

А. Н. Ширяев

Основы стохастической финансовой математики

Том 1

Факты
Модели



ФАЗИС
Москва 1998

Оглавление

Том 1

Предисловие	xvii
Глава I. Основные понятия, структуры, инструменты, цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии	2
1. Финансовые структуры и инструменты	3
§ 1а. Ключевые объекты и структуры	3
§ 1б. Финансовый рынок	6
§ 1с. Рынок производных ценных бумаг. Финансовые инструменты	25
2. Финансовый рынок в условиях неопределенности. Классические теории динамики финансовых индексов, их критика и пересмотр. Неоклассические теории	42
§ 2а. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка	45
§ 2б. Портфель ценных бумаг. Диверсификация Марковитца	57
§ 2с. Модель ценообразования финансовых активов (<i>CAPM</i> – Capital Asset Pricing Model)	62
§ 2д. Арбитражная теория расчетов (<i>APT</i> – Arbitrage Pricing Theory)	67
§ 2е. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. I	73
§ 2ф. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. II	80

3. Цели и задачи финансовой теории, инженерии и финансово-актуарных расчетов	84
§ 3а. Роль финансовой теории и финансовой инженерии. Финансовый риск	84
§ 3б. Страховой бизнес как социальный механизм компенсации экономических потерь	87
§ 3с. Классический пример актуарных расчетов. Теорема Лундберга–Крамэра	99
Глава II. Стохастические модели. Дискретное время	102
1. Необходимые вероятностные понятия и некоторые модели динамики рыночных цен	103
§ 1а. Неопределенность и нерегулярность поведения цен, вероятностное их описание и представление	103
§ 1б. Разложение Дуба. Канонические представления	112
§ 1с. Локальные мартингалы, мартингальные преобразования, обобщенные мартингалы	119
§ 1д. Гауссовские и условно-гауссовские модели	129
§ 1е. Биномиальная модель эволюции цен	136
§ 1ф. Модели с дискретным вмешательством случая	140
2. Линейные стохастические модели	146
§ 2а. Модель скользящего среднего $MA(q)$	148
§ 2б. Авторегрессионная модель $AR(p)$	156
§ 2с. Модель авторегрессии и скользящего среднего $ARMA(p, q)$ и интегральная модель $ARIMA(p, d, q)$	170
§ 2д. Прогнозирование в линейных моделях	175
3. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели	188
§ 3а. Модели $ARCH$ и $GARCH$	189
§ 3б. Модели $EGARCH$, $TGARCH$, $HARCH$ и др.	200
§ 3с. Модели стохастической волатильности	207

4. Приложение: модели динамического хаоса	216
§ 4а. Нелинейные хаотические модели	216
§ 4б. Проблематика различимости “хаотических” и “стохастических” последовательностей	224
Глава III. Стохастические модели. Непрерывное время	230
1. Негауссовские модели распределений и процессов	231
§ 1а. Устойчивые и безгранично делимые распределения	231
§ 1б. Процессы Леви	244
§ 1с. Устойчивые процессы	252
§ 1д. Гиперболические распределения и процессы	261
2. Модели со свойствами самоподобия (автомодельности). Фрактальность	270
§ 2а. Статистический феномен автомодельности Харста	271
§ 2б. Экскурсы во фрактальную геометрию	274
§ 2с. Статистическая автомодельность. Фрактальное броуновское движение	277
§ 2д. Фрактальный гауссовский шум как процесс с сильным последствием	284
3. Модели, основанные на броуновском движении	288
§ 3а. Броуновское движение и его роль как базисного процесса	288
§ 3б. Броуновское движение: сводка классических результатов	293
§ 3с. Стохастический интеграл по броуновскому движению	306
§ 3д. Процессы и формула Ито	313
§ 3е. Стохастические дифференциальные уравнения	320
§ 3ф. Прямые и обратные уравнения Колмогорова. Вероятностное представление решений	329
4. Диффузионные модели эволюции процентных ставок, стоимостей акций и облигаций	336
§ 4а. Стохастические процентные ставки	336
§ 4б. Стандартная диффузионная модель стоимости акций (геометрическое броуновское движение) и ее обобщения	344

§ 4с. Диффузионные модели временной структуры стоимостей семейства облигаций	350
5. Семимартингальные модели	356
§ 5а. Семимартингалы и стохастические интегралы	356
§ 5b. Разложение Дуба–Мейэра. Компенсаторы. Квадратическая вариация	365
§ 5с. Формула Ито для семимартингалов. Некоторые обобщения .	372
Глава IV. Статистический анализ финансовых данных	376
1. Эмпирические данные. Вероятностно-статистические модели их описания. Статистика “тиков”	377
§ 1а. Структурные изменения в сборе и анализе финансовых данных	377
§ 1b. О “географических” особенностях статистических данных обменных курсов	381
§ 1с. Описание эволюции финансовых индексов как стохастических процессов с дискретным вмешательством случая	385
§ 1d. К статистике “тиков”	389
2. Статистика одномерных распределений	392
§ 2а. Дискретизация статистических данных	392
§ 2b. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. I. Отклонение от гауссовости. “Вытянутость” эмпирических плотностей	394
§ 2с. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. II. “Тяжелые хвосты” и их статистика	400
§ 2d. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. III. Структура распределений в центральной области	407
3. Статистика волатильности, корреляционной зависимости и последействия в ценах	414
§ 3а. Волатильность. Определение и примеры	414
§ 3b. Периодичность и фрактальная структура волатильности в обменных курсах	421

§ 3с. Корреляционные свойства	425
§ 3d. “Деволатилизация”. Операционное время	429
§ 3е. Эффекты “кластерности” и последствия в ценах	437
4. Статистический \mathcal{R}/\mathcal{S} -анализ	440
§ 4а. Истоки и методология \mathcal{R}/\mathcal{S} -анализа	440
§ 4b. \mathcal{R}/\mathcal{S} -анализ некоторых финансовых временных рядов	450
Литература	456
Предметный указатель	481
Указатель символов	488

Том 2

Предисловие ко второму тому	xxxv
---------------------------------------	------

Глава V. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Дискретное время	492
1. Портфель ценных бумаг на (B, S) -рынке	493
§ 1а. Стратегии, удовлетворяющие балансовым условиям	493
§ 1b. Понятие о “хеджировании”. Верхние и нижние цены. Полные и неполные рынки	507
§ 1с. Верхние и нижние цены в одношаговой модели	513
§ 1d. Пример полного рынка – CRR -модель	523
2. Рынок без арбитражных возможностей	526
§ 2а. Концепции “арбитраж” и “отсутствие арбитража”	526
§ 2b. Мартингалльный критерий отсутствия арбитражных возможностей. I. Формулировка первой фундаментальной теоремы	529

§ 2с. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. II. Доказательство достаточности	534
§ 2d. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. III. Доказательство необходимости (с использованием условного преобразования Эшера)	535
§ 2е. Расширенный вариант первой фундаментальной теоремы	543
3. Конструкция мартингальных мер с помощью абсолютно непрерывной замены меры	554
§ 3а. Основные определения. Процесс плотности	554
§ 3b. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. I. Условно-гауссовский случай	561
§ 3с. Мартингальность цен в случае условно-гауссовского и логарифмически условно-гауссовского распределений	570
§ 3d. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. II. Общий случай	575
§ 3е. Целочисленные случайные меры и их компенсаторы. Преобразование компенсаторов при абсолютно непрерывной замене меры. Стохастические интегралы	584
§ 3f. Предсказуемые критерии отсутствия арбитражных возможностей на (B, S) -рынке	594
4. Полные и совершенные безарбитражные рынки	608
§ 4а. Мартингальный критерий полноты рынка. I. Формулировка второй фундаментальной теоремы. Доказательство необходимости	608
§ 4b. О представимости локальных мартингалов. I (“ S -представимость”)	611
§ 4с. О представимости локальных мартингалов. II (“ μ -представимость”, “ $(\mu - \nu)$ -представимость”)	613
§ 4d. “ S -представимость” в биномиальной CRR -модели	617
§ 4е. Мартингальный критерий полноты рынка. II. Доказательство достаточности в случае $d = 1$	621
§ 4f. Расширенный вариант второй фундаментальной теоремы	627

Глава VI. Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Дискретное время	634
1. Расчеты, связанные с хеджированием Европейского типа на безарбитражных рынках	635
§ 1a. Риск и методы его редуцирования	635
§ 1b. Основная формула для цены хеджирования. I. Полные рынки.	638
§ 1c. Основная формула для цены хеджирования. II. Неполные рынки	646
§ 1d. О расчетах цены хеджирования при среднеквадратичном критерии	653
§ 1e. Форвардные и фьючерсные контракты	656
2. Расчеты, связанные с хеджированием Американского типа на безарбитражных рынках	660
§ 2a. Задачи об оптимальной остановке. Супермартингальная характеристика	660
§ 2b. Полные и неполные рынки. I. Супермартингальная характеристика цены хеджирования	673
§ 2c. Полные и неполные рынки. II. Основные формулы для цен хеджирования	676
§ 2d. Опциональное разложение	685
3. Схема серий “больших” безарбитражных рынков и асимптотический арбитраж	694
§ 3a. Модель “больших” финансовых рынков	694
§ 3b. Критерии отсутствия асимптотического арбитража	697
§ 3c. Асимптотический арбитраж и контигуальность	702
§ 3d. Некоторые аспекты аппроксимации и сходимости в схеме серий безарбитражных рынков	721
4. Опционы Европейского типа на биномиальном (B, S)-рынке	734
§ 4a. О проблематике расчетов опционных контрактов	734
§ 4b. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. I. Случай общих платежных функций	737

§ 4с. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. II. Случай марковских платежных функций	743
§ 4d. Стандартные опционы покупателя и продавца	747
§ 4е. Стратегии, основанные на опционах (комбинации, спреды, сочетания)	753
5. Опционы Американского типа на биномиальном (B, S) -рынке	758
§ 5а. О проблематике расчетов опционов Американского типа	758
§ 5b. Расчеты для стандартного опциона покупателя	762
§ 5с. Расчеты для стандартного опциона продавца	774
§ 5d. Опционы с последствием. Расчеты в “Русском опционе”	778
Глава VII. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время	786
1. Портфель ценных бумаг в семимартингальных моделях	787
§ 1а. Допустимые стратегии. I. Самофинансируемость. Векторный стохастический интеграл	787
§ 1b. Дисконтирующие процессы	799
§ 1с. Допустимые стратегии. II. Некоторые специальные классы	803
2. Семимартингальные модели без арбитражных возможностей. Полнота	806
§ 2а. Концепция отсутствия арбитража и ее разновидности	806
§ 2b. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. I. Достаточные условия	809
§ 2с. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. II. Необходимые и достаточные условия (сводка некоторых результатов)	814
§ 2d. Полнота в семимартингальных моделях	818
3. Семимартингалы и мартингальные меры	820
§ 3а. Каноническое представление семимартингалов. Случайные меры. Триплеты предсказуемых характеристик	820

§ 3b. Конструкция мартингалльных мер в диффузионных моделях. Теорема Гирсанова	832
§ 3c. Конструкция мартингалльных мер в случае процессов Леви. Преобразование Эшера	844
§ 3d. Предсказуемые критерии мартингалльности цен. I	854
§ 3e. Предсказуемые критерии мартингалльности цен. II	858
§ 3f. О представимости локальных мартингалов (“ $(H^c, \mu - \nu)$ -представимость”)	863
§ 3g. Теорема Гирсанова для семимартингалов. Структура плотностей вероятностных мер	866
4. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования в диффузионных моделях акций	870
§ 4a. Арбитраж и условия его отсутствия. Полнота	870
§ 4b. Цена хеджирования на полных рынках	876
§ 4c. Фундаментальное уравнение в частных производных для цены хеджирования	879
5. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования в диффузионных моделях облигаций	886
§ 5a. Модели без арбитражных возможностей	886
§ 5b. Полнота	899
§ 5c. Фундаментальное уравнение в частных производных временной структуры цен облигаций	901
Глава VIII. Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время	906
1. Опционы Европейского типа на диффузионных (B, S)-рынках акций	907
§ 1a. Формула Башелье	907
§ 1b. Формула Блэка и Шоулса. I. Мартингалльный вывод	911
§ 1c. Формула Блэка и Шоулса. II. Вывод, основанный на решении фундаментального уравнения	920
§ 1d. Формула Блэка и Шоулса. III. Модель с дивидендами	923

2. Опционы Американского типа на диффузионных (B, S) -рынках акций. Случай бесконечного временного горизонта	926
§ 2a. Стандартный опцион покупателя	926
§ 2b. Стандартный опцион продавца	940
§ 2c. Комбинации опционов покупателя и продавца	942
§ 2d. Русский опцион	945
3. Опционы Американского типа на диффузионных (B, S) -рынках акций. Случай конечного временного горизонта	956
§ 3a. Об особенностях расчетов на конечных временных интервалах	956
§ 3b. Задачи об оптимальной остановке и задача Стефана	960
§ 3c. Задача Стефана для стандартных опционов покупателя и продавца	964
§ 3d. О связи стоимостей опционов Европейского и Американского типа	967
4. Опционы Европейского типа и Американского типа на диффузионном (B, P) -рынке облигаций	972
§ 4a. О проблематике расчетов опционов на рынке облигаций	972
§ 4b. О расчетах опционов Европейского типа в однофакторных гауссовских моделях	975
§ 4c. О расчетах опционов Американского типа в однофакторных гауссовских моделях	980
Литература	984
Предметный указатель	1009
Указатель обозначений	1016