ИНЪЕКТИВНОСТЬ И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ

А. Б. Верёвкин

Пусть $A \cong k[x]$ – алгебра полиномов от одной переменной над полем k. Рассмотрим пространство k–линейных функций $\big(k[x]\big)^* = \mathrm{Hom}_k(k[x],\, k)$. Оно является $k[x]$–модулем относительно такого действия: для $l \in \big(k[x]\big)^*$, $P(x)$ и $Q(x) \in k[x]$ зададим правило $\big(l \cdot P(x)\big)\big(Q(x)\big) = l\big(P(x) \cdot Q(x)\big)$. Тогда для любого $k[x]$–модуля $M_{k[x]}$ есть изоморфизм $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(M_{k[x]}\,,\, \big(k[x]\big)^*_{k[x]}\big) \cong \mathrm{Hom}_k(M_k\,, k_k) \cong \big(M\big)^*$, поэтому $k[x]$–модуль $\big(k[x]\big)^*$ – инъективен.

Для $l \in \big(k[x]\big)^*$ определим производящий ряд $H_l(t) = \sum_{n\,\geq\,0} l\,(\,x^n\,) \cdot t^n$, однозначно определяющий функцию l.

Лемма. *Следующие условия эквивалентны:*

- *ряд $H_l(t)$ – рационален;*
- $\dim_k\big(l \cdot k[x]\big) < \infty$;
- $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(l) \neq 0$;
- *пространство $\mathrm{Ker}(l)$ содержит ненулевой идеал $k[x]$;*
- *последовательность $\big(l(1)\,,\, l(x)\,,\, l(x^2)\,,\, \dots\big)$ начиная с некоторого номера становится линейно рекуррентной.*

Из этого технического утверждения вытекает интересный факт:

Теорема. *Множество функций $l \in \big(k[x]\big)^*$ с рациональным рядом $H_l(t)$ образует инъективный $k[x]$–подмодуль $\big(k[x]\big)^*$. Над алгебраически замкнутым полем k он является инъективной оболочкой суммы всех одномерных $k[x]$–модулей.*

Доказательство: Из коммутативности $k[x]$ несложно выводится, что указанное множество является подмодулем $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$. А из предыдущей леммы следует, что этот подмодуль не имеет собственных существенных расширений в инъективном модуле $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$ и поэтому сам является инъективным. Прямая сумма всех одномерных $k[x]$–модулей вкладывается в $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$ в виде функций с рациональным производящим рядом вида $P(t)/Q(t)$ с условиями: $Q(0) = 1$, $Q(t)$ не имеет кратных корней и $\deg P(t) \leq \deg Q(t)$.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail address: abverevkin@gmail.com