А. Б. Веревкин, О матричном нильпотентном фильтре, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 192–201

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8962

Математические заметки

Том 92 выпуск 2 август 2012

УДК 512.714

О матричном нильпотентном фильтре

А. Б. Верёвкин

В работе определены два семейства однородных идеалов алгебры многочленов, порожденных элементами степеней общей матрицы и ее операторными инвариантами. Изучаются комбинаторные характеристики указанных идеалов, подробно разобран случай второго порядка.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть $M = (x_{ij})$ – квадратная матрица от n^2 коммутирующих переменных $X = \{x_{ij} \mid i,j = 1,\dots,n\}$. Рассмотрим ее степени $M^s = (f_{ij}^{(s)}(X))$, здесь $f_{ij}^{(s)}(X)$ – однородные полиномы от X общей степени s. В алгебре коммутативных многочленов $A = k[X]$ над полем k определим однородные идеалы

$$F^{(s)} = (f_{ij}^{(s)}(X) \mid i,j = 1,\dots,n), \qquad F^{(0)} = A.$$

$\mathbb{Z}$-Градуированные фактор-алгебры $A/F^{(s)}$ обозначим $B^{(s)}$.

Лемма 1. *При $t > s$ имеется вложение идеалов $F^{(t)} \subsetneqq F^{(s)}$.*

Доказательство. Заметим, что элементы матрицы M^s лежат в $F^{(s)}$, следовательно, $M^s = 0$ в $B^{(s)}$. Если $t \geqslant s$, тогда $M^t = M^s \cdot M^{t-s} = 0 \cdot M^{t-s} = 0$ в $B^{(s)}$, поэтому элементы M^t и порожденный ими идеал $F^{(t)}$ лежат в $F^{(s)}$. В случае строгого неравенства в $F^{(s)}$ имеются элементы степени s, не входящие в $F^{(t)}$.

Эта лемма мотивирует основное определение работы:

Определение. Цепь идеалов

$$\dots \subset F^{(s+1)} \subset F^{(s)} \subset \dots \subset F^{(1)} \subset F^{(0)} = A$$

назовем *матричным нильпотентным фильтром* на алгебре $A = k[X]$.

Мы изучим комбинаторные свойства элементов построенного фильтра и его последовательных факторов, в том числе, алгебр $B^{(s)}$. Для этого будут использованы базисы Грёбнера идеалов (см. [1; 2.1–2.7, 3.3]; [2; гл. 2]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00209-а).

Для описания нильпотентного фильтра мы определим вспомогательные идеалы алгебры A:

$$G^{(s)} = (g^{(s-n+1)}(X), \dots, g^{(s-1)}(X), g^{(s)}(X)),$$

где $s \geqslant n-1$, а $g^{(r)}(X)$ – однородные полиномы от X общей степени r, являющиеся операторными инвариантами матрицы M и определяемые при $r \geqslant 0$ разложением

$$\sum_{r \geqslant 0} g^{(r)}(X) \cdot \theta^r := (\det(E - M \cdot \theta))^{-1};$$

отметим, что $g^{(0)}(X) = 1$, а $G^{(n-1)} = A$.

Полиномы $g^{(r)}(X)$ изучались в работе [3], там они обозначены K_{r+n-1}. Не удалось узнать, рассматривались ли ранее идеалы, аналогичные $G^{(s)}$.

В следующем пункте мы выясним свойства построенных идеалов в самом общем случае. Например, в лемме 3 будет показано, что $G^{(s)}$ задают фильтрацию на алгебре A, при больших s, сплетенную с нильпотентным фильтром $(F^{(s)})$.

Последний пункт посвящен малым размерностям $n = 1, 2, \dots,$ и большинство утверждений там носят технический характер. Завершающими комбинаторными результатами работы являются описание рядов Гильберта подфакторов построенных фильтраций в теореме 9 и вычисление многочлена Гильберта алгебры $B^{(s)}$ в лемме 11.

Структурно-алгебраические и алгебро-геометрические вопросы заслуживают рассмотрения в отдельной работе, так же, как изучение аналогичных проблем в некоммутативном случае – здесь они затрагиваться не будут.

2. Общие результаты. Докажем некоторые общие свойства построенных ранее идеалов.

Лемма 2. *Имеются следующие вложения идеалов алгебры* A:

1) $F^{(t+s)} \subseteq F^{(t)} \cdot F^{(s)}$ *и, в частности,* $F^{(s)} \subseteq (F^{(1)})^s$;
2) $\det M \cdot F^{(s)} \subseteq F^{(s+1)}$.

Доказательство. Имеем $M^{t+s} = M^t \cdot M^s$, поэтому элементы M^{t+s} выражаются через попарные произведения элементов M^t и M^s, откуда следует первое утверждение.

Матрица M – корень характеристического многочлена $\chi_M(\theta) = \det(M - \theta \cdot E_n)$, запишем равенство $\chi_M(M) \cdot M^s = 0$:

$$(-1)^n M^{n+s} + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} M \cdot M^{n-1+s} + \dots + \det M \cdot M^s = 0.$$

Матричные элементы первых n слагаемых левой части лежат в $F^{(s+1)}$, значит, элементы $\det M \cdot M^{(s)}$ тоже принадлежат $F^{(s+1)}$, что доказывает второе утверждение.

Лемма 3. *При* $s \geqslant n-1$ *имеются вложения идеалов*:

1) $\det M \cdot G^{(s)} \subseteq G^{(s+n)}$;
2) $F^{(s)} \subseteq G^{(s)}$;
3) *если* $t \geqslant s$, *то* $G^{(t)} \subseteq G^{(s)}$.

Доказательство. 1) Возьмем коэффициенты при θ^{s+n} в равенстве

$$\det(E - M \cdot \theta) \cdot \sum_{s \geqslant 0} g^{(s)}(X) \cdot \theta^s = 1.$$

При $s \geqslant n-1$ они имеют вид, задающий рекуррентную зависимость на $(g^{(s)}(X))$:

$$g^{(s+n)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s+n-1)}(X) + \dots + (-1)^n \det M \cdot g^{(s)}(X) = 0. \tag{1}$$

По определению первые n слагаемых левой части лежат в $G^{(s+n)}$, значит, и последнее слагаемое $\det(M) \cdot g^{(s)}(X)$ принадлежит $G^{(s+n)}$.

2) Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned}\sum_{s\geqslant 0} M^s \cdot \theta^s = (E_n - M\cdot\theta)^{-1} &= \frac{1}{\det(E - M\cdot\theta)} \cdot \widetilde{(E_n - M\cdot\theta)}^\top \\ &= \Bigl(\sum_{t\geqslant 0} g^{(t)}(X)\cdot\theta^t\Bigr)\cdot \widetilde{(E_n - M\cdot\theta)}^\top. \end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $\widetilde{(E_n - M\cdot\theta)}$ означает матрицу, присоединенную к $(E_n - M\cdot\theta)$, состоящую из ее $((n-1)\times(n-1))$-миноров, которые являются многочленами от θ (как и от X) степени не выше $n-1$. Поэтому наше утверждение следует из соотношений:

$$f_{ij}^{(s)}(X) = \biggl(\Bigl(\sum_{t\geqslant 0} g^{(t)}(X)\cdot\theta^t\Bigr)\cdot\widetilde{(E_n - M\cdot\theta)}_{ji}\biggr)_{\theta^s} \in (g^{(s-(n-1))}(X), \dots, g^{(s)}(X)) = G^{(s)}.$$

3) Рекурсия (1) влечет $g^{(s+n)}(X) \in G^{(s+n-1)}$, а по определению имеет место вложение

$$\bigl\{g^{(s+n-1)}(X), g^{(s+n-2)}(X), \dots, g^{(s+1)}(X)\bigr\} \subset G^{(s+n-1)}.$$

Поэтому для $s \geqslant 0$ выполняется $G^{(s+n)} \subset G^{(s+n-1)}$, и мы получаем вторую однородную фильтрацию на A, здесь $t > n$:

$$\dots \subset G^{(t+1)} \subset G^{(t)} \subset \dots \subset G^{(n)} \subset G^{(n-1)} = A.$$

3. Малые размерности. Более конкретные утверждения о построенных ранее фильтрациях удается доказать при малых размерностях $n = 1, 2$.

Случай $n = 1$ очевиден: $F^{(s)} = G^{(s)} = (x^s)$, $B^{(s)} = k[x]/(x^s) = \langle 1, x, \dots, x^{s-1}\rangle_k$, а $\mathbb{Z}$-градуированный A-модуль $F^{(s)}/F^{(s+1)}$ изоморфен $\langle x^s\rangle_k$.

Более сложен случай $n = 2$, который мы будем разбирать до конца этой работы. Примем более удобные обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}, \qquad \sum_{s\geqslant 0} g^{(s)}(X)\cdot\theta^s = (1 - (x+v)\cdot\theta + (x\cdot v - y\cdot z)\cdot\theta^2)^{-1}.$$

Идеалы $G^{(s)} = (g^{(s-1)}(X), g^{(s)}(X))$ при $s \geqslant 1$ заданы в алгебре $A = k[x, y, z, v]$.

Лемма 4. *В рассматриваемой ситуации имеются следующие формулы*:

1) $g^{(s)}(X) = \displaystyle\sum_{t=\lceil s/2\rceil}^{s} C_t^{s-t}\cdot(-\det M)^{s-t}(\operatorname{tr} M)^{2t-s}$;

2) $F^{(s)} = \bigl(g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X)\cdot v,\ g^{(s-1)}(X)\cdot y,\ g^{(s-1)}(X)\cdot z,\ g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X)\cdot x\bigr)$;

3) $M^{s+1} = g^{(s)}(X)\cdot M - g^{(s-1)}(X)\cdot\det M\cdot E_2$.

Доказательство. Раскроем определение $(g^{(s)}(X),\ s \geqslant 0)$ при $n = 2$:

$$\sum_{s\geqslant 0} g^{(s)}(X)\cdot\theta^s = (1-\theta(\operatorname{tr} M - \det M\cdot\theta))^{-1} = \sum_{t\geqslant 0}\theta^t(\operatorname{tr} M - \det M\cdot\theta)^t$$
$$= \sum_{t\geqslant 0}\theta^t\sum_{u=0}^{t} C_t^u(-\det M)^u(\operatorname{tr} M)^{t-u}\theta^u = \sum_{t\geqslant 0}\sum_{u=0}^{t}\theta^{t+u}C_t^u(-\det M)^u(\operatorname{tr} M)^{t-u}$$
$$= \sum_{s\geqslant 0}\theta^s\sum_{t=0}^{s} C_t^{s-t}(-\det M)^{s-t}(\operatorname{tr} M)^{2t-s}.$$

Отсюда с учетом $C_t^{s-t} = 0$ при $2t < s$ получается первая формула.

Применительно к разбираемому случаю вернемся к равенству (2):

$$\sum_{s\geqslant 0} M^s\cdot\theta^s = \left(\sum_{t\geqslant 0} g^{(t)}(X)\cdot\theta^t\right)\cdot\widetilde{(E_2 - M\cdot\theta)}^{\top}$$
$$= \left(\sum_{t\geqslant 0} g^{(t)}(X)\cdot\theta^t\right)\cdot\begin{pmatrix}1-v\cdot\theta & y\cdot\theta\\ z\cdot\theta & 1-x\cdot\theta\end{pmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при θ^s при $s > 0$, получаем

$$M^s = \begin{pmatrix} g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X)\cdot v & g^{(s-1)}(X)\cdot y\\ g^{(s-1)}(X)\cdot z & g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X)\cdot x\end{pmatrix}$$
$$= g^{(s)}(X)\cdot E_2 - g^{(s-1)}(X)\cdot\widetilde{M}^{\top}.$$

Теперь из первого равенства следует вторая формула, а третья получается умножением предыдущих равенств на M.

Примеры. Формула 1) из леммы 4 дает следующие равенства:
- $g^{(0)}(X) = 1$;
- $g^{(1)}(X) = \operatorname{tr} M = x + v$;
- $g^{(2)}(X) = -\det M + (\operatorname{tr} M)^2 = x^2 + xv + v^2 + yz$;
- $g^{(3)}(X) = -2\det M\cdot\operatorname{tr} M + (\operatorname{tr} M)^3 = (x+v)(x^2+v^2+2yz)$.

Следствие 5. *При $s > 0$ из пункта 2) леммы 4 получаем*

$$1)\quad \{g^{(s-1)}(X)\cdot y,\ g^{(s-1)}(X)\cdot z,\ g^{(s-1)}(X)\cdot(x-v)\}\subset F^{(s)};$$
$$2)\quad g^{(s-1)}(X)\cdot v \equiv g^{(s-1)}(X)\cdot x \equiv g^{(s)}(X) \pmod{F^{(s)}};$$
$$3)\quad G^{(s)}/F^{(s)} = A\cdot g^{(s-1)}(X).$$

Лемма 6. *При $s > 0$, $t \geqslant 0$ имеют место следующие сравнения*:

$$1)\quad g^{(t+s-1)}(X) \equiv x^t\cdot g^{(s-1)}(X) \pmod{F^{(s)}};$$
$$2)\quad g^{(2s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}};$$
$$3)\quad x^s\cdot g^{(s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}}.$$

Доказательство. Пусть $u \geqslant s > 0$, тогда $g^{(u)}(X) - x \cdot g^{(u-1)}(X) \in F^{(u)} \subset F^{(s)}$, следовательно,
$$g^{(u)}(X) \equiv x \cdot g^{(u-1)}(X) \pmod{F^{(s)}},$$
и первое сравнение вытекает из равенства
$$g^{(t+s-1)}(X) - x^t \cdot g^{(s-1)}(X) = \sum_{i=0}^{t-1} x^i \cdot (g^{(t+s-i-1)}(X) - x \cdot g^{(t+s-i-2)}(X)) \in F^{(s)}.$$
Элементы матрицы M^s лежат в $F^{(s)}$, следовательно, $\operatorname{tr} M^s \in F^{(s)}$. Выразим матрицу $M^{2s} = (M^s)^2$ через полиномы $g^{(u)}(X)$:
$$\begin{pmatrix} (g^{(s)})^2 - 2g^{(s)}g^{(s-1)}v + (g^{(s-1)})^2(v^2+yz) & \operatorname{tr} M^s \cdot g^{(s-1)}y \\ \operatorname{tr} M^s \cdot g^{(s-1)}z & t(g^{(s)})^2 - 2g^{(s)}g^{(s-1)}x + t(g^{(s-1)})^2(x^2+yz) \end{pmatrix}.$$
Следовательно, в A выполняется равенство
$$\operatorname{tr} M^s \cdot g^{(s-1)}(X) \cdot y = g^{(2s-1)}(X) \cdot y,$$
откуда вытекает второе сравнение:
$$g^{(2s-1)}(X) = \operatorname{tr} M^s \cdot g^{(s-1)}(X) \in F^{(s)}.$$
Третье сравнение вытекает из предыдущих двух:
$$x^s \cdot g^{(s-1)}(X) \equiv g^{(2s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}}.$$

Теорема 7. *A-модуль $G^{(s)}/F^{(s)}$, рассматриваемый как $\mathbb{Z}$-градуированное пространство, изоморфен*
$$\langle g^{(s-1)}(X),\, x \cdot g^{(s-1)}(X),\, \ldots,\, x^{s-1} \cdot g^{(s-1)}(X)\rangle_k.$$

Доказательство. Согласно пунктам 1), 2) леммы 6 для $P(x,y,z,v) \in k[x,y,z,v]$ имеем
$$P(x,y,z,v) \cdot g^{(s-1)}(X) \equiv P(x,0,0,x) \cdot g^{(s-1)}(X) \pmod{F^{(s)}}.$$
Учитывая пункт 3) следствия 5 и пункт 3) леммы 6, имеем
$$G^{(s)}/F^{(s)} = \{P(x) \cdot g^{(s-1)}(X),\, \deg P(x) < s\}.$$
Итак, для доказательства теоремы осталось показать, что $x^{s-1} \cdot g^{(s-1)}(X) \notin F^{(s)}$, или же по сравнению 1) из леммы 6 $g^{(2s-2)}(X) \notin F^{(s)}$.

Определим идеал
$$J = (z) \lhd A = k[x,y,z,v]\colon A/J \cong k[x,y,v].$$
Если $a \in A$, то $\overline{a} = a + J$ из A/J можно рассматривать как элемент $k[x,y,v]$, подставив $z = 0$.

Докажем, что
$$g^{(2s-2)}(X) + J = \overline{g^{(2s-2)}}(X) \not\subset F^{(s)} + J = \overline{F^{(s)}},$$

из чего будет следовать искомое. Имеем

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x-v} & -y \\ 0 & x-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-v & y \\ 0 & \dfrac{1}{x-v} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x-v} & -y \\ 0 & x-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s & 0 \\ 0 & v^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-v & y \\ 0 & \dfrac{1}{x-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^s & y \cdot \dfrac{x^s - v^s}{x-v} \\ 0 & v^s \end{pmatrix}.$$

Из этих равенств определяются $\overline{f_{ij}^{(s)}}(X)$:

$$\overline{f_{11}^{(s)}}(X) = x^s, \qquad \overline{f_{22}^{(s)}}(X) = v^s, \qquad \overline{f_{12}^{(s)}}(X) = y \cdot \frac{x^s - v^s}{x-v}.$$

Зафиксируем порядок $y > x > v$ и докажем, что набор $\{\overline{f_{11}^{(s)}}(X), \overline{f_{22}^{(s)}}(X), \overline{f_{12}^{(s)}}(X)\}$ является базисом Грёбнера (см. [1; п. 2, с. 35–37], [2; гл. 2, с. 105]) идеала

$$\begin{aligned} \overline{F^{(s)}} \lhd k[x,y,v]\colon \overline{f_{12}^{(s)}}(X) &= y(x^{s-1} + vx^{s-2} + \dots + v^{s-2}x + v^{s-1}) \\ &= \underline{x^{s-1}y} + vx^{s-2}y + \dots + v^{s-2}xy + v^{s-1}y. \end{aligned}$$

Старший моном $\overline{f_{12}^{(s)}}(X)$ равен $x^{s-1}y$ и при $s \geqslant 2$ имеет единственное зацепление $x \cdot x^{s-1}y = x^s \cdot y$ с x^s — старшим (и единственным) мономом $\overline{f_{11}^{(s)}}(X)$. Отсюда получается одна композиция, проведем ее редукцию:

$$\begin{aligned} x \cdot \overline{f_{12}^{(s)}}(X) - \overline{f_{11}^{(s)}}(X) \cdot y &= xy\,\frac{x^s - v^s}{x-v} - x^s y = y\,\frac{x^{s+1} - v^s x - x^{s+1} + vx^s}{x-v} \\ &= vxy\,\frac{x^{s-1} - v^{s-1}}{x-v} = vxy \cdot (x^{s-2} + vx^{s-3} + \dots + v^{s-3}x + v^{s-2}) \\ &= \underline{\underline{vx^{s-1}y}} + v^2x^{s-2}y + \dots + v^{s-2}x^2y + v^{s-1}xy \xrightarrow{f_{12}} vxy\frac{x^{s-1} - v^{s-1}}{x-v} - v \cdot y\frac{x^s - v^s}{x-v} \\ &= \frac{vy}{x-v}(x^s - v^{s-1}x - x^s + v^s) = \frac{v^s y \cdot (v-x)}{x-v} = -\underline{v^s} \cdot y \xrightarrow{f_{22}} 0. \end{aligned}$$

Итак, единственная композиция набора $\{\overline{f_{11}^{(s)}}(X), \overline{f_{22}^{(s)}}(X), \overline{f_{12}^{(s)}}(X)\}$ редуцируется к нулю, и это множество является замкнутым относительно композиции редуцированным множеством — базисом Грёбнера идеала $\overline{F^{(s)}}$. Строго говоря, это рассуждение приспособлено к случаю $s \geqslant 4$, но несложно проверить, что при $s = 2$ или 3 результат подчиняется той же формуле.

При $s = 1$ зацеплений старших мономов нет, а поэтому нет и композиций, и указанное множество также является базисом Грёбнера.

Элементы $\overline{g^{(s)}}(X)$ определяются из соотношения

$$\sum_{s \geqslant 0} \overline{g^{(s)}}(X) \cdot \theta^s = \frac{1}{\det(E_2 - \overline{M} \cdot \theta)} = \frac{1}{(1 - x\theta)(1 - v\theta)} = \frac{1}{x-v}\left(\frac{x}{1 - x\theta} - \frac{v}{1 - v\theta}\right).$$

Откуда получаем выражения $\overline{g^{(s)}}(X) = (x^{s+1} - v^{s+1})/(x - v)$ и редукцию $\overline{g^{(2s-2)}}(X)$ к нормальному относительно базиса Грёбнера виду:

$$\begin{aligned}\overline{g^{(2s-2)}}(X) &= \frac{x^{2s-1} - v^{2s-1}}{x - v} \\ &= \underline{x^{2s-2}} + v\underline{x^{2s-3}} + \dots + v^{s-1}x^{s-1} + \dots + \underline{v^{2s-3}}x + \underline{v^{2s-2}} \\ &\xrightarrow{f_{11,22}} v^{s-1}x^{s-1} \neq 0.\end{aligned}$$

Это рассуждение корректно при $s \geqslant 3$; при $s = 2$

$$\overline{g^{(2s-2)}}(X) = x^2 + vx + v^2 \to vx \neq 0;$$

при $s = 1$

$$\overline{g^{(2s-2)}}(X) = 1 \neq 0.$$

Итак, всегда $\overline{g^{(2s-2)}}(X) \notin \overline{F^{(s)}}$, и теорема 7 доказана.

Теорема 8. *При $s \geqslant 1$ точна последовательность $\mathbb{Z}$-градуированных A-модулей*:

$$0 \to A[-2s+1] \xrightarrow{\theta} A[-s] \oplus A[-s+1] \xrightarrow{\varphi} A \to A/G^{(s)} \to 0,$$

где

$$\theta(a) = (a \cdot g^{(s-1)}(X), a \cdot g^{(s)}(X)), \qquad \varphi((a', a'')) = a' \cdot g^{(s)}(X) - a'' \cdot g^{(s-1)}(X).$$

Доказательство. Ясно, что $\varphi \circ \theta = 0$, и необходимо доказать лишь, что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \theta$. Пусть $(a', a'') \in \ker \varphi$ такие, что

$$a' \cdot g^{(s)}(X) - a'' \cdot g^{(s-1)}(X) = 0.$$

Тогда $a' \cdot g^{(s)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Обращаясь к рекуррентной зависимости (1) при $s \geqslant 2$, имеем

$$g^{(s)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s-1)}(X) + \det M \cdot g^{(s-2)}(X) = 0.$$

Получим, что $a' \cdot \det M \cdot g^{(s-2)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Обращаясь к той же рекуррентной зависимости (1) при $s \geqslant 3$, получаем

$$g^{(s-1)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s-2)}(X) + \det M \cdot g^{(s-3)}(X) = 0.$$

Получим, что $a' \cdot (\det M)^2 \cdot g^{(s-3)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Аналогично, индукцией по s можно показать, что

$$a' \cdot (\det M)^{s-1} \cdot g^{(0)}(X) = a' \cdot (\det M)^{s-1} \,\vdots\, g^{(s-1)}(X).$$

Согласно пункту 1) леммы 4 при $s \geqslant 2$ имеем равенство

$$\begin{aligned}g^{(s-1)}(X) &= \sum_{t=\lceil (s-1)/2 \rceil}^{s-1} C_t^{s-1-t} \cdot (-\det M)^{s-1-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s+1} \\ &= (\operatorname{tr} M)^{s-1} - \det M \sum_{t=\lceil (s-1)/2 \rceil}^{s-2} C_t^{s-1-t} \cdot (-\det M)^{s-2-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s+1}.\end{aligned}$$

Многочлен $\operatorname{tr} M$ неприводим в $A = k[x, y, z, v]$, и $\det M \notin (\operatorname{tr} M)$, следовательно, $\det M$ и $\operatorname{tr} M$ взаимно просты. Поэтому $\det M$ не имеет общих множителей с $(\operatorname{tr} M)^{s-1}$ и $g^{(s-1)}(X)$, а $g^{(s-1)}(X)$ не имеет общих множителей с $(\det M)^{s-1}$. Отсюда следует, что a' делится на $g^{(s-1)}(X)$, т.е. $a' = a \cdot g^{(s-1)}(X)$.

Тогда

$$a'' \cdot g^{(s-1)}(X) = a' \cdot g^{(s)}(X) = a \cdot g^{(s-1)}(X) \cdot g^{(s)}(X)$$

и $a'' = a \cdot g^{(s)}(X)$. Таким образом, получаем включение, доказывающее теорему 8:

$$(a', a'') = (a \cdot g^{(s-1)}(X), a \cdot g^{(s)}(X)) = \theta(a) \in \operatorname{Im} \theta.$$

Определение (см. [1; п. 3, с. 47–50], [2; гл. 9, п. 3, с. 574]). Если $V \cong \bigoplus_{m \geqslant 0} V_m$ – градуированное пространство над полем k, тогда его функция Гильберта h_V задается своими значениями $h_V(m) = \dim_k V_m$, а ряд Гильберта $\sum_{m \geqslant 0} \dim_k V_m \cdot t^m$ обозначается $V(t)$.

Если существует многочлен, значения которого совпадают с $h_V(m)$ при достаточно больших m, тогда он обозначается $P_V(m)$ и называется *многочленом Гильберта* пространства V.

Теорема 9. *При $s \geqslant 1$ имеются следующие равенства*:

$$1) \quad A/G^{(s)}(t) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4};$$

$$2) \quad G^{(s)}/F^{(s)}(t) = \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{(1-t)};$$

$$3) \quad B^{(s)}(t) = \frac{(1-t^{s-1})(1-t^s)}{(1-t)^4} + \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t};$$

$$4) \quad G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3};$$

$$5) \quad F^{(s)}/F^{(s+1)}(t) = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} + t^{2s} + t^{2s-1} - t^{s-1}.$$

Доказательство. 1) Так как $A(t) = (1-t)^{-4}$, из теоремы 8 получаем равенства

$$A/G^{(s)}(t) = A(t) \cdot (1 - (t^s + t^{s-1}) + t^{2s-1}) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4}.$$

2) из теоремы 7 следует

$$G^{(s)}/F^{(s)}(t) = t^{s-1} + t^s + \cdots + t^{2s-2} = \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{(1-t)}.$$

3) Из 1) и 2) получаем равенства

$$B^{(s)}(t) = A/F^{(s)}(t) = A/G^{(s)}(t) + G^{(s)}/F^{(s)}(t) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4} + \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t}.$$

4) Из 1) следует

$$G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) = A/G^{(s+1)}(t) - A/G^{(s)}(t) = \frac{(1-t^{s+1})(1-t^s)}{(1-t)^4} - \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4}$$
$$= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}-t^{s+1})}{(1-t)^4} = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3}.$$

5) Из 3) и 4) получаем окончательные равенства теоремы 9:

$$\begin{aligned}
F^{(s)}/F^{(s+1)}(t) &= B^{(s+1)}(t) - B^{(s)}(t) \\
&= G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) + G^{(s+1)}/F^{(s+1)}(t) - G^{(s)}/F^{(s)}(t) \\
&= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} + \frac{t^s(1-t^{s+1})}{1-t} - \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t} \\
&= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} - t^{s-1} + t^{2s-1} + t^{2s}.
\end{aligned}$$

Замечание 10. С фильтрациями $(G^{(s)}, s \geqslant 1)$ и $(F^{(s)}, s \geqslant 0)$ на A связаны два (би)градуированных пространства:

$$A_G := \bigoplus_{s\geqslant 1} G^{(s)}/G^{(s+1)}, \qquad A_F := \bigoplus_{s\geqslant 0} F^{(s)}/F^{(s+1)}.$$

Несложно вывести, что их ряды Гильберта таковы:

$$\begin{aligned}
A_G(t,z) &:= \sum_{s\geqslant 1} G^{(s)}/G^{(s+1)}(t)\cdot z^s = \frac{(1+t)z}{(1-t)^2(1-tz)(1-t^2z)}, \\
A_F(t,z) &:= \sum_{s\geqslant 0} F^{(s)}/F^{(s+1)}(t)\cdot z^s = \frac{(1+t)z}{(1-t)^2(1-tz)(1-t^2z)} + \frac{1-z}{(1-tz)(1-t^2z)}.
\end{aligned}$$

Лемма 11. *У алгебр $B^{(s)} = A/F^{(s)}$ и $A/G^{(s)}$ одинаковый полином Гильберта*:

$$P_{B(s)}(m) = s(s-1)m - \frac{s(s-1)(2s-5)}{2}.$$

Доказательство. Согласно пунктам 2) и 3) теоремы 9 функции Гильберта этих алгебр совпадают при $m \geqslant 2s-1$, поэтому их многочлены Гильберта равны. Из пункта 1) теоремы 9 вытекают равенства

$$\begin{aligned}
A/G^{(s)}(t) &= \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4} = (1-t^{s-1}-t^s+t^{2s-1})\cdot \sum_{m\geqslant 0} C_{-4}^m(-t)^m \\
&= \sum_{m\geqslant 0} (-1)^m C_{-4}^m (t^m - t^{m+s-1} - t^{m+s} + t^{m+2s-1}) \\
&= (\text{полином степени } 2s-2) \\
&\qquad + \sum_{m\geqslant 2s-1} t^m\cdot((-1)^m C_{-4}^m - (-1)^{m-s+1}C_{-4}^{m-s+1} - (-1)^{m-s}C_{-4}^{m-s}) \\
&\qquad + \sum_{m\geqslant 2s-1} t^m\cdot(-1)^{m-2s+1}C_{-4}^{m-2s+1},
\end{aligned}$$

здесь

$$C_{-4}^k = (-4)(-5)\cdots(-4-k+1)\frac{1}{k!} = (-1)^k C_{k+3}^3 = (-1)^k\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}.$$

Следовательно, при $m \geqslant 2s-1$ получаем равенства, доказывающие лемму 11:

$$\begin{aligned}
h_{B(s)}(m) &= C^3_{m+3} - C^3_{m-s+4} - C^3_{m-s+3} + C^3_{m-2s+4} \\
&= \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - \frac{(m-s+4)(m-s+3)(m-s+2)}{6} \\
&\quad - \frac{(m-s+3)(m-s+2)(m-s+1)}{6} \\
&\quad + \frac{(m-2s+4)(m-2s+3)(m-2s+2)}{6} \\
&= s(s-1)m - \frac{s(s-1)(2s-5)}{2}\,.
\end{aligned}$$

Следствие 12. *Аналогично доказывается, что градуированные A-модули $G^{(s)}/G^{(s+1)}$ и $F^{(s)}/F^{(s+1)}$ имеют одинаковый полином Гильберта*:

$$P(m) = 2sm - s(3s-4).$$

Автор благодарит А. В. Кондратьева за его программу вычислений в градуированных ассоциативных алгебрах GRAAL (УлГУ–1998), с помощью которой были проверены предварительные гипотезы данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. А. Уфнаровский, “Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре”, *Алгебра – 6*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **57**, ВИНИТИ, М., 1990, 5–177.

[2] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О’Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры*, Мир, М., 2000.

[3] Л. М. Шифнер, “О степени матрицы”, *Матем. сб.*, **42**:3 (1935), 385–394.

А. Б. Верёвкин
Ульяновский государственный университет
E-mail: abverevkin@gmail.com

Поступило
09.12.2010
Исправленный вариант
19.05.2011