Неопределённый интеграл

Пусть $f(x):(a,b) \to \mathbb{R}$,
тогда $F(x):(a,b) \to \mathbb{R}$ является
точной первообразной $f(x)$ на (a,b),
если $\forall x \in (a,b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Например, $F(x) \equiv 1$ — точная
первообразная $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;
а $F(x) = \ln(-x)$ — точная первообраз-
ная $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$, поскольку:

$$(1)' = 0\ ;$$

$$(\ln(-x))' = \ln'(-x) \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$ —

это равенство истинно для всех x из
области определения $F(x)$, а функция
$\ln(-x)$ определена при $x < 0$.

Свойства точных первообразных

Пусть $F(x)$ — точная первообразная $f(x)$ на (a,b), тогда:

1) $F(x)$ — точная первообразная $f(x)$ на $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$;

2) $F(x) + C$ — точная первообразная $f(x)$ на (a,b);

2) $F(x)+C$ – точная первообразная $f(x)$ на (a,b);

3) $C\cdot F(x)$ – точная первообразная $C\cdot f(x)$ на (a,b);

4) $F(x)$ – непрерывна на (a,b);

5) если к тому же $G(x)$ – точная первообразная $g(x)$ на (a,b), тогда $F(x)+G(x)$ – точная первообразная $f(x)+g(x)$ на (a,b).

Эти свойства следуют из свойств дифференцирования.

Замечание: понятие точной первообразной можно распространить на функции, заданные на отрезках $[a,b]$ или полуинтервалах $[a,b)$, $(a,b]$, привлекая понятия односторонних производных $D_+f(x)$, $D_-f(x)$ с сохранением предыдущих свойств, но удобнее более широкое обобщение:

$F(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ является **первообра́зной** $f(x)$ на (a,b), если выполнены два условия:

1) есть некоторое конечное множество $X=\{x_1,\dots,x_n\}\subset(a,b)$ такое, что $F(x)\in\mathcal{D}((a,b)\setminus X)$ и $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,b)\setminus X$;

2) $F(x)\in C((a,b))$

2) $F(x) \in C((a,b))$.

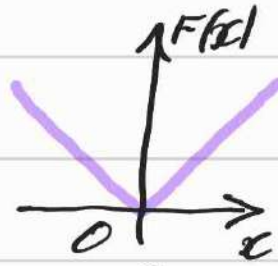
Заметим, что в случае непустого X второе условие не вытекает из первого; точная первообразная функции $f(x)$ на (a,b) является её же первообразной, а обратное верно, только если исключительное множество X можно выбрать пустым; понятие "первообразной" легко переносится на отрезки и полуинтервалы определения функций $F(x)$ и $f(x)$ — для этого граничные точки области a или b нужно внести в "исключительное" множество X;

указанными ранее свойствами точных первообразных обладают и первообразные "не точные" — доказательства их прежние, кроме 5) случая, в котором исключительное множество первообразной от суммы $f(x)$ и $g(x)$ будет лежать в объединении исключительных множеств первообразных от функций $f(x)$ и $g(x)$: $X_{F+G} \subseteq X_F \cup X_G$.

Следующий пример демонстрирует

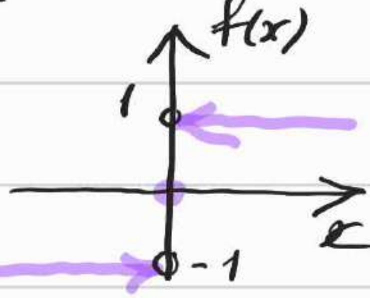
СОДЕРЖАТЕЛЬНОСТИ СДЕЛАННОГО ОБОБЩЕНИЯ?

Функция $F(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



является первообразной для

функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$.

Но $F(x)$ не является точной первообразной $f(x)$ ни на каком интервале, содержащем ноль, поскольку $F(x) \notin \mathcal{D}(0)$. Непрерывность $F(x) = |x|$ в любой $x_0 \in \mathbb{R}$ следует из неравенства треугольника:

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |x| - |x_0| \leq |x - x_0|,$$ поменяв местами x и x_0, получим неравенство:

$$|x_0| - |x| \leq |x_0 - x| = |x - x_0|,$$ и поэтому

$$|F(x) - F(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|.$$

Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0 \ \forall x \ |x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow$

$$\Longrightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon : F(x) \in C(x_0).$$

Замечание. Мы убедились, что множество функций, имеющих первообразную, обширнее множества функций, имеющих точную первообразную. Возникают вопросы: какие функции имеют (точную) первообразную на

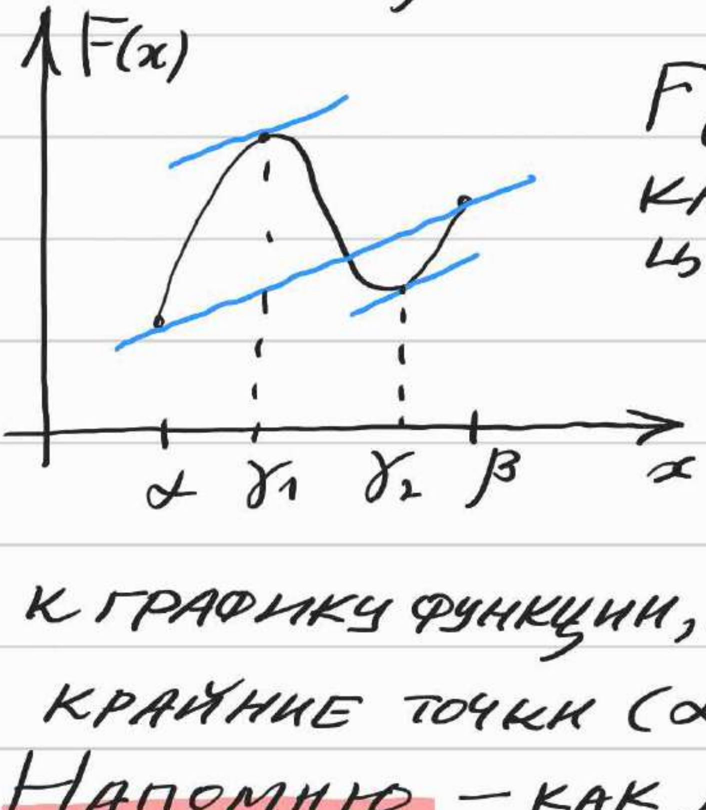
(a,b) или $[a,b]$? Как много (точных) первообразных может быть у функции на (a,b)?

На первый из этих вопросов частичный, но содержательный ответ будет доказан позднее (непрерывная функция имеет точную первообразную, кусочно-непрерывная имеет "неточную" первообразную).

Ответ на второй вопрос будет получен вскоре. Но сначала нужно вспомнить теорему Лагранжа о конечных приращениях:

Пусть $F(x)\in C([\alpha,\beta])\cap \mathcal{D}((\alpha,\beta))$, тогда

$$\exists\gamma\in(\alpha,\beta): F'(\gamma)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



$F'(\gamma)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(\gamma, F(\gamma))$;

$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ — угловой коэффициент секущей к графику функции, проходящей через две крайние точки $(\alpha, F(\alpha))$ и $(\beta, F(\beta))$.

Напомню — как доказывается теорема Лагранжа. Рассмотрим новую функцию

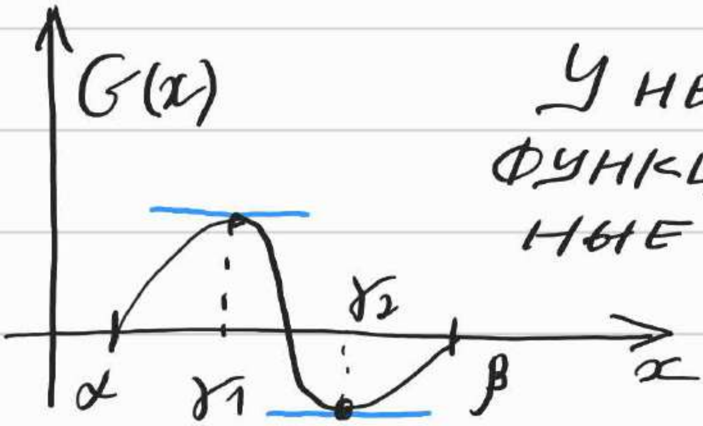
$$G(x)=F(x)-\left(F(\alpha)+\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right).$$

В силу свойств $F(x), G(x) \in C([\alpha,\beta]) \cap \mathcal{D}((\alpha,\beta))$.

При этом получаем равенства:

$$G(\alpha) = F(\alpha) - \left(F(\alpha) + \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}(\alpha-\alpha)\right) = 0,$$

$$G(\beta) = F(\beta) - \left(F(\alpha) + \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)\right) = 0.$$



У непрерывной на отрезке функции есть экстремальные значения (min, max). Если $G(\alpha) = G(\beta)$, то хотя бы один из этих экстремумов γ лежит на (α, β).

$G(x)$ — дифференцируема в этой γ: $G(x) \in \mathcal{D}(\gamma)$. По теореме Ферма об экстремумах, имеем $G'(\gamma) = 0$. Но

$$G'(x) = \left(F(x) - \left(F(\alpha) + \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right)\right)' =$$

$$= F'(x) - \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$ Поэтому

$$F'(\gamma) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$ ч.т.д.

Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что точная первообразная от нулевой на интервале функции — постоянна на этом интервале.

Лемма. Пусть $F(x)$ — точная первообразная

Лемма. Пусть $F(x)$ – точная первообр раз-
ная функции $f(x) \equiv 0$ на (a,b). Тогда
$F(x) = const$ на (a,b).

Доказательство: по условию, $F(x) \in \mathcal{D}((a,b))$
и $\forall x \in (a,b)$ имеем $F'(x) = f(x) = 0$.
Возьмём $x_0 \in (a,b)$ и $x \in (a,b)$, $x < x_0$.
Тогда теорема Лагранжа о конеч-
ных приращениях применима к
функции $F(x)$ на отрезке $[x, x_0]$.
Найдётся $z \in (x, x_0)$: $\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = F'(z) = f(z) = 0$.
Поэтому $F(x_0) - F(x) = 0$ и $F(x) = F(x_0)$ $\forall x < x_0$.

Аналогичное рассуждение можно
провести для $x \in (a,b)$, $x > x_0$.
В итоге, получим, что $\forall x \in (a,b)$

$$F(x) = F(x_0) = const. \quad \blacksquare$$

Следствие. Пусть $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ –
– точные первообразные функции $f(x)$
на интервале (a,b). Тогда $\exists C \in \mathbb{R}$
$\forall x \in (a,b)$ $\tilde{F}(x) = F(x) + C$.

Доказательство. По условию, $F(x), \tilde{F}(x) \in \mathcal{D}((a,b))$
и $F'(x) = f(x) = \tilde{F}'(x)$ на (a,b). Тогда
$\tilde{F}(x) - F(x) \in \mathcal{D}((a,b))$ и $\forall x \in (a,b)$:

$$(\widetilde{F}(x)-F(x))' = \widetilde{F}'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0.$$

То есть, $\widetilde{F}(x)-F(x)$ — точная первообразная нулевой функции на (a,b). По предыдущей лемме, $\widetilde{F}(x)-F(x)\equiv C$ на (a,b). ■

Доказательство аналогичных свойств для "неточных" первообразных немного сложнее предыдущих рассуждений.

Лемма. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)\equiv 0$ на (a,b). Тогда $F(x)=c$ на (a,b).

Доказательство: возьмём исключительное множество функции $F(x)$:

$$X=\{a=x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}=b\}.$$

Обозначим $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]\subset[a,b]$, $i=1,\ldots,n$.

По условию, $F(x)\in C([a,b])$, поэтому

$$F(x)\in C(\Delta_i)\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Также $F(x)\in \mathcal{D}([a,b]\setminus X)$ и

$$\forall x\in[a,b]\setminus X\quad F'(x)=f(x)=0.$$

Следовательно, $\forall i=1,\ldots,n\ \forall x\in(x_i,x_{i+1})$

$$F'(x)=f(x)=0.$$

Возьмём $\tilde{x}\in\Delta_i$, $\tilde{x}<x_{i+1}$. Тогда на

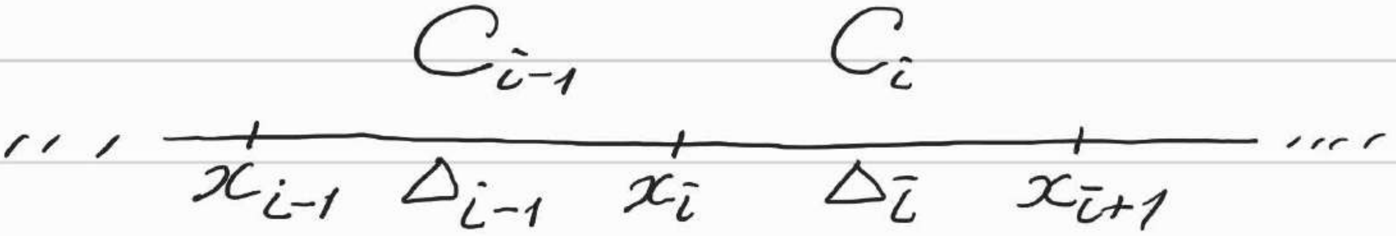
отрезке $[\tilde{x}, x_{i+1}]$ для $F(x)$ выполнены условия Теоремы Лагранжа о конечных приращениях. Поэтому $\exists \gamma \in (\tilde{x}, x_{i+1})$:

$$\frac{F(x_{i+1})-F(\tilde{x})}{x_{i+1}-\tilde{x}} = F'(\gamma)=f(\gamma)=0.$$

Откуда следует $F(\tilde{x})=F(x_{i+1})\ \forall \tilde{x}\in\Delta_i$. То есть, $F(x)$ — постоянна на каждом $\Delta_i \subset [a,b]$: имеется набор констант $C_1, C_2, \dots, C_n$, таких что $\forall i=1,\dots,n\ \forall x\in\Delta_i\ F(x)=C_i$.

Докажем, что эти константы равны между собой — этот факт докажет и текущую Лемму.

Если $i=2,\dots,n$, тогда точка x_i — правая граница отрезка Δ_{i-1} и левая — Δ_i:



Поскольку $F(x)\in C(x_i)$, имеем равенства:

$$C_{i-1}=F(x_i-0)=F(x_i)=F(x_i+0)=C_i.$$

Тогда $C_1=C_2=\dots=C_n=C$.

Действительно, допустим $C_i\neq C_1$ для какого-то $i=1,2,\dots,n$. Ясно, что такой $i\neq 1,2$ (потому что $C_1=C_2$).

такой $i \neq 1, 2$ (потому что $C_1 = C_2$).
Пусть k — наименьший из таких i, то есть, $C_k \neq C_1$, но $C_{k-1} = C_1$. Однако, было доказано, что $C_{k-1} = C_k$ и поэтому $C_k = C_1$, — вопреки построению $\%$. ■

Теперь мы можем получить описание множества первообразных функции $f(x)$ на отрезке (если это множество не пусто).

Теорема. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a, b]\ G(x) = F(x) + C$.

Доказательство: во-первых, $F(x), G(x) \in C([a, b])$. Поэтому $G(x) - F(x) \in C([a, b])$.
Во-вторых, имеются конечные исключительные множества $X_G, X_F \subset [a, b]$ такие, что

$$\forall x \in [a, b] \setminus X_G\ \exists G'(x) = f(x),$$

$$\forall x \in [a, b] \setminus X_F\ \exists F'(x) = f(x).$$

Определим конечное множество $X = X_G \cup X_F \subset [a, b]$.
Тогда $\forall x \in [a, b] \setminus X\ G'(x) = f(x) = F'(x)$,
и, следовательно, получаем равенство:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$(G(x)-F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

Таким образом, $G(x)-F(x)$ — первообразная нулевой функции на отрезке $[a, b]$. По предыдущей лемме, $G(x)-F(x) \equiv C$. ∎

Замечание. Если бы в определении первообразной мы допустили бесконечные исключительные множества X — например, счётные — тогда предыдущая теорема (и лемма) перестала бы выполняться. Есть замечательный пример непрерывной непостоянной «Канторовой функции», которая имеет нулевую производную вне счётного множества, в котором эта функция недифференцируема.

Если же $F(x)$ является первообразной нулевой функции на множестве более сложном, чем отрезок, — например, — на объединении отрезков $M = [a, b] \cup [c, d]$, $a < b < c < d$, тогда $F(x)$ не обязана быть постоянной на M. В общем, она такова:

$$F(x) = \begin{cases} C_1, & x \in [a, b]; \\ C_2, & x \in [c, d]. \end{cases}$$

Определение. Неопределённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (интервале (α, β) или ином множестве M) называется семейство первообразных $f(x)$ на подразумеваемой области задания $f(x)$.

Обозначение неопределённого интеграла:

$$\text{Знак интеграла} \rightarrow \int \underbrace{f(x)}_{\text{подинтегральная функция}} dx \leftarrow \text{Дифференциал переменной интегрирования}$$

Замечание. Область определения первообразных в обозначении неопределённого интеграла не отражается – о ней следует догадываться из контекста употребления формулы.

Если первообразные функции $f(x)$ определены на отрезке $[a, b]$ (интервале (α, β)) и $F(x)$ – одна из таких первообразных, то исторически принято записывать:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, подразумевая $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$.

Неопределённый интеграл на некоторых множествах от некоторых функций может

НЕ СУЩЕСТВОВАТЬ.

Примеры:

0) $\int 0\cdot dx = C$ на $(-\infty,+\infty)$ — в этом случае, хотя, вроде бы, $0\cdot dx = 0$, запись вида $\int 0$ считается неправильной;

1) $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$ на $(-\infty,+\infty)$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\cdot dx = \int x^{-1}\cdot dx = \ln|x| + C$

на $(0,+\infty)$ и на $(-\infty,0)$. А вот на $\mathbb{R}$ и даже на $[-1,1]$ $\int\frac{dx}{x}$ — не существует, потому что нет непрерывной кусочно-дифференцируемой на $[-1,1]$ функции, чья производная равнялась бы $\frac{1}{x}$ на $[-1,1]\setminus X$, $\# X < \infty$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$ на $(0,+\infty)$ и на $(-\infty,0)$.

Хотя функция $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}} \in C(\mathbb{R})$ и при $x\neq 0$ $\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ не будет первообразной $x^{-\frac{1}{3}}$ на $(-\infty,+\infty)$, поскольку $x^{-1/3}$ не определена при $x=0$.

Но если определить функцию $f(x)$ условиями:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{при } x\neq 0; \end{cases}$$

0, при $x=0$,

Тогда получим $\int f(x)dx = \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$ на $\mathbb{R}$.

Дальнейшие примеры неопределённых интегралов представлены в особых справочниках и «Таблицах интегралов».

Свойства неопределённых интегралов

1) $\int F'(x)\,dx = F(x)+C$;

2) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ — здесь подразумевается, что неопределённый интеграл существует и у всех первообразных вне некоторого конечного множества X одинаковая производная:

$$\left(\{F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\}\right)' = \{(F(x)+C)',\ C\in\mathbb{R}\} = \{F'(x),\ C\in\mathbb{R}\} = \{f(x)\} \to f(x).$$

Это правило, по сути, является проверочным.

3) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ — здесь подразумевается, что $f(x)$ и $g(x)$ обладают первообразными $F(x)$ и $G(x)$

и тогда $F(x)+G(x)$ будет первообразной суммы $f(x)+g(x)$. Более того, — всякая первообразная функции $f(x)+g(x)$ равна сумме некоторых первообразных $f(x)$ и $g(x)$.

4) $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx$ — здесь подразумевается, что $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ и тогда $\alpha \cdot F(x)$ будет первообразной функции $\alpha \cdot f(x)$. Для $\alpha \neq 0$ это утверждение можно обратить и любая первообразная функции $\alpha \cdot f(x)$ имеет вид $\alpha \cdot F(x)$, где $F(x)$ — первообразная $f(x)$. Однако, для $\alpha = 0$ формула нарушается по многим обстоятельствам. Действительно, в левой части формулы мы имеем:

$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \int 0 \cdot dx = C \text{ на всём } (-\infty, +\infty).$$

Правая же часть формулы может быть неопределена, если у $f(x)$ нет первообразной. Если же первообразная есть, получается:

$$\alpha \cdot \int f(x)\,dx = 0 \cdot \int f(x)\,dx = 0.$$

Поэтому, чтобы формула была верна при всех α, она должна иметь вид:

$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx + C$$

Но так её симметричность нарушается.

5) Линейность — обобщает 3) & 4)

$$\int(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\cdot\int f(x)\,dx+\beta\cdot\int g(x)\,dx.$$

Для выполнения этой формулы необходимо существование первообразных функций $f(x)$ и $g(x)$. Кроме того, равенство нарушается, если $\alpha=\beta=0$ — в этом случае справа следует прибавить константу, а точнее — $\int 0\,dx$.

6) Интегрирование по частям

Пусть $\exists\, f'(x)$, $g'(x)$ и $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$. Тогда

$$\exists \int f'(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx.$$

7) Замена переменных

Пусть $F(x)$ — точная первообразная $f(x)$ на (a,b):

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

И пусть $\omega(t):(\alpha,\beta)\to(a,b)\in\mathcal{D}((\alpha,\beta))$.

Тогда композиция $F(\omega(t))$ — точная первообразная функции $f(\omega(t))\cdot\omega'(t)$ на (α,β):

$$\int f(\omega(t))\cdot\omega'(t)\,dt=F(\omega(t))+C.$$

Переход: $x\to\omega(t)$, $dx\to\omega'(t)\,dt$ называется заменой переменной, а обратный переход: $\omega(t)\to x$, $\omega'(t)\,dt\to dx$ называется подстановкой.

О доказательстве свойств: 1) & 2) следуют из определения (точной) первообразной; 3) & 4) & 5) — непосредственные следствия линейности дифференцирования;

6)-е свойство докажем на интервале (a,b). По условию, $f(x), g(x) \in \mathcal{D}((a,b)) \subset C((a,b))$.

Предполагается, что на (a,b) существует первообразная функции $f(x)\cdot g'(x)$ — назовём её $H(x) \in C((a,b))$, $H(x) \in \mathcal{D}((a,b) \setminus \underline{X})$, где $\# \underline{X} < \infty$ и $\forall x \in (a,b) \setminus \underline{X}$ $H'(x) = f(x)\cdot g'(x)$.

Как произведение дифференцируемых функций, $f(x)\cdot g(x) \in \mathcal{D}((a,b)) \subset C((a,b))$. Таким образом, функция $f(x)\cdot g(x) - H(x) \in C((a,b))$, а также дифференцируема на $(a,b) \setminus \underline{X}$ — здесь имеем равенства, следующие из Правила Лейбница производной произведения:

$$(f(x)\cdot g(x) - H(x))' = (f(x)\cdot g(x))' - H'(x) =$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) - f(x)\cdot g'(x) = f'(x)\cdot g(x).$$

Следовательно, функция $f(x)\cdot g(x) - H(x)$ — первообразная $f'(x)\cdot g(x)$ на (a,b):

$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - H(x) + C$ — это выражение для левой части формулы 6).

Правая её часть выражается таким образом:

$$f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)-(H(x)+\tilde{C}).$$

Видим, что получено то же самое, если $\tilde{C}=-C$.

7)-е свойство следует из правила дифференцирования «сложной» функции:

$$(F(\omega(t)))' = F'(\omega(t))\cdot\omega'(t) = f(\omega(t))\cdot\omega'(t).$$

Тем самым, доказательство свойств неопределённого интеграла закончено. $\blacksquare$

Поучительной иллюстрацией применения этих свойств является доказательство Теоремы М.В. Остроградского об интегрировании рациональной функции.