

М. В. КОЗЛОВ

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

ДОПУЩЕНО ГОСУДАРСТВЕННЫМ КОМИТЕТОМ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО
ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ «МАТЕМАТИКА»

Издательство
Московского университета
1990

Оглавление

Предисловие	6
Глава I. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ	9
§ 1. Вероятность в классической схеме Классическая вероятность и элементы комбинаторики (1.1—1.10). Симметричное случайное блуждание (1.11—1.19). Урновая модель (1.20—1.30).	9
§ 2. Вероятностное пространство, случайные величины, распределение ве- роятностей События и вероятностная мера (2.1—2.4). Испытания Бернулли (2.5, 2.6). Разбиения, случайные величины в схеме Бернулли (2.7— 2.14). Случайные величины в схеме бесконечной последовательности испытаний Бернулли (2.15—2.18). Задача о разорении игрока (2.19, 2.20).	25
§ 3. Непрерывные вероятностные модели Случайные величины в схеме случайного выбора точек из отрезка, функции распределений, плотности (3.1—3.10). Пуассоновский про- цесс и предельная схема Пуассона (3.11—3.15). Распределение арк- синуса в симметричном блуждании (3.16). Формула Стирлинга и нормальное распределение в схеме симметричного блуждания (3.17—3.21). Многомерные распределения (3.22—3.27).	42
§ 4. Независимость Независимые дискретные случайные величины, распределение суммы, производящие функции (4.1—4.11). Независимые события (4.12— 4.14). Независимые непрерывные случайные величины (4.15—4.22). Пуассоновский процесс и экспоненциальное распределение (4.23— 4.26). Броуновское движение (4.27).	66
§ 5. Условная вероятность Условные распределения дискретных случайных величин (5.1—5.10). Марковские цепи (5.11—5.16). Условные плотности (5.17, 5.18). Мар- ковские цепи с непрерывным множеством состояний (5.19, 5.20).	86
§ 6*. Пространство и мера Алгебра множеств, мера и ее свойства (6.1—6.7). Расширение ал- гебры множеств, внешняя мера, измеримые множества, теорема о существовании и единственности продолжения меры (6.8—6.18). Мера Лебега (6.19). Меры на прямой и функции распределения (6.20—6.23). Мера на плоскости (6.24, 6.25). Последовательности ис- пытаний (6.26—6.29). Монотонные классы (6.30—6.37).	101

Глава II.	
ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	128
§ 7. Математическое ожидание	128
Математическое ожидание дискретных случайных величин (7.1—7.16). Математическое ожидание в общем случае: определение, свойства, вычисление (7.17—7.34).	
§ 8. Дисперсия, ковариация, среднееквадратическое расстояние	143
Неравенство Чебышева, дисперсия, закон больших чисел в схеме Бернулли (8.1—8.10). Приближение непрерывных функций (8.11, 8.12). Вычисление и свойства дисперсии (8.13—8.16). Ковариация (8.17—8.21). Среднееквадратическое расстояние (8.22). Дисперсия суммы (8.23, 8.24). Закон больших чисел в форме Чебышева (8.25). Дисперсия как мера качества статистической оценки (8.26, 8.27). Матрица ковариаций (8.28—8.35). Линейные оценки с минимальной дисперсией (8.36).	
§ 9. Условное математическое ожидание	158
Определение (9.1—9.3). Оптимальная нелинейная оценка (9.4). Вычисление и свойства условного ожидания в дискретном случае (9.5—9.12). Свойства в непрерывном случае (9.13—9.17). Многомерное нормальное распределение (9.18). Несмещенное оценивание и достаточные статистики (9.19—9.22). Мартингалы (9.23). Ветвящийся процесс (9.24).	
§ 10*. Измеримые функции и интеграл	174
Интеграл Лебега от простых функций (10.1—10.12). Интеграл Лебега и его свойства (10.13—10.28). Интегралы Римана, Лебега, Римана—Стилтьеса, Лебега—Стилтьеса (10.29, 10.30). Интеграл на произведении пространств (10.31—10.35). Меры и плотности (10.36—10.40). Марковские процессы (10.41).	
Глава III.	
НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	199
§ 11. Простое симметричное блуждание	199
Времена достижения и возвращения (11.1—11.6). Предельные теоремы для времен достижения и возвращения (11.7, 11.8). Ветвящийся процесс (11.9). Условное блуждание и броуновский мост, предельные теоремы (11.10—11.18, 11.21). Гауссовские процессы (11.19, 11.20). Броуновская экскурсия (11.22).	
§ 12. Схема Бернулли и простое блуждание	223
Нормальное приближение и большие отклонения для биномиального распределения (12.1—12.4). Нормальное приближение для пуассоновского, отрицательного биномиального и гамма распределений (12.5—12.7). Эмпирическая функция распределения, статистики Колмогорова—Смирнова (12.8—12.10). Сходимость с вероятностью 1, усиленный закон больших чисел, леммы Бореля—Кантелли (12.11—12.14). Времена достижения (12.15). Предельные теоремы для простого блуждания (12.16—12.20). Среднее и дисперсия времени достижения (12.21). Условная предельная теорема (12.22).	
§ 13. Сходимость распределений, преобразование Лапласа и характеристические функции	247
Сходимость случайных величин и распределений (13.1—13.10). Асимптотическая нормальность выборочных квантилей (13.11). Сходимость производящих функций (13.12—13.14). Интеграл Римана—Стилтьеса, преобразование Лапласа, формула обращения, теорема непрерывности, моменты (13.15—13.30, 13.33). Применение преобразования Лапласа (13.31, 13.32, 13.34, 13.35). Характеристические функции	

(13.36—13.42). Закон больших чисел в форме Хинчина (13.43). Центральная предельная теорема (13.44—13.53). Приближение непрерывной функции тригонометрическими полиномами (13.54). Формула обращения для целочисленных величин (13.55).

§ 14. Марковские модели	277
Неоднородное простое блуждание (14.1—14.9). Процесс Гальтона—Ватсона (14.10—14.24). Условный ветвящийся процесс (14.25—14.29). Ветвящийся процесс с параметром $\mu > 1$ (14.30—14.34). Процессы с иммиграцией (14.35—14.37). Ветвящийся процесс в случайной среде (14.38). Дискретные процессы восстановления и марковские цепи (14.39—14.48).	
Литература	342
Список обозначений и сокращений	343