Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение. Пусть $f: D \to \mathbb{R} \in B(D)$, где $D \subset \mathbb{R}$ и $M \subset \mathbb{R}$, тогда **колебание f на M** — это величина

$$\omega(f, M) = \sup_{x,y \in M \cap D} (f(x) - f(y)) = \sup_{x \in M \cap D} f(x) - \inf_{y \in M \cap D} f(y).$$

Свойства колебаний функции на множестве

1) если $M \cap D = \varnothing$, тогда $\omega(f, M)$ не определена;
2) если $M \cap D \neq \varnothing$ и $\forall x \in D \ (|f(x)| < C)$, тогда
$$0 \leq \omega(f, M) \leq C - (-C) = 2C;$$
3) если $M \cap D \neq \varnothing$ и $M \subset L$, тогда $\omega(f, M) \leq \omega(f, L)$.

Следствие. Пусть $f(x): D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ и $\forall x \in D$ $|f(x)| < C$. Мы обозначим $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Тогда $W(\delta) = \omega(f, U_\delta(x_0)): (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — ограничена константой $2 \cdot C$ и не убывает. Поэтому определено число — **колебание f в точке x_0**:

$$0 \leq \omega(f, x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \omega(f, U_\delta(x_0)) = \inf_{\delta > 0} \omega(f, U_\delta(x_0)) \leq 2C.$$

Теорема (критерий Р.Л. Бэра непрерывности в точке)

$$f(x) \in C(x_0) \iff \omega(f, x_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in C(x_0)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если $x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \cap D$, Тогда получаем оценку разности: $|f(x_1)-f(x_2)| =$

$= |f(x_1)-f(x_0)-(f(x_2)-f(x_0))| \leq |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_0)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$

Поэтому $\forall \varepsilon>0: 0 \leq \omega(f,x_0) \leq \omega(f, U_\delta(x_0)) \leq 2\varepsilon.$

Поскольку предположение $\omega(f,x_0)>0$ ведёт к противоречию:

$0<\omega(f,x_0)<\frac{1}{2}\cdot\omega(f,x_0) =: 2\varepsilon$, получаем $\omega(f,x_0)=0$.

Докажем обратное. Пусть $\omega(f,x_0)=0$. Тогда $\forall \varepsilon>0$

$\exists \delta>0: \omega(f, U_\delta(x_0)) < \varepsilon$. Поэтому $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ имеем

$|f(x)-f(x_0)| \leq \omega(f, U_\delta(x_0)) < \varepsilon: \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$

Что и означает непрерывность $f(x)$ в x_0. ■

Замечание. По теореме Кантора, функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём. То есть, если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, тогда $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$

$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \ (|x_1-x_2|<\delta) \Longrightarrow (|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon).$

Эта теорема допускает следующее обобщение:

Утверждение. Пусть $f(x): [a,b] \to \mathbb{R} \in B([a,b])$, и $\exists \omega$ $\forall x \in [a,b] \ \omega(f,x) < \omega$. Тогда $\forall \varepsilon>0 \ \exists T$ – разбиение $[a,b]$ отрезками Δ_i, $i=1,\dots,n$: $\forall i \ \omega(f,\Delta_i)<\omega+\varepsilon$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы Кантора.

Пусть $x \in [a,b]$. Поскольку $\omega(f,x) = \inf\limits_{\delta>0} \omega(f, U_\delta(x)) < \omega$, а $\inf\limits_{\delta>0} \omega(f, U_\delta(x)) = \inf\limits_{\delta>0} \omega(f, \overline{U}_\delta(x))$, то $\forall \varepsilon>0 \ \exists U(x) = U_\delta(x)$:

$\omega(f, \overline{U}(x)) < \omega+\varepsilon$. Тогда $\{U(x), x\in[a,b]\}$ – открытое покрытие компакта $[a,b]$. Выбирая $\{U(x_k), k=1,\dots,d\}$ –

его конечное подпокрытие, из концов $\mathcal{U}(x_k)$, $k=1,\dots,d$, лежащих на $[a,b]$ (вместе с a и b) организуем искомое разбиение T.

Действительно, любой отрезок этого разбиения Δ_i лежит в некотором $\overline{\mathcal{U}}(x_j)$, поэтому $\omega(f,\Delta_i)\leqslant\omega(f,\overline{\mathcal{U}}(x_j))<\omega+\varepsilon$. ■

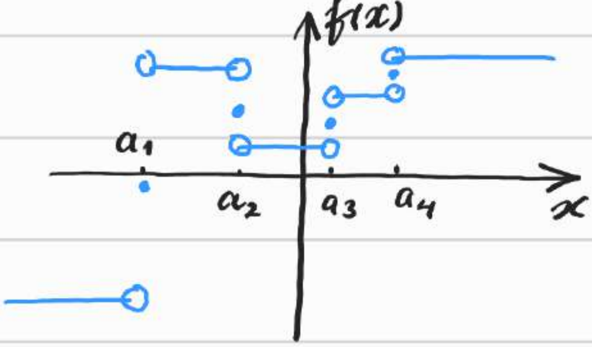
Замечание. В предыдущем доказательстве от отрезка $[a,b]$ требовалась только компактность. Поэтому результат верен для любых компактов, — например, — конечных объединений отрезков.

Пояснение. Колебание функции (в точке) — удобный инструмент исследования разрывов функции, которые могут иметь разный характер: быть конечными, дискретными или иными.

Определение. Пусть $f(x)\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$. Множеством точек разрыва функции f назовём $E_f\subset\mathcal{D}$:

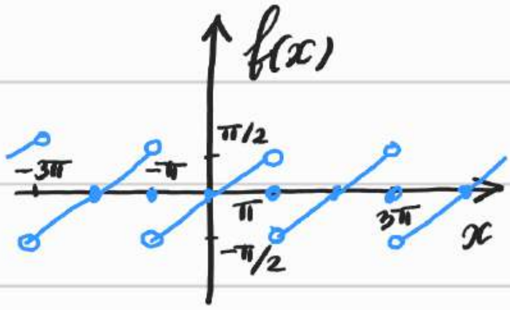
$$E_f=\{x\in\mathcal{D}\mid \omega(f,x)\neq 0\}.$$

Примеры.



1) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\operatorname{sgn}(x-a_k)$ — кусочно постоянная функция.

$E_f=\{a_1,\dots,a_n\}$, $\omega(f,a_i)=2\cdot c_i$.



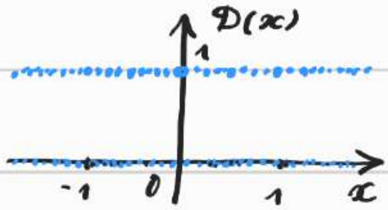
2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{\sin(nx)}{n}$ — тригонометрический ряд.

$E_f=\{\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\omega(f,\pi+2\pi k)=\pi$.

См. Р. Бэр «Теория разрывных функций», 1932, с. 7-9: $f(\pi k)=0$, а если $x\neq\pi k$, то $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))$.

3) $\mathcal{D}(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ – функция Дирихле.

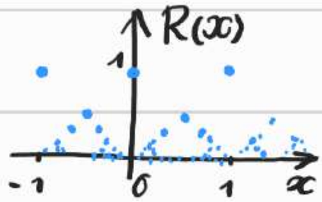
$E_{\mathcal{D}}=\mathbb{R}$, $\omega(\mathcal{D},r)=1\ \forall r\in\mathbb{R}$.



4) $R(x)$ – функция Римана: $R|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\equiv 0$;

$R(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}$, если $m\perp n$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$.

$E_R=\mathbb{Q}$, $\omega(R,r)=R(r)\ \forall r\in\mathbb{R}$.



Определение. Структуру множества разрывов функции $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ удобно изучать с помощью фильтрации: $E(\alpha)=\{x\in\mathcal{D}\mid\omega(f,x)\geq\alpha\}$.

Лемма (Свойства множества разрывов ограниченной функции)

Пусть $f:D\to\mathbb{R}\in B(D)$, $D\subset\mathbb{R}$. Тогда

1) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ E(\alpha)\subseteq D$, $E(0)=D$, $(\alpha\geq\beta)\Rightarrow(E(\alpha)\subseteq E(\beta))$;

2) $E_f=\bigcup\limits_{\alpha>0}E(\alpha)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E(\frac{1}{n})$;

3) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ (D – замкнуто) $\Rightarrow$ ($E(\alpha)$ – замкнуто).

Доказательство. 1) по определению, $E(\alpha)\subset D$ и $E(0)=D$, поскольку $\forall x\in D\ \omega(f,x)\geq 0$. Если $\alpha\geq\beta$ и $\omega(f,x)\geq\alpha$, то $\omega(f,x)\geq\beta$ – поэтому $E(\alpha)\subseteq E(\beta)$.

2) по критерию Бэра, $(x\in E_f)\Leftrightarrow(\omega(f,x)>0)$, поэтому $\bigcup\limits_{\alpha>0}E(\alpha),\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E(\frac{1}{n})\subseteq E_f$. И обратно, $(x\in E_f)\Rightarrow(x\in E(\omega(f,x))\subseteq E(\frac{1}{n}))$, где, например, $n=\left[\frac{1}{\omega(f,x)}\right]+1>\frac{1}{\omega(f,x)}$. Поэтому $E_f\subseteq\bigcup\limits_{\alpha>0}E(\alpha)$ и $E_f\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E(\frac{1}{n})$.

3) пусть $x\notin E(\alpha)\subseteq D$. Если $x\notin D$, то из замкнутости D

найдётся $U_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus D \subseteq \mathbb{R} \setminus E(\alpha)$. Если же $x \in D \setminus E(\alpha)$, тогда определено $\omega(f, x) = \inf\limits_{\delta > 0} \omega(f, U_\delta(x)) < \alpha$. Следовательно, $\exists\, \delta > 0$: $\omega(f, U_\delta(x)) < \alpha$, поэтому $U_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus E(\alpha)$. Итак, $x \in (\mathbb{R} \setminus E(\alpha))_{int}$, и, в силу произвольности $x \notin E(\alpha)$, $\mathbb{R} \setminus E(\alpha)$ – открытое множество, а $E(\alpha)$ – замкнутое. ■

Следствие. Если $f: D \to \mathbb{R} \in B(D)$ определена на компакте $D \subset \mathbb{R}$, тогда $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $E(\alpha)$ – компактно.

Теорема (критерий Лебега интегрируемости по Риману)

Пусть $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \in B([a, b])$. Тогда равносильны:

1) $f \in R([a, b])$; 2) $mes(E_f) = 0$.

Доказательство. Используя предыдущую лемму, Следствие и счётную аддитивность нулевой меры, получим: 2) $mes(E_f) = mes(\bigcup\limits_{\alpha > 0} E(\alpha)) = mes(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E(\frac{1}{n})) = 0 \iff$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}\ mes(E(\frac{1}{n})) = 0 \iff$ 3) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ell(E(\frac{1}{n})) = 0$.

Вместе с тем, 2) $\Rightarrow \forall \alpha > 0\ mes(E(\alpha)) = 0 \Rightarrow$ 3). По следствию получаем эквивалентности: 2) $\iff$ 3) $\iff$ 3') $\forall \alpha > 0\ \ell(E(\alpha)) = 0$.

Выведем 1) $\Rightarrow$ 3): для этого фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. По предположению, $f(x) \in R([a, b])$. Поэтому $\exists\, I$, а также $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall (T, \xi)$ – размеченного разбиения $[a, b]$

$$(d(T) < \delta) \Rightarrow \left(I - \frac{\varepsilon}{3n} < S_f(T, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3n}\right)$$

Тогда $I-\frac{\varepsilon}{3n} \leqslant \underline{S}_f(T) \leqslant \overline{S}_f(T) \leqslant I+\frac{\varepsilon}{3n}$. Поэтому

$$0 \leqslant \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) \leqslant (I+\tfrac{\varepsilon}{3n}) - (I-\tfrac{\varepsilon}{3n}) = \tfrac{2\varepsilon}{3n} < \tfrac{\varepsilon}{n}.$$

Выберем разбиение T: $d(T) < \delta$. Для него имеем

$$0 \leqslant \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) = \Omega_f(T) = \sum_{i=1}^{\#T} \omega(f,\Delta_i)\cdot|\Delta_i| < \frac{\varepsilon}{n},$$

где Δ_i, $i=1,\dots,\#T$ – отрезки разбиения T. Разделим множество точек разрыва $E(\frac{1}{n}) = \widetilde{E} \cup \widehat{E}$, где $\widetilde{E} = E(\frac{1}{n}) \cap T$, а $\widehat{E} = E(\frac{1}{n}) \setminus \widetilde{E}$. Ясно, $\widehat{E} \subset [a,b] \setminus T$, и поэтому $\forall x \in \widehat{E}\ \exists \delta > 0$ $\exists\, i(x) \in \{1,\dots,\#T\}$: $x \in U_\delta(x) \subset \Delta_{i(x)}$, следовательно,

$$\omega(f,\Delta_{i(x)}) \geqslant \omega(f, U_\delta(x)) \geqslant \omega(f,x) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Внутренности отрезков $\Delta_{i(x)}$, $x \in \widehat{E}$ покрывают $\widehat{E}$ – оценим их общую длину: $\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{i=1}^{\#T} \omega(f,\Delta_i)\cdot|\Delta_i| \geqslant \sum_{\substack{i=i(x)\\ x\in\widehat{E}}} \omega(f,\Delta_i)\cdot|\Delta_i| \geqslant \sum_{\substack{i=i(x)\\ x\in\widehat{E}}} \frac{1}{n}\cdot|\Delta_i|$.

Итак, $\sum_{\substack{i=i(x)\\ x\in\widehat{E}}} |\Delta_i| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\ell(\widehat{E}) = 0$.

Поскольку $\widetilde{E} \subset T$: $\#\widetilde{E} \leqslant \#T \Rightarrow \ell(\widetilde{E}) = 0 \Rightarrow \ell(E(\frac{1}{n})) = \ell(\widetilde{E} \cup \widehat{E}) = 0$.

Выведем $3') \Rightarrow 1)$. По условию, $f(x) \in B([a,b])$ – выберем $C > 0$: $\forall x \in [a,b]\ |f(x)| \leqslant C$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\ell(E(\varepsilon)) = 0$, найдётся конечное покрытие $E(\varepsilon)$ интервалами $\{J_k, k=1,\dots,h\}$ общей длины меньшей ε: $\sum_{k=1}^{h} |J_k| < \varepsilon$. Из концов J_k, $k=1,\dots,h$, попавших на $[a,b]$ и $\{a,b\}$ образуем разбиение T. Его отрезки

Δ_s либо лежат в каком-то J_k — такие обозначим Δ'_s, либо иначе — — такие обозначим Δ''_s: для них $E(\varepsilon) \cap \Delta''_s = \varnothing$. По утверждению выше, отрезки $\{\Delta''_s\}$ можно переразбить так, что $\forall s \ \omega(f, \Delta''_s) < 2\varepsilon$.

Новое, утончённое разбиение, с переразбитыми $\{\Delta''_s\}$ обозначим $\tilde{T}$.

Оценим разброс интегральных сумм: $0 \leq \Omega_f(\tilde{T}) = \overline{S}_f(\tilde{T}) - \underline{S}_f(\tilde{T}) =$

$$= \sum_{s=1}^{\#\tilde{T}} \omega(f, \Delta_s) \cdot |\Delta_s| = \sum_{s} \omega(f, \Delta'_s) \cdot |\Delta'_s| + \sum_{s} \omega(f, \Delta''_s) \cdot |\Delta''_s| \leq$$

$$\leq \sum_{s} 2 \cdot C \cdot |\Delta'_s| + \sum_{s} 2 \cdot \varepsilon \cdot |\Delta''_s| \leq 2 \cdot C \cdot \sum_{k=1}^{n} |J_k| + 2 \cdot \varepsilon \cdot |[a,b]| < 2 \cdot \varepsilon \cdot (C + b - a).$$

Таким образом, разброс интегральных сумм Римана может быть сделан сколь угодно малым. По критерию Дарбу, $f(x) \in R([a,b])$. ■

Начальные следствия.

1) $C([a,b]) \subset R([a,b])$. Действительно, если $f \in C([a,b])$, то $f \in B([a,b])$ и $E_f = \varnothing$.

2) Ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём, поскольку имеет конечное множество разрывов.

3) Функция Римана $R(x) = 0$, если $x \notin \mathbb{Q}$; $R(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$, если $m \perp n$, — интегрируема на любом отрезке: $E_R = \mathbb{Q}$. Из плотности $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\forall T$ — разбиения $[a,b]$ $\underline{S}_R(T) = 0$, поэтому $\int_a^b R(x)dx = \underline{I} = 0$.

4) Если $[0,1] \supset C$ — множество Кантора, тогда $E_{\chi_C} = \partial C = C$.

Поэтому $\chi_C(x) \in R([0,1])$ и $\int_0^1 \chi_C(x)dx = \underline{I} = 0$.