_{11}\cdot x_1 + r_{12}\cdot x_2 + \cdots & = & b_1 \\ r_{21}\cdot x_1 + r_{22}\cdot x_2 + \cdots & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \end{cases} \tag{S}$$

Здесь $r_{ij} \in A$, $b_i \in M$. Количество уравнений и участвующих в них переменных может быть бесконечным, но в каждом отдельном уравнении системы почти все $r_{ij} = 0$. Решением этой СЛУ назовём (возможно бесконечный) набор элементов $(\, m_1,\, m_2,\, \dots)$ модуля ${}_AM$, при подстановке которого вместо переменных $(\, x_1,\, x_2,\, \dots)$ выполняются все равенства системы.

С алгебраической точки зрения, СЛУ над модулем ${}_AM$ – это равенство вида $\phi\,(X) = \beta$, где $\phi : M^J \to M^I$ – особенный аддитивный гомоморфизм, который для некоммутативного A не обязательно A-линеен. Его смысл проясняется в основательной книге [1].

Напомним, что имеется в виду. Заданы множества I и $J \neq \emptyset$. Непустое J индексирует переменные, а I соответствует уравнениям, которые могут отсутствовать, если все коэффициенты СЛУ нулевые: $r_{ij} = 0$, $b_i = 0$. Группы M^J и M^I – это прямые степени M соответствующих порядков $|I|$ и $|J|$:

$$M^J = \prod\nolimits_{j\,\in\, J} M\,, \quad M^I = \prod\nolimits_{i\,\in\, I} M\,, \quad M^{\emptyset} \cong 0.$$

M^J состоит из строк $(\, m_j\,,\ j \in J\,)$ элементов M, индексированных J. Полезно рассматривать группу столбцов тех же элементов $(\, m_j\,,\ j \in J\,)^{\top}$, которую мы обозначим $(M^J)^{\top}$. Степени $M^J \cong (M^J)^{\top}$ являются A-модулями относительно левого умножения компонент на одинаковые скаляры из A.

Помимо прямых степеней, важны прямые суммы $A^{(J)}$ и $A^{(I)}$:

$$A^{(J)} = \bigoplus\nolimits_{j\,\in\, J} A\,, \quad A^{(I)} = \bigoplus\nolimits_{i\,\in\, I} A\,, \quad A^{(\emptyset)} \cong 0.$$

Группа $A^{(J)} \subseteq A^J$ состоит из строк, почти все компоненты которых нулевые. Для конечных J прямые степени и суммы неразличимы: $A^{(J)} \cong A^J$. Поскольку A является левым (правым, двусторонним) A-модулем, такую же структуру имеют A^J и $A^{(J)}$. При этом ${}_AA^{(J)}$ – канонический *свободный* левый A-модуль. Он обладает стандартным базисом над A – $(\, e_s^{(J)},\, s \in J\,)$:

$$e_s^{(J)} = (\, \delta_{sj}\,,\ j \in J\,)\,, \text{ где } \delta_{sj} \text{ – символ Кронекера.}$$

Всякий гомоморфизм из свободного A-модуля определяется значениями на базисе (учтём, что у ${}_AA^{(\emptyset)}$ базис пуст), и эти значения можно выбрать произвольно, поскольку базисные элементы не имеют зависимостей над A. В частности, гомоморфизм левых A-модулей $\rho : {}_AA^{(I)} \to {}_AA^{(J)}$ определяется своими значениями на стандартном базисе ${}_AA^{(I)}$:

$$\rho\left(e_t^{(I)}\right) = (\, r_{ts}\,;\; s \in J\,) = {\sum}'_{s\,\in\,J} r_{ts} \cdot e_s^{(J)} \in {}_AA^{(J)}, \text{ где } r_{ts} \in A.$$

В равенстве сумма конечная, т.е., при всех $t \in I$ почти все компоненты строки $(\, r_{ts}\,;\; s \in J\,)$ – нулевые. Из этих строк составим матрицу $R = \big((\, r_{ts}\,,\; s \in J\,)\,,\, t \in I\,\big)^{\top}$ и получим формулу:

$$\rho\big((\, a_t\,,\; t \in I\,)\big) = \rho\left({\sum}'_{t\,\in\,I} a_t \cdot e_t^{(I)}\right) = {\sum}'_{t\,\in\,I} a_t \cdot \rho\left(e_t^{(I)}\right) =$$

$$= {\sum}'_{t\,\in\,I} a_t \cdot (\, r_{ts}\,,\; s \in J\,) = (\, a_t\,,\; t \in I\,) \cdot R\,,$$

из которой следует, что ρ – есть правое умножение на матрицу R:

$$\rho : {}_AA^{(I)} \xrightarrow{\;\cdot R\;} {}_AA^{(J)}.$$

Теперь мы проясним свойства гомоморфизма групп:

$$\mathrm{Hom}_A(\,\rho\,,\, {}_AM) :\; \mathrm{Hom}_A(\,{}_AA^{(J)},\, {}_AM) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\,{}_AA^{(I)},\, {}_AM) :\; \varphi \to \varphi \circ \rho\,.$$

Сначала для любого множества Y определим следующий изоморфизм:

$$h_Y : \mathrm{Hom}_A(\,{}_AA^{(Y)},\, {}_AM) \xrightarrow{\;\cong\;} \big(M^Y\big)^{\top};$$

$$h_Y(\bar{\theta}) = (\,\bar{\theta}\big(e_u^{(Y)}\big),\, u \in Y)^{\top} \in \big(M^Y\big)^{\top},\; h_Y^{-1}\big((\, m_u\,,\; u \in Y)^{\top}\big) = \theta\colon {}_AA^{(Y)} \longrightarrow {}_AM,$$

$$\text{где } \theta\big((\, a_v\,,\; v \in Y)\big) = (\, a_v\,,\; v \in Y) \cdot (\, m_u\,,\; u \in Y)^{\top} = {\sum}'_{u\,\in\,Y} a_u \cdot m_u \in {}_AM.$$

И, наконец, вычислим гомоморфизм групп $\phi : \big(M^J\big)^{\top} \longrightarrow \big(M^I\big)^{\top}$, соответствующий гомоморфизму $\mathrm{Hom}_A(\,\rho\,,\, {}_AM)$:

$$\phi\left((m_s\,,\; s \in J\,)^{\top}\right) = \left(h_I \circ \mathrm{Hom}_A(\,\rho\,,\, {}_AM) \circ h_J^{-1}\right)\left((m_s\,,\; s \in J\,)^{\top}\right) =$$

$$= \big(h_I \circ \mathrm{Hom}_A(\,\rho\,,\, {}_AM)\big)(\theta) = h_I\big(\mathrm{Hom}_A(\,\rho\,,\, {}_AM)(\theta)\big) = h_I(\theta \circ \rho) =$$

$$= \Big((\theta \circ \rho)\left(e_t^{(I)}\right),\, t \in I\Big)^{\top} = \Big(\theta\Big(\rho\left(e_t^{(I)}\right)\Big),\, t \in I\Big)^{\top} = \Big(\theta\Big({\sum}'_{s\,\in\,J} r_{ts} \cdot e_s^{(J)}\Big),\, t \in I\Big)^{\top} =$$

$$= \left({\sum}'_{s\,\in\,J} r_{ts} \cdot \theta\left(e_s^{(J)}\right),\, t \in I\right)^{\top} = \left({\sum}'_{s\,\in\,J} r_{ts} \cdot m_s\,,\, t \in I\right)^{\top} =$$

$$= (r_{t\sigma}\,;\; t \in I,\, \sigma \in J) \cdot (m_s\,;\; s \in J)^{\top} = R \cdot (m_s\,;\; s \in J)^{\top}.$$

Преобразования доказывают коммутативность следующего квадрата гомоморфизмов, объясняющего алгебраическую природу СЛУ над A-модулем ${}_AM$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(\,{}_AA^{(J)},\, {}_AM) & \xrightarrow{\;\mathrm{Hom}_A(\,\cdot R\,,\, {}_AM)\;} & \mathrm{Hom}_A(\,{}_AA^{(I)},\, {}_AM) \\
\cong\Big\downarrow h_J & & h_I\Big\downarrow\cong \\
\big(M^J\big)^{\top} & \xrightarrow{\quad R\,\cdot\quad} & \big(M^I\big)^{\top}
\end{array}$$

Но чтобы разобраться с решениями исходной СЛУ, нужно развить вышеприведённые рассуждения в когомологическом направлениии. Для этого дополним гомоморфизм ρ до следующей точной последовательности:

$$ {}_A A^{(K)} \xrightarrow[\sigma]{\cdot S} {}_A A^{(I)} \xrightarrow[\rho]{\cdot R} {}_A A^{(J)} \xrightarrow[\pi]{} {}_A U \longrightarrow 0 $$

Здесь $\pi \cong \mathrm{Coker}(\rho)$, $\mathrm{Ker}(\rho) \cong \mathrm{Im}(\sigma)$, и мы выписали начальный фрагмент свободной резольвенты левого A-модуля ${}_A U \cong \mathrm{Coker}(\rho)$. Точность этого комплекса в (I)-компоненте означает, что $S \cdot R = 0$ и строки S порождают слева зависимости строк R. Применим к этой резольвенте контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_A(\,*\,,\,{}_A M)$ и получим фрагмент комплекса групп:

$$ \big(M^J\big)^\top \xrightarrow{\;R\,\cdot\;} \big(M^I\big)^\top \xrightarrow{\;S\,\cdot\;} \big(M^K\big)^\top . \tag{$\star$} $$

Его начальные когомологии таковы:

$$ \mathrm{Ker}\,(R\,\cdot) \cong \mathrm{Hom}_A(\,{}_A U\,,\,{}_A M)\,, \quad \mathrm{Ker}\,(S\,\cdot)/\,\mathrm{Im}(R\,\cdot) \cong \mathrm{Ext}^1_A(\,{}_A U\,,\,{}_A M)\,. $$

Лемма 1 ([1]). Решения однородной СЛУ над модулем ${}_A M$

$$ \begin{cases} r_{11}\cdot x_1 + r_{12}\cdot x_2 + \cdots &= \;0 \\ r_{21}\cdot x_1 + r_{22}\cdot x_2 + \cdots &= \;0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} $$

однозначно соответствуют элементам группы $\mathrm{Hom}_A(\,{}_A U\,,\,{}_A M)$:

$$ (m_j\,,\, j\in J)^\top \in \big(M^J\big)^\top \rightsquigarrow \big({}_A U \xrightarrow{\;\nu\;} {}_A M\big) : \nu(u) = h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)(\pi^{-1}(u)), $$

$$ \big({}_A U \xrightarrow{\;\nu\;} {}_A M\big) \rightsquigarrow \big(x_j = (\nu\circ\pi)\big(e_j^{(J)}\big),\, j\in J\big)^\top \in \big(M^J\big)^\top . $$

Доказательство. Корректность первого соответствия обоснуем тем, что для решения однородной СЛУ $(m_j\,,\,j\in J)^\top$ морфизм $h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)$, посредством сюръекции π продолжается до морфизма $\nu\colon {}_A U \to {}_A M$, поскольку

$$ \mathrm{Ker}\,(\pi) \cong \mathrm{Im}\,(\rho) \subset \mathrm{Ker}(h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big))\,, $$

что равносильно $h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)\circ\rho = 0$. Действительно, есть равенства:

$$ \big(h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)\circ\rho\big)\,\big(e_i^{(I)}\big) = h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)\big(\rho\big(e_i^{(I)}\big)\big) = $$

$$ = h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)\Big(\sum_{s\,\in\,J}{}' r_{is}\cdot e_s^{(J)}\Big) = \sum_{s\,\in\,J}{}' r_{is}\cdot h_J^{-1}\big((m_j\,,\,j\in J)^\top\big)\big(e_s^{(J)}\big) = $$

$$ = \sum\nolimits'_{s\,\in\,J} r_{is}\cdot m_s = 0 \quad \text{для всех } i\in I\,. $$

Для обоснования второго соответствия, применим равенство $\pi\circ\rho = 0$:

$$ R\cdot\big((\nu\circ\pi)\big(e_j^{(J)}\big)\,,\,j\in J\big)^\top = R\cdot\big(\nu(\pi\big(e_j^{(J)}\big))\,,\,j\in J\big)^\top = $$

$$ = \Big(\sum\nolimits'_{j\,\in\,J} r_{ij}\cdot\nu(\pi\big(e_j^{(J)}\big))\,,\,i\in I\Big)^\top = \Big(\nu\,(\pi\Big(\sum\nolimits'_{j\,\in\,J} r_{ij}\cdot e_j^{(J)}\Big))\,,\,i\in I\,\Big)^\top = $$

$$ = \,\Big(\nu\,(\pi\,\Big(\rho\,\Big(e_i^{(I)}\Big)\Big))\,,\,i\in I\,\Big)^\top = \,\Big(\nu\,((\pi\circ\rho)\Big(e_i^{(I)}\Big))\,,\,i\in I\,\Big)^\top = \,(0\,,\,i\in I\,)^\top. $$

Итак, записано конструктивное соответствие решений однородной СЛУ и группы $\mathrm{Hom}_A({}_AU\,,\,{}_AM)$. Из этого следуют интересные наблюдения.

Замечание 2. Если ${}_AA^{(I)} \xrightarrow[\rho]{\cdot R} {}_AA^{(J)}$ – сюръективно, тогда

$$
{}_AU \cong 0\,, \quad \mathrm{Hom}_A({}_AU\,,\,{}_AM) \cong 0\,,
$$

и все решения однородной СЛУ с матрицей R над любым ${}_AM$ – нулевые.

Если же ρ несюръективно, тогда ${}_AU \ncong 0$, но над некоторыми модулями однородная СЛУ с матрицей R также может иметь лишь тривиальные решения (как уравнение $2x = 0$ над $A = \mathbb{Z} = {}_AM$), но над другими ${}_AM$ могут иметься нетривиальные решения, например, для ${}_AM \cong {}_AU$ – соответствующие ненулевому морфизму id_U: $(m_j\,,\,j \in J) = (\pi\big(e_j^{(J)}\big)\,,\,j \in J)$.

Рассмотрим теперь, в общем-то, неоднородную СЛУ (Ⓢ):

$$
R \cdot (\,x_j\,,\ j \in J\,)^{\top} = (\,b_i\,,\ i \in I\,)^{\top} \in (M^I)^{\top}.
$$

Для поиска её решений $(\,m_j\,,\ \ j \in J\,)^{\top} \in (M^J)^{\top}$ обратимся к комплексу ($\star$). Поскольку $S \cdot R = 0$, необходимым условием разрешимости системы является равенство $S \cdot (\,b_i\,,\ i \in I\,)^{\top} = 0$. То есть, все зависимости строк R, – матрицы системы, – должны быть зависимостями столбца свободных элементов СЛУ. Это необходимое условие называется *признаком совместности Кронекера-Капелли.* В произвольным случае этот признак может не быть критерием, что показывает пример уравнения $2x = 1$ над $A = \mathbb{Z} = {}_AM$. Возвращаясь к комплексу ($\star$), мы видим, что завершающим дополнительным к признаку Кронекера-Капелли условием совместности СЛУ является обнуление столбца $(\,b_i\,,\ \ i \in I\,)^{\top}$ в группе $\mathrm{Ext}^1_A({}_AU\,,\,{}_AM)$. Над A – полем или телом всякий модуль ${}_AU$ – пространство, то есть – свободен над A. Группа $\mathrm{Ext}^1_A({}_AU\,,\,{}_AM)$ в этом случае нулевая. Поэтому дополнительное условие выполняется всегда и незаметно. В общем случае верно утверждение.

Теорема 3. Эквивалентны следующие условия:

1. для любой СЛУ вида (Ⓢ) над модулем ${}_AM$ выполняется *критерий совместности Кронекера-Капелли*;
2. модуль ${}_AM$ инъективен.

Для нётеровых колец A в формулировке теоремы можно обойтись конечными СЛУ.

Доказательство. Для инъективного ${}_AM$ группа $\mathrm{Ext}^1_A({}_AU\,,\,{}_AM) \cong 0$, поэтому совместность системы (Ⓢ) сводится к условию Кронекера-Капелли. Что доказывает следствие ($2 \Rightarrow 1$).

Для доказательства обратного следствия ($1 \Rightarrow 2$) используем критерий Бэра иньективности модуля ${}_AM$ (см. [2]). Пусть ${}_AW$ – левый идеал A. Выберем его порождающее множество $(\,w_i\,,\,i \in I\,)$ и построим A-гомоморфизм:

$$
\rho\colon {}_AA^{(I)} \longrightarrow {}_AA : (\,a_i\,,\,i \in I\,) \longrightarrow {\sum}'_{i \in I} a_i \cdot w_i\,.
$$

Ему соответствует матрица-столбец $R = (\,w_i\,,\,i \in I)^{\top}$. Выбирая свободное накрытие левого A-модуля $\mathrm{Ker}(\rho)$, получим фрагмент резольвенты:

$$
{}_AA^{(K)} \xrightarrow[\sigma]{\cdot S} {}_AA^{(I)} \xrightarrow[\rho]{\cdot R} {}_AA \xrightarrow[\pi]{} {}_AA\,/\,{}_AW \longrightarrow 0\,.
$$

Применяя функтор $\operatorname{Hom}_A(\,\cdot\,,\,{}_AM)$, получим комплекс групп:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A({}_A(A\,/W\,)\,,\,{}_AM) \xrightarrow[\operatorname{Hom}_A(\pi,\,{}_AM)]{} M \xrightarrow[\operatorname{Hom}_A(\rho\,,\,{}_AM)]{R\,\cdot} \left(M^I\right)^{\top} \xrightarrow{S\,\cdot} \left(M^K\right)^{\top}.$$

СЛУ над ${}_AM$ соответствует гомоморфизму $\operatorname{Hom}_A(\rho\,,\,{}_AM)$ и имеет вид:

$$\left\{w_i \cdot x = b_i\,,\ i \in I.\right.$$

Выполнение критерия Кронекера-Капелли для этой СЛУ значит её разрешимость при любых $(\,b_i\,,\ i\in I)^{\top} \in \left(M^I\right)^{\top}$ с условием $S\cdot(\,b_i\,,\ i \in I)^{\top} = 0$. Таким образом, комплекс точен в компоненте $\left(M^I\right)^{\top}$ и $\operatorname{Ext}^1_A({}_AA\,/{}_AW\,,\,{}_AM) \cong 0\,$. Но эта группа включается в следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A({}_A(A\,/W\,),\,{}_AM) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A({}_AA,\,{}_AM) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A({}_AW,\,{}_AM) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A({}_AA\,/{}_AW\,,\,{}_AM) \cong 0$$

Поэтому любой A-гомоморфизм из ${}_AW$ в ${}_AM$ продолжается до A-гомоморфизма из ${}_AA$ в ${}_AM$. По критерию Бэра, модуль ${}_AM$ – инъективен.

Если кольцо A – нётерово, то любой его идеал ${}_AW$ конечнопорождён. Поэтому участвующее в доказательстве множество I – конечно. И соответствующая СЛУ имеет конечный набор уравнений. $\square$

Список литературы

[1] Касивара М., Шапира П. *Пучки на многообразиях.* М.: Мир, 1997.

[2] Каш Ф. *Модули и кольца.* М.: Мир, 1981.

On linear equations over injective modules

(Simbirsk archive. Mathematics. 2019-01-05)

Abstract: In this paper systems of linear equations over modules are studied. It is proved that the consistency criterion of Kronecker-Capelli for any SLE is equivalent to the injectivity of the module.

Key words: system of linear equations, Kronecker-Capelli condition, injective module.

Написано: 15.09.2018
Опубликовано: 05.01.2019

a_verevkin@mail.ru

УДК 512.664.2