Характеризация нётеровости посредством фильтров

Верёвкин А.Б.

Аннотация: В работе исследуются фильтрованные произведения инъективных модулей. Предлагается критерий нётеровости на этой основе.

Ключевые слова: инъективный модуль, нётеровое кольцо, фильтрованное произведение, прямая сумма.

Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей, правые A–модули будем обозначать таким образом: M_A, U_A, S_A и т.д. Модуль I_A называется *инъективным*, если он выделяется прямым слагаемым при любом вложении $I_A \hookrightarrow S_A$. Это условие равносильно точности контравариантного функтора $\mathrm{Hom}_{mod-A}(\,*\,, I_A)$, который в общем случае точен только слева. Таким образом, инъекции A–модулей $\mu\colon M_A \hookrightarrow U_A$ должна соответствовать сюръекция коммутативных групп:

$$\mathrm{Hom}_{mod-A}(\,\mu\,, I_A)\colon \mathrm{Hom}_A(\,U_A\,, I_A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(\,M_A\,, I_A)\,,$$

то есть, любой морфизм $M_A \to I_A$ продолжаем до морфизма $U_A \to I_A$ ([1], [2]).

Пусть $\{I_A^{(x)},\ x \in X\}$ – семейство инъективных A–модулей, индексированных множеством X, которое везде далее будет считаться непустым. Тогда прямое произведение $\prod_{x\in X} I_A^{(x)}$ – инъективно ([1, с. 23]), поскольку для любого M_A имеется канонический изоморфизм абелевых групп:

$$\mathrm{Hom}_A\big(M_A\,, \prod_{x\in X} I_A^{(x)}\big) \cong \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}_A\big(M_A\,, I_A^{(x)}\big)\,.$$

Хейман Басс нашёл критерий нётеровости кольца A, указав её равносильность инъективности любых прямых сумм инъективных A–модулей ([3], [2, с. 157]). Его результат переносится на *фильтрованные произведения.* Теория фильтров изложена в основательных книгах ([4], [5], [6], [7]). Вспомним её начальные положения.

Фильтром $\mathcal{F}$ над X называется набор непустых подмножеств X, замкнутый относительно взятия надмножеств и конечных пересечений. Иначе, $\mathcal{F}$ – фильтр над X, если выполнены три условия:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}\,,\ X \in \mathcal{F}\,;$
2. $(U, V \in \mathcal{F}) \implies (U \cap V \in \mathcal{F})\,;$
3. $(U \in \mathcal{F})\ \&\ (U \subset V \subseteq X) \implies (V \in \mathcal{F})\,.$

Наименьшим фильтром является $\{X\}$ – это пример *главного фильтра* всех надмножеств фиксированного непустого подмножества X. Точнее, для $\emptyset \neq U \subseteq X$ определяется *главный фильтр, порождённый* U: $\mathcal{F}(U) = \{V \mid U \subseteq V \subseteq X\}$. Над конечным X все фильтры – главные: они порождены непустым множеством $\cap_{V\in\mathcal{F}} V$. Над бесконечным X есть неглавные фильтры. Простейший из них – *фильтр Фреше* $\mathcal{F}_0$, состоящий из всех множеств с конечным дополнением до X:

$$\mathcal{F}_0 = \{V \subseteq X \mid \sharp(X\backslash V) < \infty\}\,.$$

Фильтр Фреше является примером *свободного фильтра*, которые определяются условием $\cap_{V\in\mathcal{F}}V=\emptyset$. Свободный фильтр $\mathcal{F}$ не содержит конечных подмножеств X. Из третьего условия фильтра следует, что $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$. Фильтр Фреше $\mathcal{F}_0$ – наименьший из свободных фильтров над бесконечным X. Но в этом случае не всякий неглавный фильтр свободен. Возможна ситуация: $\emptyset\neq\cap_{V\in\mathcal{F}}V\notin\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ – неглавный, но лежит в главном фильтре $\mathcal{F}(\cap_{V\in\mathcal{F}}V)$. Дополнение к $\cap_{V\in\mathcal{F}}V$ в X должно быть бесконечным. Неглавные фильтры $\mathcal{F}$ с условием $\cap_{V\in\mathcal{F}}V\neq\emptyset$ однозначно соответствуют свободным фильтрам $\mathcal{F}'$ над $X\setminus\cap_{V\in\mathcal{F}}V$:

$$U\in\mathcal{F}\rightarrowtail U'=U\setminus\cap_{V\in\mathcal{F}}V\in\mathcal{F}'\,,\quad U'\in\mathcal{F}'\rightarrowtail U=U'\cup\big(\cap_{V\in\mathcal{F}}V\big)\in\mathcal{F}\,.$$

Поэтому элементы неглавного фильтра бесконечны. Семейство (свободных) фильтров над бесконечным множеством труднообозримо. Чтобы убедиться в этом, заметим, что фильтры обладают *свойством конечных пересечений*: конечные наборы элементов фильтра имеют непустое пересечение. И наоборот, любой набор S подмножеств X со свойством конечных пересечений лежит в фильтре, порождённом S:

$$\mathcal{F}(S)=\{U\mid V_1\cap\ldots\cap V_n\subseteq U\subseteq X\ \text{для некоторых}\ V_1,\ldots,V_n\in S\}\,.$$

Конечный набор S порождает главный фильтр: $\mathcal{F}(S)=\mathcal{F}(\cap_{V\in S}V)$. Поэтому интересны семейства со свойством конечных пересечений, не сводимые к конечным.

Если заданы фильтр $\mathcal{F}$ над X и $\{M_A^{(x)},\ x\in X\}$ – семейство A–модулей, индексированных X, тогда на прямом произведении $\prod_{x\in X}M_A^{(x)}$, состоящем из наборов $\mu=(m_x\,,\,x\in X)$, где $m_x\in M_A^{(x)}$, можно определить отношение эквивалентности следующими равносильными способами:

$$\mu\overset{\mathcal{F}}{\sim}\mu'\iff\exists\,U\in\mathcal{F}\ \ \forall\,x\in U\ \ (m_x=m'_x)\iff\{x\in X\mid m_x=m'_x\}\in\mathcal{F}\,.$$

Фактор $\prod_{x\in X}M_A^{(x)}$ по $\overset{\mathcal{F}}{\sim}$ называется *фильтрованным произведением по модулю* $\mathcal{F}$:

$$\prod_{x\in X}M_A^{(x)}\Big/\overset{\mathcal{F}}{\sim}\ =:\ \prod_{x\in X}M_A^{(x)}\Big/\mathcal{F}\ =:\ \prod\nolimits_{\mathcal{F}}M_A^{(x)}\,.$$

Заметим, что для главного фильтра конструкция фильтрованного произведения не предлагает ничего нового. Для $\emptyset\neq U\subseteq X$ и $y\in X$ имеются изоморфизмы:

$$\prod\nolimits_{\mathcal{F}(U)}M_A^{(x)}\ \cong\ \prod_{x\in U}M_A^{(x)}\,;\quad\prod\nolimits_{\mathcal{F}(\{y\})}M_A^{(x)}\ \cong\ M_A^{(y)}\,.$$

Для любого фильтра над X существует каноническая сюръекция A–модулей:

$$\pi(\mathcal{F})\colon\ \prod_{x\in X}M_A^{(x)}\ \twoheadrightarrow\ \prod\nolimits_{\mathcal{F}}M_A^{(x)}\colon\ \mu\to\mu\big/\overset{\mathcal{F}}{\sim}\ .$$

Можно указать ядро этого гомоморфизма:

$$\ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)=\big\{\mu=(m_x)\mid\{x\in X\mid m_x=0\}\in\mathcal{F}\big\}=$$

$$=\big\{\mu=(m_x\,,\,x\in X)\mid\exists\,V\in\mathcal{F}\ \ \forall\,x\in V\ (m_x=0)\big\}\,.$$

Для главного фильтра $\mathcal{F}(U)$ ситуация ясна:

$$\ker\big(\pi\big(\mathcal{F}(U)\big)\big)=\big\{\mu=(m_x\,,\,x\in X)\mid\exists\,V\in\mathcal{F}(U)\ \ \forall\,x\in V\ (m_x=0)\big\}=$$

$$= \{\mu = (m_x) \mid \forall\, x \in U \subseteq X\ (m_x = 0)\} \cong \prod\nolimits_{x\in X\setminus U} M_A^{(x)} \cong \prod\nolimits_{\mathcal{F}(X\setminus U)} M_A^{(x)} .$$

Поэтому имеется расщепляющаяся точная последовательность:

$$0 \longrightarrow \prod\nolimits_{\mathcal{F}(X\setminus U)} M_A^{(x)} \longrightarrow \prod\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F}(U))} \prod\nolimits_{\mathcal{F}(U)} M_A^{(x)} \longrightarrow 0\ ;$$

$$\prod\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \cong \prod\nolimits_{\mathcal{F}(X)} M_A^{(x)} \cong \prod\nolimits_{\mathcal{F}(X\setminus U)} M_A^{(x)} \oplus \prod\nolimits_{\mathcal{F}(U)} M_A^{(x)} .$$

Для неглавного фильтра $\mathcal{F}$ положение более запутанное. Но упомянутый ранее критерий Басса предлагает некоторые ответы.

Лемма. Пусть $\sharp(X) = \infty$, тогда точна последовательность:

$$0 \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \longrightarrow \prod\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F}_0)} \prod\nolimits_{\mathcal{F}_0} M_A^{(x)} \longrightarrow 0 \tag{$\boxplus$}$$

Правая нётеровость кольца A эквивалентна расщепимости этой последовательности для любых семейств инъективных правых A–модулей $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$.

Доказательство. В подтверждение точности последовательности ($\boxplus$) найдём ядро гомоморфизма $\pi(\mathcal{F}_0)$:

$$\ker\big(\pi(\mathcal{F}_0)\big) = \big\{\mu = (m_x) \mid \{x \in X \mid m_x = 0\} \in \mathcal{F}_0\big\} =$$

$$= \big\{\mu = (m_x) \mid \sharp\big(\{x \in X \mid m_x \neq 0\}\big) < \infty\big\} \cong \bigoplus\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} .$$

Если A–модули $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$ – инъективны, то их произведение $\prod_{x\in X} M_A^{(x)}$ – инъективно. Расщепимость последовательности ($\boxplus$) тогда эквивалентна инъективности модуля $\oplus_{x\in X} M_A^{(x)}$, как прямого слагаемого инъективного модуля, что по критерию Басса равносильно правой нётеровости кольца A.

Доказанная лемма является простой переформулировкой утверждения Басса. Но эту лемму можно усилить, не привлекая дополнительных ресурсов.

Теорема. Следующие утверждения равносильны:

1. кольцо A нётерово справа;
2. для любого семейства $\{I_A^{(x)},\ x \in X\}$ – инъективных правых A–модулей и любого фильтра $\mathcal{F}$ на X следующая точная последовательность расщепляется

$$0 \longrightarrow \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A \longrightarrow \prod\nolimits_{x\in X} I_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F})} \prod\nolimits_{\mathcal{F}} I_A^{(x)} \longrightarrow 0 \tag{$\rightleftarrows$}$$

Доказательство. ($1 \Rightarrow 2$) Сначала известным рассуждением ([2, с. 157]) по критерию Бэра ([2, с. 130]) покажем, что модуль $\ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A$ инъективен.

Возьмём правый идеал $U_A \hookrightarrow A$ и морфизм $\phi\colon U_A \to \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A$. В силу нётеровости A_A, идеал $U_A = (u_1, \dots, u_s)_A$ – конечнопорождён. Для всех $r = 1, \dots, s$ есть включения $\phi(u_r) \in \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)$. Поэтому существуют $V_r \in \mathcal{F}$ такие, что для всех $x \in V_r$ есть равенства $\phi(u_r)_x = 0 \in I_A^{(x)}$. Тогда $V = \bigcap\limits_{r=1}^{s} V_r \in \mathcal{F}$. Для всех $x \in V$ и $r = 1, \dots, s$ получаем $\phi(u_r)_x = 0$. Любой $u \in U_A$ имеет вид $u = u_1 \cdot a_1 + \dots + u_s \cdot a_s$. Поэтому для всех $x \in V \in \mathcal{F}$ имеем равенства:

$$\phi(u)_x = \phi(u_1 \cdot a_1 + \dots + u_s \cdot a_s)_x = \phi(u_1)_x \cdot a_1 + \dots + \phi(u_s)_x \cdot a_s = 0\,.$$

Следовательно, морфизм ϕ пропускается через инъективный подмодуль $\prod_{x\in X\setminus V} I_A^{(x)}$ модуля $\ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A$, и таким образом продолжается до морфизма из A:

$$\begin{array}{ccccc} \phi\colon U_A & \longrightarrow & \prod_{x\in X\setminus V} I_A^{(x)} & \longrightarrow & \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A \\ \downarrow & & \| & & \| \\ A_A & \longrightarrow & \prod_{x\in X\setminus V} I_A^{(x)} & \longrightarrow & \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A\,. \end{array}$$

Итак, доказано, что модуль $\ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A$ инъективен. Поэтому он выделяется прямым слагаемым в $\prod_{x\in X} I_A^{(x)}$ и последовательность ($\rightleftarrows$) расщепляется.
($2 \Rightarrow 1$) Если точная последовательность ($\rightleftarrows$) расщепляется, то модуль $\ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A$ выделяется прямым слагаемым в инъективном модуле $\prod_{x\in X} I_A^{(x)}$, и поэтому сам инъективен. Но для фильтра Фреше $\mathcal{F}_0$ модуль $\ker\big(\pi(\mathcal{F}_0)\big)_A$ изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{x\in X} I_A^{(x)}$. Согласно критерию нётеровости Басса, для ненётерового кольца A существуют неинъективные суммы инъективных модулей (см. [2, с. 158–160]). Поэтому кольцо A – нётерово.

Следствие. Если кольцо A – правонётерово, тогда любое фильтрованное произведение инъективных правых A–модулей – инъективно.

Доказательство. По предыдущей теореме последовательность ($\rightleftarrows$) расщепляется, и поэтому фильтрованное произведение $\prod_{\mathcal{F}} I_A^{(x)}$ выделяется прямым слагаемым в инъективном модуле $\prod_{x\in X} I_A^{(x)}$. Следовательно, оно инъективно.

Замечание. Очевидно, что для ненётерового кольца A некоторые фильтрованные произведения инъективных A–модулей могут быть инъективными. И критерий Басса, по-видимому, не накладывает к этому никаких ограничений. Поэтому кажется интересным исчерпывающее описание этой ситуации.

Список литературы

[1] Картан А., Эйленберг С. *Гомологическая алгебра*,– М.: ИЛ, 1960.

[2] Каш Ф. *Модули и кольца*,– М.: Мир, 1981.

[3] Chase S.U. *Direct products of modules* // Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 97, pp. 457–473.

[4] Эклоф П. *Теория ультрапроизведений для алгебраистов*/ Справочная книга по математической логике в 4-х частях, под ред. Дж. Барвайса, часть 1: Теория моделей,– М.: Наука, 1982, с. 109–140.

[5] Comfort W.W., Negrepontis S. *The Theory of Ultrafilters*,– Springer-Verlag, 1974.

[6] Schoutens H. *The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra*, Lecture Notes in Mathematics No. 1999,– Springer-Verlag, 2010.

[7] Hindman N., Strauss D. *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications*,– Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1998.

On the characterization of noetherianity by means of filtered products

(Simbirsk archive. Mathematics. 2019-07-08)

Abstract: This paper investigates filtered products of injective modules. The noetherian characterization is proposed on this ground.

Key words: injective module, Noetherian ring, filtered product, direct sum.

Опубликовано: 08.07.2019

a_verevkin@mail.ru

УДК 512.664.2