Последовательности и ряды функций

Определения. Пусть на $X \subseteq \mathbb{R}$ задан

счётный набор функций $f_n(x) : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

а) функциональная последовательность $(f_n(x))$

сходится поточечно на X к $f(x) : X \to \mathbb{R}$,

если $\forall x \in X \ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Иначе говоря, $(f_n(x)) \xrightarrow[n \to \infty]{X} f(x)$ означает

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(n \geqslant n_0) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

б) функциональная последовательность $(f_n(x))$

сходится равномерно на X к $f(x) : X \to \mathbb{R}$,

если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X$

$$(n \geqslant n_0) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Равномерная сходимость на X обозначается следующим образом: $(f_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

в) ряд функций $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n(x)$, $a_n(x): X\to\mathbb{R}$ сходится поточечно на X к своей сумме $S(x): X\to\mathbb{R}$, если $(S_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{X} S(x)$, где $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$. Аналогично, этот ряд сходится равномерно на X к $S(x)$, если $(S_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$.

Замечание. При поточечной сходимости $n_0=n_0(x,\varepsilon)$, а при равномерной — $n_0=n_0(\varepsilon)$.

Следовательно, поточечная сходимость это:

$$\forall x\in X \ \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0,$$

а равномерная: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{X}|f_n(x)-f(x)|=0$.

Чтобы увидеть смысл различия этих понятий, рассмотрим примеры.

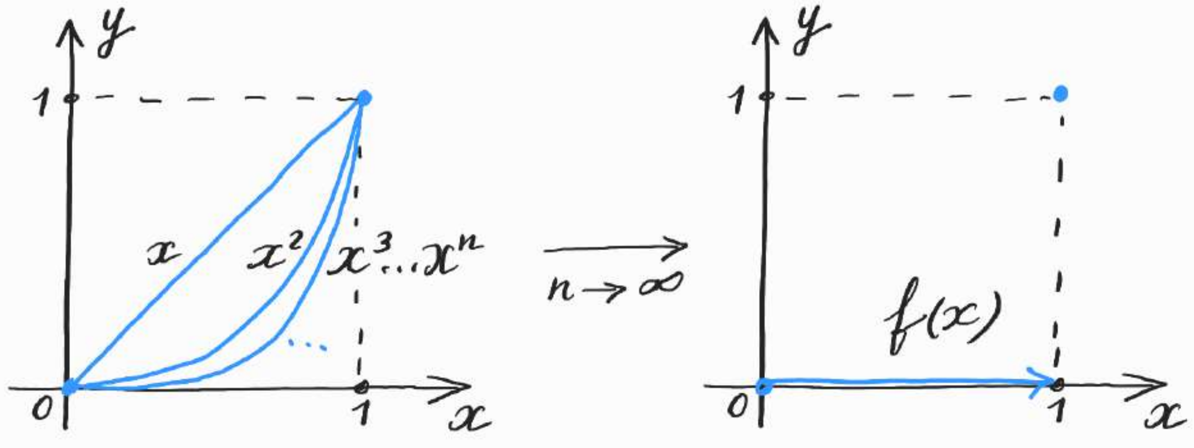
Пример 1. Пусть $X=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$,

поэтому $\lim\limits_{x\to 1-0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, но

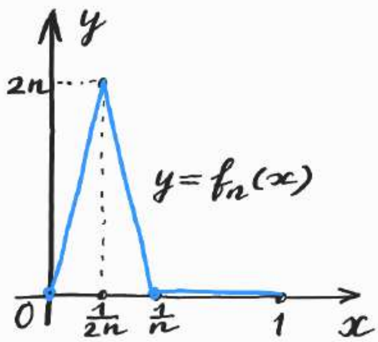
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1-0} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} 1=1.$$

В частности, поточечный предел непрерывных функций может быть разрывным.



Пример 2. Пусть $X=[0,1]$,

$$f_n(x)=\begin{cases}4n^2x, & x\in[0,\frac{1}{2n}]\\ 4n-4n^2x, & x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]\\ 0, & x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$$



Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\ \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$, поэтому

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Но $(f_n(x))\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ на $[0,1]$, и $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

Мы увидим, что в случае равномерной сходимости подобные примеры невозможны.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости)

Последовательность функций $(f_n(x))$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1,n_2\geqslant n_0\ \forall x\in X\ |f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\varepsilon$ (æ)

__Доказательство.__ $(\Longrightarrow)$ Если $(f_n(x))\overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$, тогда

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1,n_2\geqslant n_0\ \forall x\in X\ \left(|f_{n_1}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\&\left(|f_{n_2}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Тогда $|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)| = |(f_{n_1}(x)-f(x))-(f_{n_2}(x)-f(x))|\leqslant$

$$\leqslant |f_{n_1}(x)-f(x)|+|f_{n_2}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Из условия Коши ($\divideontimes$) следует, что $\forall x\in X$ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1, n_2 \geq n_0\ |f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\varepsilon$, то есть, при фиксированном $x\in X$ последовательность $(f_n(x))$ — фундаментальна, и поэтому сходится к некоторой $f(x)$. Поэтому $(f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.

И тогда в условии Коши ($\divideontimes$) можно перейти к пределу $n_2\to\infty$. В итоге получим искомое:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1 \geq n_0\ \forall x\in X\ |f_{n_1}(x)-f(x)|\leq\varepsilon \quad \blacksquare$$

Теорема (о предельном переходе в равномерно сходящейся последовательности)

Пусть $f_n(x): X\to\mathbb{R}$, $X\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in X'$. Допустим, что $(f_n(x)) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$ и $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$. Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \equiv \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) =: a_n$.

Переформулировав $(f_n(x)) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$ критерием Коши,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1, n_2 \geqslant n_0\ \forall x\in X\ |f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\varepsilon \quad (æ)$$

перейдём к пределу $x\to x_0$ и получим выражение:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n_1, n_2 \geqslant n_0\ |a_{n_1}-a_{n_2}|\leqslant\varepsilon$ — это условие Коши для числовой последовательности (a_n).

Поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A$.

Фиксируем $\varepsilon>0$. Поскольку $(a_n)\to A$,

$$\exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N_0(\varepsilon)\ |a_n-A|<\tfrac{\varepsilon}{3};$$

Так как $(f_n(x)) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$,

$$\exists N_1\geqslant N_0(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_{N_1}(x)-f(x)|<\tfrac{\varepsilon}{3};$$

А из условия $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N_1}(x) = a_{N_1}$ получим

$$\exists \delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\cap X\ |f_{N_1}(x)-a_{N_1}|<\tfrac{\varepsilon}{3}.$$

В итоге, для $x\in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\cap X$ имеется оценка:

$$|f(x)-A| = |(f(x)-f_{N_1}(x)) + (f_{N_1}(x)-a_{N_1}) + (a_{N_1}-A)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x)-f_{N_1}(x)| + |f_{N_1}(x)-a_{N_1}| + |a_{N_1}-A| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \equiv \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = A =$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \quad \blacksquare$$

Следствие (о непрерывности равномерно сходящейся последовательности)

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ и все $f_n(x): X \to \mathbb{R} \in C(X)$.

Если $(f_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, тогда $f(x) \in C(X)$.

<u>Доказательство</u>. Если x_0 – изолированная в X, то $f(x) \in C(x_0)$, по определению непрерывности.

Допустим, $x_0 \in X' \cap X \subset X'$. Тогда по Теореме

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0). \quad \blacksquare$$

Следствие (о непрерывности равномерно сходящегося ряда)

Пусть все $a_n(x): X \to \mathbb{R} \in C(X)$. Если $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n(x) \underset{n \to \infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, тогда $S(x) \in C(X)$.

Доказательство. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) \in C(X)$. ◀

Теорема (об интегрировании равномерно сходящейся последовательности)

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in R([c,d])$. Если $(f_n(x)) \underset{n \to \infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} f(x)$, тогда при $x \in [c,d]$

$$\left(\int_c^x f_n(t)dt\right) \underset{n \to \infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \int_c^x f(t)dt \text{ и}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^d f_n(t)dt = \int_c^d f(t)dt.$$

Доказательство. Равномерная сходимость $(f_n(x))$ к $f(x)$ на $[c,d]$ означает, что

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant n_0\ \forall x\in[c,d]$$
$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Тогда для $n\geqslant n_0$ и $x_1,x_2\in[c,d]$ получаем:

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-f_n(x_1))+(f_n(x_1)-f_n(x_2))+(f_n(x_2)-f(x_2))|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|<$$
$$<\ 2\cdot\varepsilon+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|.$$ Поэтому на всяком отрезке $\Delta\subset[c,d]$ и $n\geqslant n_0$ имеем оценку:

$$\omega(f,\Delta)=\sup_{x_1,x_2\in\Delta}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2\varepsilon+\omega(f_n,\Delta).$$

Поскольку $f_n(x)\in R([c,d])$, по критерию Дарбу $\exists\ T$ – разбиение $[c,d]$ такое, что:

$$0\leqslant \overline{S}_{f_n}(T)-\underline{S}_{f_n}(T)=\Omega_{f_n}(T)=\sum_{k=1}^{\#T}\omega(f_n,\Delta_k)\cdot|\Delta_k|<\varepsilon.$$

Но тогда следует неравенство:

$$\Omega_f(T)\leqslant\sum_{k=1}^{\#T}(2\cdot\varepsilon+\omega(f_n,\Delta_k))\cdot|\Delta_k|<2\cdot\varepsilon\cdot(d-c)+\varepsilon.$$

По критерию Дарбу, $f(x) \in R([c,d])$.

Поэтому для тех же $\varepsilon > 0$ и $n \geqslant n_0$, при $x \in [c,d]$:

$$\left|\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^x f_n(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x (f(t) - f_n(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (d-c) \cdot \sup_{t \in [c,d]} |f(t) - f_n(t)| < (d-c) \cdot \varepsilon.$$

Что и означает равномерную сходимость

$$\left(\int_c^x f_n(t)\,dt\right) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} \int_c^x f(t)\,dt \text{ на } [c,d].$$

В частности, $\forall x \in [c,d]$ есть предел:

$$\left(\int_c^x f_n(t)\,dt\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_c^x f(t)\,dt.$$

При $x = d$ получим:

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^d f_n(t)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt. \qquad \blacksquare$$

Следствие (об интегрировании равномерно сходящегося ряда)

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n(x) \in R([c,d])$. Если $\sum\limits_{n\geq 1} a_n(x) \overset{[c,d]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$, тогда при $x \in [c,d]$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\int_c^x a_n(t)dt\right) \overset{[c,d]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \int_c^x S(t)dt \text{ и}$$

$$\sum_{n\geq 1} \int_c^d a_n(t)dt = \int_c^d \sum_{n\geq 1} a_n(t)dt.$$

Доказательство. Сводимо к предыдущей теореме, поскольку $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) \in R([c,d])$. ◀