# О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЁТЕРОВОСТИ

А. Б. Верёвкин

Хейман Басс нашёл критерий нётеровости кольца $A$, указав её равносильность инъективности любых прямых сумм инъективных $A$–модулей ([1], [2, с. 157]). Его результат переносится на фильтрованные произведения. Прежде отметим, что если заданы фильтр $\mathcal{F}$ над $X \neq \emptyset$ и $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$ – семейство $A$–модулей, индексированных $X$, тогда существует каноническая сюръекция $A$–модулей:

$$\pi(\mathcal{F})\colon \prod\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \twoheadrightarrow \prod\nolimits_{\mathcal{F}} M_A^{(x)}.$$

Следующее утверждение переформулирует результат Басса.

**Лемма.** *Пусть $\mathcal{F}_0$ – фильтр Фреше коконечных множеств в бесконечном $X$, тогда точна последовательность:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \longrightarrow \prod\nolimits_{x\in X} M_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F}_0)} \prod\nolimits_{\mathcal{F}_0} M_A^{(x)} \longrightarrow 0$$

*Правая нётеровость кольца $A$ эквивалентна расщепимости этой последовательности для любых семейств инъективных правых $A$–модулей $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$.*

Стандартными средствами, восходящими к работе Басса, можно доказать обобщение этого результата.

**Теорема.** *Равносильны утверждения:*

- *кольцо $A$ нётерово справа;*
- *для любого семейства $\{I_A^{(x)},\ x \in X\}$ – инъективных правых $A$–модулей и фильтра $\mathcal{F}$ на $X$ следующая точная последовательность расщепляется*

$$0 \longrightarrow \ker\bigl(\pi(\mathcal{F})\bigr)_A \longrightarrow \prod\nolimits_{x\in X} I_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F})} \prod\nolimits_{\mathcal{F}} I_A^{(x)} \longrightarrow 0$$

**Следствие.** *Если кольцо $A$ – правонётерово, тогда любое фильтрованное произведение инъективных правых $A$–модулей – инъективно.*

## Список литературы

[1] Chase S.U. *Direct products of modules* // Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 97, pp. 457–473.

[2] Каш Ф. *Модули и кольца*,– М.: Мир, 1981.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

*E-mail address*: abverevkin@gmail.com