Числовые множества нулевой меры

В продолжение темы пренебрежимых множеств рассмотрим более абстрактное понятие:

Определение. $A \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую меру — $mes(A)=0$ — если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ — не более чем счётное покрытие A интервалами общей длины меньше ε: $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$.

Замечание. В этом определении допускаются пустые интервалы нулевой длины; бесконечная сумма длин понимается как предел или супремум конечных сумм: $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sup_n \sum_{s=1}^{n} |I_{k_s}|$.

Свойства множеств нулевой меры

1) $(\ell(A)=0) \Rightarrow (mes(A)=0)$;
2) $(B \subset A) \,\&\, (mes(A)=0) \Rightarrow (mes(B)=0)$;
3) $(A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \,\&\, (\forall k \; mes(A_k)=0) \Rightarrow (mes(A)=0)$;
4) $(A$ — счётно$) \Rightarrow (mes(A)=0)$;
5) $(mes(A)=0) \,\&\, (A$ — компакт$) \Rightarrow (\ell(A)=0)$;
6) $(a<b) \Rightarrow \neg(mes([a,b])=0)$;
7) $(a<b) \Rightarrow \neg(mes((a,b))=0)$;
8) $(A_{int} \neq \varnothing) \Rightarrow \neg(mes(A)=0)$.

Доказательство: 1) конечное покрытие интервалами —

— не более чем счётно. 2) всякое покрытие A является покрытием B. 3) возьмём $\varepsilon>0$, поскольку $\forall k \geq 1$ $mes(A_k)=0$, есть не более чем счётное покрытие интервалами: $A_k \subset \bigcup_{s_k=1}^{\infty} I_{k,s_k}$ суммарной длины меньше $\varepsilon/2^k$: $\sum_{s_k=1}^{\infty} |I_{k,s_k}| < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Но тогда объединённое покрытие: $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s_k=1}^{\infty} I_{k,s_k}$ будет иметь суммарную длину меньше ε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_k=1}^{\infty} |I_{k,s_k}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

4) следует из 3), поскольку одноэлементные множества (синглетоны) имеют нулевую длину и меру.

5) компактное множество из всякого открытого покрытия допускает выделение конечного подпокрытия. Ясно, что суммарная длина подпокрытия не превосходит суммарной длины исходного покрытия.

6) $\divideontimes$ предположив, что $mes([a,b])=0$, из компактности отрезка $[a,b]$, получим $l([a,b])=0$. $\divideontimes$

7) $\divideontimes$ из предположения $mes((a,b))=0$, с учётом конечности $\{a,b\}$, получим $mes([a,b])=0$. $\divideontimes$

8) если $a \in A_{int}$, тогда $\exists \varepsilon>0: (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$, $\divideontimes$ предположив $mes(A)=0$, получим $mes((a-\varepsilon, a+\varepsilon))=0$. $\divideontimes$ ∎

Примеры.

1) множества нулевой меры: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, C.

2) Занумеруем рациональные числа на $[0,1]$: $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$,

q_n поместим в окрестность длины $1/3^n$: $I_n = \left(q_n - \frac{1}{2\cdot 3^n},\ q_n + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right)$.

Определим множество $\Delta = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ — оно ограничено и замкнуто. Поэтому Δ — компакт. При этом $\Delta \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Но $\Delta \neq \emptyset$. Действительно, если бы $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, тогда имелось бы конечное подпокрытие $[0,1] \subset \bigcup\limits_{s=1}^{d} I_{n_s}$ суммарной длиной $\sum\limits_{s=1}^{d} |I_{n_s}| > |[0,1]| = 1$. Однако, имеется оценка: $\sum\limits_{s=1}^{d} |I_{n_s}| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2} < 1$.

Покрытие Δ интервалами должно иметь суммарную длину больше $1/2$, поскольку вместе с $\{I_n\}$ даёт покрытие отрезка $[0,1]$. Поэтому Δ — более чем счётно, и при континуум-гипотезе является совершенным множеством.

Множество Δ похоже на C, но это — не множество нулевой длины и меры. И оно не фрактально.

3) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ — не является множеством нулевой меры.

Замечание. Очевидно, что счётные множества нулевой меры — есть счётные объединения множеств нулевой длины. То же верно и для замкнутых множеств нулевой меры. Действительно, пусть $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ — разложение на компакты, например, — отрезки $\Lambda_n = [-n, n]$. Если $mes(A) = 0$, тогда $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = A \cap \Lambda_n$ — компакт, при $A = \overline{A}$. И поэтому $\ell(A_n) = 0 \ \forall n \geq 1$.