

Д.Ф.Кузнецов
**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ**

Книга посвящена проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Изложены как известные, так и ряд новых результатов, связанных со свойствами стохастических интегралов, стохастическими разложениями процессов Ито, аппроксимацией повторных стохастических интегралов, численными методами для нелинейных и линейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито. Книга адресована специалистам по теории случайных процессов, вычислительной математике, программистам, аспирантам и студентам старших курсов.

Оглавление

1. О стохастических дифференциальных уравнениях: определения, свойства, проблемы, применения	19
1.1. О различных численных подходах, применяемых к стохастическим дифференциальным уравнениям	19
1.2. Некоторые сведения из теории вероятностей	20
1.2.1. Сходимость случайных последовательностей	20
1.2.2. Некоторые неравенства для математических	23
1.2.3. Случайные процессы	25
1.2.4. Случайные процессы с независимыми приращениями.	30
Винеровский процесс	
1.3. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения	34
1.3.1. Стохастический интеграл Ито	34
1.3.2. Процессы Ито	40
1.3.3. Формула Ито	42
1.3.4. Стохастические дифференциальные уравнения Ито	44
1.3.5. Стохастический интеграл Стратоновича	49
1.3.6. Стохастические дифференциальные уравнения	55
1.4. Математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений	57
1.4.1. Общий вид нелинейных моделей стохастической динамики	57
1.4.2. Линейные модели стохастической динамики	61
1.5. Примеры стохастических моделей физических и технических систем	67
1.5.1. Стохастическая модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста	67
1.5.2. Автоколебательная электрическая система (ламповый генератор)	71
1.5.3. Чандлеровские колебания	74
1.5.4. Стохастические модели химической кинетики и модели регуляции численности конкурирующих видов	76
1.5.5. Модели финансовой математики	78

1.5.6. Солнечная активность	79
1.5.7. Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений	80
1.6. Некоторые задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями	81
1.6.1. Фильтрация	81
1.6.2. Оптимальное стохастическое управление	83
1.6.3. О стохастической устойчивости	85
1.6.4. Оценивание параметров	92
1.7. О неэффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям	93
2. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	97
2.1. Введение	97
2.2. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	100
3. Стохастические разложения процессов Ито	113
3.1. Введение	113
3.2. Дифференцируемость по Ито случайных процессов	115
3.3. Унифицированные разложения Тейлора-Ито	119
3.3.1. Первая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	120
3.3.2. Вторая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	129
3.4. Разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Сравнение с унифицированными разложениями Тейлора-Ито	132
3.5. Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов	137
3.6. Разложение Тейлора-Стратоновича	141
3.7. Сильная сходимость унифицированного разложения Тейлора-Ито	144
3.8. Сильная сходимость разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича	146
3.9. Примеры разложений в ряды Тейлора-Ито	150
3.9.1. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито	150
3.9.2. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых многомерных стохастических дифференциальных уравнений Ито	153
4. Методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов	159
4.1. Введение	159
4.2. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье	164
4.2.1. Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича	165
4.2.2. Разложение повторных интегралов Стратоновича в кратные ряды	169

из произведений стандартных гауссовских величин	
4.2.3. Среднеквадратическая аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича	181
4.2.4. Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью тригонометрической системы функций .	188
4.2.5. Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций	196
4.3. Метод Г.Н.Мильдтейна разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича	200
4.3.1. Введение	200
4.3.2. Примеры разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г.Н.Мильштейна	202
4.4. Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье и метода Г.Н. Мильштейна	203
4.5. Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита	206
4.6. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах	209
4.7. Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов	213
4.7.1. Введение	213
4.7.2. Аддитивное разделение переменных	215
4.7.3. Мультиплективное разделение переменных	219
4.8. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам, основанное на кратных рядах Фурье	221
4.8.1. Введение	221
4.8.2. Симметризованный стохастический интеграл по пуассоновским процессам	222
4.8.3. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам	227
5. Сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	233
5.1. История вопроса	233
5.2. Разложения Тейлора-Ито и общие представления явных сильных численных методов порядка $t/2$	236
5.3. Методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито	244
5.3.1. Метод Мильштейна	244
5.3.2. Явный сильный однопшаговый метод порядка 1.5	246
5.3.3. Явный сильный однопшаговый численный метод порядка 2.0	252
5.3.4. Явный сильный однопшаговый метод порядка 2.5	255
5.4. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме	259

Вагнера и Платена	
5.4.1. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	259
5.4.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	261
5.4.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	263
5.4.4. Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена	267
5.5. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича	68
5.5.1. Явный сильный одношаговый метод порядка $r/2$	268
5.5.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.0	271
5.5.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	272
5.5.4. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	273
5.5.5. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	275
5.6. Конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито	277
5.6.1. Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций	278
5.6.2. Явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0	280
5.6.3. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	280
5.6.4. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	283
5.6.5. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	286
5.6.6. О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных методов	293
5.7. Неявные одношаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	295
5.7.1. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.0	296
5.7.2. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.5	298
5.7.3. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.0	299
5.7.4. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.5	300
5.8. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	302
5.8.1. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.0	302
5.8.2. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	303
5.8.3. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	304

5.8.4. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	306
5.9. Явные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	309
5.9.1. Явный двухшаговый сильный метод порядка 1.0	309
5.9.2. Явные двухшаговые сильные методы порядка 1.5	310
5.9.3. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.0	311
5.9.4. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.5	312
5.10. Неявные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	314
5.10.1. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 1.0 и 1.5	314
5.10.2. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 2.0 и 2.5	316
5.11. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	317
5.11.1. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 1.0 и 1.5	317
5.11.2. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 2.0 и 2.5	319
5.12. Общие представления двухшаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито	323
5.13. Об устойчивости численных методов	327
6. Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	337
6.1. Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты	338
6.1.1. Интегральные представления решений СЛСДУ	339
6.1.2. Моментные характеристики решений СЛСДУ	343
6.1.3. Свойства дискретной системы линейных стохастических уравнений в стационарном случае	346
6.2. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении	348
6.2.1. Введение	348
6.2.2. Общий подход к моделированию и структурирование проблемы	350
6.2.3. Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения стационарной СЛСДУ	351
6.2.4. Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ	353
6.2.5. Алгоритм численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ	359
6.2.6. Алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ и оценка скорости его сходимости	363

6.3. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	365
6.3.1. Введение	365
6.3.2. Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	367
6.3.3. Оценка скорости сходимости по шагу дискретизации 5 метода численного моделирования решений СЛСДУ, основанного на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	369
6.4. Библиотека "ITO-LIN" MatLAB-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	372
6.4.1. Математическая модель объекта моделирования	373
6.4.2. Общая характеристика и сценарий управления библиотекой	374
6.4.3. Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных	380
6.4.4. Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения ССЛСДУ	387
6.4.5. Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия	392
7. Примеры численного моделирования стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений	397
7.1. Выбор числа q при численном моделировании повторных стохастических интегралов	397
7.1.1. Выбор числа q в случае тригонометрического базиса	397
7.1.2. Выбор числа q в случае полиномиального базиса	398
7.1.3. Выбор числа q при аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито с помощью интегральных сумм	402
7.2. Численное интегрирование модели Блэка-Шоулза	403
7.3. Исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца	404
7.4. Численное интегрирование стохастической модели Лотки-Вольтерра второго порядка	419
7.5. Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг	423
7.6. Численное моделирование чандлеровских колебаний	429
7.7. Численное моделирование солнечной активности	432
7.8. Исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёссlera	434
Заключение	444
Библиография	447
Обозначения	456