О рядах гиперболических функций

Верёвкин А.Б.

Аннотация: В работе вычислен ряд гиперболических функций ($x \neq 0$):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\mathrm{sh}(nx)} = 2 \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \sum_{m\geq 1} \left(e^{-m|x|} - e^{-2m|x|}\right) \cdot \sum_{s \setminus m} a_s \ ,$$

особым случаем которого является числовой ряд частных от значений функции Мёбиуса и чисел Фибоначчи:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{F_{2n-1}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{55} + \frac{1}{144} - \cdots = 5 - 2\sqrt{5}\,.$$

Ключевые слова: функциональный ряд, гиперболический синус, числа Фибоначчи, функция Мёбиуса.

Пусть $\alpha \cdot x \neq 0$, тогда при $\alpha \to +\infty$ имеется асимптотика:

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha x)} = \frac{2}{\exp(\alpha x) - \exp(-\alpha x)} \sim 2 \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \exp(-\alpha|x|)\,,$$

и поэтому верно утверждение:

Теорема. Для субэкспоненциальной числовой последовательности (a_n) следующий ряд сходится равномерно на множестве $M_C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq C > 0\}$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\mathrm{sh}(nx)} = 2 \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \sum_{m\geq 1} \big(\exp(-m|x|) - \exp(-2m|x|)\big) \cdot \sum_{s \setminus m} a_s\ . \qquad (\boxplus)$$

Доказательство: Равномерная сходимость ряда на M_C, по признаку Вейерштрасса, следует из вышеуказанной асимптотики, позволяющей оценить слагаемые функции элементами сходящегося числового ряда:

$$\left|\frac{a_n}{\mathrm{sh}(nx)}\right| \leq B \cdot \exp(-nC/2)\,.$$

Здесь предполагается, что последовательность (a_n) субэкспоненциальна, и поэтому для любого $C > 0$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \exp(-nC/2) = 0$. Следовательно, для некоторого $B > 0$ и всех натуральных n имеется неравенство $\big|a_n \cdot \exp(-nC/2)\big| \leq B$.

Далее преобразуем сумму при $x > 0$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\mathrm{sh}(nx)} = \sum_{n\geq 1} \frac{2\,a_n}{\exp(nx) - \exp(-nx)} \ = \ 2 \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\exp(nx)} \cdot \frac{1}{1 - \exp(-2nx)} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \exp(-nx) \cdot \sum_{s\geq 0} \exp(-2nsx) \ = \ 2 \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \sum_{s\geq 0} \exp\big(-n(2s+1)\,x\big) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \sum_{u\geq 1\,\&\,2\not\backslash u} \exp(-nux) = 2 \cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \left(\sum_{u\geq 1} \exp(-nux) - \sum_{u\geq 1\,\&\,2\setminus u} \exp(-nux)\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left(\sum_{u \geq 1} \exp(-nux) - \sum_{u \geq 1} \exp(-n2ux) \right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \sum_{u \geq 1} \exp(-nux) - 2 \cdot \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \sum_{u \geq 1} \exp(-2nux) = \big| \, nu = m \geq 1 \, \big|$$

$$= 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \exp(-mx) \cdot \sum_{n \setminus m} a_n - 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \exp(-2mx) \cdot \sum_{n \setminus m} a_n =$$

$$= 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \big(\exp(-mx) - \exp(-2mx) \big) \cdot \sum_{n \setminus m} a_n \, .$$

Если $x < 0$, тогда подставим в полученную формулу $-x$:

$$2 \cdot \sum_{m \geq 1} \big(\exp(mx) - \exp(2mx) \big) \cdot \sum_{n \setminus m} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\operatorname{sh}(-nx)} = -\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\operatorname{sh}(nx)} \ .$$

Эти два случая соединяются в приведённой выше формуле $(\boxplus)$.

Примеры. 1) Пусть $|t| \leq 1$, $x \neq 0$, тогда:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{\operatorname{sh}(nx)} = 2 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \sum_{m \geq 1} \big(\exp(-m|x|) - \exp(-2m|x|) \big) \cdot \sum_{n \setminus m} t^n \, .$$

2) Пусть $\mu(n)$ – функция Мёбиуса: $\sum_{n \setminus m} \mu(n) = \delta_{m1}$ (см. [1, гл. 4.9, с. 160]) . Тогда при $x \neq 0$ получим равенство:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{\operatorname{sh}(nx)} = 2 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \big(\exp(-|x|) - \exp(-2|x|) \big) = 4 \cdot \exp(-3|x|/2) \cdot \operatorname{sh}(x/2) \, .$$

3) Пусть $(F_n)_{n \geq 0}$ – числа Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Для них выполнена формула Бине (см. [1, гл. 6.6, с. 331]) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-n-1} \right) , \text{ где } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339\ldots \text{ – Золотое сечение} \, .$$

Поэтому числа Фибоначчи с нечётными индексами выражаются через гиперболический синус:

$$F_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^{2n} - \varphi^{-2n} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{sh}(2n \ln(\varphi)) \, .$$

Теперь, с учётом $\ln(\varphi) > 0$ и $\varphi^2 = \varphi + 1$, можно найти значение числового ряда:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{F_{2n-1}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{\operatorname{sh}(2n \ln(\varphi))} = \sqrt{5} \cdot \big(\exp\big(-2\ln(\varphi)\big) - \exp\big(-4\ln(\varphi)\big) \big) =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \left(\varphi^{-2} - \varphi^{-4} \right) = \sqrt{5} \cdot \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^4} = \frac{\sqrt{5} \cdot \varphi}{\varphi^4} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^3} = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{5} \cdot \left(5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1 \right)}{8} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 2) = 5 - 2\sqrt{5} = 0,527864045\ldots$$

Просуммировав десять начальных ненулевых слагаемых этого ряда, получим число, отличающееся от точного значения чуть больше, чем на одну миллионную:

$$\sum_{n=1}^{14} \frac{\mu(n)}{F_{2n-1}} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_5} - \frac{1}{F_9} + \frac{1}{F_{11}} - \frac{1}{F_{13}} + \frac{1}{F_{19}} - \frac{1}{F_{21}} - \frac{1}{F_{25}} + \frac{1}{F_{27}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{55} + \frac{1}{144} - \frac{1}{377} + \frac{1}{6765} - \frac{1}{17711} - \frac{1}{121393} + \frac{1}{317811} = 0,527863039\ldots$$

Список литературы

[1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики*,– М.: Мир, 1998, 703 с.

On the series of hyperbolic functions

(Simbirsk archive. Mathematics. 2021-06-17)

Abstract: Some series of hyperbolic functions is calculated ($x \neq 0$):

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\sinh(nx)} = 2 \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \sum_{m \geq 1} \left(e^{-m|x|} - e^{-2m|x|}\right) \cdot \sum_{s \setminus m} a_s \ .$$

The series of quotients of the values of the Möbius function and Fibonacci numbers is its special case:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{F_{2n-1}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{55} + \frac{1}{144} - \cdots = 5 - 2\sqrt{5} \ .$$

Key words: function series, hyperbolic sine, Fibonacci numbers, Möbius function.

Опубликовано: 17.06.2021

a_verevkin@mail.ru

УДК 517.521