

А.Н.Ширяев
ВЕРОЯТНОСТЬ

Настоящее учебное пособие представляет расширенный трехсеместровый курс лекций по теории вероятностей. Первая часть посвящена элементарной теории вероятностей и предназначена для первичного ознакомления с предметом. Во второй части излагаются математические основания теории вероятностей, базирующиеся на аксиоматике Колмогорова. В третьей части рассматриваются случайные процессы с дискретным временем — случайные последовательности (стационарные, марковские, мартингалы). Во введении дан исторический очерк становления теории вероятностей. В историко-библиографической справке приводятся источники результатов и указывается дополнительная литература. В конце каждого параграфа даются задачи. Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических отделений университетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6	игре с бросанием монеты	
ВВЕДЕНИЕ	9	§ 10. Случайное блуждание. II.	105
ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	14	Принцип отражения. Закон арксинуса	
§ 1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов	14	§ 11. Мартингалы. Некоторые применения к случайному блужданию	114
§ 2. Некоторые классические модели и распределения	27	§ 12. Марковские цепи. Эргодическая теорема.	121
§ 3. Условные вероятности. Независимость	34	Строго марковское свойство	
§ 4. Случайные величины и их характеристики	43	ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	144
§ 5. Схема Бернулли. I. Закон больших чисел	57	§ 1. Вероятностная модель эксперимента с бесконечным числом исходов. Аксиоматика Колмогорова	144
§ 6. Схема Бернулли. II. Предельные теоремы (локальная, Муавра — Лапласа, Пуассона)	67	§ 2. Алгебры и σ -алгебры. Измеримые пространства	152
§ 7. Оценка вероятности «успеха» в схеме Бернулли	80	§ 3. Способы задания вероятностных мер на измеримых пространствах	166
§ 8. Условные вероятности и математические ожидания относительно разбиений	86	§ 4. Случайные величины. I	186
§ 9. Случайное блуждание. I. Вероятности разорения и средняя продолжительность при	94	§ 5. Случайные элементы	192
		§ 6. Интеграл Лебега. Математическое ожидание	197

§ 7. Условные вероятности и условные математические ожидания относительно σ -алгебр	226	§ 1. Законы «нуля или единицы»	366
§ 8. Случайные величины. II	248	§ 2. Сходимость рядов	371
§ 9. Построение процесса с заданными конечномерными распределениями	260	§ 3. Усиленный закон больших чисел	376
§ 10. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин	267	§ 4. Закон повторного логарифма	384
§ 11. Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом	279	ГЛАВА V. СТАЦИОНАРНЫЕ (В УЗКОМ СМЫСЛЕ) СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ	390
§ 12. Характеристические функции	292	§ 1. Стационарные (в узком смысле) случайные последовательности. Сохраняющие меру преобразования	390
§ 13. Гауссовские системы	316	§ 2. Эргодичность и перемешивание	393
ГЛАВА III. СХОДИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА	328	§ 3. Эргодические теоремы	396
§ 1. Слабая сходимость вероятностных мер и распределений	328	ГЛАВА VI. СТАЦИОНАРНЫЕ (В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ) СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И L^2 ТЕОРИЯ	402
§ 2. Относительная компактность и плотность семейств вероятностных распределений	337	§ 1. Спектральное представление ковариационной функции	402
§ 3. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем	342	§ 2. Ортогональные стохастические меры и стохастические интегралы	412
§ 4. Центральная предельная теорема	350	§ 3. Спектральное представление стационарных (в широком смысле) последовательностей	418
§ 5. Безгранично делимые и устойчивые распределения	357	§ 4. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности	430
ГЛАВА IV. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И И СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	366	§ 5. Разложение Вольда	437
		§ 6. Экстраполяция, интерполяция и фильтрация	445
		§ 7. Фильтр Калмана—Бьюси и его обобщения	457

ГЛАВА VII.	467	МАРКОВСКУЮ ЦЕПЬ	
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТ И СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОБРАЗУЮЩИЕ МАРТИНГАЛ		§ 1. Определения и основные свойства	529
§ 1. Определения мартингалов и родственных понятий	467	§ 2. Классификация состояний марковской цепи по арифметическим свойствам переходных вероятностей $P_{ij}^{(n)}$	534
§ 2. О сохранении свойства мартингальности при замене времени на случайный момент	477	§ 3. Классификация состояний марковской цепи по асимптотическим свойствам вероятностей $P_{ii}^{(n)}$	533
§ 3. Основные неравенства	484	§ 4. О существовании предельных и стационарных распределений	549
§ 4. Основные теоремы о сходимости субмартингалов и мартингалов	496	§ 5. Примеры	554
§ 5. О множествах сходимости субмартингалов и мартингалов	503	ИСТОРИКО- БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА	562
§ 6. Абсолютная непрерывность и сингулярность вероятностных распределений	511	ЛИТЕРАТУРА	566
§ 7. Об асимптотике вероятности выхода случайного блуждания за криволинейную границу	524	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	569
ГЛАВА VIII.	529	УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ	573
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТ И СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОБРАЗУЮЩИЕ		Латинский алфавит	575
		Готический алфавит	575
		Греческий алфавит	575