Об инъективных оболочках одномерных модулей

Верёвкин А.Б.

Аннотация: В работе изучаются инъективные оболочки одномерных модулей над алгеброй полиномов $k[x]$. Построен k–линейный базис этих инъективных оболочек, с помощью которого исследуются гомоморфизмы и расширения связанных с ними модулей.

Ключевые слова: полином, инъективная оболочка модуля, производящая функция.

Пусть A – ассоциативная алгебра над полем k , M_A – правый A–модуль. Тогда определены k–пространства A_k и M_k , а также правый A–модуль k–линейных функций $L_k(M)_A := \mathrm{Hom}_k({}_A A_k\,,\, M_k)$. Действие A на $L_k(M)_A$ такое: $(l\cdot a)(\tilde a) = l(a\cdot\tilde a)$. Модуль $L_k(M)_A$ является естественным контейнером для M_A :

$$M_A \cong L_A(M)_A := \mathrm{Hom}_{mod-A}({}_A A_A, M_A)_A \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k({}_A A_k, M_k)_A \cong L_k(M)_A\,,$$

здесь каждый элемент $m\in M_A$ задаёт отображение $l_m : A_k\to M_k : l_m(a) = m\cdot a$.

Отметим, что A–структура $L_k(M)_A$ не учитывает A–структуру M_A, но только его k–структуру: k–линейно изоморфные модули имеют изоморфные контейнеры такого рода. Но от A–структуры M_A зависит его вложение в контейнер: $M_A\hookrightarrow L_k(M)_A$.

Напомним, что модуль I_A называется *инъективным*, если он выделяется прямым слагаемым при всяком вложении $I_A\hookrightarrow S_A$, и это условие эквивалентно точности контравариантного функтора $\mathrm{Hom}_{mod-A}(\,*\,, I_A)$, который в общем случае точен только слева. Определённый выше $L_k(M)_A$ – инъективен, поскольку для любого U_A с проективной резольвентой $P_*(U)_A \twoheadrightarrow U_A$ имеются изоморфизмы:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{mod-A}(\,U_A\,,\,L_k(M)_A) & \cong & \mathrm{Hom}_{mod-A}\big(\,U_A\,,\,\mathrm{Hom}_k(\,{}_A A_k\,,\,M_k)\big) \cong \\
\cong\ \mathrm{Hom}_k(\,U_A {\otimes}_A A_k\,,\,M_k) & \cong & \mathrm{Hom}_k(\,U_k\,,\,M_k)\,; \\
\mathrm{Ext}^q_{mod-A}(\,U_A\,,\,L_k(M)_A) & \cong & H_q\big(\mathrm{Hom}_{mod-A}(P_*(U)_A\,,\,L_k(M)_A)\big) \cong \\
\cong\ H_q\big(\mathrm{Hom}_k(\,P_*(U)_k\,,\,M_k)\big) & \cong & \mathrm{Ext}^q_k(\,U_k\,,\,M_k) \cong 0\,,\ \text{при } q>0\,.
\end{array}$$

Таким образом, модуль $L_k(M)_A$ является инъективным контейнером для M_A , а среди всех инъективных контейнеров модуля M_A есть наименьший по включению модуль $I(M)_A$, называемый *инъективной оболочкой* M_A . Эта оболочка изоморфна максимальному существенному расширению модуля M_A в любом его инъективном контейнере. И, в частности, она изоморфна максимальному существенному расширению $L_A(M)_A$ в $L_k(M)_A$. Ниже мы увидим, как эти соображения позволяют описать инъективные оболочки модулей в простой ситуации, которую можно обобщать. Некоторые детали изложены подробнее в [1] и [2]. В [3, с. 606] дана близкая конструкция.

Пусть $A\cong k[\,x\,]$ – алгебра полиномов от одной переменной x. Рассмотрим одномерный $k{-}A$–бимодуль ${}_k M_A$, представимый следующим образом. Фиксируем k-линейный изоморфизм $\theta\colon {}_k k\to {}_k M_A\colon \theta(\kappa)=\kappa\cdot\theta(1)=\kappa\cdot m_o$, где $\kappa\in k$, $0\neq m_o\in M$. Тогда для некого $\alpha\in k$ выполняется $m_o\cdot x=\theta(\alpha)=\alpha\cdot m_o$. Следовательно,

$$m_o\cdot x^2 = (m_o\cdot x)\cdot x = (\alpha\cdot m_o)\cdot x = \alpha\cdot(m_o\cdot x) = \alpha\cdot(\alpha\cdot m_o) = \alpha^2\cdot m_o\,.$$

По индукции и линейности, учитывая $m_o \cdot 1 = m_o$, при $n \geq 0$ получим:

$$m_o \cdot x^n = \alpha^n \cdot m_o\,; \quad m_o \cdot P(x) = P(\alpha) \cdot m_o\,.$$

Таким образом, имеем равенство и изоморфизм:

$$m_o \cdot (x-\alpha) = 0\,; \quad {}_kM_{k[x]} \cong {}_kk[\,x\,]\Big/\big((x-\alpha)\big)_{k[x]}\,.$$

Здесь $\big((x-\alpha)\big)$ – максимальный идеал $k[\,x\,]$, состоящий из полиномов с корнем α. Обозначим k_α фактор $k[\,x\,]\big/\big((x-\alpha)\big)$. Он порождён $1_\alpha = 1 \pmod{(x-\alpha)}$, который можно принять за вышеупомянутый $m_o \in {}_kM_A$. При $\alpha \neq \beta$ $(k_\alpha)_{k[x]} \ncong (k_\beta)_{k[x]}$, поскольку $x-\alpha$ аннулирует k_α, но k_β умножает на $\beta - \alpha \neq 0$.

Опишем инъективный контейнер $L_k(k_\alpha)_A$:

$$L_k(k_\alpha)_A \cong \mathrm{Hom}_k({}_AA_k, (k_\alpha)_k) \cong \mathrm{Hom}_k({}_{k[x]}k[x], k) \cong \big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}\,.$$

Зададим функции $(x^n)^* \in (k[\,x\,])^*$, $n \geq 0$, дуальные к $\{x^m,\ m \geq 0\}$ – базису алгебры $k[\,x\,]$ над полем k: $(x^n)^*(x^m) = [\,n = m\,]$ (где $[\,C\,]$ – характеристическая функция Айверсона [4] истинности условия C, и здесь она совпадает с символом Кронекера δ_{nm}). Отметим, что $(\,x^n)^* \cdot x^m = [\,n \geq m\,] \cdot (\,x^{n-m})^*$, поскольку выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\big((\,x^n)^* \cdot x^m\big)(\,x^s) &= (\,x^n)^*(\,x^m \cdot x^s) = (\,x^n)^*\big(\,x^{m+s}\big) = [\,n = m+s\,] = \\ &= [\,n-m = s\,] = [\,n-m \geq 0\,] \cdot \big(\,x^{n-m}\big)^*(\,x^s)\,.\end{aligned}$$

Для любого $\varphi \in (k[\,x\,])^*$ имеются разложения:

$$\varphi = \sum\nolimits_{n \geq 0} \varphi\,(\,x^n) \cdot (\,x^n)^*,$$

$$\varphi \cdot x^m = \sum\nolimits_{n \geq m} \varphi\,(\,x^n) \cdot (\,x^{n-m})^* = \sum\nolimits_{n \geq 0} \varphi\,(\,x^{n+m}) \cdot (\,x^n)^*.$$

Определение 1. Для $\varphi \in (k[\,x\,])^*$ зададим *производящий ряд Гильберта*, годный при любой характеристике поля k и однозначно определяющий функцию φ:

$$H_\varphi(t) = \sum\nolimits_{n \geq 0} \varphi\,(\,x^n) \cdot t^n = \varphi\left(\frac{1}{1 - x \cdot t}\right) \cdot$$

Тогда для всякого полинома $P(x) \in k[\,x\,]$ имеется выражение:

$$H_{\varphi \cdot P(x)}(t) = \sum\nolimits_{n \geq 0} \varphi\,\big(\,x^n \cdot P(x)\big) \cdot t^n = \varphi\left(\frac{P(x)}{1 - x \cdot t}\right) \cdot$$

Опишем вложение W: $(k_\alpha)_{k[x]} \hookrightarrow L_k(k_\alpha)_{k[x]} \cong \big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}$. Поскольку W пропускается через изоморфизм $(k_\alpha)_{k[x]} \cong L_{k[x]}(k_\alpha)_{k[x]}$, для $\kappa \in k_\alpha$ получаем равенства:

$$W(\kappa)\big(P(x)\big) = \kappa \cdot P(x) = \kappa \cdot P(\alpha)\,.$$

В частности, $W(\kappa)\,(x^n) = \kappa \cdot \alpha^n$, и, следовательно, имеется тождество:

$$H_{W(\kappa)}(t) = \sum\nolimits_{n \geq 0} \kappa \cdot \alpha^n \cdot t^n = \frac{\kappa}{1 - \alpha \cdot t}\,\cdot$$

Ряд $H_{W(\kappa)}(t)$ оказался рациональной дробью, для $\kappa, \alpha \neq 0$ – простейшей. Также заметим, что $W(k_\alpha)$ совпадает с собственным подпространством оператора правого умножения на x в пространстве $\big(k[\,x\,]\big)^*$, отвечающим собственному значению α. Действительно, пусть $\varphi \in \big(k[\,x\,]\big)^*$ и $\varphi \cdot x = \alpha \cdot \varphi$. Тогда для $n > 0$ вычисляется:

$$\varphi\,(\,x^n) = \varphi\,\big(\,x \cdot x^{n-1}\big) = (\varphi \cdot x)\big(\,x^{n-1}\big) = \alpha \cdot \varphi\,\big(\,x^{n-1}\big) = \cdots = \alpha^n \cdot \varphi\,(1)\,.$$

Поэтому $\varphi = \sum_{n \geq 0} \varphi\,(\,x^n) \cdot (\,x^n)^* = \varphi(1) \cdot \sum_{n \geq 0} \alpha^n \cdot (\,x^n)^* = W\big(\varphi(1)\big) \in W(k_\alpha)\,.$

Определение 2. Для оператора $\cdot\, x$ на $\big(k[\,x\,]\big)^*$ определим корневое подпространство K_α, отвечающее собственному значению $\alpha \in k$:

$$K_\alpha = \{\varphi \in \big(k[\,x\,]\big)^* \,\big|\, \exists\, n > 0 \colon \varphi \cdot (x - \alpha)^n = 0\,\}\,.$$

Тогда K_α снабжено растущей фильтрацией подпространств:

$$W(k_\alpha) = K_\alpha^{(1)} \subset K_\alpha^{(2)} \subset K_\alpha^{(3)} \subset \cdots \subset K_\alpha = \bigcup_{n > 0} K_\alpha^{(n)}\ , \text{ где}$$

$$K_\alpha^{(n)} = \{\varphi \in \big(k[\,x\,]\big)^* \,\big|\, \varphi \cdot (x - \alpha)^n = 0\,\}\,.$$

Например, $(\,x^n)^* \in K_0^{(n+1)} \subset K_0$. Пространства $K_\alpha^{(n)}$ и K_α обладают интересными свойствами, которые будут указаны в последующих утверждениях.

Лемма 3. Пространства $K_\alpha^{(n)}$ и K_α являются правыми подмодулями $\big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}$, причём $K_\alpha^{(n)}$ – существенный подмодуль $K_\alpha^{(n+1)}$.

Доказательство. По построению $K_\alpha^{(1)} = W(k_\alpha)_{k[x]}$. Пусть $n > 1$ и $\varphi \in K_\alpha^{(n)}$, тогда $\big(\varphi \cdot (x - \alpha)\big) \cdot (x - \alpha)^{n-1} = \varphi \cdot (x - \alpha)^n = 0$. Следовательно, $\varphi \cdot (x - \alpha) \in K_\alpha^{(n-1)} \subset K_\alpha^{(n)}$, и поэтому $\varphi \cdot x = \varphi \cdot (x - \alpha) + \alpha \cdot \varphi \in K_\alpha^{(n)}$. По индукции для $s \geq 0$ получим $\varphi \cdot x^s \in K_\alpha^{(n)}$ и, следовательно, $K_\alpha^{(n)} \cdot k[\,x\,] \subseteq K_\alpha^{(n)}$ для всех $n > 0$ и, соответственно, $K_\alpha \cdot k[\,x\,] \subseteq K_\alpha$.

Докажем существенность вложения $\big(K_\alpha^{(n)}\big)_{k[x]} \subset \big(K_\alpha^{(n+1)}\big)_{k[x]}$. Пусть $U_{k[x]}$ – подмодуль $\big(K_\alpha^{(n+1)}\big)_{k[x]}$ такой, что $U \cap K_\alpha^{(n)} = 0$. Тогда $U \cdot (x - \alpha) \subset K_\alpha^{(n+1)} \cdot (x - \alpha) \subset K_\alpha^{(n)}$ и $U \cdot (x - \alpha) \subset U \cap K_\alpha^{(n)} = 0$. Следовательно, $U \subset K_\alpha^{(1)} \subset K_\alpha^{(n)}$ и $U = U \cap K_\alpha^{(n)} = 0$.

Следствие 4. Для всех $n, m > 0$ $K_\alpha^{(n)}$ – существенный подмодуль $K_\alpha^{(n+m)}$ и K_α. В частности, $W(k_\alpha) = K_\alpha^{(1)}$ – существенный подмодуль K_α.

Доказательство. Имеем вложения $k[x]$–модулей: $K_\alpha^{(n)} \subset K_\alpha^{(n+1)} \subset \cdots \subset K_\alpha^{(n+m)}$. Пусть $U_{k[x]}$ – подмодуль $K_\alpha^{(n+m)}$ такой, что $U \cap K_\alpha^{(n)} = 0$. Среди чисел $\{0, \ldots, m\}$ возьмём наибольшее s с условием $U \cap K_\alpha^{(n+s)} = 0$. Если бы $s < m$, тогда имелись бы равенства: $0 = U \cap K_\alpha^{(n+s)} = \big(U \cap K_\alpha^{(n+s+1)}\big) \cap K_\alpha^{(n+s)}$. По Лемме 2, $K_\alpha^{(n+s)}$ – существенный подмодуль $K_\alpha^{(n+s+1)}$, поэтому $U \cap K_\alpha^{(n+s+1)} = 0$. Следовательно, $s = m$ и $U = U \cap K_\alpha^{(n+m)} = 0$. Таким образом, $K_\alpha^{(n)}$ – существенный в $K_\alpha^{(n+m)}$.

Теперь пусть $U_{k[x]}$ – подмодуль K_α такой, что $U \cap K_\alpha^{(n)} = 0$. Возьмём любой $u \in U$, тогда $u \in K_\alpha = \bigcup_{r > 0} K_\alpha^{(n+r)}$, и найдётся $m > 0$ такой, что $u \in U \cap K_\alpha^{(n+m)} \subset K_\alpha^{(n+m)}$. Так как $K_\alpha^{(n)}$ – существенный в $K_\alpha^{(n+m)}$ и $0 = U \cap K_\alpha^{(n)} = \big(U \cap K_\alpha^{(n+m)}\big) \cap K_\alpha^{(n)}$, есть равенства: $U \cap K_\alpha^{(n+m)} = 0$ и $u = 0$. Поэтому $U = 0$ и $K_\alpha^{(n)}$ – существенный в K_α.

Теорема 5. Для всех $n > 0$ $\big(K_\alpha\big)_{k[x]}$ – инъективная оболочка модулей $\big(K_\alpha^{(n)}\big)_{k[x]}$.

Доказательство. В силу предыдущих рассуждений, достаточно обосновать замкнутость $\left(K_\alpha\right)_{k[x]}$ в $\left(k[\,x\,]\right)^*_{k[x]}$, то есть, – отсутствие у $\left(K_\alpha\right)_{k[x]}$ собственных существенных расширений в инъективном контейнере $\left(k[\,x\,]\right)^*_{k[x]}$. Докажем это от противного.

Пусть $\left(K_\alpha\right)_{k[x]}$ – существенный подмодуль некого $M_{k[x]} \subset \left(k[\,x\,]\right)^*_{k[x]}$, $K_\alpha \neq M$ и $\phi \in M \backslash K_\alpha$. Тогда найдётся $P(x) \in k[\,x\,]$, для которого $0 \neq \phi \cdot P(x) \in K_\alpha$, где полином $P(x)$ можно взять наименьшей возможной степени. И тогда для некоторого $n > 0$ есть равенство $\phi \cdot P(x) \cdot (x-\alpha)^n = 0$, и при этом $P(\alpha) \neq 0$. Ведь иначе имелось бы разложение $P(x) = Q(x) \cdot (x-\alpha)^m$, где $m > 0$. Тогда $\phi \cdot Q(x) \cdot (x-\alpha)^{m+n} = 0$ и $0 \neq \phi \cdot Q(x) \in K_\alpha$ при условии $\deg Q(x) < \deg P(x)$, что противоречит минимальности степени $P(x)$. Итак, запомним, что полиномы $P(x)$ и $(x-\alpha)$ – взаимнопросты.

Возьмём $\theta = \phi \cdot (x-\alpha)^n \in M$. Если бы $\theta \in K_\alpha$, тогда для какого-то $s > 0$ имелось бы равенство $0 = \theta \cdot (x-\alpha)^s = \phi \cdot (x-\alpha)^n \cdot (x-\alpha)^s = \phi \cdot (x-\alpha)^{n+s}$, но тогда $\phi \in K_\alpha$, вопреки его выбору. Поэтому $\theta \in M \setminus K_\alpha$ и $\theta \cdot P(x) = \phi \cdot P(x) \cdot (x-\alpha)^n = 0$. Из минимальности степени $P(x)$: если $\theta \cdot R(x) = 0$, то $P(x)$ делит $R(x)$. Но из существенности K_α в M следует, что для некоторого $T(x) \in k[\,x\,]: 0 \neq \theta \cdot T(x) \in K_\alpha$, и для некотогого $t > 0$ получим равенство: $\theta \cdot T(x) \cdot (x-\alpha)^t = 0$. Следовательно, $P(x)$ делит $T(x) \cdot (x-\alpha)^t$, но $P(x)$ и $(x-\alpha)$ – взаимнопросты, поэтому $P(x)$ делит $T(x)$, и тогда $\theta \cdot T(x) = 0$, вопреки построению. Полученное противоречие демонстрирует равенство $M \setminus K_\alpha = \emptyset$ и завершает доказательство Теоремы 5.

Элементы модулей $K_\alpha^{(n)}$ и K_α заслужвают отдельного описания. Начнём с выяснения их производящих рядов, которые оказываются рациональными.

Лемма 6. Если $\varphi \in K_\alpha^{(n)}$, тогда ряд $H_\varphi(t) = P(t)/(1-\alpha \cdot t)^n$, где $P(t)$ – полином над полем k степени ниже n, при этом α может равняться 0. Если $\varphi \in K_\alpha$, тогда при $\alpha \neq 0$ ряд $H_\varphi(t)$ – правильная дробь над k, знаменатель которой является положительной степенью $(1-\alpha \cdot t)$, а при $\alpha = 0$ ряд $H_\varphi(t)$ – полином над k.

Доказательство. Ранее мы видели, что $K_\alpha^{(1)} = W(k_\alpha)$, и для $\varphi \in K_\alpha^{(1)}$ было получено равенство $H_\varphi(t) = \kappa/(1-\alpha \cdot t)$ для некого $\kappa = \varphi(1) \in k$. Параметр $\alpha \in k$ может быть любым. Утверждение леммы для $n > 1$ докажем по индукции.

Пусть $\varphi \in K_\alpha^{(n)}$, тогда $\psi = \varphi \cdot (x-\alpha) \in K_\alpha^{(n-1)}$, и получаем выражения:

$$\begin{aligned} H_\psi(t) &= H_{\varphi\cdot(x-\alpha)}(t) = \sum_{n\geq 0} \big(\varphi \cdot (x-\alpha)\big)\,(x^n) \cdot t^n = \sum\nolimits_{n\geq 0} \varphi\,\big((x-\alpha)\cdot x^n\big) \cdot t^n = \\ &= \sum_{n\geq 0} \varphi\,(x^{n+1}) \cdot t^n - \alpha \cdot \sum_{n\geq 0} \varphi\,(x^n) \cdot t^n = \frac{H_\varphi(t) - H_\varphi(0)}{t} - \alpha \cdot H_\varphi(t)\ ; \end{aligned}$$

$$t \cdot H_\psi(t) = H_\varphi(t) - \varphi(1) - \alpha \cdot t \cdot H_\varphi(t) = (1-\alpha \cdot t) \cdot H_\varphi(t) - \varphi(1)\ ;$$

$$t \cdot H_\psi(t) + \varphi(1) = (1-\alpha \cdot t) \cdot H_\varphi(t)\ .$$

По предположению индукции, $H_\psi(t) = P(t)/(1-\alpha \cdot t)^{n-1}$, где $\deg P(t) < n-1$. Следовательно, получаем равенство:

$$H_\varphi(t) = \frac{t \cdot P(t)}{(1-\alpha \cdot t)^n} + \frac{\varphi(1)}{1-\alpha \cdot t} = \frac{t \cdot P(t) + \varphi(1) \cdot (1-\alpha \cdot t)^{n-1}}{(1-\alpha \cdot t)^n}\,.$$

Поскольку $\deg\big(\,t \cdot P(t) + \varphi(1) \cdot (1-\alpha \cdot t)^{n-1}\big) < n$, Лемма 6 для $\alpha \neq 0$ доказана.

Если $\varphi \in K_0^{(n)}$, то $\varphi \cdot x^n = 0$ и при $m \geq n: \varphi\,(x^m) = \big(\varphi \cdot x^n\big)(x^{m-n}) = 0$. Следовательно, $H_\varphi(t) = \sum_{m\geq 0} \varphi\,(\,x^m) \cdot t^m = \sum_{n > m \geq 0} \varphi\,(\,x^m) \cdot t^m$ – полином степени ниже n. Утверждение о K_α теперь вытекает из его определения.

Из Леммы 6 следует, что $\dim K_\alpha^{(n)} \le \dim k[\,x\,]_{<n} = n$, где $k[\,x\,]_{<n}$ – пространство полиномов степени ниже n. Для равенства этих размерностей нужно, чтобы модуль $K_\alpha^{(n)}$ имел достаточно много линейно независимых над k элементов. Для их построения воспользуемся *обобщёнными дифференцированиями* над любым полем [5].

Определение 7. Для $\alpha \in k$ и $n \ge 0$ зададим линейные функции ${}_\alpha\Delta_n\colon k[\,x\,] \to k$ следующим правилом:

$$\sum\nolimits_{n\,\ge\,0} {}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\big)\cdot x^n = P(\alpha+x)\,,\ \text{здесь}\ P(x) \in k[\,x\,]\,.$$

Функции ${}_\alpha\Delta_n$ связаны с обобщёнными дифференцированиями $\Delta_n\colon k[\,x\,] \to k[\,x\,]$ соотношениями ${}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\big) = \Delta_n\big(P(x)\big)\big|_{x\,=\,\alpha}$, и в некотором смысле $\Delta_n = {}_x\Delta_n$. Если $\operatorname{char} k = 0$, тогда имеются равенства $\Delta_n = (n!)^{-1}\cdot D^n$, ${}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\big) = (n!)^{-1}\cdot P^{(n)}(\alpha)$. Через линейные функции $(\,x^s)^*$, $s \ge 0$ они выражаются таким образом:

$${}_\alpha\Delta_n = \sum\nolimits_{s\,\ge\,0} {}_\alpha\Delta_n\,(\,x^s)\cdot(\,x^s)^* = \sum\nolimits_{s\,\ge\,n} \binom{s}{n}\cdot \alpha^{s-n}\cdot(\,x^s)^*\,.$$

В частности, ${}_0\Delta_n = (\,x^n)^*$. При $\alpha \ne 0$ функции ${}_\alpha\Delta_n$ имеют сходную природу.

Лемма 8. Перечислим некоторые полезные свойства функций ${}_\alpha\Delta_n$:

1. $\sum_{n\,\ge\,0} {}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n = P(x)$;
2. ${}_\alpha\Delta_0\big(P(x)\big) = P(\alpha)$, ${}_\alpha\Delta_1\big(P(x)\big) = P'(\alpha)$;
3. ${}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\cdot Q(x)\big) = \sum\limits_{s\,=\,0}^{n} {}_\alpha\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot {}_\alpha\Delta_{n-s}\big(Q(x)\big)$;
4. ${}_\alpha\Delta_n\cdot x = \alpha\cdot{}_\alpha\Delta_n + [\,n>0\,]\cdot{}_\alpha\Delta_{n-1}$, ${}_\alpha\Delta_n\cdot(x-\alpha)^m = [\,n \ge m\,]\cdot{}_\alpha\Delta_{n-m}$;
5. ${}_\alpha\Delta_n\big((x-\beta)^m\big) = \dbinom{m}{n}\cdot(\alpha-\beta)^{m-n}$, ${}_\alpha\Delta_n\big((x-\alpha)^m\big) = [\,n=m\,]$;
6. ${}_\alpha\Delta_n\big(P(x-\beta)\big) = {}_{(\alpha-\beta)}\Delta_n\big(P(x)\big)$;
7. ${}_\alpha\Delta_n\cdot P(x) = \sum\limits_{s\,=\,0}^{n} {}_\alpha\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot{}_\alpha\Delta_{n-s}$;
8. $H_{{}_\alpha\Delta_n}(t) = t^n/\,(1-\alpha\cdot t)^{n+1}$.

Доказательство. 1. Определение 7 можно рассматривать, как систему фиксированных линейных связей между степенями переменных $(\alpha+x)$ и x. Заменив x на $(x-\alpha)$, получим соотношения степеней новых переменных с теми же коэффициентами.
2. Согласно линейности функций ${}_\alpha\Delta_n$, первое свойство достаточно проверить на степенях x^s, $s \ge 0$:

$$\sum\nolimits_{n\,\ge\,0} {}_\alpha\Delta_n\big(x^s\big)\cdot x^n = (\alpha+x)^s = \alpha^s + s\cdot\alpha^{s-1}\cdot x + \cdots\,,$$

поэтому ${}_\alpha\Delta_0\big(x^s\big) = \alpha^s$ и ${}_\alpha\Delta_0\big(x^s\big) = s\cdot\alpha^{s-1}$.
3. Необходимые выражения вытекают из определения ${}_\alpha\Delta_n$:

$$\sum\nolimits_{n\,\ge\,0} {}_\alpha\Delta_n\big(P(x)\cdot Q(x)\big)\cdot x^n = P(\alpha+x)\cdot Q(\alpha+x) =$$

$$= \sum\nolimits_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot x^s \cdot \sum\nolimits_{m\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_m\big(Q(x)\big)\cdot x^m =$$

$$= \sum_{s,\,m\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot {}_{\alpha}\Delta_m\big(Q(x)\big)\cdot x^{s+m} = \sum_{n\,\ge\,0} x^n \cdot \sum_{s\,=\,0}^{n} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot {}_{\alpha}\Delta_{n-s}\big(Q(x)\big)\,.$$

4. Первое из равенств следует из определяющего разложения:

$$\sum\nolimits_{n\,\ge\,0}\big({}_{\alpha}\Delta_n\cdot x\big)\big(P(x)\big)\cdot x^n = \sum\nolimits_{n\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_n\big(\,x\cdot P(x)\big)\cdot x^n = (\alpha+x)\cdot P(\alpha+x) =$$

$$= (\alpha+x)\cdot\sum_{m\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_m\big(P(x)\big)\cdot x^m = \sum_{m\,\ge\,0}\alpha\cdot{}_{\alpha}\Delta_m\big(P(x)\big)\cdot x^m + \sum_{m\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_m\big(P(x)\big)\cdot x^{m+1} =$$

$$=\sum_{n\,\ge\,0}\alpha\cdot{}_{\alpha}\Delta_n\big(P(x)\big)\cdot x^n+\sum_{n\,\ge\,1} {}_{\alpha}\Delta_{n-1}\big(P(x)\big)\cdot x^n=\sum_{n\,\ge\,0}\big(\alpha\cdot{}_{\alpha}\Delta_n+[\,n>0\,]\cdot{}_{\alpha}\Delta_{n-1}\big)\big(P(x)\big)\cdot x^n.$$

Второе равенство пункта следует из первого индукцией по m, но полезно и прямое рассуждение. Для $P(x)\in k[\,x\,]$, с учётом формулы 1, выведем равенства:

$$\sum_{n\,\ge\,0}\big({}_{\alpha}\Delta_n\cdot(x-\alpha)^m\big)\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n = \sum_{n\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_n\big((x-\alpha)^m\cdot P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n =$$

$$= (x-\alpha)^m\cdot P(x) = (x-\alpha)^m\cdot\sum_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_{\,s}\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^s =$$

$$=\sum_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^{s+m} = \sum_{n\,\ge\,m} {}_{\alpha}\Delta_{n-m}\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n =$$

$$= \sum_{n\,\ge\,0}[\,n\ge m\,]\cdot{}_{\alpha}\Delta_{n-m}\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n\,.$$

5. Непосредственно по определению выведем тождество:

$$\sum_{n\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_n\big((x-\beta)^m\big)\cdot x^n = (x+\alpha-\beta)^m = \sum_{n\,\ge\,0}\binom{m}{n}\cdot(\alpha-\beta)^{m-n}\cdot x^n.$$

Сравнение коэффициентов при степенях x^n даёт первое равенство пункта, подстановка $\beta=\alpha$ – второе. Формула ${}_{\alpha}\Delta_n\big((x-\alpha)^m\big) = [\,n=m\,]$ означает, что линейные функции ${}_{\alpha}\Delta_n$, $n\ge 0$ дуальны базису $\big\{(x-\alpha)^n, n\ge 0\big\}$ пространства $k[\,x\,]$.

6. Определим полином $Q(x) := P(x-\beta)$ и запишем для него главное соотношение:

$$\sum\nolimits_{n\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_n\big(Q(x)\big)\cdot x^n = Q(\alpha+x)\,.$$

Вернёмся к полиному P и получим искомые равенства:

$$\sum_{n\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_n\big(P(x-\beta)\big)\cdot x^n = P(\alpha+x-\beta) = P\big(x+(\alpha-\beta)\big) = \sum_{n\,\ge\,0} {}_{(\alpha-\beta)}\Delta_n\big(P(x)\big)\cdot x^n.$$

7. Формула следует из пунктов 1 и 4:

$${}_{\alpha}\Delta_n\cdot P(x) = {}_{\alpha}\Delta_n\cdot\sum_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^s = \sum_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot{}_{\alpha}\Delta_n\cdot(x-\alpha)^s =$$

$$= \sum_{s\,\ge\,0} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot{}_{\alpha}\Delta_{n-s}\cdot[\,n\ge s\,] = \sum_{s\,=\,0}^{n} {}_{\alpha}\Delta_s\big(P(x)\big)\cdot{}_{\alpha}\Delta_{n-s}\,.$$

8. Это утверждение следует из последовательных равенств:

$$\sum\nolimits_{n\geq 0} H_{\alpha\Delta_n}(t)\cdot z^n = \sum\nolimits_{n\geq 0} z^n\cdot\sum\nolimits_{s\geq 0} {}_\alpha\Delta_n\bigl(x^s\bigr)\cdot t^s =$$

$$= \sum\nolimits_{s\geq 0} t^s\cdot\sum\nolimits_{n\geq 0} {}_\alpha\Delta_n\bigl(x^s\bigr)\cdot z^n = \sum\nolimits_{s\geq 0} t^s\cdot(\alpha+z)^s = \bigl(1-t\cdot(\alpha+z)\bigr)^{-1} =$$

$$= (1-\alpha\cdot t - t\cdot z)^{-1} = (1-\alpha\cdot t)^{-1}\cdot\bigl(1-\frac{t}{1-\alpha\cdot t}\cdot z\bigr)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(1-\alpha\cdot t)^{n+1}}\cdot z^n .$$

Теорема 9. Функции $\{{}_\alpha\Delta_0 , \dots , {}_\alpha\Delta_{n-1}\}$ являются k–базисом $k[x]$–модуля $K_\alpha^{(n)}$, изоморфного $k[\,x\,]/\bigl((x-\alpha)^n\bigr)$ и порождённого ${}_\alpha\Delta_{n-1}$. Функции $\{{}_\alpha\Delta_0 , \dots , {}_\alpha\Delta_s , \dots\}$ являются базисом бесконечнопорождённого $k[x]$–модуля K_α над полем k .

Доказательство. По Лемме 8.4, ${}_\alpha\Delta_n\cdot(x-\alpha)^m = 0$ при $m>n$. Следовательно, $\{{}_\alpha\Delta_0 , \dots , {}_\alpha\Delta_{n-1}\}\subset K_\alpha^{(n)}$. Покажем, что при $s\geq 0$ функции ${}_\alpha\Delta_s$ k–линейно независимы. Предположив противное, возьмём линейную зависимость с наименьшим s :

$$\sum_{i=0}^{s}\nu_i\cdot {}_\alpha\Delta_i = 0\,,\ \text{где}\ \nu_i\in k\,,\ \nu_s\neq 0\,.$$

Правое умножение на $(x-\alpha)^s$ аннулирует все слагаемые, кроме последнего. Поэтому по той же Лемме 8.4 имеем равенство функций:

$$0 = \nu_s\cdot {}_\alpha\Delta_s\cdot(x-\alpha)^s = \nu_s\cdot {}_\alpha\Delta_0\,.$$

Применяя полученные функции к полиному $P(x)\equiv 1$, придём к противоречию:

$$0 = \nu_s\cdot {}_\alpha\Delta_0\bigl(P(x)\bigr) = \nu_s\cdot P(\alpha) = \nu_s\cdot 1 = \nu_s\neq 0\,.$$

Теперь покажем, что функции ${}_\alpha\Delta_0 , \dots , {}_\alpha\Delta_{n-1}$ своими k–линейными комбинациями порождают модуль $K_\alpha^{(n)}$. Возьмём $\varphi\in K_\alpha^{(n)}$. По Лемме 6, производящий ряд Гильберта φ имеет вид: $H_\varphi(t) = P(t)/(1-\alpha\cdot t)^n$, где $P(t) = a_0 + a_1\cdot t + \dots + a_{n-1}\cdot t^{n-1}$. Мы найдём линейную комбинацию ${}_\alpha\Delta_0 , \dots , {}_\alpha\Delta_{n-1}$ с тем же самым рядом Гильберта, и тем самым докажем равенство φ построенной линейной комбинации.

Полагая $\alpha\neq 0$, разложим $P(x)$ по *полиномам С.Н. Бернштейна* степени $n-1$ вида $(\alpha t)^{n-1}$, $(1-\alpha t)\cdot(\alpha t)^{n-2}$, ..., $(1-\alpha t)^{n-2}\cdot(\alpha t)$, $(1-\alpha t)^{n-1}$. Они являются базисом пространства $k[\,x\,]_{<n}$. Для $s=0,\dots,n-1$ используем биномиальное тождество:

$$(\alpha t)^s = (\alpha t)^s\cdot\bigl((1-\alpha t)+\alpha t\bigr)^{n-1-s} = (\alpha t)^s\cdot\sum_{u=0}^{n-1-s}\binom{n-1-s}{u}\cdot(1-\alpha t)^u\cdot(\alpha t)^{n-1-s-u} =$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1-s}\binom{n-1-s}{u}\cdot(1-\alpha t)^u\cdot(\alpha t)^{n-1-u}\,.$$

Теперь можно получить искомое выражение для $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s}{\alpha^s}\cdot(\alpha t)^s = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s}{\alpha^s}\cdot\sum_{u=0}^{n-1-s}\binom{n-1-s}{u}\cdot(1-\alpha t)^u\cdot(\alpha t)^{n-1-u} =$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1}(1-\alpha t)^u\cdot(\alpha t)^{n-1-u}\cdot\sum_{s=0}^{n-1-u}\binom{n-1-s}{u}\cdot\frac{a_s}{\alpha^s} =$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1}(1-\alpha t)^u \cdot t^{n-1-u} \cdot \sum_{s=0}^{n-1-u} \binom{n-1-s}{n-1-s-u} \cdot \alpha^{n-1-u-s} \cdot a_s =$$

$$= \begin{bmatrix} n-1-u =: v \\ v = 0\,, \ldots,\, n-1 \end{bmatrix} = \sum_{v=0}^{n-1}(1-\alpha t)^{n-1-v} \cdot t^v \cdot \sum_{s=0}^{v} \binom{n-1-s}{v-s} \cdot \alpha^{v-s} \cdot a_s\,.$$

Заметим, что полученное выражение имеет смысл и при $\alpha = 0$: при этом $s = v$. Производящий ряд функции φ принимает вид:

$$H_\varphi(t) = P(t)/(1-\alpha t)^n = \sum_{v=0}^{n-1}(1-\alpha t)^{n-1-v} \cdot t^v \cdot \sum_{s=0}^{v} \binom{n-1-s}{v-s} \cdot \alpha^{v-s} \cdot a_s \Big/ (1-\alpha t)^n =$$

$$= \sum_{v=0}^{n-1} \frac{t^v}{(1-\alpha \cdot t)^{v+1}} \cdot \sum_{s=0}^{v} \binom{n-1-s}{v-s} \cdot \alpha^{v-s} \cdot a_s\,.$$

Согласно Лемме 8.8, такой же ряд Гильберта имеет линейная комбинация

$$\sum_{v=0}^{n-1} {}_\alpha\Delta_v \cdot \sum_{s=0}^{v} \binom{n-1-s}{v-s} \cdot \alpha^{v-s} \cdot a_s\,,$$

поэтому она совпадает с φ, причём это верно и при $\alpha = 0$.

Итак, доказано, что для любого $\alpha \in k$ функции ${}_\alpha\Delta_0\,, \ldots,\, {}_\alpha\Delta_{n-1}$ образуют базис пространства $K_\alpha^{(n)}$. Согласно Лемме 8.4, в этом базисе матрица правого умножения на x – это жорданова клетка $J_n(\alpha)$ с собственным значением α порядка n. И поскольку $K_\alpha = \bigcup_{n>0} K_\alpha^{(n)}$, полный набор функций $\{\, {}_\alpha\Delta_s \mid s \geq 0 \,\}$ является k–базисом пространства K_α.

Из Леммы 8.4 следует, что правый $k[x]$–модуль $K_\alpha^{(n)}$ порождается ${}_\alpha\Delta_{n-1}$:

$${}_\alpha\Delta_{n-1} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} c_s \cdot (x-\alpha)^{n-1-s} = \sum_{s=0}^{n-1} c_s \cdot {}_\alpha\Delta_{n-1} \cdot (x-\alpha)^{n-1-s} = \sum_{s=0}^{n-1} c_s \cdot {}_\alpha\Delta_s\,. \qquad (\boxdot)$$

Отметим, что эти равенства доказывают изоморфизм $k[x]$–модулей:

$$\theta_\alpha^{(n)} \colon K_\alpha^{(n)} \xrightarrow{\cong} k[\,x\,]\big/\big((x-\alpha)^n\big)\,.$$

Действительно, зададим k–линейный изоморфизм $\theta_\alpha^{(n)}$ значениями на базисе пространства $K_\alpha^{(n)}$ и докажем его $k[x]$–линейность:

$$\theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_s\big) = (x-\alpha)^{n-1-s} \pmod{(x-\alpha)^n}, \; s = 0, \ldots, n-1\,.$$

$$\theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_s \cdot (x-\alpha)\big) = \theta_\alpha^{(n)}\big([\,s \geq 1\,] \cdot {}_\alpha\Delta_{s-1}\big) = [\,s \geq 1\,] \cdot (x-\alpha)^{n-s} \pmod{(x-\alpha)^n} =$$
$$= (x-\alpha)^{n-1-s} \cdot (x-\alpha) \pmod{(x-\alpha)^n} = \theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_s\big) \cdot (x-\alpha)\,.$$

Теперь $k[x]$–линейность $\theta_\alpha^{(n)}$ следует из совпадения алгебр: $k[x] \equiv k[(x-\alpha)]$. С использованием изоморфизма $\theta_\alpha^{(n)}$ равенства $(\boxdot)$ можно записать более компактно:

$$\big(\theta_\alpha^{(n)}\big)^{-1}\big(P(x)\big) = {}_\alpha\Delta_{n-1} \cdot P(x)\,, \;\; P(x) \in k[\,x\,]\big/\big((x-\alpha)^n\big)\,.$$

$$\kappa = {}_\alpha\Delta_{n-1} \cdot \theta_\alpha^{(n)}(\kappa)\,, \;\; \kappa \in K_\alpha^{(n)}\,;$$

Вторая из этих формул даёт конкретное разложение $\kappa \in K_\alpha^{(n)}$, аналогичное 8.1.:

$$\kappa \;=\; {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa) \;=\; {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}{}_\alpha\Delta_s\bigl(\theta_\alpha^{(n)}(\kappa)\bigr)\cdot(x-\alpha)^s \;=$$

$$=\;\sum_{s=0}^{n-1}{}_\alpha\Delta_s\bigl(\theta_\alpha^{(n)}(\kappa)\bigr)\cdot{}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot(x-\alpha)^s \;=\;\sum_{s=0}^{n-1}{}_\alpha\Delta_s\bigl(\theta_\alpha^{(n)}(\kappa)\bigr)\cdot{}_\alpha\Delta_{n-1-s}\;.$$

Возвращаясь к утверждениям теоремы, видим, что $k[x]$–модуль K_α не может быть конечнопорождён, поскольку любое конечное подмножество K_α лежит в некотором подмодуле $K_\alpha^{(n)}$ и поэтому не может порождать элемент ${}_\alpha\Delta_n \in K_\alpha^{(n+1)}\backslash K_\alpha^{(n)}$. Доказательство Теоремы 9 окончено.

Согласно Лемме 8.8, все функции ${}_\alpha\Delta_s$ обладают рациональным производящим рядом. Следующее утверждение описывает алгебраические и арифметические свойства линейных функций с рациональными рядами.

Лемма 10. Пусть $\phi \in \bigl(k[\,x\,]\bigr)^*$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. ряд $H_\phi(t)$ – рационален;
2. $\dim_k\bigl(\phi\cdot k[\,x\,]\bigr) < \infty\,$;
3. $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) \neq 0\,$;
4. пространство $\mathrm{Ker}(\phi)$ содержит ненулевой идеал $k[\,x\,]$;
5. последовательность $\bigl(\phi\,(1)\,,\,\phi\,(x)\,,\,\phi\,(x^2)\,,\,\ldots\bigr)$ начиная с некоторого номера становится линейно рекуррентной.

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 5$. Предположим, что ряд $H_\phi(t)$ – рационален. То есть, он представляется в виде $H_\phi(t) = Q(t)/P(t)$, где $Q(t)$ и $P(t) \not\equiv 0$ – взаимнопростые полиномы над полем k. Пусть $P(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$, где $c_n \neq 0$, – тогда $c_0 \neq 0$. Действительно, если $c_0 = 0$, то $P(0) = 0$ и также $Q(0) = H_\phi(0)\cdot P(0) = \phi(1)\cdot c_0 = 0$. Следовательно, полиномы $Q(t), P(t)$ не могут быть взаимнопростыми, вопреки условию.

Обозначим $Q(t) = q_0 + \cdots + q_m t^m$ и раскроем равенство $Q(t) = P(t)\cdot H_\phi(t)$:

$$q_0 + q_1 t + \ldots + q_m t^m = (c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n)\cdot\bigl(\phi(1) + \phi(x)\cdot t + \phi\left(x^2\right)\cdot t^2 + \ldots\bigr) =$$

$$= c_0\phi(1) + t\cdot\bigl(c_0\phi(x) + c_1\phi(1)\bigr) + \ldots + t^{n-1}\cdot\bigl(c_0\phi\left(x^{n-1}\right) + c_1\phi\left(x^{n-2}\right) + \ldots + c_{n-1}\phi(1)\bigr) +$$

$$+\sum_{u\,\geq\,n} t^u\cdot\sum_{s\,=\,1}^{n} c_s\phi\left(x^{u-s}\right).$$

Таким образом, при $u > \max(m, n-1)$ есть равенства, с некоторого номера определяющие рекурсию последовательности $\bigl(\phi(1)\,,\,\phi(x)\,,\,\phi\,(x^2)\,,\,\ldots\bigr)$:

$$c_0\phi\bigl(x^u\bigr) + c_1\phi\left(x^{u-1}\right) + \ldots + c_{n-1}\,\phi\left(x^{u-n+1}\right) + c_n\phi\left(x^{u-n}\right) = 0\,. \qquad (\text{Ⓡ})$$

И наоборот – рекурсия вида (Ⓡ) означает, что $P(t)\cdot H_\phi(t)$ является полиномом. Следовательно, ряд $H_\phi(t)$ – рационален, и первое условие равносильно пятому.

$5 \Leftrightarrow 3$. Преобразуем соотношение (Ⓡ), используя линейность ϕ:

$$0 = c_0\phi\bigl(x^u\bigr) + c_1\phi\left(x^{u-1}\right) + \ldots + c_{n-1}\,\phi\left(x^{u-n+1}\right) + c_n\phi\left(x^{u-n}\right) =$$

$$= \phi\left(c_0x^u + c_1x^{u-1} + \ldots + c_{n-1}x^{u-n+1} + c_nx^{u-n}\right) =$$
$$= \phi\left(\left(c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x^1 + c_n\right)\cdot x^{u-n}\right) =$$
$$= \left(\phi\cdot\left(c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x^1 + c_n\right)\right)\left(x^{u-n}\right).$$

Заметим, что $R(x) := c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x^1 + c_n = x^n\cdot P\big(x^{-1}\big)$. Выполнение системы равенств $\big(\phi\cdot R(x)\big)\big(x^s\big) = 0$ при всех $s \geq s_0 \geq 0$ равносильно одному функциональному условию $\phi\cdot R(x)\cdot x^{s_0} = 0$ и тогда $R(x)\cdot x^{s_0} \in \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) \neq 0$. С другой стороны, если $0 \not\equiv T(x) \in \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$, тогда $T(x) = R(x)\cdot x^{s_0}$, где $R(0) \neq 0$, и при $s \geq s_0$ получим систему равенств $\big(\phi\cdot R(x)\big)\big(x^s\big) = 0$. Поэтому третье и пятое условия равносильны.

$3 \Leftrightarrow 2$. Для $\phi \in \big(k[\,x\,]\big)^*$ имеется точная последовательность правых $k[\,x\,]$–модулей:

$$0 \longrightarrow \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) \longrightarrow k[\,x\,] \xrightarrow{\phi\cdot} \phi\cdot k[\,x\,] \longrightarrow 0.$$

В любом случае пространство $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$ является главным идеалом алгебры $k[\,x\,]$, и если $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) \neq 0$, то $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) = \big(T(x)\big) = T(x)\cdot k[\,x\,]$ для некоторого ненулевого полинома $T(x) \in k[\,x\,]$. Следовательно, получаем выражения, доказывающие эквивалентность второго и третьего утверждений Леммы 10:

$$\phi\cdot k[\,x\,] \cong k[\,x\,]/\,\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi) = k[\,x\,]/\big(T(x)\big),\ \dim_k\big(\phi\cdot k[\,x\,]\big) = \deg T(x) < \infty.$$

$3 \Leftrightarrow 4$. Докажем, что $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$ – наибольший идеал $k[\,x\,]$, лежащий в подпространстве $\mathrm{Ker}(\phi) \subset k[\,x\,]$. Пусть $U(x) \in \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$, то есть $\phi\cdot U(x) = 0$ и для всякого полинома $V(x) \in k[\,x\,]$ имеем равенство:

$$\big(\phi\cdot U(x)\big)\big(V(x)\big) = \phi\big(U(x)\cdot V(x)\big) = 0.$$

В частности, для любых полиномов $V_1(x)$, $V_2(x) \in k[\,x\,]$ получаем выражения:

$$0 = \phi\big(U(x)\cdot V_1(x)\cdot V_2(x)\big) = \big(\phi\cdot U(x)\cdot V_1(x)\big)\big(V_2(x)\big):\ U(x)\cdot V_1(x) \in \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi);$$

$$0 = \big(\phi\cdot U(x)\big)(1) = \phi\big(U(x)\big):\ U(x) \in \mathrm{Ker}(\phi).$$

И, таким образом, $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$ – идеал $k[\,x\,]$, лежащий в $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Пусть I – идеал $k[\,x\,]$, $I \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ и $V(x) \in I$. Тогда для любого $W(x) \in k[\,x\,]$ имеется вложение $V(x)\cdot W(x) \in I \subset \mathrm{Ker}(\phi)$, то есть:

$$0 = \phi\big(V(x)\cdot W(x)\big) = \big(\phi\cdot V(x)\big)\big(W(x)\big):\ V(x) \in \mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi).$$

Следовательно, I содержится в $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(\phi)$, который, таким образом, оказывается наибольшим идеалом алгебры $k[\,x\,]$, лежащим в пространстве $\mathrm{Ker}(\phi)$. Лемма 10 полностью доказана, а из неё вытекает интересный факт:

Теорема 11. Множество функций $\phi \in \big(k[\,x\,]\big)^*$ с рациональным рядом $H_\phi(t)$ образует инъективный $k[x]$–подмодуль $\big(k[\,x\,]\big)^*$. Над алгебраически замкнутым полем k он является инъективной оболочкой суммы всех одномерных $k[x]$–модулей.

Доказательство. Для удобства обозначим заявленное подмножество $\big(k[\,x\,]\big)^*$:

$$R = \big\{\phi \in \big(k[\,x\,]\big)^* \ \big|\ H_\phi(t) \text{– рационален}\big\}.$$

Поскольку H линейно по ϕ, R – подпространство $\big(k[\,x\,]\big)^*$. Пусть $\phi \in R$, тогда по Лемме 10, $\dim_k\big(\phi\cdot k[\,x\,]\big) < \infty$. Но для любого $U(x) \in k[\,x\,]$ имеются вложения:

$$U(x)\cdot k[\,x\,] \subset k[\,x\,] \quad \Rightarrow \quad \phi\cdot\big(U(x)\cdot k[\,x\,]\big) = \big(\phi\cdot U(x)\big)\cdot k[\,x\,] \subset \phi\cdot k[\,x\,]\,.$$

Поэтому $\dim_k\Big(\big(\phi\cdot U(x)\big)\cdot k[\,x\,]\Big) < \infty$. По Лемме 10 получаем $\phi\cdot U(x) \in R$. Следовательно, R является $k[x]$–подмодулем инъективного модуля $\big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}$. Чтобы доказать инъективность $R_{k[x]}$, теперь достаточно продемонстрировать, что он не имеет собственных существенных расширений в $\big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}$.

Пусть $0 \neq m \in M_{k[x]} \subset \big(k[\,x\,]\big)^*_{k[x]}$ и $R_{k[x]}$ – существенный подмодуль $M_{k[x]}$. Тогда для некоторого $U(x) \in k[\,x\,]$ должны иметь $0 \neq m\cdot U(x) \in R_{k[x]}$ и, по Лемме 10, найдётся $V(x) \in k[\,x\,]$ такой, что $0 = \big(m\cdot U(x)\big)\cdot V(x) = m\cdot\big(U(x)\cdot V(x)\big)$. По той же Лемме получаем $m \in R$ и $M = R$. Первая часть Теоремы 11 доказана.

Если поле k алгебраически замкнуто, то рациональный ряд $H_\varphi(t)$ раскладывается в сумму полинома и простейших дробей со знаменателями вида $(1-\alpha\cdot t)^s$, $\alpha \in k$, $s > 0$. Это разложение даёт установить аддитивные компоненты $\varphi \in \big(k[\,x\,]\big)^*$: полиному степени n соответствует функция из $K_0^{(n+1)} \subset K_0$, простейшей дроби со знаменателем $(1-\alpha\cdot t)^s$ – функция из $K_\alpha^{(s)} \subset K_\alpha$. Сумма этих компонент – элемент пространства $\sum_{\alpha\in k} K_\alpha \subset \big(k[\,x\,]\big)^*$ с тем же производящим рядом, совпадающий поэтому с функцией φ.

Покажем, что сумма $\sum_{\alpha\in k} K_\alpha$ – прямая. Если $\phi \in K_\alpha \cap \sum_{\beta\in k}^{\beta\neq\alpha} K_\beta$, тогда он одновременно аннулируется полиномами вида $(x-\alpha)^s$ и $\prod_{\beta\in k}^{\beta\neq\alpha}(x-\beta)^{m_\beta}$ (произведение берётся конечным), которые взаимно просты. Поэтому ϕ аннулируется единицей – их наибольшим общим делителем: $\phi = \phi\cdot 1 = 0$. Следовательно, $\sum_{\alpha\in k} K_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in k} K_\alpha$. При этом любая функция из $\bigoplus_{\alpha\in k} K_\alpha$ имеет рациональный производящий ряд, без необходимости алгебраической замкнутости поля k. Таким образом, подпространство $R \subset \big(k[\,x\,]\big)^*$ совпадает с $\bigoplus_{\alpha\in k} K_\alpha$ – прямой суммой инъективных модулей, которая инъективна, поскольку алгебра $k[\,x\,]$ – нётерова. По Теореме 5, K_α является инъективной оболочкой одномерного $k[x]$–модуля $K_\alpha^{(1)} \cong k_\alpha$. Поэтому $\bigoplus_{\alpha\in k} K_\alpha$ – инъективная оболочка $\bigoplus_{\alpha\in k} k_\alpha$, и доказательство Теоремы 11 окончено.
Теперь возможно вычислить группы гомоморфизмов построенных $k[\,x\,]$–модулей.

Лемма 12. Пусть α, $\beta \in k$ и $\alpha \neq \beta$. Тогда следующие группы тривиальны:

$$\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta^{(m)}\big),\ \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta\big),\ \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha,\, K_\beta^{(m)}\big),\ \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha,\, K_\beta\big).$$

Тривиальна $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha,\, K_\alpha^{(m)}\big)$, а следующие таковы: $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big) \cong K_\alpha^{(n)}$, $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha^{(m)}\big) \cong K_\alpha^{(\min\{n,\,m\})}$, $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha,\, K_\alpha\big) \cong k\big[\big[(x-\alpha)\big]\big]$.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq \beta$ и $\phi \in \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta^{(m)}\big)$. Поскольку $k[\,x\,]$–модуль $K_\alpha^{(n)}$ порождён элементом ${}_\alpha\Delta_{n-1}$, гомоморфизм ϕ определяется своим значением $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1}) \in K_\beta^{(m)}$. Поэтому $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})\cdot(x-\beta)^m = 0$. Но вместе с тем имеется равенство: $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})\cdot(x-\alpha)^n = \phi\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot(x-\alpha)^n\big) = \phi\,(0) = 0$, и поэтому получаем тождество:

$$0 = \phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})\cdot \text{НОД}\,\big((x-\beta)^m,\,(x-\alpha)^n\big) = \phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})\cdot 1 = \phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})\,,$$

из которого следует $\phi \equiv 0$ и $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta^{(m)}\big) \cong 0$.

Изоморфизм $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta\big) \cong 0$ доказывается аналогично, ведь для любого морфизма $\phi \in \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\beta\big)$ имеем $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1}) \in K_\beta^{(m)}$ для некоторого $m \geq 1$.

Изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\, K_\beta^{(m)}\big) \cong \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\, K_\beta\big) \cong 0$ вытекают из предыдущего, поскольку $K_\alpha = \bigcup_{n\geq 1} K_\alpha^{(n)}$, а для рассматриваемых морфизмов уже доказано, что $\phi\big|_{K_\alpha^{(n)}} \equiv 0$ для любого n.

Покажем, что $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\, K_\alpha^{(m)}\big) \cong 0$. Известно, что $\big\{{}_\alpha\Delta_s\,, s \geq 0\big\}$ – базис пространства K_α. Пусть $\phi\colon K_\alpha \to K_\alpha^{(m)}$ – $k[\,x\,]$–гомоморфизм, но тогда есть равенства:

$$\phi\big({}_\alpha\Delta_s\big) = \phi\big({}_\alpha\Delta_{s+m}\cdot(x-\alpha)^m\big) = \phi\big({}_\alpha\Delta_{s+m}\big)\cdot(x-\alpha)^m = 0\,.$$

Чтобы вычислить группы $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big)$ и $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha^{(m)}\big)$ снова используем порождёность $k[\,x\,]$–модуля $K_\alpha^{(n)}$ элементом ${}_\alpha\Delta_{n-1}$. Морфизм ϕ определяется значением $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1}) \in \phi\,\big(K_\alpha^{(n)}\big) \subset K_\alpha^{(n)}$. В первом случае $\phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})$ должен принадлежать модулю $K_\alpha^{(n)} \bigcap K_\alpha = K_\alpha^{(n)}$, во втором – $K_\alpha^{(n)} \bigcap K_\alpha^{(m)} = K_\alpha^{(\min\{n,\,m\})}$. Соответствие $\phi \leftrightarrow \phi\,({}_\alpha\Delta_{n-1})$ определяет изоморфизм групп (на самом деле пространств и, с учётом коммутативности алгебры $k[\,x\,]$, $k[\,x\,]$–модулей – подробности ниже).
Для вычисления группы $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\, K_\alpha\big)$ воспользуемся определением:

$$K_\alpha = \bigcup_{n\geq 1} K_\alpha^{(n)} \cong \varinjlim_n K_\alpha^{(n)}\,,\ \text{где}\ \iota_{\,n,\,n+1}\colon K_\alpha^{(n)} \to K_\alpha^{(n+1)} – \text{естественное вложение.}$$

Поэтому, согласно предыдущему, получаем изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\, K_\alpha\big) \cong \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(\varinjlim_n K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big) \cong \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big) \cong \varprojlim_n K_\alpha^{(n)}.$$

Для вычисления обратного предела изучим морфизмы соответствующей диаграммы. Начнём с подробного описания изоморфизма одного из предыдущих пунктов:

$$\rho_n\colon \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big) \longrightarrow K_\alpha^{(n)},\ \ \rho_n(\phi) = \phi\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big)\,,\ \ \big(\,\rho_n^{-1}(\kappa_1)\big)(\kappa_2) = \kappa_1\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_2)\,.$$

Здесь $\phi \in \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big)$, $\kappa_{1,\,2} \in K_\alpha^{(n)}$, а $\theta_\alpha^{(n)}\colon K_\alpha^{(n)} \to k[\,x\,]\big/\big((x-\alpha)^n\big)$ – изоморфизм из доказательства Теоремы 9, на стр. 8, такой что $\theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_s\big) \equiv (x-\alpha)^{n-1-s}$.

Если $\iota_n\colon K_\alpha^{(n)} \to K_\alpha$ – естественное вложение, то $\rho_n(\iota_n) = \iota_n\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = {}_\alpha\Delta_{n-1}$. Для обратного морфизма ρ_n^{-1} и $\kappa \in K_\alpha^{(n)}$ есть несколько интересных равенств:

$$\big(\,\rho_n^{-1}\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big)\big)(\kappa) = {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa) = \kappa\,,\ \ \big(\,\rho_n^{-1}(\kappa)\big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = \kappa\cdot\theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = \kappa\cdot 1 = \kappa\,.$$

Это следует из более общих свойств:

$$\big(\,\rho_n^{-1}(\kappa_1)\big)(\kappa_2) = \kappa_1\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_2) = {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_1)\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_2) =$$

$$= {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_2)\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_1) = \big(\,\rho_n^{-1}(\kappa_2)\big)(\kappa_1) = \big(\theta_\alpha^{(n)}\big)^{-1}\big(\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_1)\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa_2)\big)\,.$$

Морфизм $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(\iota_{\,n,\,n+1}\,,\, K_\alpha\big)\colon \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n+1)},\, K_\alpha\big) \to \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\, K_\alpha\big)$ является естественным ограничением на подмодуль $\big\downarrow_n^{n+1}\colon \chi \to \chi\circ\iota_{\,n,\,n+1} = \chi\big|_{K_\alpha^{(n)}}$. Теперь найдём индуцированный $\rho_\cdot$ морфизм $K_\alpha^{(n+1)} \to K_\alpha^{(n)}$. Для $\kappa \in K_\alpha^{(n+1)}$ получим:

$$\big(\rho_n\circ\big\downarrow_n^{n+1}\circ\,\rho_{n+1}^{-1}\big)(\kappa) \;=\; \rho_n\Big(\big(\big\downarrow_n^{n+1}\circ\,\rho_{n+1}^{-1}\big)(\kappa)\Big) \;=\; \Big(\big(\big\downarrow_n^{n+1}\circ\,\rho_{n+1}^{-1}\big)(\kappa)\Big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) =$$

$$= \Big(\downarrow_n^{n+1}\big(\rho_{n+1}^{-1}(\kappa)\big)\Big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = \big(\rho_{n+1}^{-1}(\kappa)\big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = \kappa\cdot\theta_\alpha^{(n+1)}\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) =$$
$$= \kappa\cdot(x-\alpha)^{(n+1)-1-(n-1)} = \kappa\cdot(x-\alpha)\,.$$

И, таким образом, имеем коммутативный квадрат отображений:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n+1)}\,,\,K_\alpha\big) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_{k[x]}(\iota_{n,\,n+1}\,,\,K_\alpha)=\downarrow_n^{n+1}"] \arrow[d, "\rho_{n+1}"', "\cong"] && \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)}\,,\,K_\alpha\big) \arrow[d, "\cong"', "\rho_n"] \\
K_\alpha^{(n+1)} \arrow[rr, "\cdot\,(x-\alpha)"] && K_\alpha^{(n)}
\end{tikzcd}$$

Следовательно, необходимо вычислить обратный предел такой диаграммы:

$$\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha\big) \cong \varprojlim K_\alpha^{(n)} \cong \varprojlim\Big(\cdots \xrightarrow{\cdot\,(x-\alpha)} K_\alpha^{(3)} \xrightarrow{\cdot\,(x-\alpha)} K_\alpha^{(2)} \xrightarrow{\cdot\,(x-\alpha)} K_\alpha^{(1)}\Big)\,.$$

Предел состоит из последовательностей $\Xi = (\,\ldots\,,\kappa_3\,,\kappa_2\,,\kappa_1) \in \prod_{n\ge 1} K_\alpha^{(n)}$, таких что $\kappa_n \in K_\alpha^{(n)}$ и $\kappa_{n+1}\cdot(x-\alpha) = \kappa_n$. И поскольку каждый κ_n является k–линейной комбинацией функций ${}_\alpha\Delta_s\,,\ s = 0\,,\ldots\,,n-1\,,$ для которых ${}_\alpha\Delta_{s+1}\cdot(x-\alpha) = {}_\alpha\Delta_s\,,$ то последовательность Ξ представима счётной k–линейной комбинацией простых последовательностей $\xi^{\langle u\rangle} = \big(\,\ldots\,,\,\kappa_3^{\langle u\rangle},\,\kappa_2^{\langle u\rangle},\,\kappa_1^{\langle u\rangle}\big)$, где $\kappa_n^{\langle u\rangle} = [\,n\ge u\,]\cdot{}_\alpha\Delta_{n-u}\,,$ при $n,u\ge 1$.

Зафиксируем $u\ge 1$ и рассмотрим соответствующую простую последовательность. В ней при $n<u$ выполняется $\kappa_n^{\langle u\rangle} = 0\,,$ и она такова:

$$\xi^{\langle u\rangle} = \big(\,\ldots\,,\,\kappa_{u+2}^{\langle u\rangle}\,,\,\kappa_{u+1}^{\langle u\rangle}\,,\,\kappa_u^{\langle u\rangle},0,0,\ldots,0\big) = \big(\,\ldots\,,\,{}_\alpha\Delta_2\,,\,{}_\alpha\Delta_1\,,\,{}_\alpha\Delta_0\,,0,0,\ldots,0\big)\,.$$

Уточним роль $\xi^{\langle u\rangle}$ в $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha\big) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha\big) \cong \varprojlim K_\alpha^{(n)}$. Вычислим соответствующий показателю $n\ge u$ гомоморфизм для $\kappa\in K_\alpha^{(n)}$:

$$\big(\rho_n^{-1}\big({}_\alpha\Delta_{n-u}\big)\big)(\kappa) = {}_\alpha\Delta_{n-u}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa) = {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot(x-\alpha)^{u-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa) =$$
$$= {}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot\theta_\alpha^{(n)}(\kappa)\cdot(x-\alpha)^{u-1} = \kappa\cdot(x-\alpha)^{u-1}\,.$$

Поскольку $(x{-}\alpha)^{u-1}$ аннулирует $K_\alpha^{(n)}$ при $n<u$, видим, что при всех $n\ge 1$ компонента $\kappa_n^{\langle u\rangle}$ простой последовательности $\xi^{\langle u\rangle}$ действует на $K_\alpha^{(n)}$ умножением на $(x{-}\alpha)^{u-1}$. И также сама последовательность $\xi^{\langle u\rangle}$ действует на $K_\alpha \cong \varinjlim K_\alpha^{(n)}$. Последовательность Ξ, как счётная линейная комбинация простых $\xi^{\langle u\rangle}$, действует на K_α умножением на формальный степенной ряд от $(x-\alpha)$. При этом на фильтрующее подпространство $K_\alpha^{(n)}$ компоненты ряда степени выше $n-1$ действуют тривиально, что гарантирует корректное действие Ξ на K_α.

Для окончательного прояснения последнего утверждения Леммы 12 воспользуемся изоморфизмами $\theta_\alpha^{(n)}$, встроив их в коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd}
K_\alpha^{(n+1)} \arrow[rr, "\cdot\,(x-\alpha)"] \arrow[d, "\theta_\alpha^{(n+1)}"', "\cong"] && K_\alpha^{(n)} \arrow[d, "\cong"', "\theta_\alpha^{(n)}"] \\
k[\,x\,]/\big((x-\alpha)^{n+1}\big) \arrow[rr, "\pi_{n+1,\,n}"] && k[\,x\,]/\big((x-\alpha)^{n}\big)
\end{tikzcd}$$

Действительно, пусть $P(x)\in k[\,x\,]/\big((x-\alpha)^{n+1}\big)$, тогда получим равенства:

$$\theta_\alpha^{(n)}\Big(\big(\theta_\alpha^{(n+1)}\big)^{-1}\big(P(x)\big)\cdot(x-\alpha)\Big) = \theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_n\cdot P(x)\cdot(x-\alpha)\big) = \theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\cdot P(x)\big) =$$

$$= \theta_\alpha^{(n)}\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big)\cdot P(x) = 1\cdot P(x)\,\big(\mathrm{mod}\ (x-\alpha)^n\big) = \pi_{n+1,\,n}\big(P(x)\big)\,.$$

Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha\big)$ изоморфен обратному пределу отображений:

$$\pi_{m,\,n}\colon k[\,x\,]\big(\mathrm{mod}\ (x-\alpha)^m\big) \longrightarrow k[\,x\,]\big(\mathrm{mod}\ (x-\alpha)^n\big)\,,\ m\geq n\,.$$

И, следовательно, алгебра гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha\big)$ изоморфна пополнению $k[\,x\,]$ по идеалу $\big((x-\alpha)\big)$, то есть, k–алгебре $k[[\,(x-\alpha)\,]]$ – формальных степенных рядов от $(x-\alpha)$.

Следствие 13. Результаты Теоремы 9 позволяют построить инъективную и свободную резольвенты правого $k[x]$–модуля $K_\alpha^{(n)}$:

$$K_\alpha^{(n)} \rightsquigarrow \big(K_\alpha\big)_{k[x]} \ \xrightarrow{\ \Upsilon_\alpha^n\ }\ \big(K_\alpha\big)_{k[x]}\,,\ \text{где}\ \Upsilon_\alpha^{\,n}\big({}_\alpha\Delta_s\big) = [\,s\geq n\,]\cdot{}_\alpha\Delta_{s-n} = {}_\alpha\Delta_s\cdot(x-\alpha)^n\,;$$

$$k[\,x\,]_{\,k[x]}\ \xrightarrow{\ \Phi_\alpha^n\ }\ k[\,x\,]_{\,k[x]} \rightsquigarrow K_\alpha^{(n)}\,,\ \text{где}\ \Phi_\alpha^{\,n}\big(P(x)\big) = P(x)\cdot(x-\alpha)^n\,.$$

Доказательство. Из согласованности k–базисов $K_\alpha^{(n)}$ и K_α следует, что в первой строке задана резольвента k–пространств. Отметим, что по определению, для $\kappa\in K_\alpha$ получаем равенство $\Upsilon_\alpha^{\,n}(\kappa) = \kappa\cdot(x-\alpha)^n$. Поскольку $K_\alpha^{(n)}$ является подмодулем K_α, достаточно доказать $k[x]$–линейность $\Upsilon_\alpha^{\,n}$. Пусть $P(x)\in k[\,x\,]$, тогда видим:

$$\Upsilon_\alpha^{\,n}\,\big(\kappa\cdot P(x)\big) = \big(\kappa\cdot P(x)\big)\cdot(x-\alpha)^n = \big(\kappa\cdot(x-\alpha)^n\big)\cdot P(x) = \Upsilon_\alpha^{\,n}\,(\kappa)\cdot P(x)\,.$$

Во второй строке привлечём изоморфизм $\theta_\alpha^{(n)}\colon K_\alpha^{(n)} \cong k[\,x\,]/\big((x-\alpha)^n\big)$, определённый на стр. 8: $\mathrm{Coker}\,\big(\Phi_\alpha^{\,n}\big)\cong \mathrm{Im}\,\big(\theta_\alpha^{(n)}\big)$.

Построенные резольвенты удобны для вычисления производных функторов.

Теорема 14. Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\ \beta\in k$ и $\alpha\neq\beta$. Тогда имеются изоморфизмы:

$$\mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\beta^{(m)}\big)\cong 0\,,\quad \mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\beta^{(m)}\big)\cong 0\,,$$

$$\mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big)\cong K_\alpha^{(\min\{n,\,m\})}\,,\quad \mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha^{(m)}\big)\cong K_\alpha^{(m)}\,.$$

Доказательство. Тривиальность первых двух групп следует из Леммы 12:

$$\mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\beta^{(m)}\big)\cong \mathrm{Coker}\,\big(\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\Upsilon_\beta^{\,m}\big)\big)\cong \mathrm{Coker}\,\big(0\longrightarrow 0\big)\cong 0\,,$$

$$\mathrm{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\beta^{(m)}\big)\ \cong\ \mathrm{Coker}\,\big(\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha\,,\,\Upsilon_\beta^{\,m}\,\big)\big)\ \cong\ \mathrm{Coker}\,\big(0\longrightarrow 0\big)\cong 0\,.$$

Следующие изоморфизмы теоремы необходимо обосновать более подробно:

$$\mathrm{Ext}^{\boldsymbol{\cdot}}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big)\ \cong\ \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\Big(\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},K_\alpha\big)\xrightarrow{\ \mathrm{Hom}\,(K_\alpha^{(n)},\,\Upsilon_\alpha^{\,m})\ }\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},K_\alpha\big)\Big)\cong$$

$$\cong\ \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\big(\,K_\alpha^{(n)}\xrightarrow{\ \rho_n\circ\,\mathrm{Hom}\,(K_\alpha^{(n)},\,\Upsilon_\alpha^{\,m})\,\circ\,\rho_n^{-1}\ } K_\alpha^{(n)}\,\big)\ \cong\ \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\big(\,K_\alpha^{(n)}\ \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ }\ K_\alpha^{(n)}\,\big)\,.$$

Действительно, если $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha\big)$, то $\mathrm{Hom}_{\,k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,\Upsilon_\alpha^{\,m}\big)(\varphi) = \Upsilon_\alpha^{\,m}\circ\varphi$, и для $\kappa\in K_\alpha^{(n)}$ получаем равенства:

$$\big(\Upsilon_\alpha^{\,m}\circ\varphi\big)(\kappa) = \Upsilon_\alpha^{\,m}\big(\varphi(\kappa)\big) = \varphi(\kappa)\cdot(x-\alpha)^m\,,$$

$$\big(\,\rho_n\circ\,\mathrm{Hom}_{\,k[x]}(K_\alpha^{(n)},\,\Upsilon_\alpha^{\,m})\,\circ\,\rho_n^{-1}\big)(\kappa) = \rho_n\Big(\mathrm{Hom}_{\,k[x]}(K_\alpha^{(n)},\,\Upsilon_\alpha^{\,m})\big(\,\rho_n^{-1}(\kappa)\big)\Big) =$$

$$= \Big(\Upsilon_\alpha^m \circ \big(\rho_n^{-1}(\kappa)\big)\Big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big) = \Big(\big(\rho_n^{-1}(\kappa)\big)\big({}_\alpha\Delta_{n-1}\big)\Big)\cdot(x-\alpha)^m = \kappa\cdot(x-\alpha)^m\,.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $m \le n$, тогда точна последовательность модулей:

$$0 \longrightarrow K_\alpha^{(m)} \longrightarrow K_\alpha^{(n)} \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ } K_\alpha^{(n)} \longrightarrow K_\alpha^{(n)}\big/\,K_\alpha^{(n-m)} \longrightarrow 0\,.$$

Следовательно, получаем изоморфизмы:

$$\operatorname{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong K_\alpha^{(n)}\big/\,K_\alpha^{(n-m)} \cong K_\alpha^{(m)} \cong \operatorname{Ext}^0_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big)\,.$$

Если $m \ge n$, тогда $(x-\alpha)^m$ аннулирует $K_\alpha^{(n)}$, и точная последовательность иная:

$$0 \longrightarrow K_\alpha^{(n)} \longrightarrow K_\alpha^{(n)} \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ } K_\alpha^{(n)} \longrightarrow K_\alpha^{(n)} \longrightarrow 0\,.$$

И в этом случае изоморфизмы таковы:

$$\operatorname{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong K_\alpha^{(n)} \cong \operatorname{Ext}^0_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big)\,.$$

Объединяя эти случаи, получаем третье утверждение Теоремы 14:

$$\operatorname{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong \operatorname{Ext}^0_{k[x]}\big(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong K_\alpha^{(\min\{n,\,m\})}\,.$$

Перейдём к обоснованию последнего изоморфизма Теоремы 14. Соответствующее рассуждение во многом аналогично предыдущему:

$$\operatorname{Ext}^{\boldsymbol{\cdot}}_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\big(\operatorname{Hom}_{k[x]}(K_\alpha\,,\,K_\alpha) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(K_\alpha\,,\,\Upsilon_\alpha^m)} \operatorname{Hom}_{k[x]}(K_\alpha\,,\,K_\alpha)\big) \cong$$

$$\cong \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\Big(\varprojlim_n\big(\operatorname{Hom}_{k[x]}(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(K_\alpha^{(n)}\,,\,\Upsilon_\alpha^m)} \operatorname{Hom}_{k[x]}(K_\alpha^{(n)},\,K_\alpha)\big)\Big) \cong$$

$$\cong \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\Big(\varprojlim_n\big(K_\alpha^{(n)} \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ } K_\alpha^{(n)}\big)\Big) \cong \mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}\big(k\big[[(x-\alpha)]\big] \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ } k\big[[(x-\alpha)]\big]\,\big)\,.$$

В этом случае точна последовательность $k[\,x\,]$–модулей:

$$0 \longrightarrow k\big[[(x-\alpha)]\big] \xrightarrow{\ \cdot\,(x-\alpha)^m\ } k\big[[(x-\alpha)]\big] \longrightarrow k\big[[(x-\alpha)]\big]\big/\big((x-\alpha)^m\big) \longrightarrow 0\,.$$

Поэтому искомые изоморфизмы таковы:

$$\operatorname{Ext}^0_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong 0\,,$$

$$\operatorname{Ext}^1_{k[x]}\big(K_\alpha\,,\,K_\alpha^{(m)}\big) \cong k\big[[(x-\alpha)]\big]\big/\big((x-\alpha)^m\big) \cong k\big[(x-\alpha)\big]\big/\big((x-\alpha)^m\big) \cong$$
$$\cong k[\,x\,]/\big((x-\alpha)^m\big) \cong K_\alpha^{(m)}\,.$$

Доказательство Теоремы 14 окончено.

Список литературы

[1] Каш Ф. *Модули и кольца.* М.: Мир, 1981.

[2] Верёвкин А.Б. *О строении инъективной оболочки модуля* // Учёные записки УлГУ. Серия "Математика и информационные технологии". УлГУ. Электронный журнал. 2017, вып. 1, с. 13–15.

[3] Айзенбад Д. *Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию.*– М.: МЦНМО, 2017.

[4] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.*– М.: Мир, 1998.

[5] Дьедонне Ж. *Дифференциальное исчисление в полях характеристики* $p > 0$ / Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г. (обзорные доклады). М.: ГИФМЛ, 1961, с. 134–150.

On injective hulls of one-dimensional modules

(Simbirsk archive. Mathematics. 2019-05-29)

Abstract: In this paper the injective hulls of one-dimensional modules over $k[x]$ are studied. The k–linear basis of these injective hulls is constructed, with the help of which homomorphisms and extensions of the modules connected with them are investigated.

Key words: polynomial, injective hull of module, generating function.

Опубликовано: 29.05.2019

a_verevkin@mail.ru

УДК 512.664.2