Теория Дарбу интеграла Римана, часть 2

Исследуем зависимость суммы Дарбу $S_f(T)$ от T – разбиения отрезка $[a, b]$. Сначала уточним – что такое разбиение, как объект математики T: $a = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1} = b$?

1) набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, но такое представление не будет полезным, поскольку $n = \# T$ – переменная величина, а $a \leq x_i \leq x_{i+1} \leq b$, то есть, на множестве разбиений нет линейной структуры.

2) числа $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ представляют собою начальный фрагмент неубывающей последовательности на $[a, b]$, и это – линейно упорядоченное множество.

3) набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ не является множеством, поскольку некоторые x_i могут совпадать.

Определение. Вещественным мультимножеством назовём $M \subset \mathbb{R}$, оснащённое $\varkappa_M : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ – функцией кратности, такой что выполнено условие: $\forall x \in \mathbb{R}\ (\varkappa_M(x)>0) \Leftrightarrow (x \in M)$.

Число $\varkappa_M(x)$ называется кратностью вхождения x в множество M. Функция кратности $\varkappa_M$ обобщает понятие χ_M — характеристической функции подмножества $M \subset \mathbb{R}$ (которая принимает значения в $\{0,1\}$).

Свойства мультимножеств отличаются от свойств обычных множеств. Например, их объединение правильнее называть суммой: для мультимножеств $M, L \subset \mathbb{R}$ определено $\varkappa_{M \cup L} = \varkappa_M + \varkappa_L$, то есть, в объединенном множестве кратности складываются. Пересечение мультимножеств определяется так: $\forall x \in \mathbb{R}\ \varkappa_{M \cap L}(x) = \min\{\varkappa_M(x), \varkappa_L(x)\}$. На мультимножествах определён частичный порядок $M \subset L \Leftrightarrow M = M \cap L \Leftrightarrow \varkappa_M \leq \varkappa_L$, и для $M \subset L$ определено дополнение:

$$\varkappa_{L \setminus M} = \varkappa_L - \varkappa_M.$$

Мультимножество M называется конечным, если $\# M < \infty$, тогда определена мощность мультимножества $|M| = \sum_{m \in M} \varkappa_M(m)$.

Свойства мультимножеств

1) для конечного M: $|M| \geq \# M$;
2) $M \cap M = M$; $M \cap \varnothing = \varnothing$;
3) $M \cup \varnothing = M$; $M \cup M = M \Longleftrightarrow M = \varnothing$;
4) $M \cap L = L \cap M$; $(M \cap L) \cap K = M \cap (L \cap K)$;
5) $M \cup L = L \cup M$; $(M \cup L) \cup K = M \cup (L \cup K)$;
6) $(M \cap L) \cup K = (M \cup K) \cap (L \cup K)$;
7) $(M \cup L) \cap K = (M \cap K) \cup (L \cap K) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (M \cap L \cap K = \varnothing) \vee (M \cup L \subset K).$$

Доказательство этих и других подобных свойств можно провести "покомпонентным" сведением к свойствам вещественных чисел. Например, 1) следует из того, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varkappa_M(x) \geq 0$, и $\forall m \in M$ $\varkappa_M(m) \geq 1$. Свойство 2) выполняется потому, что $\min\{\varkappa_M(x), \varkappa_M(x)\} = \varkappa_M(x)$; $\varkappa_\varnothing \equiv 0$; $\min\{\varkappa_M(x), \varkappa_\varnothing(x)\} = 0 = \varkappa_\varnothing(x)$, и так далее... Свойство 6) следует из равенства:

$$\min\{a, b\} + c = \min\{a + c, b + c\}.$$

Видим отличие 6) от 7), которое подсказывает о неточности в избранной терминологии:

$\min\{a + b, c\} = \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$, при условии $a, b, c \geq 0 \Leftrightarrow \min\{a, b, c\} = 0 \vee a + b \leq c$.

Далее развивать теорию мультимножеств мы не будем. Ограничимся наблюдением: всякое разбиение T отрезка $[a,b]$ – это мультимножество, лежащее в $[a,b]$ и содержащее наименьшее разбиение

$$\mathring{T}=\{a,b\}: \varkappa_{\mathring{T}}(a)=\varkappa_{\mathring{T}}(b)=1.$$

Если разбиение $T\subset T'$, как мультимножество, тогда T' называется продолжением T или разбиением более тонким, чем T: $T'\leqslant T$. Ясно, что в этом случае $T'=T\cup(T'\setminus T)$, то есть, разбиение T' получается из T добавлением дополнительных точек $T'\setminus T$ и тогда $|T'|\geqslant|T|$, но $d(T')\leqslant d(T)$, поскольку всякий отрезок разбиения T' лежит в каком-то отрезке разбиения T. Так же, по построению, $\forall T$ – разбиения $[a,b]$ $T\leqslant\mathring{T}$, и $\forall T,\tilde{T}$ – разбиений $[a,b]$ $T\cup\tilde{T}<T,\tilde{T}$.

Лемма (Неравенства Дарбу)

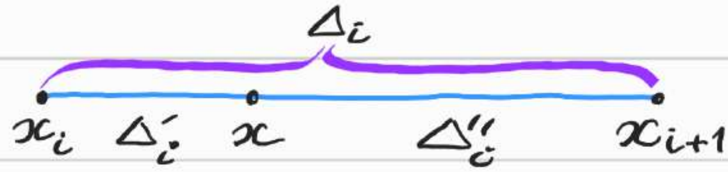
Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}\in B([a,b])$ и $\forall x\in[a,b]$ $|f(x)|\leqslant C$; $T'\leqslant T$ – разбиения $[a,b]$. Тогда

1) $\overline{S}_f(T')\leqslant\overline{S}_f(T)\leqslant\overline{S}_f(T')+2C\cdot|T'\setminus T|\cdot d(T)$;

2) $\underline{S}_f(T')\geqslant\underline{S}_f(T)\geqslant\underline{S}_f(T')-2C\cdot|T'\setminus T|\cdot d(T)$.

Доказательство: при $T' = T$, очевидно, неравенства становятся равенствами.

Рассмотрим случай $|T' \setminus T| = 1$, то есть, $T' = T \cup \{x\}$, где $x \in \Delta_i$ — i-ому отрезку разбиения T:



здесь $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta_i' = [x_i, x]$, $\Delta_i'' = [x, x_{i+1}]$;

$$|\Delta_i| = |\Delta_i'| + |\Delta_i''|.$$

Обозначим $M_i = \sup\limits_{\Delta_i} f(x)$, $M_i' = \sup\limits_{\Delta_i'} f(x)$, $M_i'' = \sup\limits_{\Delta_i''} f(x)$. Ясно, $M_i', M_i'' \leq M_i \leq C$.

Аналогично, для $m_i = \inf\limits_{\Delta_i} f(x)$, $m_i' = \inf\limits_{\Delta_i'} f(x)$, $m_i'' = \inf\limits_{\Delta_i''} f(x)$ имеем $-C \leq m_i \leq m_i', m_i''$.

По формулам Дарбу получим неравенства:

$$\overline{S}_f(T) - \overline{S}_f(T') = M_i \cdot |\Delta_i| - M_i' \cdot |\Delta_i'| - M_i'' \cdot |\Delta_i''| =$$

$$= (M_i - M_i') \cdot |\Delta_i'| + (M_i - M_i'') \cdot |\Delta_i''| \geqslant 0,$$

но, с другой стороны, $\overline{S}_f(T) - \overline{S}_f(T') \leqslant$

$$\leqslant 2C \cdot |\Delta_i'| + 2C \cdot |\Delta_i''| = 2C \cdot |\Delta_i| \leqslant 2C \cdot d(T).$$

Итак, в частном случае получены неравенства:

$$0 \leq S_f(T) - S_f(T') \leq 2C \cdot d(T).$$

Рассмотрим общий случай: $|T' \setminus T| = n \geq 1$.

Утончение $T' < T$ можно вписать в цепь простейших: $T' = T_n < T_{n-1} < \ldots < T_1 < T_0 = T$, где

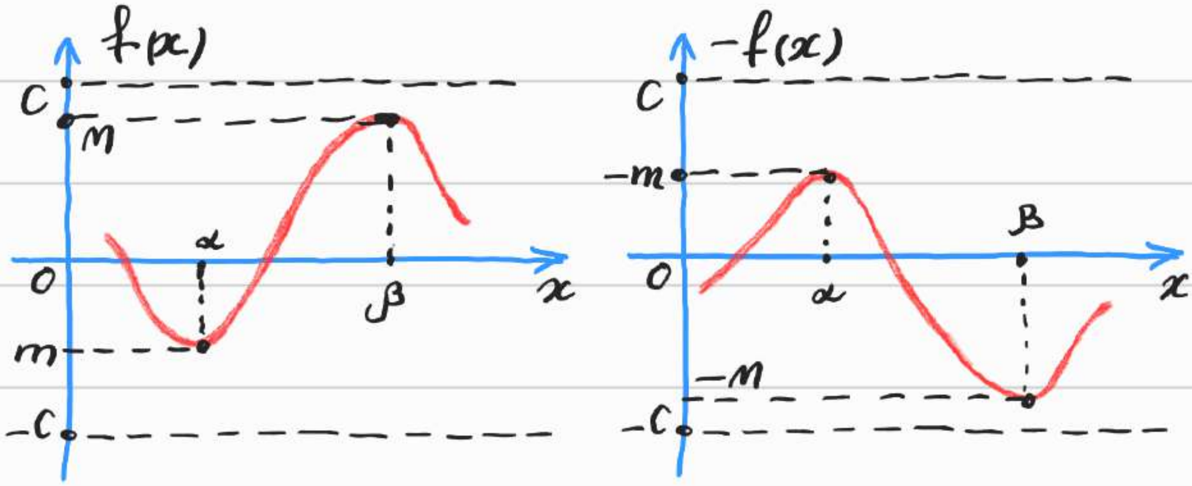
$$|T_n \setminus T_{n-1}| = |T_{n-1} \setminus T_{n-2}| = \ldots = |T_1 \setminus T_0| = 1.$$

Тогда $\overline{S}_f(T) - \overline{S}_f(T') = \sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{S}_f(T_k) - \overline{S}_f(T_{k-1}))$,

и, поскольку, $d(T_n) \leq d(T_{n-1}) \leq \ldots \leq d(T_0) = d(T)$ — мы получим неравенства раздела 1):

$$0 \leq \overline{S}_f(T) - \overline{S}_f(T') \leq \sum_{k=1}^{n} 2C \cdot d(T) = 2C \cdot n \cdot d(T).$$

Для доказательства 2) утверждения мы воспользуемся приёмом из прошлой лекции. Приведём иллюстрацию используемых идей:



$\max(-f(x)) = -\min(f(x))$; $\min(-f(x)) = -\max(f(x))$;

$\min(f(x)) = -\max(-f(x))$; $\max(f(x)) = -\min(-f(x))$.

Функции $f(x)$ и $-f(x)$ ...

функции $f(x)$ и $-f(x)$ имеют один модуль и поэтому изменяются в одних абсолютных пределах.

$$0\le \underline{S}_f(T')-\underline{S}_f(T)=\overline{S}_{-f}(T)-\overline{S}_{-f}(T')\le 2C\cdot n\cdot d(T). \blacksquare$$

Следствие. $\forall\, T, T'$ — разбиений $[a,b]$ $T\cup T' < T, T'$.

По неравенствам Дарбу, получим соотношение:

$$\underline{S}_f(T')\le \underline{S}_f(T'\cup T)\le \overline{S}_f(T'\cup T)\le \overline{S}_f(T).$$

Заметим, что функция $f(x)$ предполагается ограниченной, следовательно, неравенство можно уточнить:

$$m\cdot(b-a)=\underline{S}_f(\mathring{T})\le \underline{S}_f(T')\le \overline{S}_f(T)\le \overline{S}_f(\mathring{T})=M\cdot(b-a).$$

Поэтому существуют следующие величины:

$$\underline{I}_f=\sup_{T'}\underline{S}_f(T')\le \overline{S}_f(T)\quad \forall\, T \text{ — разбиения } [a,b].$$

$$\overline{I}_f=\inf_{T}\overline{S}_f(T)\ge \underline{S}_f(T')\quad \forall\, T' \text{ — разбиения } [a,b].$$

$\underline{I}_f$ и $\overline{I}_f$ называются нижним и верхним интегралами Дарбу:

$$m\cdot(b-a)\le \underline{S}_f(T')\le \underline{I}_f\le \overline{I}_f\le \overline{S}_f(T)\le M\cdot(b-a).$$

Например, для функции Дирихле $\mathcal{D}(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ имеем:

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(T')\equiv 0,\ \overline{S}_{\mathcal{D}}(T)\equiv b-a \Rightarrow \underline{I}_{\mathcal{D}}=0,\ \overline{I}_{\mathcal{D}}=b-a.$$

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)

Пусть $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}\in B([a,b])$. Тогда эквивалентны следующие условия:

эквивалентны следующие условия:

1) $f(x) \in R([a,b])$;

2) $\forall \varepsilon>0\ \exists T$ – разбиение $[a,b]$: $\Omega_f(T)<\varepsilon$;

3) $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f(x) \in R([a,b])$. То есть, $\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (T,\xi)$ – размеченного разбиения $[a,b]$ $(d(T)<\delta) \Rightarrow |S_f(T,\xi)-I|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Фиксируем T – разбиение $[a,b]$: $d(T)<\delta$.

Тогда $\forall \xi$ – разметки T есть неравенства:

$$I-\frac{\varepsilon}{3} < S_f(T,\xi) < I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому $I-\frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}_f(T) \leqslant S_f(T,\xi) \leqslant \overline{S}_f(T) \leqslant I+\frac{\varepsilon}{3}$.

Следовательно, получаем оценку:

$$\Omega_f(T) = \overline{S}_f(T)-\underline{S}_f(T) \leqslant \left(I+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(I-\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Видим, что 1) $\Rightarrow$ 2). Следствие 2) $\Rightarrow$ 3) более элементарно. Пусть $\varepsilon>0$ и для T – разбиения $[a,b]$ $\Omega_f(T)<\varepsilon$. Однако, $\underline{S}_f(T) \leqslant \underline{I}_f \leqslant \overline{I}_f \leqslant \overline{S}_f(T)$.

Таким образом, $\forall \varepsilon>0$ $\overline{I}-\underline{I} \leqslant \overline{S}_f(T)-\underline{S}_f(T) = \Omega_f(T)<\varepsilon$.

Допустим, что $\overline{I} \neq \underline{I}$. Тогда возьмём $\varepsilon = \frac{\overline{I}-\underline{I}}{2}>0$ и придём к противоречию $0<\overline{I}-\underline{I}<\frac{\overline{I}-\underline{I}}{2}$: $0<\frac{\overline{I}-\underline{I}}{2}<0$

Поэтому $\overline{I}_f = \underline{I}_f$.

Осталось вывести 3) $\Rightarrow$ 1), и здесь понадобятся неравенства Дарбу. Пусть $\sup \underline{S}_f(T) = \underline{I} = \overline{I} = \inf \overline{S}_f(T)$

неравенства Дарбу. Пусть $\sup\limits_T \underline{S}_f(T) = \underline{I} = \overline{I} = \inf\limits_T \overline{S}_f(T)$.

Обозначим $I := \overline{I} = \underline{I}$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Найдутся T_1, T_2 — разбиения $[a, b]$, для которых выполнено:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_f(T_1) \leqslant I \leqslant \overline{S}_f(T_2) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

Тогда, определив $\widetilde{T} = T_1 \cup T_2 < T_1, T_2$, получим:

$$\underline{S}_f(T_1) \leqslant \underline{S}_f(\widetilde{T}) \leqslant I \leqslant \overline{S}_f(\widetilde{T}) \leqslant \overline{S}_f(T_2).$$

Нашлось разбиение $\widetilde{T}$ отрезка $[a, b]$ для которого

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \overset{1}{<} \underline{S}_f(\widetilde{T}) \leqslant I \leqslant \overline{S}_f(\widetilde{T}) \overset{2}{<} I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n := |\widetilde{T}|$, а $C > 0$ таково, что $\forall x \in [a, b]\ |f(x)| \leqslant C$.

Определим $\delta = \frac{\varepsilon}{4Cn}$ и возьмём T — разбиение $[a, b]$ $d(T) < \delta$. Тогда для разбиения $\overline{T} = T \cup \widetilde{T} < T, \widetilde{T}$ из неравенств Дарбу следует:

$$\underline{S}_f(\widetilde{T}) \overset{3}{\leqslant} \underline{S}_f(\overline{T}) \leqslant \overline{S}_f(\overline{T}) \overset{4}{\leqslant} \overline{S}_f(\widetilde{T});$$

$$0 \leqslant \underline{S}_f(\overline{T}) - \underline{S}_f(T) \leqslant 2 \cdot C \cdot n \cdot d(T) < 2Cn \cdot \frac{\varepsilon}{4Cn} = \frac{\varepsilon}{2};$$

$$0 \leqslant \overline{S}_f(T) - \overline{S}_f(\overline{T}) \leqslant 2 \cdot C \cdot n \cdot d(T) < 2Cn \cdot \frac{\varepsilon}{4Cn} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последние две строки перепишем компактнее:

$$\underline{S}_f(\overline{T}) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{5}{<} \underline{S}_f(T); \quad \overline{S}_f(T) \overset{6}{<} \overline{S}_f(\overline{T}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А теперь проведём заключительные выкладки:

$$I - \varepsilon \overset{1}{<} \underline{S}_f(\widetilde{T}) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{3}{\leqslant} \underline{S}_f(\overline{T}) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{5}{<} \underline{S}_f(T) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{S}_f(T) \overset{6}{<} \overline{S}_f(\overline{T}) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{4}{\leqslant} \overline{S}_f(\widetilde{T}) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{2}{<} I + \varepsilon.$$

Поэтому $\forall\ \xi$-разметки разбиения T отрезка $[a, b]$ получаем неравенства:

$$I-\varepsilon < \underline{S}_f(T) \leq S_f(T,\xi) \leq \overline{S}_f(T) < I+\varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\ (T,\xi)$ — размеченного разбиения отрезка $[a, b]$ $(d(T)<\delta) \Rightarrow |S_f(T,\xi)-I|<\varepsilon$.

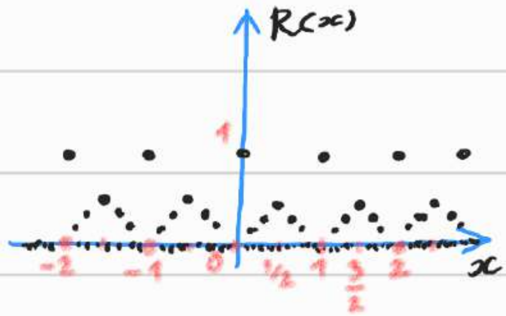
То есть, $f(x) \in R([a, b])$. Ч.т.д. ■

Отметим некоторые конкретные применения критерия Дарбу.

1) Было найдено, что для функции Дирихле $\mathcal{D}(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегралы Дарбу таковы: $\underline{I}_{\mathcal{D}}=0$, $\overline{I}_{\mathcal{D}}=b-a$. Поэтому, если $a<b$, то $\mathcal{D}(x) \notin R([a, b])$.

2) Определим функцию Римана двумя правилами:

$$R(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x=\frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, \text{ если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Функцию Римана будем рассматривать на отрезке $[a, b]$, $a<b$.

Поскольку иррациональные числа плотны в $\mathbb{R}$, $\underline{S}_R(T) \equiv 0$.

Следовательно, $\underline{I}_R=0$. Вычислим верхний интеграл Дарбу.

Сначала решим комбинаторную задачу: сколько чисел вида $\frac{m}{n}$ лежат на отрезке $[a, b]$? Очевидно, — столько же, сколько чисел вида m — на отрезке $[a \cdot n, b \cdot n]$.

Наименьшее из таких чисел — это $\lceil a\cdot n\rceil$, а наибольшее — $\lfloor b\cdot n\rfloor$.

Таким образом, точный ответ (при $\lceil an\rceil \leq \lfloor b\cdot n\rfloor$) таков:

$$\lfloor b\cdot n\rfloor - \lceil a\cdot n\rceil + 1 = [b\cdot n] + [-a\cdot n] + 1 \leqslant b\cdot n - a\cdot n + 1.$$

Итак, количество чисел вида $\frac{m}{n}$ на $[a, b]$ не превосходит величины $(b-a)\cdot n + 1$. Поэтому есть оценка количества тех $x\in[a,b]$, для которых $R(x)\geqslant \frac{1}{n}$:

$$\sum_{s=1}^{n}((b-a)\cdot s + 1) = (b-a)\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n =: A_n.$$

Окружим точки $\{x\in[a,b] \mid R(x)\geqslant\frac{1}{n}\}$ интервалами длины $\frac{1}{2^n}$ — концы этих интервалов, попавшие на отрезок $[a, b]$, вместе с концами a и b будут образовывать разбиение T на $[a,b]$ для которого можно оценить верхнюю сумму Дарбу функции R:

$$\overline{S}_R(T) \leqslant \frac{A_n}{2^n} + \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, $\Omega_R(T) = \overline{S}_R(T) - \underline{S}_R(T)$ можно сделать сколь угодно малым. По критерию Дарбу, $R(x)\in R([a,b])$.

$$\int_a^b R(x)\,dx = \underline{I}_R = 0.$$

3) Пусть $f(x)\in C([a, b])$. Тогда, по теореме Кантора, $f(x)$ — равномерно непрерывно на $[a,b]$, то есть $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $(|x_1-x_2|<\delta)\Rightarrow(|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$.

Возьмём T — разбиение $[a, b]$, $d(T)<\delta$, тогда $\forall i=1,\dots,|T|$

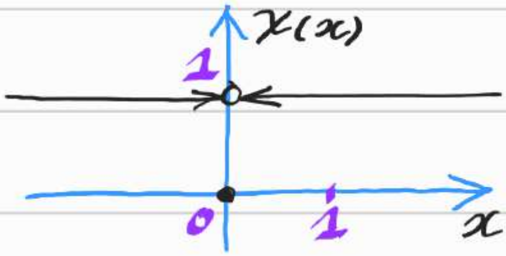
Возьмем T — разбиение $[a,b]$ $d(T)<\delta$, тогда $\forall\, i=1,\dots,n$

$M_i - m_i \leq \varepsilon$ и $\Omega_f(T) = \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) \leq \varepsilon\cdot(b-a)$.

По критерию Дарбу, $f(x)\in R([a,b])$: $C([a,b])\subset R([a,b])$.

4) Комбинируя методы 2) и 3), можно доказать, что интегрируема по Риману всякая ограниченная, кусочно непрерывная на отрезке функция. Рассмотрим простой пример:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x=0;\\ 1, & x\neq 0.\end{cases}$$



Докажем, что $\chi(x)\in R([0,1])$.

Построим разбиение $[0,1]$ T: $0=x_1\leq x_2=\frac{1}{n}\leq x_3=1$.

$M_1=M_2=1$, $m_1=0$, $m_2=1$.

По формулам Дарбу, вычисляем:

$$\overline{S}_\chi(T)=1\cdot\tfrac{1}{n}+1\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)=1,\quad \underline{S}_\chi(T)=0\cdot\tfrac{1}{n}+1\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)=1-\tfrac{1}{n}.$$

Поэтому $\Omega_\chi(T)=\overline{S}_\chi(T)-\underline{S}_\chi(T)=\frac{1}{n}\to 0,\ n\to\infty$.

По критерию Дарбу, $\chi(x)\in R([0,1])$. Заметим, что $\forall\, T$ — разбиения $[0,1]$ $\overline{S}_\chi(T)=1$, поэтому $\overline{I}_\chi=1$ и

$$\int_0^1 \chi(x)\,dx=\overline{I}_\chi=1.$$

Пример.

Композиция $\chi\circ R(x) = \begin{Bmatrix} 0, & x\notin\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{Bmatrix} = \mathcal{D}(x)$.

$\chi, R\in R([0,1])$, но $\mathcal{D}=\chi\circ R\notin R([0,1])$.