Числовые множества нулевой длины

Прежде, – например, – при определении интегральных сумм Римана, было использовано понятие "длины отрезка": $|[a,b]| = b-a$. Так же мы определим и длины промежутков:

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = b-a\,, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Для измерения числовых множеств более сложной природы надо определиться с множествами, чьей длиной можно пренебречь.

Определение. Множество $A\subset\mathbb{R}$ имеет **длину нуль** – $\ell(A)=0$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ конечное покрытие $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$ интервалами I_k, $k=1,\dots n$, суммарной длины, меньшей ε:

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \varepsilon.$$

Примеры. 0) $\ell(\varnothing)=0$, поскольку $\forall\varepsilon>0$ $\varnothing\subset(0,\varepsilon/2)$.

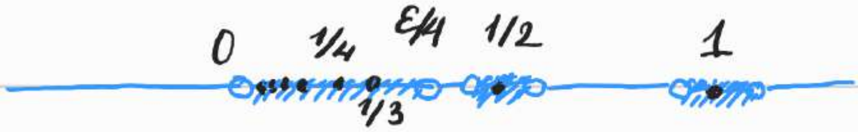
1) $\ell(\{x\})=0$, поскольку $\forall\varepsilon>0$ $\{x\}\subset(x-\frac{\varepsilon}{4}, x+\frac{\varepsilon}{4})$.

В частности, $\ell(\{x\}) = \ell([x,x]) = |[x,x]| = 0$, то есть, в отношении отрезка $[x,x]$ оба понятия длины дают один нулевой результат.

2) $\ell(\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\})=0$. Действительно, поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0$ $\forall n\geq n_0$ $(0<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{4})$. Например,

$n_0=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$. Тогда вне интервала $(0,\frac{\varepsilon}{4})$ лежат лишь точки множества $\{1,\frac{1}{2},\dots\frac{1}{n_0-1}\}$, которые можно покрыть интервалами $\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{8n_0},\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{8n_0}\right)$, $k=1,\dots,n_0-1$. Сумма длин интервалов, покрывающих $\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$, в итоге получится $\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4n_0}\cdot(n_0-1)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.



Заметим, что бывают и более, чем счётные множества нулевой длины: примером является Канторово множество.

Свойства множеств нулевой длины

1) Если $\ell(A)=0$ и $B\subset A$, тогда $\ell(B)=0$.
2) Если $\ell(A)=0$, тогда A – ограничено.
3) Если $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ и $\forall k=1,\dots,n$ $\ell(A_k)=0$, тогда $\ell(A)=0$.
4) Если A – конечное множество, тогда $\ell(A)=0$.
5) Если $\ell(A)=0$, тогда $\ell(\overline{A})=\ell(\partial A)=0$.

Доказательство. 1) – по определению, так как покрытие A является покрытием B.

2) Если $\ell(A)=0$, то для $\varepsilon=1$ есть покрытие $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k$ суммарной длины меньше 1. Но важно иное: обозначив $I_k=(\alpha_k,\beta_k)$, получим $A\subset[\min\limits^{n}\alpha_k, \max\limits^{n}\beta_k]$, что

$I_k = (\alpha_k, \beta_k)$, получим $A \subset [\min\limits_{k=1} \alpha_k, \max\limits_{k=1} \beta_k]$, что

и означает ограниченность A.

3) Пусть $\ell(A_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon > 0$. Тогда имеются покрытия интервалами $A_k \subset \bigcup\limits_{s=1}^{d_k} I_{k,s} : \sum\limits_{s=1}^{d_k} |I_{k,s}| < \frac{\varepsilon}{n}$.

Но тогда $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{s=1}^{d_k} I_{k,s}$ — покрытие интервалами суммарной длины меньше ε: $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{d_k} |I_{k,s}| < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$.

4) следует из 3), поскольку было показано, что синглетоны имеют нулевую длину.

5) Пусть $\ell(A) = 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда есть покрытие интервалами $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k : \sum\limits_{k=1}^{n} |I_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $I_k = (\alpha_k, \beta_k)$.

Определим интервалы $\tilde{I}_k = (\alpha_k - \frac{\varepsilon}{4n}, \beta_k + \frac{\varepsilon}{4n})$. Тогда

$I_k \subset \overline{I}_k = [\alpha_k, \beta_k] \subset \tilde{I}_k$; $|\tilde{I}_k| = \frac{\varepsilon}{2n} + (\beta_k - \alpha_k) = \frac{\varepsilon}{2n} + |I_k|$.

И мы получим: $\partial A \subset \overline{A} \subset \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{I}_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \tilde{I}_k$. При этом

$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{I}_k| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2n} + |I_k|\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |I_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Замечание. Доказанное утверждение — его 2) часть — доставляет примеры числовых множеств, чья длина не может быть нулевой, — например, — $\mathbb{N}$, в силу неограниченности. Есть ли у натуральных чисел какая-то (ненулевая) длина — — вопрос открыт до определения этого понятия.

Лемма. Если $[a,b]\subset \bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n}|(\alpha_k,\beta_k)| = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k) > b-a = |[a,b]|.$$

Доказательство: проведём индукцией по n.

База индукции $n=1$. Если $[a,b]\subset(\alpha_1,\beta_1)$, тогда

$$\alpha_1 < a \leq b < \beta_1 \Rightarrow \beta_1-\alpha_1 > b-\alpha_1 > b-a.$$

Индукционная гипотеза: пусть лемма верна для любых покрытий отрезка $n\geq 1$ интервалами.

Рассмотрим покрытие $[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k$ и проведём индукционный шаг. Для удобства перенумеруем интервалы: I_{n+1} назовём тот из них, в котором лежит b: $b\in I_{n+1}$. Если таких интервалов несколько, I_{n+1} назовём любой из таких. Потом всем прочим интервалам присвоим новые индексы от 1 до n.

Итак, $b\in I_{n+1}=(\alpha_{n+1},\beta_{n+1})$. Если $a\in I_{n+1}$, тогда $[a,b]\subset I_{n+1}$ и по базовой проверке: $\sum_{k=1}^{n+1}|I_k| > |I_{n+1}| > |[a,b]|$. Если же $a\notin I_{n+1}$, тогда $\alpha_{n+1}\in[a,b)$. В этом случае выполнено $[a,\alpha_{n+1}]\cap I_{n+1}=\varnothing$, поэтому $[a,\alpha_{n+1}]\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$. И, поскольку, $\exists s\in\{1,\dots,n\}$ $\alpha_{n+1}\in I_s$, то $\exists\, \varepsilon>0$ $b>\alpha_{n+1}+\varepsilon\in I_s$.

Поэтому $[a,\alpha_{n+1}+\varepsilon]\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ и $[\alpha_{n+1}+\varepsilon,b]\subset I_{n+1}$.

Из первого вложения, по предположению индукции, имеем:

$\sum\limits_{k=1} |I_k| > \alpha_{n+1} + \varepsilon - a$; из второго: $|I_{n+1}| > b - (\alpha_{n+1} + \varepsilon)$.

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} |I_k| > \alpha_{n+1} + \varepsilon - a + b - (\alpha_{n+1} + \varepsilon) = b - a$.

Это завершает шаг индукции и доказательство леммы. $\blacksquare$

Предыдущая лемма даёт примеры ограниченных множеств ненулевой длины.

Следствие. Пусть $a < b$, тогда выполнено:

1) $\neg(\ell([a,b]) = 0)$;

2) $\neg(\ell((a,b)) = 0)$;

3) $\neg(\ell([a,b] \cap \mathbb{Q}) = 0)$;

Доказательство. 1) $\underset{\circ}{\times}$ $\ell([a,b]) = 0$. Поскольку $|[a,b]| = b - a > 0$, положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ и найдём покрытие $[a,b]$ интервалами $\{I_k, k = 1, \ldots, n\}$ суммарной длины меньше ε. Применяя лемму, получим неравенства:

$$\frac{b-a}{2} = \varepsilon > \sum_{k=1}^{n} |I_k| > |[a,b]| = b - a.$$

Из этого вытекает противоречие: $b - a < 0$ $\underset{\circ}{\times}$.

2) $\underset{\circ}{\times}$ $\ell((a,b)) = 0$, но тогда получим:

$\ell([a,b]) = \ell((a,b) \cup \{a,b\}) = 0$, что противоречит 1).

3) Обозначим $M = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Тогда $\overline{M} = [a,b]$, и $\underset{\circ}{\times}$ предполагая $\ell(M) = 0$, согласно 5)-му свойству множеств нулевой длины, $\ell(\overline{M}) = \ell([a,b]) = 0$. $\underset{\circ}{\times}$ $\blacksquare$

Замечание. Предыдущая лемма уточняет свойства множеств нулевой длины. Если $\ell(A)=0$, тогда A не может иметь внутренних точек: $A_{int} = \varnothing$, поскольку внутренние точки лежат в A вместе с некоторыми окрестностями, длина которых не может быть нулевой. Так как $A \subset \overline{A} = A_{int} \cup \partial A$, в этом случае все точки A — граничные: $A \subset \partial A$.

Совершенное множество Кантора

Пример, который будет построен, называется "совершенным множеством" не из претенциозности отдельных математиков. Этот термин из общей топологии означает лишь то, что множество континуально по мощности и не имеет внутренних точек, — то есть, является "вполне несвязным дисконтинуумом".

Множество Кантора будет таким: компактом нулевой длины и континуальной мощности, и кроме того оно будет фрактальным множеством размерности подобия $\log_3 2 \in (0,1)$.

Построение: сначала обозначим $C_0 = [0,1]$.

Затем из C_0 выбросим среднюю треть, и получим

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Далее – из каждого отрезка C_1 выбросим среднюю треть:

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Эту процедуру будем (мысленно) продолжать, пока не получим счётную цепь вложенных множеств:

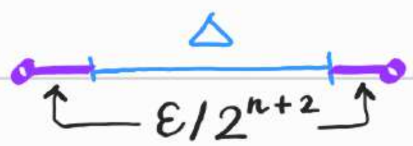
$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \ldots$$

При этом C_k состоит из 2^k отрезков длиной $1/3^k$ каждый. Поэтому все C_k – компактные множества, и общая длина входящих в C_n отрезков равна $(2/3)^n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0$ $(2/3)^n < \varepsilon/2$ – и это n_0 можно получить конструктивно:

$$(2/3)^n = 1/(3/2)^n = 1/(1+\tfrac{1}{2})^n < 1/(\tfrac{n}{2}) = \tfrac{2}{n} < \tfrac{\varepsilon}{2}:$$

$$n > \tfrac{4}{\varepsilon} \text{ – достаточно взять } n_0 = [\tfrac{4}{\varepsilon}] + 1.$$

Каждый из 2^n отрезков C_n погрузим в интервал, добавив к отрезку слева и справа по полуинтервалу длиной $\varepsilon/2^{n+2}$:



Общая длина интервалов, покрывающих C_n и все $C_{s \geqslant n}$ оценивается следующим образом (здесь $n \geqslant n_0$):

$$2^n \cdot (3^{-n} + 2\varepsilon/2^{n+2}) = (2/3)^n + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

То есть, выбирая большое n, эту длину можно сделать сколь угодно малой. Поэтому, определяя Канторово множество $C = \bigcap\limits_{k \geq 0} C_k$, получим $\ell(C) = 0$. Будучи пересечением компактов, C – компактно. Но много ли элементов осталось в C? Пока лишь ясно, что в нём лежат концы всех отрезков – дроби вида $m/3^n$, $0 \leq m \leq 3^n$, но их только счётный набор. Чтобы найти мощность C, будем представлять числа на $[0,1]$ в троичной записи. Например, $0 = 0.00\ldots$, $1 = 1.00\ldots = 0.222\ldots$, $1/3 = 0.100\ldots = 0.0222\ldots$, $1/2 = 0.111\ldots$

По построению, в C_k попадают числа, которые можно представить в троичной записи вида:

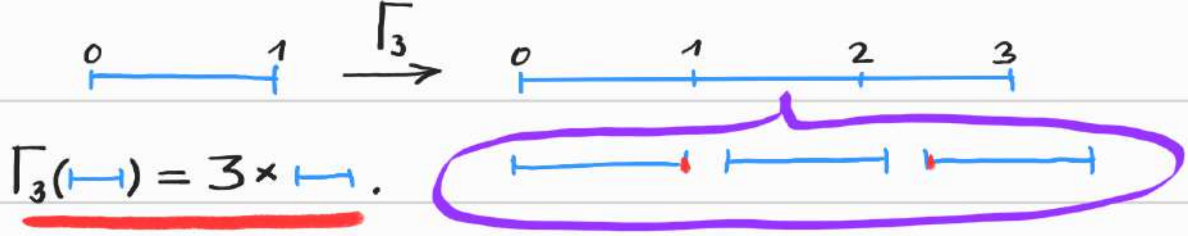
$$0.\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \ldots, \text{ где } \alpha_i \in \{0,2\}, \beta_j \in \{0,1,2\}.$$

Поэтому в C попадают числа, представимые троично $0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$, где $\alpha_i \in \{0,2\}$. А таких – континуум.

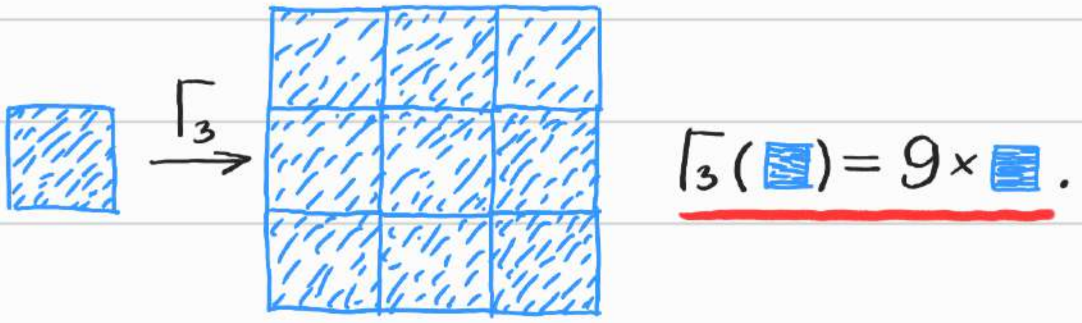
Побеседуем о размерности подобия. Изучим действие растяжения в многомерном аффинном пространстве. В качестве растяжения возьмём гомотетию Γ_3 – с коэффициентом подобия 3. Применим её к простым геометрическим фигурам: точке, отрезку, квадрату, кубу. Отметим общую закономерность:

0) Точка при гомотетии не изменяется $\Gamma_3(pt) = 1 \times pt$;

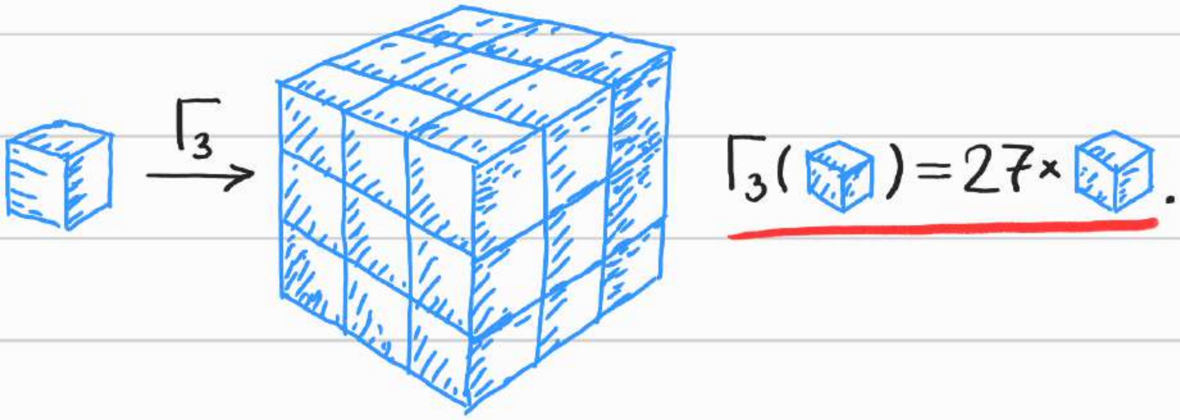
1) Отрезок увеличивается втрое (не считая концов):



2) Квадрат увеличивается в девять раз (не считая границ):



3) Куб увеличивается в 3^3 раз (без учёта границ):



Эти примеры подсказывают определение размерности подобия самоподобного множества M:

$$\dim_s M = d \iff \exists \lambda > 1 \ \Gamma_\lambda(M) = \lambda^d \times M.$$

Мы называем множество M самоподобным, если при некоторой нетривиальной гомотетии образ равносоставлен с копиями исходной фигуры: $\Gamma_\lambda(M) = \alpha \times M$. При этом коэффициент самоподобия не будет уникальным — счётный набор будет обеспечивать одну размерность:

$$\Gamma_{\lambda^2}(M) = \Gamma_\lambda(\Gamma_\lambda(M)) = \Gamma_\lambda(\alpha \times M) = \alpha \times \Gamma_\lambda(M) = \alpha \times \alpha \times M = \alpha^2 \times M;$$

$$\Gamma_{\lambda^k}(M)=\alpha^k\times M;\quad d=\log_{\lambda}(\alpha)=\log_{\lambda^k}(\alpha^k).$$

Утверждение. Множество Кантора самоподобно и обладает размерностью самоподобия $\log_3(2)\cong 0.63\ldots$

Доказательство. Вспоминая множества $C_k, k\geqslant 0$, из которых строилось множество Кантора, заметим:

$$\Gamma_3(C_{k+1})=2\times C_k \Rightarrow \Gamma_3\Big(\bigcap_{k\geqslant 0} C_{k+1}\Big)=2\times\Big(\bigcap_{k\geqslant 0} C_k\Big)\Rightarrow \Gamma_3(C)=2\times C.$$

Или проще — $C=\{0,\alpha_1\alpha_2\ldots_{(3)} \mid \alpha_i=0,2\}$, поэтому

$$\Gamma_3(C)=\{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\ldots_{(3)}\mid\alpha_i=0,2\}=$$

$$=\{0,\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots_{(3)}\mid\alpha_i=0,2\}\cup\{2,\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots_{(3)}\mid\alpha_i=0,2\}=$$

$$=C\cup(2+C)=2\times C.\ \blacksquare$$