

**А. В. Булинский, А. Н. Ширяев**

**ТЕОРИЯ  
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**ФИЗМАТЛИТ  
2004**

## **Оглавление**

**Предисловие . . . . .** **6**

**Основные обозначения . . . . .** **8**

**Глава I. Случайные процессы.**  
**Распределения случайных процессов . . . . .** **11**

Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи. Случайные элементы и их распределения. Теорема о монотонных классах. Пополнение вероятностного пространства. Предел измеримых отображений. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями. Процессы частных сумм, эмпирические меры, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга, пуассоновская случайная мера. Цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$ . Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Конечномерные распределения случайной функции. Теорема Колмогорова о согласованных мерах. Характеристическая функция меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций. Описание  $\mathcal{B}_T$  для бесконечного  $T$ . Процессы с непрерывными траекториями. Согласованность проекций меры. Эквивалентные случайные функции. Измеримые процессы.

**Глава II. Процессы с независимыми приращениями.**  
**Пуассоновские и гауссовские процессы . . . . .** **46**

Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс (бронновское движение). Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовой случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовые процессы. Неотрицательно определенные функции как ковариационные функции и как воспроизводящие ядра гильбертовых пространств. Теорема Парзена. Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовых величин. Построение непрерывного винеровского процесса. Многомерное броуновское движение.

**Глава III. Броуновское движение.****Свойства траекторий . . . . .** 76

Недифференцируемость п.н. траекторий броуновского движения (винеровского процесса). Марковское свойство винеровского процесса. Фильтрация. Марковские моменты, их примеры.  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_\tau$ , состоящая из событий, наблюдаемых до марковского момента  $\tau$ . Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на  $[0, t]$ . Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма.

**Глава IV. Мартингалы.****Дискретное и непрерывное время . . . . .** 108

Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Расширение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Применение к случайным блужданиям (задача о разорении). Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Сходимость мартингалов в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Теорема Леви. Фундаментальная теорема страховой математики. Некоторые неравенства для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

**Глава V. Слабая сходимость мер.****Принцип инвариантности . . . . .** 147

Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость случайных элементов по распределению. Критерии слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений. Слабая сходимость мер в пространстве  $C(T, S)$ . Относительная слабая компактность и плотность семейства мер. Теорема Прохорова. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова. Многомерная центральная предельная теорема Линдеберга, лемма о максимуме сумм независимых случайных величин. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс. Метод одного вероятностного пространства, теорема Скорохода. Метризация слабой сходимости. Метрика Леви–Прохорова.

**Глава VI. Марковские процессы.****Дискретное и непрерывное время . . . . .** 180

Эквивалентные определения марковского процесса. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Примеры. Цепи Маркова, их построение по переходным вероятностям и начальному распределению. Пуассоновский процесс как марковская цепь. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции  $d$ -мерного броуновского движения. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную

функцию. Однородные марковские процессы. Эргодическая теорема для однородных цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера. Инфинитезимальная матрица  $Q$  стохастической полугруппы  $(P(t))_{t \geq 0}$ . Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрицы  $Q^*$ . Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам.

**Глава VII. Стационарные процессы.**

Дискретное и непрерывное время . . . . .	225
--	-----

Ортогональные случайные меры и их  $\sigma$ -конечные структурные меры. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере. Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Теорема Боннера–Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в  $L^2(\Omega)$ . Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса. Теорема Колмогорова–Сегё.

**Глава VIII. Интеграл Ито.**

Стохастические дифференциальные уравнения . . . . .	276
---	-----

Стохастический интеграл для простых случайных функций по винеровскому процессу. Конструкция Ито стохастического интеграла для неупреждающих случайных функций. Свойства стохастического интеграла. Формула замены переменных Ито. Уравнение Ланжевена. Процесс Оринштейна–Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

<b>Приложение 1. Доказательство теоремы Колмогорова . . . . .</b>	317
<b>Приложение 2. Доказательство теоремы Прохорова . . . . .</b>	323
<b>Приложение 3. Доказательства теорем Линдеберга и Дуба . . . . .</b>	327
<b>Приложение 4. Доказательство теоремы Боннера–Хинчина . . . . .</b>	337
<b>Приложение 5. Доказательство теоремы Колмогорова–Сегё . . . . .</b>	340
<b>Приложение 6. Доказательство строгого марковского свойства семейства броуновских движений . . . . .</b>	344
<b>Приложение 7. Вероятностное решение задачи Дирихле . . . . .</b>	354
<b>Приложение 8. Большие уклонения . . . . .</b>	364
<b>Заключительные замечания . . . . .</b>	383
<b>Список литературы . . . . .</b>	385
<b>Указатель . . . . .</b>	393