

А. Н. Ширяев

# Основы стохастической финансовой математики

Том 2

Теория



# **Оглавление**

## **Том 2**

Предисловие ко второму тому ..... xxxv

<b>Глава V. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Дискретное время</b> .....	<b>492</b>
1. Портфель ценных бумаг на $(B, S)$ -рынке .....	493
§ 1a. Стратегии, удовлетворяющие балансовым условиям .....	493
§ 1b. Понятие о “хеджировании”. Верхние и нижние цены. Полные и неполные рынки .....	507
§ 1c. Верхние и нижние цены в одностадийной модели .....	513
§ 1d. Пример полного рынка – <i>CRR</i> -модель .....	523
2. Рынок без арбитражных возможностей .....	526
§ 2a. Концепции “арбитраж” и “отсутствие арбитража” .....	526
§ 2b. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. I. Формулировка первой фундаментальной теоремы .....	529
§ 2c. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. II. Доказательство достаточности .....	534
§ 2d. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. III. Доказательство необходимости (с использованием условного преобразования Эшера) .....	535
§ 2e. Расширенный вариант первой фундаментальной теоремы ..	543

<b>3. Конструкция мартингальных мер с помощью</b>	
<b>абсолютно непрерывной замены меры . . . . .</b>	<b>554</b>
§3а. Основные определения. Процесс плотности . . . . .	554
§3б. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. I.	
Условно-гауссовский случай . . . . .	561
§3с. Мартингальность цен в случае условно-гауссовского	
и логарифмически условно-гауссовского распределений . . . . .	570
§3д. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. II.	
Общий случай . . . . .	575
§3е. Целочисленные случайные меры и их компенсаторы.	
Преобразование компенсаторов при абсолютно	
непрерывной замене меры.	
Стохастические интегралы . . . . .	584
§3f. Предсказуемые критерии отсутствия арбитражных	
возможностей на $(B, S)$ -рынке . . . . .	594
<b>4. Полные и совершенные безарбитражные рынки . . . . .</b>	<b>608</b>
§4а. Мартингальный критерий полноты рынка. I.	
Формулировка второй фундаментальной теоремы.	
Доказательство необходимости . . . . .	608
§4b. О представимости локальных мартингалов. I	
( $S$ -представимость") . . . . .	611
§4c. О представимости локальных мартингалов. II	
( $\mu$ -представимость", " $(\mu-\nu)$ -представимость") . . . . .	613
§4d. " $S$ -представимость" в биномиальной $CRR$ -модели . . . . .	617
§4e. Мартингальный критерий полноты рынка. II.	
Доказательство достаточности в случае $d = 1$ . . . . .	621
§4f. Расширенный вариант второй фундаментальной теоремы . . .	627
<b>Глава VI. Теория расчетов в стохастических</b>	
<b>финансовых моделях. Дискретное время . . . . .</b>	<b>634</b>
<b>1. Расчеты, связанные с хеджированием Европейского типа</b>	
<b>на безарбитражных рынках . . . . .</b>	<b>635</b>

§ 1а. Риск и методы его редуцирования . . . . .	635
§ 1б. Основная формула для цены хеджирования. I. Полные рынки. . . . .	638
§ 1с. Основная формула для цены хеджирования. II. Неполные рынки . . . . .	646
§ 1д. О расчетах цены хеджирования при среднеквадратичном критерии . . . . .	653
§ 1е. Форвардные и фьючерсные контракты . . . . .	656
2. Расчеты, связанные с хеджированием Американского типа на безарбитражных рынках . . . . .	660
§ 2а. Задачи об оптимальной остановке. Супермартингальная характеристизация . . . . .	660
§ 2б. Полные и неполные рынки. I. Супермартингальная характеристизация цены хеджирования . . . . .	673
§ 2с. Полные и неполные рынки. II. Основные формулы для цен хеджирования . . . . .	676
§ 2д. Опциональное разложение . . . . .	685
3. Схема серий “больших” безарбитражных рынков и асимптотический арбитраж . . . . .	694
§ 3а. Модель “больших” финансовых рынков . . . . .	694
§ 3б. Критерии отсутствия асимптотического арбитража . . . . .	697
§ 3с. Асимптотический арбитраж и контигуальность . . . . .	702
§ 3д. Некоторые аспекты аппроксимации и сходимости в схеме серий безарбитражных рынков . . . . .	721
4. Опционы Европейского типа на биномиальном ( $B, S$ )-рынке . . . . .	734
§ 4а. О проблематике расчетов опционных контрактов . . . . .	734
§ 4б. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. I. Случай общих платежных функций . . . . .	737
§ 4с. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. II. Случай марковских платежных функций . . . . .	743
§ 4д. Стандартные опционы покупателя и продавца . . . . .	747

§ 4e. Стратегии, основанные на опционах (комбинации, спрэды, сочетания) . . . . .	753
<b>5. Опционы Американского типа на биномиальном (<math>B, S</math>)-рынке . . . . .</b>	<b>758</b>
§ 5a. О проблематике расчетов опционов Американского типа . . . . .	758
§ 5b. Расчеты для стандартного опциона покупателя . . . . .	762
§ 5c. Расчеты для стандартного опциона продавца . . . . .	774
§ 5d. Опционы с последействием. Расчеты в “Русском опционе” . . . . .	778
<b>Глава VII. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время . . . . .</b>	<b>786</b>
<b>1. Портфель ценных бумаг в семимартингальних моделях . . . . .</b>	<b>787</b>
§ 1a. Допустимые стратегии. I. Самофинансируемость. Векторный стохастический интеграл . . . . .	787
§ 1b. Дисконтирующие процессы . . . . .	799
§ 1c. Допустимые стратегии. II. Некоторые специальные классы .	803
<b>2. Семимартингальные модели без арбитражных возможностей. Полнота . . . . .</b>	<b>806</b>
§ 2a. Концепция отсутствия арбитража и ее разновидности . . . . .	806
§ 2b. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. I. Достаточные условия . . . . .	809
§ 2c. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. II. Необходимые и достаточные условия (сводка некоторых результатов) . . . . .	814
§ 2d. Полнота в семимартингальних моделях . . . . .	818
<b>3. Семимартингалы и мартингальные меры . . . . .</b>	<b>820</b>
§ 3a. Каноническое представление семимартингалов. Случайные меры. Триплеты предсказуемых характеристик .	820
§ 3b. Конструкция мартингальных мер в диффузионных моделях. Теорема Гирсанова . . . . .	832

§ 3c. Конструкция мартингальных мер в случае процессов Леви.	
Преобразование Эшера . . . . .	844
§ 3d. Предсказуемые критерии мартингальности цен. I . . . . .	854
§ 3e. Предсказуемые критерии мартингальности цен. II . . . . .	858
§ 3f. О представимости локальных мартингалов (“( $H^c, \mu - \nu$ )-представимость”) . . . . .	863
§ 3g. Теорема Гирсанова для семимартингалов. Структура плотностей вероятностных мер . . . . .	866
<b>4. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования</b>	
в диффузионных моделях акций . . . . .	870
§ 4a. Арбитраж и условия его отсутствия. Полнота . . . . .	870
§ 4b. Цена хеджирования на полных рынках . . . . .	876
§ 4c. Фундаментальное уравнение в частных производных для цены хеджирования . . . . .	879
<b>5. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования</b>	
в диффузионных моделях облигаций . . . . .	886
§ 5a. Модели без арбитражных возможностей . . . . .	886
§ 5b. Полнота . . . . .	899
§ 5c. Фундаментальное уравнение в частных производных временной структуры цен облигаций . . . . .	901
<b>Глава VIII. Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время . . . . .</b>	<b>906</b>
<b>1. Опционы Европейского типа на диффузионных</b>	
( $B, S$ )-рынках акций . . . . .	907
§ 1a. Формула Башелье . . . . .	907
§ 1b. Формула Блэка и Шоулса. I. Мартингальный вывод . . . . .	911
§ 1c. Формула Блэка и Шоулса. II. Вывод, основанный на решении фундаментального уравнения . . . . .	920
§ 1d. Формула Блэка и Шоулса. III. Модель с дивидендами . . . . .	923

<b>2. Опционы Американского типа на диффузионных <math>(B, S)</math>-рынках акций. Случай бесконечного временного горизонта . . . . .</b>	926
§ 2а. Стандартный опцион покупателя . . . . .	926
§ 2б. Стандартный опцион продавца . . . . .	940
§ 2с. Комбинации опционов покупателя и продавца . . . . .	942
§ 2д. Русский опцион . . . . .	945
<b>3. Опционы Американского типа на диффузионных <math>(B, S)</math>-рынках акций. Случай конечного временного горизонта . . . . .</b>	956
§ 3а. Об особенностях расчетов на конечных временных интервалах . . . . .	956
§ 3б. Задачи об оптимальной остановке и задача Стефана . . . . .	960
§ 3с. Задача Стефана для стандартных опционов покупателя и продавца . . . . .	964
§ 3д. О связи стоимостей опционов Европейского и Американского типа . . . . .	967
<b>4. Опционы Европейского типа и Американского типа на диффузионном <math>(B, P)</math>-рынке облигаций . . . . .</b>	972
§ 4а. О проблематике расчетов опционов на рынке облигаций . . . . .	972
§ 4б. О расчетах опционов Европейского типа в однофакторных гауссовских моделях . . . . .	975
§ 4с. О расчетах опционов Американского типа в однофакторных гауссовских моделях . . . . .	980
<b>Литература . . . . .</b>	984
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	1009
<b>Указатель обозначений . . . . .</b>	1016