

*Дж. Л. ДУБ*

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Перевод с английского*

Р. Л. ДОБРУЩИНА и А. М. ЯГЛОМА

*Под редакцией*

А. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва — 1956

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчиков . . . . .	5
Из предисловия автора . . . . .	7
<b>Глава I. Введение. Теоретико-вероятностные основы . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Необходимый запас математических знаний . . . . .	9
§ 2. Основное пространство . . . . .	9
§ 3. Случайные величины и распределения вероятностей . . . . .	12
§ 4. Различные понятия сходимости . . . . .	15
§ 5. Семейства случайных величин . . . . .	16
§ 6. Изображения в произведених пространствах . . . . .	19
§ 7. Условные вероятности и математические ожидания . . . . .	22
§ 8. Условные вероятности и математические ожидания: общие свойства . . . . .	26
§ 9. Условные распределения вероятностей . . . . .	31
§ 10. Повторные условные математические ожидания и вероятности . . . . .	38
§ 11. Характеристические функции . . . . .	40
<b>Глава II. Определение вероятностного процесса. Основные классы процессов . . . . .</b>	<b>48</b>
§ 1. Определение вероятностного процесса . . . . .	48
§ 2. Задание вероятностной меры . . . . .	52
§ 3. Гауссовские процессы: понятия в узком и широком смысле . . . . .	71
§ 4. Процессы с взаимно независимыми значениями . . . . .	77
§ 5. Процессы с некоррелированными или с ортогональными значениями . . . . .	78
§ 6. Марковские процессы . . . . .	79
§ 7. Мартингалы . . . . .	88
§ 8. Стационарные вероятностные процессы . . . . .	91
§ 9. Процессы с независимыми приращениями . . . . .	92
§ 10. Процессы с некоррелированными и с ортогональными приращениями . . . . .	94
<b>Глава III. Процессы с взаимно независимыми значениями . . . . .</b>	<b>97</b>
§ 1. Общие замечания . . . . .	97
§ 2. Ряды . . . . .	99
§ 3. Закон больших чисел . . . . .	115
§ 4. Безгранично делимые распределения и центральная предельная теорема . . . . .	120
§ 5. Стационарный случай . . . . .	132
<b>Глава IV. Процессы со взаимно некоррелированными или с ортогональными значениями . . . . .</b>	<b>137</b>
§ 1. Общие замечания . . . . .	137
§ 2. Геометрический подход . . . . .	138
§ 3. Общее определение проекции . . . . .	139
§ 4. Ряды из ортогональных случайных величин . . . . .	144
§ 5. Закон больших чисел . . . . .	146
§ 6. Степенные ряды вида $\sum_0^{\infty} a_j e^{2\pi i j \lambda}$ . . . . .	147
§ 7. Мартингалы в широком смысле . . . . .	151
<b>Глава V. Марковские процессы с дискретным параметром . . . . .</b>	<b>157</b>
§ 1. Цепи Маркова. Определение . . . . .	157
§ 2. Конечные однородные цепи Маркова . . . . .	159
§ 3. Сложные цепи Маркова . . . . .	169
§ 4. Приложение к перемешиванию карт . . . . .	171
§ 5. Обобщение результатов § 2 на произвольные пространства состояний . . . . .	174
§ 6. Закон больших чисел . . . . .	199

	7. Центральная предельная теорема . . . . .	202
	8. Марковские процессы в широком смысле . . . . .	211
<b>Глава VI.</b>	<b>Марковские процессы с непрерывным параметром . . . . .</b>	<b>214</b>
	1. Цепи Маркова с конечным числом состояний . . . . .	214
	2. Обобщение результатов § 1 на случай непрерывного пространства состояний . . . . .	231
	3. Диффузионные уравнения и соответствующие марковские процессы . . . . .	247
<b>Глава VII.</b>	<b>Мартингалы . . . . .</b>	<b>263</b>
	1. Определения; мартингалы и полумартингалы . . . . .	263
	2. Приложение к вероятностным играм . . . . .	269
	3. Основные неравенства . . . . .	280
	4. Теоремы о сходимости . . . . .	286
	5. Приложение к суммам независимых случайных величин . . . . .	300
	6. Приложение к усиленному закону больших чисел . . . . .	306
	7. Приложение к интегрированию в бесконечномерном пространстве . . . . .	307
	8. Приложение к теории производных . . . . .	308
	9. Приложение к изучению отношения правдоподобия в математической статистике . . . . .	312
	10. Приложение к последовательному анализу . . . . .	314
	11. Мартингалы с непрерывным параметром . . . . .	316
	12. Приложение теории мартингалов к выводу свойств непрерывности выборочных функций процессов некоторых типов . . . . .	348
<b>Глава VIII.</b>	<b>Процессы с независимыми приращениями . . . . .</b>	<b>352</b>
	1. Общие замечания . . . . .	352
	2. Процесс броуновского движения . . . . .	352
	3. Физические приложения процесса броуновского движения . . . . .	356
	4. Пуассоновский процесс . . . . .	358
	5. Приложение пуассоновского процесса к распределениям молекул и звезд . . . . .	363
	6. Центрирование общего процесса с независимыми приращениями . . . . .	366
	7. Вид функций распределения и свойства непрерывности выборочных функций . . . . .	375
<b>Глава IX.</b>	<b>Процессы с ортогональными приращениями . . . . .</b>	<b>382</b>
	1. Свойства непрерывности . . . . .	382
	2. Стохастические интегралы . . . . .	383
	3. Приложение к выводу теоремы Кемпбелла . . . . .	389
	4. Преобразование Фурье процесса с ортогональными приращениями . . . . .	390
	5. Обобщение стохастического интеграла, введенного в § 2 . . . . .	392
<b>Глава X.</b>	<b>Стационарные процессы с дискретным параметром . . . . .</b>	<b>405</b>
	1. Общие свойства; метрическая транзитивность . . . . .	405
	2. Усиленный закон больших чисел для стационарных в узком смысле вероятностных процессов . . . . .	416
	3. Корреляционная функция стационарного вероятностного процесса; примеры . . . . .	424
	4. Спектральное представление стационарного процесса . . . . .	432
	5. Спектральные разложения . . . . .	437
	6. Закон больших чисел для стационарных в широком смысле процессов . . . . .	439
	7. Оценка функций $R(\nu)$ и $F(\lambda)$ по выборочной последовательности . . . . .	443
	8. Абсолютно непрерывные спектральные функции и эквивалентное суммирование . . . . .	447
	9. Линейные операции над стационарными процессами . . . . .	449
	10. Рациональные (относительно $e^{2\pi i t \lambda}$ ) спектральные плотности . . . . .	450
<b>Глава XI.</b>	<b>Стационарные процессы с непрерывным параметром . . . . .</b>	<b>456</b>
	1. Общие свойства; метрическая транзитивность . . . . .	456
	2. Усиленный закон больших чисел для стационарных в узком смысле вероятностных процессов . . . . .	463
	3. Корреляционная функция стационарного процесса; примеры . . . . .	465
	4. Спектральное представление стационарного процесса . . . . .	473
	5. Спектральные разложения . . . . .	475
	6. Закон больших чисел для стационарных в широком смысле процессов . . . . .	475
	7. Оценка значений $R(t)$ и $F(\lambda)$ по выборочным функциям . . . . .	476

§ 8. Абсолютно непрерывные спектральные функции и скользящее суммирование . . . . .	477
§ 9. Линейные операции над стационарными процессами . . . . .	479
§ 10. Рациональные спектральные плотности . . . . .	486
§ 11. Процессы со стационарными в широком смысле приращениями . . . . .	495
<b>Глава XII. Наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) линейное прогнозирование стационарных в широком смысле процессов</b> . . . . .	<b>504</b>
§ 1. Общие принципы (случай дискретного параметра) . . . . .	504
§ 2. Наилучший линейный прогноз как полиномиальная аппроксимация . . . . .	506
§ 3. Решение задачи о прогнозе для простейших случаев (случай дискретного параметра) . . . . .	508
§ 4. Общее решение задачи о прогнозе (случай дискретного параметра) . . . . .	512
§ 5. Общее решение задачи о прогнозе (случай непрерывного параметра) . . . . .	522
§ 6. Обобщения результатов §§ 4 и 5 . . . . .	531
§ 7. Многомерное прогнозирование . . . . .	534
<b>Дополнение</b> . . . . .	<b>539</b>
§ 1. Поля точечных множеств . . . . .	539
§ 2. Функции множества . . . . .	544
§ 3. Сохраняющие меру преобразования . . . . .	556
<b>Приложение</b> . . . . .	<b>561</b>
<b>Приложение переводчиков</b> . . . . .	<b>574</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>589</b>
<b>Указатель</b> . . . . .	<b>599</b>