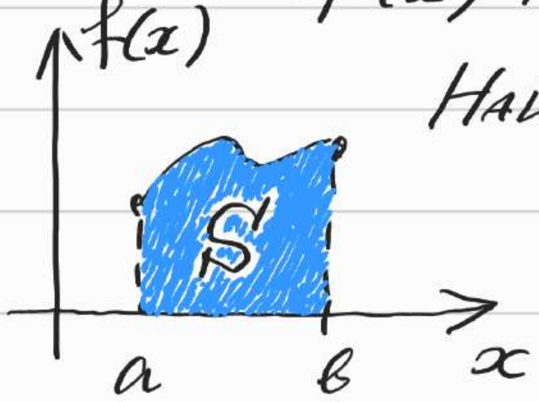
Определённый интеграл Римана

Решается задача: дана функция

$$f(x):[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}.$$



Найти площадь под её графиком:

$$S=S(f(x);a,b).$$

Бернгард Риман (1826–1866) первым дал строгие определения в этой теме.

Конечное разбиение отрезка $[a,b]$:

$$T:\ a=x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_{n+1}=b;$$

$\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$ — отрезки разбиения T,

$i=1,2,..,n$; $|\Delta_i|=x_{i+1}-x_i$ — длина Δ_i;

$n=\#T$ — мощность разбиения T;

$d(T)=\max\limits_{i=1}^{\#T}|\Delta_i|$ — диаметр разбиения T.

Разметка разбиения T: $\xi_i\in\Delta_i$; $i=1,..,\#T$.

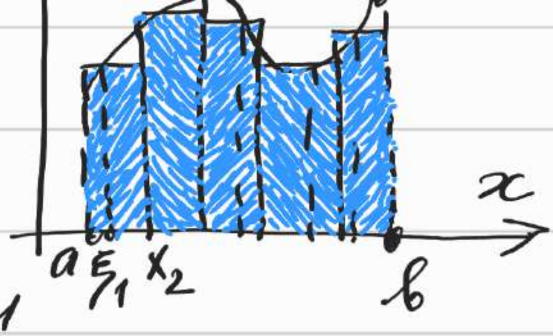
(T,ξ) — размеченное разбиение $[a,b]$.

Интегральная сумма Римана

$$S_f(T,\xi)=\sum_{i=1}^{\#T} f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|.$$

ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ —

— ПЛОЩАДЬ СТУПЕНЕЙ:



Заметим, что если $f(\xi_i)<0$,

то площадь i-той ступеньки

$$f(\xi_i)\cdot|\Delta_i| \leq 0.$$

Интегралом Римана $f(x)$ на $[a,b]$ называется число $I =: \int_a^b f(x)dx$,

для которого выполняется условие:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (T,\xi)$ — размеченного разбиения $[a,b]$ $(d(T)<\delta) \Rightarrow (|S_f(T,\xi)-I|<\varepsilon)$.

Замечание: $\int_a^b f(x)dx$ зависит от a, b и f, но не зависит от переменной x.

Примеры:

0) если $f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$, тогда

$\forall (T,\xi)$ - р.р. $[a,b]$ $\forall i=1,\dots,\#T$ $f(\xi_i)=0$,

поэтому $S_f(T,\xi)=0$ и $\int_a^b 0\cdot dx=0$:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=10^5>0\ \forall (T,\xi)$ - р.р. $[a,b]$

$(d(T)<\delta) \Rightarrow (|S_f(T,\xi)-0|=|0-0|=0<\varepsilon)$

$(d(T)<\delta) \Rightarrow (|S_f(T,\xi) - 0| = 0 < \varepsilon).$

1) если $f(x) \equiv 1$ на $[a,b]$, тогда

$\forall (T,\xi)$ – р.р. $[a,b]$ $\forall i = 1,\dots,\#T$ $f(\xi_i) = 1$ и

$$S_f(T,\xi) = \sum_{i=1}^{\#T} 1\cdot|\Delta_i| = \sum_{i=1}^{\#T}(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\#T} x_{i+1} - \sum_{i=1}^{\#T} x_i = \sum_{i=2}^{\#T+1} x_i - \sum_{i=1}^{\#T} x_i =$$

$$= x_{\#T+1} - x_1 = b - a.$$

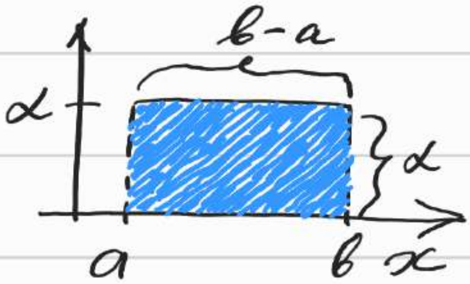
Поэтому $\int_a^b 1\cdot dx = b - a$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = 1 > 0$ $\forall (T,\xi)$ – р.р. $[a,b]$

$(d(T) < \delta) \Rightarrow (|S_f(T,\xi) - (b-a)| = |0| = 0 < \varepsilon).$

3) предыдущие примеры 1) & 2) обобщаются таким образом:

$$\int_a^b \alpha \cdot dx = \alpha \cdot (b - a)$$



– формула площади прямоугольника.

<u>Вопросы</u>: для каких $f(x)$ существует интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$? определён

ли он однозначно? Как его находить?

Ответы тут разной степени сложности.

Теорема единственности интеграла Римана

Пусть числа I_1 и I_2 удовлетворяют условиям интеграла Римана $f(x)$ на $[a,b]$.

Тогда $I_1 = I_2$.

Доказательство: (от противного)

X_0 $I_1 \neq I_2$, положим $\varepsilon = \dfrac{|I_1 - I_2|}{4} > 0$.

По определению, $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$, т.ч.

$\forall (T,\xi)$ – р.р. $[a,b]$ одновремено верны импликации:

$$(d(T) < \delta_1) \Rightarrow (|S_f(T,\xi) - I_1| < \varepsilon),$$
$$(d(T) < \delta_2) \Rightarrow (|S_f(T,\xi) - I_2| < \varepsilon).$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, тогда $(d(T) < \delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (|S_f(T,\xi) - I_1| < \varepsilon) \;\&\; (|S_f(T,\xi) - I_2| < \varepsilon).$$

Тогда, выбрав (T,ξ) – р.р. $[a,b]$ с условием $d(T) < \delta$, получим неравенства:

$$|I_1 - I_2| = |(I_1 - S_f(T,\xi)) - (I_2 - S_f(T,\xi))| \leqslant$$
$$\leqslant |(I_1 - S_f(T,\xi))| + |(I_2 - S_f(T,\xi))| < \varepsilon + \varepsilon =$$

$$= 2\varepsilon = \frac{|I_1-I_2|}{2} : |I_1-I_2| < \frac{|I_1-I_2|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|I_1-I_2|}{2} < 0 \quad \blacksquare$$

Теорема (необходимое условие интегрируемости по Риману)

Если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, тогда $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Доказательство: пусть $a < b$ и $f(x)$ — интегрируема на $[a,b]$, то есть $\exists I = \int_a^b f(x)dx$ для которого выполнено:

для $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ $\forall (T,\xi)$ – р.р. $[a,b]$

$$(d(T)<\delta) \Rightarrow (|S_f(T,\xi) - I| < \varepsilon = 1).$$

Построим разбиение $T : d(T) < \delta$ следующим образом: сначала возьмём натуральное $n > \frac{b-a}{\delta}$, например — $n = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$.

Затем $[a,b]$ разобьём на n равных частей, полагая $x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1)$, $i = 1,\ldots,n+1$.

Отрезок Δ_i разбиения $T: a = x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$ имеет длину $|\Delta_i| = |[x_i, x_{i+1}]| =$

$$= x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} < \delta, \ |\Delta_i| > 0.$$

Для любой разметки $\xi : \xi_i \in \Delta_i$ — разбиения T

получаем оценки: $|S_f(T,\xi) - I| < 1$,

$$|S_f(T,\xi)| = |(S_f(T,\xi) - I) + I| \leqslant$$

$$\leqslant |S_f(T,\xi) - I| + |I| < 1 + |I|.$$

Теперь фиксируем $j \in \{1, \dots, n\}$ и

для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ положим:

$$\xi_i = x_i, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i| = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(x_i) =: C_j.$$

при этом $\xi_j = x \in \Delta_j$ — будем считать

произвольным в указанных пределах.

Следовательно, для $x \in \Delta_j$ получаем:

$$|f(x)| \cdot |\Delta_j| = |f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|| = \Big|S_f(T,\xi) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i|\Big| \leqslant$$

$$\leqslant |S_f(T,\xi)| + \Big|\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i) \cdot |\Delta_i|\Big| < 1 + |I| + |C_j|.$$

Поэтому $\forall x \in \Delta_j \ |f(x)| < \dfrac{1 + |I| + |C_j|}{|\Delta_j|} = n \cdot \dfrac{1 + |I| + |C_j|}{b-a}$.

Таким образом, $f(x)$ ограничена на $\Delta_j \ \forall j = 1, \dots, n$.

Следовательно, она ограничена и на $[a, b]$:

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| < n \cdot \frac{1 + |I| + \max\limits_{j=1}^{n} |C_j|}{b-a}. \ \blacksquare$$

Замечание. Уместно ввести полезные обозначения: пусть множество M содержится в области определения $f(x)$.

Условие ограниченности $f(x)$ на M будем записывать так: $f(x) \in B(M)$ — что означает

$$\exists C \ \forall x \in M \ |f(x)| < C.$$

$B(M)$ — это множество функций, определённых на $\mathcal{U}$ и ограниченных на $M \subset \mathcal{U}$. $B(M)$ — подпространство в пространстве всех функций на M, поскольку линейная комбинация ограниченных функций ограничена:

$$|\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)| \leqslant |\alpha| \cdot |f(x)| + |\beta| \cdot |g(x)|.$$

Отметим ещё несколько свойств:

– $C([a,b]) \subset B([a,b])$;

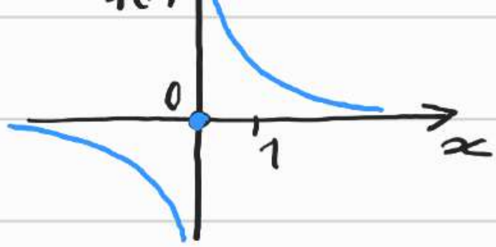
– $(M_2 \subset M_1) \Rightarrow (B(M_1) \subset B(M_2))$;

– $B(M_1 \cup M_2) = B(M_1) \cap B(M_2)$.

Если мы обозначим $R([a,b])$ — множество функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$, тогда предыдущая теорема примет вид: $R([a,b]) \subset B([a,b])$.

Эта теорема поставляет примеры функций, неинтегрируемых по Риману:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$



$f(x)\notin R([0,1])$, потому что $f(x)\notin B([0,1])$.

Заметим, что существуют ограниченные функции, не интегрируемые по Риману:

$$(a<b)\Rightarrow\quad B([a,b])\neq R([a,b]).$$