Теория Дарбу интеграла Римана, часть 1

Функция Лежена Дирихле (1805–1859)

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Свойства $\mathcal{D}(x)$:

$\mathcal{D}(-x) = \mathcal{D}(x)$; $\forall q \in \mathbb{Q}$ $\mathcal{D}(x+q) = \mathcal{D}(x)$;

$\mathcal{D}(x) \in B(\mathbb{R})$; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{D}(x) \notin C(x_0)$;

$\mathcal{D}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ – характеристическая функция подмножества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Оказывается, $\mathcal{D}(x) \notin R([a,b])$, если $a<b$.

Действительно, $\overset{\times}{\circ}$ $\exists I = \int_a^b \mathcal{D}(x)dx$.

Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall (T,\xi)$ – р.р. $[a,b]$

$$(d(T) < \delta) \Rightarrow \left(|S_{\mathcal{D}}(T,\xi) - I| < \frac{b-a}{4} \right).$$

Разобьём $[a,b]$ на отрезки равной длины:

$0 < |\Delta_i| = d(T) = \frac{b-a}{n} < \delta$, $i = 1, \ldots, n = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$.

По построению, внутренность Δ_i – не пуста, поэтому $\forall i = 1, \ldots, n$ $\Delta_i \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \neq \Delta_i \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Выберем две разметки разбиения T: $\xi \in \mathbb{Q}^n$ и $\eta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$. Вычислим соответствующие им интегральные суммы Римана:

$$S_{\mathcal{D}}(T,\rho)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}(\rho_i)\cdot|\Delta_i|=\sum_{i=1}^{n}1\cdot|\Delta_i|=|[a,b]|=b-a,$$

$$S_{\mathcal{D}}(T,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}(\eta_i)\cdot|\Delta_i|=\sum_{i=1}^{n}0\cdot|\Delta_i|=0.$$

Следовательно, получаем неравенство:

$$0<b-a=S_{\mathcal{D}}(T,\rho)-S_{\mathcal{D}}(T,\eta)=|S_{\mathcal{D}}(T,\rho)-S_{\mathcal{D}}(T,\eta)|=$$
$$=|(S_{\mathcal{D}}(T,\rho)-I)-(S_{\mathcal{D}}(T,\eta)-I)|\leqslant$$
$$\leqslant|S_{\mathcal{D}}(T,\rho)-I|+|S_{\mathcal{D}}(T,\eta)-I|\leqslant\frac{b-a}{4}+\frac{b-a}{4}=\frac{b-a}{2}$$
$$\Rightarrow\ b-a-\frac{b-a}{2}=\frac{b-a}{2}<0\quad \text{?!}$$

Замечание. В рассмотренном примере функция оказалась не интегрируемой по Риману из-за не уменьшаемого разброса интегральных сумм. Анализ подобной ситуации провёл французский математик Жан Дарбу (1842–1917).

Определение. Пусть $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ и $T: a=x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{n+1}=b$ – разбиение $[a,b]$.

$\overline{S}_f(T)=\sup\limits_{\xi\text{-разметка } T} S_f(T,\xi)$ – верхняя сумма Дарбу,

$\underline{S}_f(T)=\inf\limits_{\xi\text{-разметка } T} S_f(T,\xi)$ – нижняя сумма Дарбу.

Если $f(x)$ – не ограничена на $[a,b]$, тогда эти величичины могут оказаться бесконечными.

Если же $\forall x \in [a, b]$ $m \leqslant f(x) \leqslant M$, тогда $\forall$ (T, ξ) – р. р. $[a, b]$ есть оценки:

$$m\cdot(b-a) \leqslant \underline{S}_f(T) \leqslant S_f(T,\xi) \leqslant \overline{S}_f(T) \leqslant M\cdot(b-a).$$

Если мы интересуемся признаками и критериями интегрируемости функции по Риману, то, в силу необходимого условия интегрируемости, нужно считать $f(x)$ ограниченной.

В приведённых выше условиях определим разброс интегральных сумм Римана:

$$\Omega_f(T) := \sup_{\xi, \theta \text{ - разметки } T} \left(S_f(T,\xi) - S_f(T,\theta)\right).$$

Лемма. Пусть $f(x)$ – ограничена на $[a, b]$, тогда для любого T – разбиения $[a, b]$ есть равенство:

$$\Omega_f(T) = \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T).$$

Доказательство. Для любой разметки ξ разбиения T есть неравенство: $\underline{S}_f(T) \leqslant S_f(T,\xi) \leqslant \overline{S}_f(T)$.

Поэтому для любых разметок T – ξ и θ получим оценку:

$$S_f(T,\xi) - S_f(T,\theta) \leqslant \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T).$$

Следовательно, $\Omega_f(T) \leqslant \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T)$.

Пусть $\varepsilon>0$, тогда существуют разметки ξ и θ разбиения T:

$$S_f(T,\xi)>\overline{S}_f(T)-\frac{\varepsilon}{2}\ ;\ S_f(T,\theta)<\underline{S}_f(T)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

и для этих разметок получим:

$$S_f(T,\xi)-S_f(T,\theta)>\overline{S}_f(T)-\underline{S}_f(T)-\varepsilon.$$

Поэтому, по определению супремума, имеем:

$$\sup_{\xi,\theta\text{-разметки}T}\big(S_f(T,\xi)-S_f(T,\theta)\big)=\overline{S}_f(T)-\underline{S}_f(T).\ \blacksquare$$

Замечание. Отметим некоторые арифметические свойства интегральных сумм Римана и сумм Дарбу:

$$S_{\alpha\cdot f}(T,\xi)=\sum_{i=1}^{\#T}\alpha\cdot f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|=\alpha\cdot\sum_{i=1}^{\#T}f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|=\alpha\cdot S_f(T,\xi).$$

$$S_{f+g}(T,\xi)=\sum_{i=1}^{\#T}\big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\cdot|\Delta_i|=$$

$$=\sum_{i=1}^{\#T}f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|+\sum_{i=1}^{\#T}g(\xi_i)\cdot|\Delta_i|=S_f(T,\xi)+S_g(T,\xi).$$

Эти два равенства означают линейность интегральной суммы Римана по функциональному аргументу:

$$S_{\alpha\cdot f+\beta\cdot g}(T,\xi)=\alpha\cdot S_f(T,\xi)+\beta\cdot S_g(T,\xi).$$

Но суммы Дарбу не вполне линейны:

$$\begin{cases}\overline{S}_{\alpha\cdot f}(T)=\alpha\cdot\overline{S}_f(T)\\ \underline{S}_{\alpha\cdot f}(T)=\alpha\cdot\underline{S}_f(T)\end{cases}-\text{ при }\alpha\geqslant 0,$$

$$\begin{cases} \overline{S}_{\alpha\cdot f}(T) = \alpha\cdot \underline{S}_{f}(T) \\ \underline{S}_{\alpha\cdot f}(T) = \alpha\cdot \overline{S}_{f}(T) \end{cases} \text{— при } \alpha \leqslant 0.$$

Причина этого в том, что ключевые неравенства

$$\underline{S}_f(T) \leqslant S_f(T,\xi) \leqslant \overline{S}_f(T);$$

$$\overline{S}_f(T) - \varepsilon \leqslant S_f(T,\theta); \quad S_f(T,\zeta) \leqslant \underline{S}_f(T) + \varepsilon,$$

будучи умноженными на число $\alpha > 0$, сохраняет вид:

$$\alpha\cdot \underline{S}_f(T) \leqslant \alpha\cdot S_f(T,\xi) = S_{\alpha\cdot f}(T,\xi) \leqslant \alpha\cdot \overline{S}_f(T);$$

$$\alpha\cdot \overline{S}_f(T) - \alpha\cdot\varepsilon \leqslant \alpha\cdot S_f(T,\theta) = S_{\alpha\cdot f}(T,\theta);$$

$$S_{\alpha\cdot f}(T,\zeta) = \alpha\cdot S_f(T,\zeta) \leqslant \alpha\cdot \underline{S}_f(T) + \alpha\cdot\varepsilon;$$

но при умножении на $\alpha < 0$ они "переворачиваются":

$$\alpha\cdot \overline{S}_f(T) \leqslant \alpha\cdot S_f(T,\xi) = S_{\alpha\cdot f}(T,\xi) \leqslant \alpha\cdot \underline{S}_f(T);$$

$$\alpha\cdot \underline{S}_f(T) - |\alpha|\cdot\varepsilon \leqslant \alpha\cdot S_f(T,\zeta) = S_{\alpha\cdot f}(T,\zeta);$$

$$\alpha\cdot S_f(T,\theta) = S_{\alpha\cdot f}(T,\theta) \leqslant \alpha\cdot \overline{S}_f(T) + |\alpha|\cdot\varepsilon.$$

Другие проявления нелинейности:

$$\overline{S}_{f+g}(T) = \sup_{\xi} S_{f+g}(T,\xi) = \sup_{\xi}\left(S_f(T,\xi) + S_g(T,\xi)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi,\theta}\left(S_f(T,\xi) + S_g(T,\theta)\right) = \sup_{\xi} S_f(T,\xi) + \sup_{\theta} S_g(T,\theta) = \overline{S}_f(T) + \overline{S}_g(T);$$

$$\underline{S}_{f+g}(T)=\inf_{\xi} S_{f+g}(T,\xi)=\inf_{\xi}(S_f(T,\xi)+S_g(T,\xi))\geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\xi,\theta}(S_f(T,\xi)+S_g(T,\theta))=\inf_{\xi} S_f(T,\xi)+\inf_{\theta} S_g(T,\theta)=\underline{S}_f(T)+\underline{S}_g(T).$$

Для сумм Дарбу есть практичное выражение:

Теорема (Формулы Дарбу). Пусть $f(x)\in B([a,b])$, $a<b$, $T: a=x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{n+1}=b$ – разбиение $[a,b]$ отрезками $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,\ldots,n$. Определим числа

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x).$$

Тогда $\overline{S}_f(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|$, $\underline{S}_f(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\cdot|\Delta_i|$.

Доказательство. $\forall\xi$ – разметки T имеем: $f(\xi_i)\leqslant M_i$,

поэтому $S_f(T,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|$.

По условию, $\forall\varepsilon>0\ \forall i=1,\ldots,n\ \exists\xi_i\in\Delta_i\ f(\xi_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $S_f(T,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot|\Delta_i|\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a})\cdot|\Delta_i|=$

$$=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|-\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|-\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot|[a,b]|.$$

Итак, $\exists\xi$ – разметка T $S_f(T,\xi)>\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|-\varepsilon$,

поэтому $\overline{S}_f(T)=\sup\limits_{\xi} S_f(T,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot|\Delta_i|$.

Выражение для нижней суммы Дарбу получим из иных соображений. Уточним обозначения $M_i = M_i(f)$, $m_i = m_i(f)$ и вычислим:

$$\underline{S}_f(T) = -\overline{S}_{-f}(T) = -\sum_{i=1}^{n} M_i(-f)\cdot|\Delta_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-M_i(-f))\cdot|\Delta_i| = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\cdot|\Delta_i|. \blacksquare$$

Замечание. Обобщая начальный пример этой лекции, для функции Дирихле получим выражения: $\forall T$ – разбиения $[a,b]$

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(T) = 0, \quad \overline{S}_{\mathcal{D}}(T) = b-a.$$

Формулы Дарбу имеют практическое и техническое значение. В следующей части с их помощью мы выясним зависимость сумм Дарбу от разбиения T.