

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Ульяновский государственный университет»  
Факультет математики и информационных технологий

## **УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ**

Ульяновского государственного университета  
Серия МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

**Выпуск 1(5)**

Под ред. проф. А. А. Смагина

Ульяновск, 2013

**ББК 32.97**

**У91**

*Печатается по решению Ученого совета факультета математики  
и информационных технологий Ульяновского государственного университета*

**У91** Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Математика и информационные технологии. Вып. 1(5) / под ред. проф. А. А. Смагина. – Ульяновск : УлГУ, 2013. - 214 с.

**Редакционная коллегия:**

д.ф.-м.н., профессор А. С. Андреев  
д.ф.-м.н., профессор А. А. Бутов  
д.т.н., профессор К. В. Кумунжиев  
д.ф.-м.н. профессор В. Л. Леонтьев

*Научное издание*

**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ**

**Ульяновского государственного университета**

*Серия*

**МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

**Выпуск 1(5)**

Под ред. проф. *А. А. Смагина*

*Печатается в авторской редакции*

Директор Издательского центра – *Т. В. Филиппова*  
Оформление обложки *Р. А. Водениной*  
Подготовка оригинал-макета *Е. Е. Гусевой*

Подписано в печать 27.12.2013.  
Формат 60x84/8. Гарнитура Times New Roman.  
Усл. п.л. 24,8. Тираж 100 экз.  
Заказ №191/

Отпечатано в Издательском центре  
Ульяновского государственного университета  
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

## Содержание

### Раздел 1. Математика

*Вильке В.Г., Мигунова Д.С.*

О движении мяча по травяному газону ..... 5

*Езангина Т.А., Гайворонский С.А.*

Параметрический синтез интервальной системы автоматического управления  
с помощью программного пакета MDSLS ..... 20

*Захарова О.С.*

Оптимальное движение тела с подвижной внутренней массой  
в среде с сопротивлением..... 41

*Марков Р.В.*

Пирсовские цепи полуколец ..... 62

*Омарова Г.П.*

Обобщение теорем об ограниченности и компактности  
псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда ..... 72

*Омельяненко К.Н.*

Разработка и исследование дискретно-непрерывного закона  
и алгоритма управления процессом электросварки изделий..... 87

*Остроушко Е.Д.*

Об ограниченности функций  $W = W(z)$ , представимых своими  
обобщенными производными по сопряженной переменной ..... 94

*Сухоносова Д.Ю.*

Об управлении четырехколесным омни-роботом с запаздыванием  
в структуре обратной связи..... 99

*Фирстов Д.В., Бережной Д.В., Биряльцев Е.В.*

Один подход к реализации поглощающих граничных условий  
при численном решении динамических задач механики сплошной среды ..... 103

*Цветова (Фокеева) Е.В., Ковальногов В.Н.*

Способы повышения эффективности  
газодинамической температурной стратификации ..... 115

*Чунаев П.В.*

Приближение наимпростейшими дробями и  $h$ -суммами..... 121

*Шатина Л.С.*

Эволюция движения систем вязкоупругих тел..... 136

*Яруллин А.Д.*

Методика расчета трехфазной фильтрации на многопроцессорных ЭВМ..... 144

### Раздел 2. Информационные технологии

*Смагин А.А.*

Метод определения веса десятичного числа и позиций единиц в двоичном коде..... 165

<i>Смагин А.А., Булаев А.А.</i> Исследование весовых матриц целых десятичных чисел.....	168
<i>Смагин А.А., Булаев А.А.</i> Определение порядковых номеров чисел, образующих строки в треугольной матрице, с заданным весом.....	174
<i>Смагин А.А.</i> Математические связи между числами с разными весами.....	176
<i>Звягинцева Е.Э, Мельниченко А.С.</i> Разработка демонстрационного прототипа системы поддержки принятия решений на основе когнитивной модели оценки технологичности программного продукта в среде MATLAB .....	179
<i>Журавлев В.М., Миронов П.П.</i> Случайно-возмущенные конечномерные динамические системы и принцип максимума энтропии.....	191
<i>Кожевников В.В., Вислов К.В., Никонов Н.П., Шурмакин А.В.</i> Анализ достижимости устойчивых состояний синхронного RS-триггера .....	200
<i>Кожевников В.В.</i> Метод анализа достижимости сетей Петри.....	208
<i>Смолеха В.П., Лукьянов В.А.</i> Реализация систем передачи с использованием технологии многочастотной модуляции ....	212

## О ДВИЖЕНИИ МЯЧА ПО ТРАВЯНОМУ ГАЗОНУ

*В.Г. Вильке, Д.С. Мигунова*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

Исследуется движение мяча неизменной шаровой формы по травяному газону, представленному набором деформируемых стержней, одни концы которых жестко прикреплены к плоскости, а другие концы свободны и могут контактировать с мячом. Зона контакта на поверхности мяча представляется шаровым сектором, размеры которого и расположение на поверхности мяча зависят от положения центра и ориентации мяча. Проекция зоны контакта на плоскость – круг, центр которого и радиус изменяются при движении центра мяча. При контакте с мячом стержни испытывают продольные и изгибные деформации, а также ударные воздействия на границе зоны контакта. Рассмотрено поступательно-вращательное движение мяча по стержневому газону без трения, а также движение с вязким трением в точках контакта концов стержней с мячом.

В постановке задачи о движении двух контактирующих твердых тел необходимо сформулировать закон их взаимодействия, из которого определяются силы и моменты, действующие со стороны одного тела на другое.

В случае точечного контакта двух тел их взаимодействие сводится к двум равным и противоположно направленным силам, приложенным в точке контакта тел к каждому из них. Если сила направлена по общей нормали к поверхностям двух тел в точке контакта, то речь идет об идеальных голономных связях, наложенных на перемещения точек механической системы. Если силы взаимодействия имеют помимо нормальной составляющей компоненты, лежащие в общей касательной плоскости в точке контакта, то говорят о контакте с трением. В этом случае следует сформулировать правило – закон трения, согласно которому определяются силы трения. При составлении уравнений движения эти силы приводятся к центрам масс двух тел.

При отказе от модели абсолютно твердых тел их контактное взаимодействие порождает локальные деформации тел в окрестности точки контакта и формирует зону контакта – общую деформированную поверхность двух тел, в точках которой происходит их взаимодействие. Необходимо сформулировать законы такого взаимодействия и на их основе определить силовые поля в заранее неизвестной области контакта. Впервые эта задача была решена Герцем в случае статического контакта двух тел. Герц определил поле нормальных сил в эллиптической зоне контакта и относительные перемещения точек двух тел по их общей нормали в зависимости от приложенных к телам внешних сил.

В дальнейших исследованиях динамики шара использовались результаты контактной задачи Герца [1]. В случае качения абсолютно твердого шара по плоскости, обладающей упругими и диссипативными свойствами (модель Кельвина–Фойхта) возникает момент трения качения [2]. Динамика мяча, перемещающегося по наклонному травяному газону при игре в гольф, исследовалась на основе феноменологической модели [3]. Обсуждались различные модели трения качения [4].

Модель сухого трения Кулона в случае проскальзывания почти во всех точках зоны контакта, позволяет определить поле касательных сил и получить замкнутую систему динамических уравнений, описывающих качение шара по шероховатой плоскости [5–7]. В результате прослеживается связь между трением скольжения и верчения, проистекающая из связи скоростей скольжения и угловой скорости тела при вычислении поля относительных скоростей точек в зоне контакта.

Современные ученые активно исследуют задачи взаимодействия твердых тел с деформируемыми сплошными средами, в частности, вязкоупругими. В работах [9–11] исследовано качение твердого цилиндра по вязкоупругой плоскости, выявлен нелинейный характер зависимости между скоростью движения цилиндра и коэффициентом трения качения. Определя-

ется характер деформации опорной плоскости и зона контакта. В статьях [3], [12] исследована модель, более близкая к затрагиваемой в данной работе тематике – в них рассматривается движение мяча для гольфа на травяном газоне.

Другая актуальная задача трибологических исследований – формирование моделей, связывающих трение при скольжении, верчении и вращении твердого тела. Сформулированная в [5] модель трения позже расширялась и дополнялась до двухпараметрической [7] и трехпараметрических [13–14] моделей трения. При рассмотрении поступательно-вращательного движения мяча на газоне также затрагивается эта проблематика.

Исследованная модель механической системы во многом близка к перечисленным выше моделям и позволяет получать схожие результаты, однако имеет ряд важных отличий.

Во-первых, деформируемая сплошная среда заменена набором дискретных вязкоупругих стержней. Каждый из стержней может испытывать упругую продольную (если жестко закрепленный конец стержня расположен точно в центре проекции зоны контакта на опорную плоскость), изгибную, продольно-поперечную деформацию; подвергается ударам при наложении связи; испытывает колебания при неупругом ударе; вносит вклад в диссипацию энергии за счет трения в точке контакта незакрепленного конца с шероховатой поверхностью мяча, а также за счет внутренней вязкости при деформации. В уравнениях движения фигурирует результирующая сила, действующая со стороны стержней на мяч.

Во-вторых, результирующая сила сопротивления, действующая на мяч со стороны стержней, разбита на компоненты, соответствующие различным источникам возникновения препятствия движению. Это дает возможность оценить вклад каждого источника сопротивления в отдельности.

Полученная механическая модель имеет богатый спектр практических приложений.

Одним из классов приложений является динамика различных спортивных игр: футбола, гольфа, тенниса, хоккея на траве и так далее. Например, в работе [12] при исследовании динамики исследуются условия реализации специфического удара по мячу для гольфа, при которых реализуется класс движений. Изученная в работе механическая система позволяет аналогичным образом моделировать движения мячей в спорте, как качественным образом, так и с применением средств компьютерного моделирования. Вообще говоря, модель описывает движение тела, соприкасающегося с некой сплошной средой, причем зона контакта меняет свое расположение и размеры в процессе движения, поэтому оказывается продуктивной даже в, казалось бы, далеких задачах. Так, предсказывается погружение твердого тела в среду при уменьшении его горизонтальной скорости: этот эффект мы наблюдаем при движении серфингиста на гребне волны.

Другой масштабной областью применений являются транспортные задачи. При движении колесной и гусеничной техники наблюдается эффект деформации грунта. Таким образом, контакт обода колеса или протектора с опорной поверхностью происходит по области, пятну вместо точечного контакта в случае более грубой модели соприкосновения твердых тел. Так как движение техники, как правило, может быть представлено в виде комбинации простейших движений (прямолинейное движение по опорной плоскости, движение по наклонной плоскости, поворот), некоторые из которых уже рассмотрены в работе, модель можно использовать для предсказания характера и скорости движения по продавливаемому грунту. Для более сложных режимов движения следует использовать методы численного моделирования.

### **1. Движение мяча по гладкому стержневому газону.**

В качестве модели травяного газона рассмотрим множество стержней, концы которых закреплены на горизонтальной плоскости  $OX_1X_2$ . Стержни в недеформированном состоянии имеют длину  $h$  и направлены вдоль оси  $OX_3$ . Деформации стержней описываются линейной теорией продольных и изгибных деформаций.

Предполагается, что осевые сечения всех стержней одинаковы и симметричны относительно их центров. Стержни расположены достаточно близко друг от друга (расстояния между основаниями соседних стержней мало по сравнению с их длиной  $h$  и радиусом  $r$  мяча,

взаимодействующего со стержнями). В дальнейшем рассматривается непрерывное множество стержней, образующее сплошную среду, в точках границы которой при  $X_3 = h$  может иметь место контакт с поверхностью мяча.

На рисунке 1 схематическим образом изображен контакт деформированного стержня с поверхностью мяча, а также введены некоторые из обозначений, которые будут использоваться далее. На эскизе показан контакт стержня и мяча для случая общего положения, когда закрепленный конец стержня расположен не на границе проекции зоны контакта и не в ее центре.

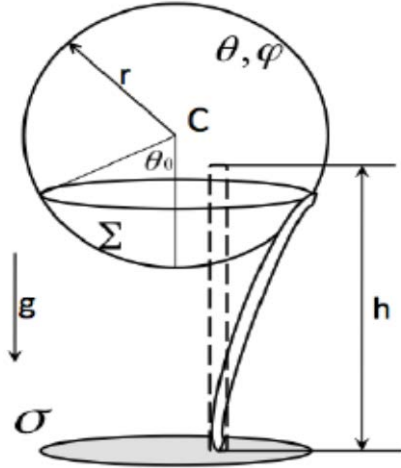


Рис. 1. Взаимодействие мяча и стержней

Контакт мяча и стержня осуществляется в единственной точке, соответствующей незакрепленному концу стержня. Других точек контакта быть не может. В частности, исключено прилегание отрезка стержня к сферической поверхности мяча.

Пусть  $X_1, X_2, X_3$  – координаты центра мяча, совпадающего с его центром масс. Поверхность мяча не деформируется при взаимодействии со стержнями и остается сферой. Если аппликата центра мяча  $X_3 > r + h$ , то мяч не взаимодействует с концами стержней, образующими газон. Пусть  $X_3 = r(1 + \delta) + h$ ,  $\delta \leq 0$ . В этом случае контакт поверхности мяча со стержнями происходит по сферическому сегменту

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = X_1 + r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = X_2 + r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = X_3 - r \cos \theta, \theta \leq \theta_0, \varphi \bmod 2\pi\},$$

где  $\theta, \varphi$  – сферические координаты на поверхности мяча, а

угол  $\theta_0 = \arccos[(X_3 - h) / r]$ . Проекция сферического сегмента  $\Sigma$  на плоскость  $OX_1X_2$  – круг

$$\sigma = \{(x_1, x_2) : x_1 = X_1 + \rho \cos \varphi, x_2 = X_2 + \rho \sin \varphi, 0 \leq \rho \leq r \sin \theta_0, \varphi \bmod 2\pi\},$$

$$\rho = r \sin \theta$$

Вообще говоря, могут быть реализованы различные варианты взаимного расположения мяча и множества стержней. На рисунке 2 изображены случаи отсутствия контакта а) и частичного погружения мяча в газон б), сопровождающееся деформацией контактирующих стержней.

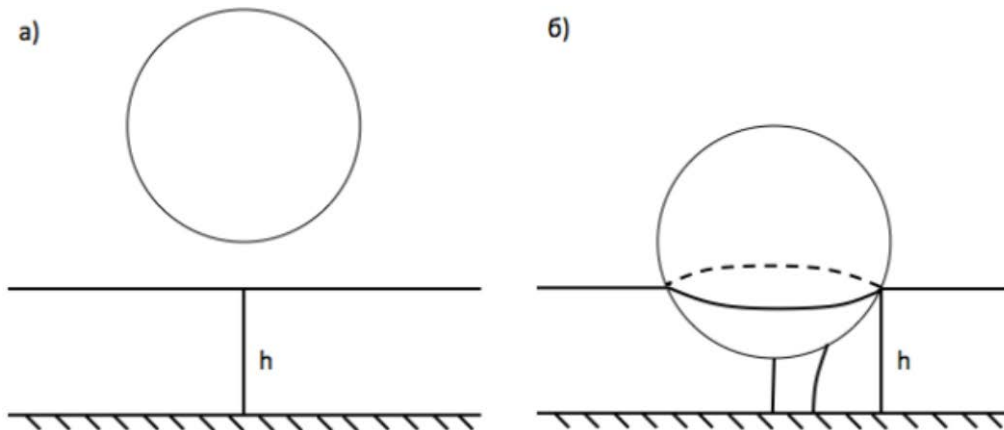


Рис. 2. Варианты расположения мяча

Поле перемещений срединных линий стержней, основания которых принадлежат области  $\sigma$ , представим в виде

$$\mathbf{R}(s, \rho, \varphi, t) = [s + U(s, \rho, \varphi, t)]\mathbf{e}_3 + [\rho + V(s, \rho, \varphi, t)]\mathbf{e}_\rho + \quad (1.1)$$

$$+W(s, \rho, \varphi, t) \mathbf{e}_\varphi, \quad 0 \leq s \leq h$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi$$

Здесь  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – орты системы координат  $OX_1X_2X_3$ , а  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3$  – орты цилиндрической системы координат с началом в центре круга  $\sigma$ .

Пусть  $\mathbf{f} = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\varphi \mathbf{e}_\varphi + f_3 \mathbf{e}_3$  – реакция, действующая со стороны поверхности мяча на конец стержня,  $\chi_1$  и  $\chi_2$  – коэффициенты, характеризующие внутренние диссипативные силы при продольных и поперечных деформациях стержня. Введем дифференциальные операторы

$$D_n^m = \frac{\partial^m}{\partial s^m} + \chi_n \frac{\partial^{m+1}}{\partial s^m \partial t}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad n = 1, 2$$

Уравнения движения стержня получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского в виде

$$\eta \ddot{U} = N D_1^2 U; \quad U(0) = 0, \quad D_1^1 U(h) = N^{-1} f_3 \quad (1.2)$$

$$\eta \ddot{V} + T D_2^4 V = 0; \quad V(0) = V'(0) = 0, \quad D_2^2 V(h) = 0, \quad D_2^3 V(h) = -T^{-1} f_\rho \quad (1.3)$$

$$\eta \ddot{W} + T D_2^4 W = 0; \quad W(0) = W'(0) = 0, \quad D_2^2 W(h) = 0, \quad D_2^3 W(h) = -T^{-1} f_\varphi \quad (1.4)$$

Здесь  $\eta, N$  и  $T$  – линейная плотность материала стержня, его продольная и изгибная жесткости соответственно, точкой обозначено дифференцирование по  $t$ , штрихом – по  $s$ . Заметим, что все функции, входящие в соотношения (1.2) – (1.4) зависят от переменных  $\rho, \varphi, t$ .

Согласно методу разделения движений динамическую задачу о продольно-поперечных колебаниях стержня заменим квазистатической задачей, полагая, что спектр собственных частот колебаний стержня лежит правее характерных частот движения мяча, взаимодействующего с концами стержней. Затухание собственных колебаний стержней происходит за счет внутренних диссипативных сил.

Процесс взаимодействия стержня с поверхностью мяча разбивается на два этапа. На первом этапе конец прямолинейного покоящегося стержня входит в контакт с поверхностью мяча, когда к нему прикладывается ударный импульс (удар считается абсолютно неупругим) и далее в стержне наблюдаются затухающие продольно-изгибные колебания. На втором этапе, когда собственные колебания стержня предполагаются затухшими, происходит скольжение конца стержня по гладкой сферической поверхности мяча. Допустим, что время затухания собственных колебаний в стержне после момента его удара о поверхность мяча мало по сравнению со временем, в течение которого стержень находится в контакте с поверхностью мяча. В дальнейшем будем считать, что в момент неупругого удара в системе теряется часть энергии, а процесс скольжения конца стержня по поверхности мяча описывается уравнениями квазистатики, когда в уравнениях (1.2) – (1.4) полагают  $\eta = \chi_1 = \chi_2 = 0$  ( $D_n^m = \partial^m / \partial s^m$ ). Неупругие удары при качении абсолютно твердого диска со «стержневыми ногами» рассматривались ранее [8].

Рассмотрим абсолютно неупругий удар стержня о поверхность мяча, который можно трактовать как наложение двусторонней связи на конце стержня. Удары концов стержней имеют место на части границы области контакта  $\sigma$ , так как стержни, расположенные внутри области контакта, уже прошли через момент наложения связи, а стержни вне области контакта еще остаются в свободном недеформированном состоянии. Поле скоростей точек мяча на границе области контакта определяется по формуле Эйлера

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \mathbf{e}_i + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}] r, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{n} = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, -\cos \theta_0)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость мяча. Найдем проекцию скорости  $\mathbf{V}$  на внешнюю нормаль к поверхности мяча



$$(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = (\dot{X}_1 \sin \theta_0 \cos \varphi + \dot{X}_2 \sin \theta_0 \sin \varphi - \dot{X}_3 \cos \theta_0) > 0 \quad (1.5)$$

Если условие (1.5) справедливо, то в граничной точке области контакта происходит наложение связей и наблюдаются удары, в противном случае имеет место освобождение от связей без ударных явлений. Поведение стержня на малом интервале времени после момента наложения связи опишем функциями

$$U(s, t + \tau) = -\frac{s\tau}{h}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \cos \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\tau) \Phi_k(s), \quad \Phi_k(s) = \sin \frac{\pi k s}{h}$$

$$V(s, t + \tau) = \frac{(3hs^2 - s^3)\tau}{2h^3}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \sin \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\tau) \Psi_k(s), \quad 0 \leq \tau < \tau_0 \quad (1.6)$$

$$\Psi_k(s) = (\operatorname{sh} \nu_k + \sin \nu_k) \left( \operatorname{ch} \frac{\nu_k s}{h} - \cos \frac{\nu_k s}{h} \right) - (\operatorname{ch} \nu_k + \cos \nu_k) \left( \operatorname{sh} \frac{\nu_k s}{h} - \sin \frac{\nu_k s}{h} \right)$$

Здесь  $\nu_k$  – корень характеристического уравнения  $\operatorname{tg} \nu = \operatorname{th} \nu$ , а функции  $\Phi_k(s)$ ,  $\Psi_k(s)$  удовлетворяют граничным условиям

$$\Phi_k(0) = \Phi_k(h) = 0, \quad \Psi_k(0) = \Psi_k'(0) = \Psi_k(h) = \Psi_k''(h) = 0$$

и образуют ортогональный базис в линейных многообразиях конфигурационных пространств, описывающих продольные и поперечные колебания стержня. Функции  $q_k(\tau)$ ,  $p_k(\tau)$  удовлетворяют уравнениям, полученным проектированием соотношений (1.2), (1.3) на выбранный ортогональный базис, и стремятся к нулю за счет сил внутреннего вязкого трения.

Предположим, что к моменту времени  $\tau_0$  можно пренебречь суммами, стоящими в правых частях равенств (1.6), и найдем кинетическую энергию продольных и поперечных деформаций стержня в процессе контакта с поверхностью мяча

$$E(t, \rho, \varphi) = \frac{\eta}{2} \int_0^h (\dot{U}^2 + \dot{V}^2) ds = \frac{\mu}{r} (\mathbf{V}, \mathbf{n})^2 H((\mathbf{V}, \mathbf{n}));$$

$$\mu = \frac{\eta h r}{840} (99 + 41 \cos^2 \theta_0) \quad (1.7)$$

Здесь  $H(x)$  – функция Хевисайда, равная нулю при  $x < 0$  и единице при  $x \geq 0$ , а точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ .

Вычислим величину средней силы, действующей на стержень в процессе наложения связи, считая ее направленной по нормали к поверхности мяча. Для этого приравняем кинетическую энергию (1.7) работе этой силы на соответствующем перемещении  $f(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \tau_0$ . Получим

$$\mathbf{f} = f \mathbf{n}, \quad f = \frac{\mu}{r \tau_0} (\mathbf{V}, \mathbf{n}) H((\mathbf{V}, \mathbf{n})) \quad (1.8)$$

Обозначим часть границы области контакта, где наблюдаются удары, порождающие силовое поле (1.8), через

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \{ \varphi : H((\mathbf{V}, \mathbf{n})) = 1 \}$$

Углы  $\varphi_1, \varphi_2$  – корни уравнения  $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = 0$ , они зависят от компонент скорости центра мяча и его координаты  $X_3$ . В частности, множество  $[\varphi_1, \varphi_2]$  может оказаться пустым или равным  $[0, 2\pi]$ . В остальных случаях значения граничных точек представляются в виде

$$\varphi_{1,2} = \psi \pm \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arccos \left[ \dot{X}_3 v^{-1} \operatorname{ctg} \theta_0 \right], \quad \left| \dot{X}_3 v^{-1} \operatorname{ctg} \theta_0 \right| < 1, \quad v^2 = \dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 \neq 0 \quad (1.9)$$

Угол  $\psi = \operatorname{arctg} (\dot{X}_2 / \dot{X}_1)$  и задает направление скорости центра масс мяча  $v$  в проекции на плоскость  $OX_1X_2$ . Множество точек, определяемое соотношениями (1.9), может оказаться пустым, когда ни в одной точке границы не накладываются связи в виде возникновения новых точек контакта со стержнями. Исследуемая система переменная по составу, поскольку

в процессе движения появляются новые стержни, взаимодействующие с мячом, и некоторое множество стержней перестает взаимодействовать с мячом. Процесс наложения связей сопровождается ударными явлениями, которые порождают силу, действующую на мяч в тех точках границы области контакта, в которых происходит наложение связей.

Количество стержней, испытывающих ударные воздействия за время  $\tau_0$ , пропорционально приращению площади контакта за счет новых стержней, вступивших в контакт с поверхностью мяча. Вычислим соответствующий интеграл по части границы зоны контакта, в которой наблюдается наложение связей и ударные явления, и найдем результирующую силу, действующую на мяч от ударных импульсов. Приращение элемента площади зоны контакта за время  $\tau_0$  равно  $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \tau_0 r d\varphi$ , а суммарная величина реакции, действующей на мяч, равна

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \tau_0 r d\varphi = -\mu \int_0^{2\pi} (\mathbf{V}, \mathbf{n})^2 H((\mathbf{V}, \mathbf{n})) \mathbf{n} d\varphi \quad (1.10)$$

Заметим, что  $\dot{X}_1 = v \cos \psi$ ,  $\dot{X}_2 = v \sin \psi$ , вычислим интегралы в (1.10) и представим результирующее ударное воздействие на мяч в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_v \mathbf{e}_v + F_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi, \quad \mathbf{e}_\psi = -\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{e}_2 \cos \psi \\ F_v(v, \dot{X}_3, X_3) &= -2\mu \sin \theta_0 [v^2 \sin^2 \theta_0 (\sin \varphi_0 - (1/3) \sin^3 \varphi_0) + \dot{X}_3^2 \cos^2 \theta_0 \sin \varphi_0 - \\ &\quad - v \dot{X}_3 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0)] H(v - \dot{X}_3 \operatorname{ctg} \theta_0) \\ F_3(v, \dot{X}_3, X_3) &= \mu \cos \theta_0 [v^2 \sin^2 \theta_0 (\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) + 2\dot{X}_3^2 \varphi_0 \cos^2 \theta_0 - \\ &\quad - 4v \dot{X}_3 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0] H(v - \dot{X}_3 \operatorname{ctg} \theta_0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученная сила приложена к центру масс мяча и зависит квадратичным образом от его скорости. Одна ее составляющая направлена вдоль оси  $CX_3$ , параллельной оси  $OX_3$ , а вторая направлена противоположно проекции вектора скорости на плоскость  $OX_1X_2$  и является силой сопротивления. Аналогичный характер зависимости силы сопротивления при качении колеса с «ножками» получен ранее [8].

Момент сил (1.8) относительно центра мяча равен нулю, так как они направлены по нормальным к сферической поверхности мяча.

Найдем силу, действующую на мяч со стороны стержней на втором этапе после окончания переходных процессов в стержнях, пренебрегая в уравнениях (1.2) – (1.4) силами инерции и внутренней вязкостью материала стержней, т.е. полагая  $\eta = \chi_1 = \chi_2 = 0$ . В результате получим связь между перемещениями конца стержня и силой, действующей на свободный конец стержня:

$$f_3 = \kappa U(h), \quad f_\rho = \zeta \kappa V(h), \quad f_\varphi = \zeta \kappa W(h), \quad \kappa = N/h, \quad \zeta = 3TN^{-1}h^{-2} \quad (1.12)$$

Заметим, что перемещения конца стержня при  $s = h$  зависят согласно соотношению (1.1) от  $X_3(t)$ ,  $\rho$ ,  $\varphi$ . Силовое поле, представленное соотношениями (1.12), порождается потенциалом

$$\Pi(U, V, W) = \frac{\kappa}{2} (U^2 + \zeta V^2 + \zeta W^2) \quad (1.13)$$

В равенстве (1.13) опущены аргументы  $h, \rho, \varphi, X_3$  у функций  $U, V, W$ . Перемещения концов стержней в зоне контакта подчиняются связи

$$[\mathbf{R}(h, \rho, \varphi, t) - X_3 \mathbf{e}_3]^2 = r^2 \Rightarrow (h + U - X_3)^2 + (\rho + V)^2 + W^2 = r^2 \quad (1.14)$$

Поскольку поверхность мяча предполагается гладкой, то силовое поле направлено по нормали к поверхности мяча, т.е.

$$U = \lambda(h + U - X_3), \quad \zeta V = \lambda(\rho + V), \quad \zeta W = \lambda W \quad (1.15)$$

Здесь  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа в задаче на условный экстремум потенциальной энергии (1.13) при условии (1.14). Из последнего уравнения системы (1.15) следует  $W = 0$ . Множитель Лагранжа удовлетворяет уравнению

$$(X_3 - h)^2 (\zeta - \lambda)^2 + \rho^2 \zeta^2 (1 - \lambda)^2 = r^2 (\zeta - \lambda)^2 (1 - \lambda)^2 \quad (1.16)$$

Если  $\zeta = 1$ , то уравнение (1.16) имеет решение

$$\lambda = 1 - [(X_3 - h)^2 + \rho^2]^{1/2} / r$$

В случае  $\zeta \neq 1$  решим задачу о перемещениях конца стержня приближенно, заменив условие (1.14) на условие

$$(X_3 - h)^2 + \rho^2 - 2(X_3 - h)U + 2\rho V \cong r^2 \quad (1.17)$$

что предполагает малость величин  $U/(X_3 - h)$ ,  $V/\rho$ , и представим соотношения (1.15) в виде

$$U = -\lambda(X_3 - h), \quad \zeta V = \lambda\rho, \quad W = 0 \Rightarrow \lambda \cong \frac{r^2 - \rho^2 - (X_3 - h)^2}{2[(X_3 - h)^2 + \zeta^{-1}\rho^2]} > 0 \quad (1.18)$$

Исходя из полученных значений перемещений (1.18), получим компоненты поля сил реакций связей, действующих на мяч со стороны стержней, считая множество стержней равномерно распределенным по плоскости  $OX_1X_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\kappa \int_{\sigma} [U(h, \rho, X_3)\mathbf{e}_3 + \zeta V(h, \rho, X_3)(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi)] \rho d\rho d\varphi = \\ &= \pi\kappa(X_3 - h) \int_0^{\rho_0} \frac{r^2 - \rho^2 - (X_3 - h)^2}{(X_3 - h)^2 + \zeta^{-1}\rho^2} \rho d\rho \mathbf{e}_3, \quad \rho_0 = r \sin \theta_0 = r \sqrt{1 - (X_3 - h)^2 / r^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Результирующая поля реакций, действующих на мяч со стороны стержней, в случае гладкой поверхности мяча направлена по оси  $OX_3$ . Вычисляя интеграл в правой части соотношения (1.19), найдем

$$\mathbf{Q} \cong Q_3 \mathbf{e}_3 = \pi\kappa r^3 \delta^2 \left(1 + \frac{2\delta}{3\zeta}\right) \mathbf{e}_3, \quad \delta = \frac{X_3 - h}{r} - 1, \quad |\delta| \ll 1 \quad (1.20)$$

Напишем уравнения движения мяча по гладкому стержневому газону в проекциях на оси подвижного трехгранника с ортами  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\psi$ . Используя теорему о движении центра масс мяча и учитывая соотношения (1.9), (1.20), получим

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F_\nu(v, X_3, \dot{X}_3) + p_\nu, & m\nu\dot{\psi} &= p_\psi \\ m\ddot{X}_3 &= p_3 + Q_3(X_3) + F_3(v, \dot{X}_3, X_3) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь  $m$  – масса мяча,  $(p_\nu, p_\psi, p_3)$  – проекции главного вектора внешних активных сил, действующих на мяч. Силы  $F_\nu, F_3$  равны нулю, если не выполнено условие (1.5) при любом  $\varphi$ . Таким образом, ударные реакции могут отсутствовать на некоторых интервалах времени при движении мяча.

При движении мяча по горизонтальной плоскости  $p_\nu = p_\psi = 0$ ,  $p_3 = -mg$  и центр масс мяча движется по прямой, поскольку угол  $\psi$  постоянен. Не нарушая общности, примем эту прямую за ось  $OX_1$ . Выражая переменную  $X_3$  через малую безразмерную переменную  $\delta$ , определенную вторым соотношением (1.20), и пренебрегая малыми высшего порядка, запишем первое и третье уравнения системы (1.21) в виде

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -2\mu\sqrt{-2\delta} \left(-\frac{4}{3}v^2\delta + r^2\dot{\delta}^2 - \frac{\pi}{2}vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}\right) \\ m r \ddot{\delta} &= \mu(-\pi v^2\delta + \pi r^2\dot{\delta}^2 - 4vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}) - mg + \pi\kappa r^3\delta^2, \quad \delta < 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Уравнения (1.22) справедливы, если  $v\sqrt{-2\delta} \gg r\dot{\delta}$ . В этом случае удары происходят на части границы области контакта близкой к полуокружности и угол  $\varphi_0 \cong \pi/2$ . Квадратичные формы, стоящие в скобках в правых частях уравнений (1.22), положительно определены по скоростям  $v\sqrt{-2\delta}$  и  $r\dot{\delta}$ . Ускорение  $\dot{v}$  отрицательно, и величина скорости стремится к нулю согласно первому уравнению (1.22). Заметим, что при больших значениях горизонтальной скорости  $v$  возникает вертикальная сила и мяч «всплывает» относительно своего положения равновесия на газоне при нулевой скорости. По мере уменьшения горизонтальной скорости мяч «продавливает» газон, перемещаясь в отрицательном направлении оси  $OX_3$ .

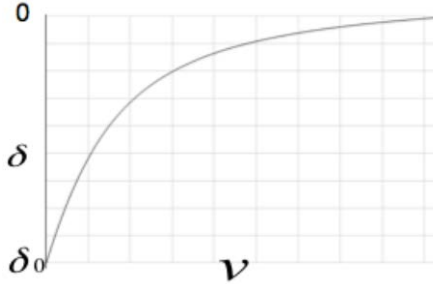


Рис. 3. Эскиз графика зависимости между погружением мяча и горизонтальной скоростью

На рисунке 3 приведен эскиз графика зависимости между величиной  $\delta$ , описывающей положение центра масс мяча по вертикали, и горизонтальной скоростью  $v$ .

Рассмотрим движение центра мяча по вертикали, когда  $v = 0$ . В этом случае  $F_v = 0$ , так как согласно соотношениям (1.11) при  $\dot{X}_3 < 0$  угол  $\varphi_0 = \pi$ , а при  $\dot{X}_3 > 0$  угол  $\varphi_0 = 0$ .

Третье уравнение системы (1.21) с

$$m r \ddot{\delta} = \mu \pi r^2 \dot{\delta}^2 H(-\dot{\delta}) - m g + \pi \kappa r^3 \delta^2, \quad \delta < 0 \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) справедливо при  $\delta < 0$ , когда мяч не отрывается от газона, и описывает затухающие колебания. Рассеяние энергии происходит только в нижней полуплоскости фазовой плоскости при  $\dot{\delta} < 0$ . Устойчивому положению равновесия мяча на газоне соответствует

$$\delta_* = -\sqrt{mg/(\pi \kappa r^3)}.$$

Угловая скорость вращения мяча относительно центра масс не меняется в процессе движения, если момент внешних сил относительно центра масс равен нулю. В случае гладкой поверхности мяча момент поля реакций в точках контакта стержней с поверхностью мяча равен нулю, так как все реакции направлены по радиусам сферы.

Рассмотрим движение мяча по наклонной плоскости, когда

$$p_v = m g_0 \cos \psi, \quad p_\psi = -m g_0 \sin \psi, \quad p_3 = -m g_1$$

где  $g_0, g_1$  – постоянные величины. Система (1.21) принимает вид

$$m \dot{v} = m g_0 \cos \psi - 2\mu \sqrt{-2\delta} \left( -\frac{4}{3} v^2 \delta + r^2 \dot{\delta}^2 - \frac{\pi}{2} v r \dot{\delta} \sqrt{-2\delta} \right), \quad v \dot{\psi} = -g_0 \sin \psi \quad (1.24)$$

$$m r \ddot{\delta} = \mu \left( -\pi v^2 \delta + \pi r^2 \dot{\delta}^2 - 4 v r \dot{\delta} \sqrt{-2\delta} \right) - m g_1 + \pi \kappa r^3 \delta^2, \quad \delta < 0$$

В этом случае второе уравнение (1.24) имеет частные решения  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ . Оставшиеся два уравнения системы (1.21) представляются в виде уравнений (1.22) с добавлением в правой части первого уравнения постоянного члена  $m g_0$  или  $-m g_0$ . Решение  $\psi = \pi$ , соответствующее движению вверх по наклонной плоскости, неустойчиво, поскольку  $([\psi - \pi]^2)^\dot{}$   $> 0$  в возмущенном движении. В случае  $\psi = 0$  центр мяча движется по прямой вниз по наклонной плоскости. Это движение является аттрактором системы, так как в возмущенном движении  $(\psi^2)^\dot{}$   $< 0$ .

Система (1.24) при  $\psi = 0$  имеет стационарные решения, описывающие равномерные движения центра мяча вдоль оси  $OX_1$  и удовлетворяющие уравнениям

$$m g_0 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \mu y^3 v^2, \quad m g_1 = \mu \pi y^2 v^2 + \pi \kappa r^3 y^4 \Rightarrow \quad (1.25)$$

$$G(y) = m g_1, \quad G(y) = \frac{3\sqrt{2} \pi m g_0}{16 y} + \pi \kappa r^3 y^4, \quad y = \sqrt{-\delta} > 0$$

Функция  $G(y)$  положительна при  $y > 0$  и достигает минимума  $G(y_0)$  при

$$y_0 = \sqrt{-\delta_0} = \left( \frac{3\sqrt{2} m g_0}{64 \kappa r^3} \right)^{1/5}, \quad v_0^2 = \frac{3\sqrt{2} m g_0}{16 \mu y_0^3}$$

Если  $m g_1 < G(y_0)$ , то стационарных решений нет, и центр мяча движется с нарастающей скоростью вдоль оси  $OX_1$ . В случае  $m g_1 > G(y_0)$  система (1.25) имеет два стационарных решения  $(v_1, \delta_1)$  и  $(v_2, \delta_2)$ . Если  $\delta_1 > \delta_2$ , то  $v_1 > v_2$ , т.е. при стационарном движении с большей скоростью мяч меньше «продавливает» стержневой газон. В случае  $m g_1 = G(y_0)$  существует одно стационарное движение.

Устойчивость стационарных движений исследуется на основе уравнений в вариациях системы (1.24), имеющих вид

$$m r \dot{\xi}_1 + \frac{16\sqrt{2}}{3} \mu r v y^3 \xi_1 + 4\pi \mu r^2 v y^2 \dot{\xi}_2 + 8\sqrt{2} \mu v^2 y^2 \xi_2 = 0$$

$$m r \ddot{\xi}_2 + 4\sqrt{2} \mu r v y \dot{\xi}_2 + (\pi \mu v^2 + 2\pi \kappa r^3 y^2) \xi_2 + \pi \mu r v y \xi_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$v \dot{\psi} = -g_0 \psi$$

Здесь  $r \xi_1, \xi_2$  – вариации  $v$  и  $y$ , а величины  $v, y$  соответствуют стационарным значениям. Согласно третьему уравнению (1.26) решение  $\psi = 0$  асимптотически устойчиво. Характеристическое уравнение оставшихся двух уравнений (1.26) имеет вид

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 \quad (1.27)$$

$$a_0 = m^2 r^2, \quad a_1 = 4\sqrt{2} m \mu r^2 v y \left( 1 + \frac{4}{3} y^2 \right)$$

$$a_2 = \pi m \mu r v^2 + 2\pi m \kappa r^4 y^2 + 4\mu^2 r^2 v^2 y^3 \left( \frac{32}{3} y - \pi^2 \right), \quad a_3 = \frac{8\sqrt{2} \pi}{3} \mu r v y^3 (4\kappa r^3 y^2 - \mu v^2)$$

Коэффициент  $a_3$  обращается в нуль при  $y = y_0$ , отрицателен при  $y < y_0$  и положителен при  $y > y_0$ . Следовательно, стационарное движение мяча со скоростью  $v_1$  неустойчиво. Уравнение (1.27) в случае стационарного движения  $(v_0, y_0)$  имеет один нулевой корень и два других корня с отрицательной действительной частью согласно критерию Гурвица, поскольку коэффициент

$$a_2 = \frac{\sqrt{2} m g_0}{4 y_0^3} [(32 - \pi^2) \mu r^2 + m r] > 0.$$

Учитывая непрерывную зависимость коэффициентов характеристического уравнения (1.27) от стационарных значений  $(v_2, \delta_2)$ , можно утверждать, что стационарное движение, соответствующее меньшему значению скорости центра мяча  $v_2 < v_0$ , близкому к  $v_0$ , устойчиво.

## 2. Движение шероховатого мяча.

Трение в точках контакта концов стержней с шероховатой поверхностью мяча порождает поле касательных к поверхности мяча сил и, вообще говоря, изменяет поле нормальных сил. В результате поступательное движение мяча и его вращательное движение вокруг центра мяча оказываются взаимосвязанными. Диссипативные силы трения, действующие в точках контакта концов стержней с поверхностью мяча, задаются диссипативным функционалом

$$D[\mathbf{v}_e^2, X_3] = \chi \int_{\sigma} n(X_3, U, V, W, \rho, \varphi) b(\mathbf{v}_e^2) \rho d\rho d\varphi \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_e^2 = \left[ \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Z} + W \mathbf{e}_\varphi) - \dot{V} \mathbf{e}_\rho - \dot{W} \mathbf{e}_\varphi - \dot{U} \mathbf{e}_3 \right]^2, \quad \mathbf{Z} = (r \sin \theta + V) \mathbf{e}_\rho + (-r \cos \theta + U) \mathbf{e}_3.$$

Здесь  $n(X_3, U, V, W, \rho, \varphi)$  – удельная сила нормального давления в точке контакта стержня с мячом,  $\mathbf{v}_e$  – скорость точки на поверхности мяча относительно конца стержня,  $\chi$  – коэффициент трения,  $b(\mathbf{v}_e^2)$  – скалярная функция, характеризующая удельную мощность силы трения в точках контакта концов стержней с поверхностью мяча,  $\sigma$  – проекция зоны контакта на плоскость  $OX_1X_2$ . Главный вектор и момент сил трения относительно центра мяча вычисляются по формулам

$$\mathbf{Q}_f = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D}{\partial \dot{X}_i} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{L}_f = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D}{\partial \omega_i} \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

Приведем ряд примеров функции  $b(\mathbf{v}_e^2)$ , определяющей разные модели сил трения:

$$1) z, \quad 2) \sqrt{z}, \quad 3) \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}g_1 z^2 + \frac{1}{6}g_2 z^3, \quad g_1 > 0, g_2 > 0; \quad z = \mathbf{v}_e^2 \quad (2.3)$$

Первый пример соответствует линейному вязкому трению. Второй пример задает модель сухого трения, а третий – непрерывную аппроксимацию сил сухого трения. Модель сухого трения имеет существенный недостаток, связанный с отсутствием производной функции  $\sqrt{z}$  в нуле, который приводит к появлению зон застоя при нулевых значениях относительной скорости, к потере единственности решений, возникающих дифференциальных уравнений, и к появлению в ряде случаев зависимости движений от предыстории движений. Этих недостатков лишена третья модель, определяющая при ограниченных значениях переменной  $z$  (при ограниченных относительных скоростях) нелинейное вязкое трение аппроксимирующее сухое трение с трением покоя, превосходящим трение скольжения. В ряде случаев используются другие модели для описания полей касательных сил [7 – 9].

Полное выражение диссипативного функционала позволяет написать систему связанных интегро-дифференциальных уравнений. Обобщенные диссипативные силы вычисляются как соответствующие частные производные диссипативного функционала (2.1) по обобщенным скоростям  $\dot{X}_k, \omega_k (k=1,2,3); \dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$ .

В большинстве работ определение контактных взаимодействий между двумя твердыми телами разделяют на две независимые задачи. Поскольку, как правило, нормальные силы в области контакта значительно превосходят касательные силы трения, то нормальные силы и перемещения точек в области контакта определяются в предположении гладкости контактирующих поверхностей, т.е. касательные силы предполагаются отсутствующими, что соответствует задаче рассмотренной в разд. 1. После этого, используя диссипативный функционал (2.1), вычисляют поле сил трения, главный вектор и момент сил трения (2.2). Затем подставляют в выражения силы и момента значения скоростей и перемещений, найденные при решении задачи с гладкими связями.

Заметим, что в результате решения задачи с гладкими связями находятся выражения перемещений концов стержней  $U, V, W$  и их скоростей  $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$  как функции  $\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, X_3$ . В дальнейшем решается задача об определении движения центра масс мяча и его вращательного движения под действием ранее найденных нормальных и касательных сил контактного взаимодействия и приложенных к мячу внешних сил.

Используя значения перемещений конца стержня (1.18), получим нормальное давление в точке контакта

$$n(X_3, \rho) = \kappa(U^2 + \zeta^2 V^2)^{1/2} = \kappa[r^2 - (X_3 - h)^2 - \rho^2] \xi; \quad \xi = \frac{[(X_3 - h)^2 + \zeta^2 \rho^2]^{1/2}}{(X_3 - h)^2 + \zeta^{-1} \rho^2} \quad (2.4)$$

В результате найдем главный вектор и главный момент сил трения относительно центра мяча

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_f &= -2\chi \int_{\sigma} n(X_3, \rho) \frac{\partial b(\mathbf{v}_e^2)}{\partial(\mathbf{v}_e^2)} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v}_e, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \rho d\rho d\varphi \\ \mathbf{L}_f &= -2\chi \int_{\sigma} n(X_3, \rho) \frac{\partial b(\mathbf{v}_e^2)}{\partial(\mathbf{v}_e^2)} [(\mathbf{Z} + W \mathbf{e}_\rho) \times \mathbf{v}_e] \rho d\rho d\varphi\end{aligned}\quad (2.5)$$

Функции  $U(\rho, X_3)$ ,  $V(\rho, X_3)$ ,  $W(\rho, X_3)$  и их производные  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$ ,  $\dot{W}$  вычисляются согласно соотношениям (1.18), в которых переменные  $\rho$ ,  $X_3$  зависят от времени. В результате получим

$$\dot{U}(\rho, X_3) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial U}{\partial X_3} \dot{X}_3, \quad \dot{V}(\rho, X_3) = \frac{\partial V}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial V}{\partial X_3} \dot{X}_3, \quad W = \dot{W} = 0$$

$$\dot{\rho} = -\dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi$$

Оценим величины частных производных в этих соотношениях

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \rho} &= -2\rho(X_3 - h) \frac{\partial \lambda}{\partial(\rho^2)} \approx O\left(\frac{\rho}{r}\right), \\ \frac{\partial U}{\partial X_3} &= -\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial X_3} (X_3 - h) \approx 1 + O\left(\lambda + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \zeta^{-1} \left[ \lambda + 2\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial(\rho^2)} \right] \approx O\left(\lambda + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \ll 1, \quad \frac{\partial V}{\partial X_3} = \zeta^{-1} \rho \frac{\partial \lambda}{\partial X_3} \approx O\left(\frac{\rho}{r}\right) \ll 1$$

Используя оценки (2.6) и отбрасывая малые величины по сравнению с главными членами в соотношениях (2.5), заключаем, что в выражении для  $\mathbf{L}_f$  (2.5) следует положить  $W = 0$ , в выражении (2.4)  $\xi = r^{-1}$ , а

$$\mathbf{v}_e = \dot{X}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{X}_2 \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Z}, \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi \quad (2.7)$$

Уравнения движения мяча получим из теорем об изменении количества движения и момента количества движения

$$m\dot{v} = F_v(v, X_3, \dot{X}_3) + p_v + Q_v, \quad m v \dot{\psi} = p_\psi + Q_\psi, \quad m \ddot{X}_3 = p_3 + Q_3(X_3) + F_3(v, \dot{X}_3, X_3) \quad (2.8)$$

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{L}_f, \quad \mathbf{Q}_f = Q_v \mathbf{e}_v + Q_\psi \mathbf{e}_\psi$$

где  $J$  – момент инерции мяча относительно оси, проходящей через его центр. Силы  $F_v$ ,  $F_3$  определяются формулами (1.11), нормальная сила  $Q_3$  представлена формулой (1.20), а силы трения и их момент вычисляются по формулам (2.5) при учете оценок (2.6), (2.7).

Получим уравнения движение мяча по горизонтальной плоскости в случае линейного вязкого трения, когда  $b(\mathbf{v}_e^2) = \mathbf{v}_e^2$  (первый случай (2.3)) и  $p_v = p_\psi = 0$ ,  $p_3 = -mg$ . Вычисляя интегралы в правых частях соотношений (2.5) и сохраняя главные члены, найдем приближенные выражения для сил и моментов трения

$$\begin{aligned}Q_v &\cong -\pi \chi \kappa \rho_0^4 [v + r(\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi)], \\ Q_\psi &= -\pi \chi \kappa \rho_0^4 r(\omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi), \quad \rho_0^2 = r^2 - (X_3 - h)^2 = r^2(-2\delta - \delta^2) \\ \mathbf{L}_f &\cong -\pi \chi \kappa \rho_0^4 [(r\omega_1 + v \sin \psi) \mathbf{e}_1 + (r\omega_2 - v \cos \psi) \mathbf{e}_2 + (1/3) \rho_0^2 r^{-1} \omega_3 \mathbf{e}_3]\end{aligned}\quad (2.9)$$

При вычислении правых частей в выражениях (2.9) предполагалась малость отношения  $\rho_0 / r$ , что означает малость радиуса пятна контакта мяча с газоном по сравнению с радиусом мяча. В развернутом виде полная система уравнений движения мяча (2.8) при условии  $v \sqrt{-2\delta} \gg r \dot{\delta}$  представляется в форме

$$\begin{aligned}
 m\dot{v} &= -2\mu\sqrt{-2\delta}\left(-\frac{4}{3}v^2\delta + r^2\dot{\delta}^2 - \frac{\pi}{2}vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}\right) - \\
 &\quad - 4\pi\chi\kappa r^4\delta^2[v + r(\omega_1\sin\psi - \omega_2\cos\psi)] \\
 mv\dot{\psi} &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_1\cos\psi + \omega_2\sin\psi) \\
 m r\dot{\delta} &= \mu(-\pi v^2\delta + \pi r^2\dot{\delta}^2 - 4vr\dot{\delta}\sqrt{-2\delta}) - mg + \pi\kappa r^3\delta^2, \quad \delta < 0 \\
 J\dot{\omega}_1 &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_1 + vr^{-1}\sin\psi) \\
 J\dot{\omega}_2 &= -4\pi\chi\kappa r^5\delta^2(\omega_2 - vr^{-1}\cos\psi) \\
 J\dot{\omega}_3 &= \frac{8}{3}\pi\chi\kappa r^5\delta^3\omega_3
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Система (2.10) имеет единственный аттрактор:

$$v_0 = 0, \quad \delta_0^2 = mg / (\pi\kappa r^3), \quad \omega_0 = 0$$

описывающий равновесие мяча в некоторой точке на плоскости  $OX_1X_2$ . Заметим, что в положении равновесия угол  $\psi$  не определяется. Любое движение мяча при начальных условиях, не соответствующих положению равновесия, асимптотически стремится к некоторому положению равновесия. Производная третьей компоненты угловой скорости  $\omega$  оказывается на порядок меньше производных двух других ее компонент. Это означает, что, начиная с некоторого момента времени, центр мяча практически становится неподвижным, а сам мяч продолжает вращаться вокруг оси  $OX_3$ . Угловая скорость вращения мяча  $\omega_3$  не связана с остальными компонентами скорости центра мяча и угловой скорости.

В случае сухого трения или его непрерывной аппроксимации (второй и третий случаи (2.3)) все компоненты скорости центра мяча и его угловой скорости, определяющие относительную скорость  $v_e$  в соотношениях (2.1), будут присутствовать в правых частях уравнений движения.

### 3. Влияние вязкости стержней на сопротивление при движении мяча.

Учет внутренней вязкости при деформациях стержней, составляющих газон, приводит к изменению формы деформируемых стержней и формы пятна контакта, что в свою очередь изменяет величину главного вектора сил взаимодействия стержней с поверхностью мяча. Будем считать, что вязкие силы малы по сравнению с упругими силами. Дадим приближенное решение задачи определения главного вектора сил. Исходную форму деформированных стержней найдем согласно соотношениям (1.18), считая поверхность мяча гладкой

$$U = -\lambda r(1 + \delta), \quad \zeta V = \lambda \rho, \quad W = 0, \quad \lambda \cong -\frac{\rho^2 + 2r^2\delta}{2r^2}$$

При движении мяча параметры  $\delta, \rho$  зависят от времени. Найдем производные по времени компонент вектора перемещений концов стержней для дальнейшего их использования при вычислении функционала внутренних диссипативных сил

$$D[\dot{U}(s, \delta, \rho), \dot{V}(s, \delta, \rho)] = \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^h [\chi_1 N \dot{U}'^2 + \chi_2 T V \dot{V}'^2] ds \rho d\rho d\varphi, \quad \sigma = \{\rho < \rho_0, \varphi \bmod 2\pi\} \tag{3.1}$$

Здесь  $\chi_1, \chi_2$  – коэффициенты вязкости при продольных и поперечных деформациях стержня (модель Кельвина-Фойхта),  $\rho_0$  – радиус невозмущенного пятна контакта, полученного при решении квазистатической задачи о взаимодействии стержней с гладкой поверхностью мяча ( $\rho_0 = r\sqrt{-2\delta - \delta^2} \cong r\sqrt{-2\delta}$ ). Далее найдем

$$\dot{\rho} = -v\cos(\varphi - \psi), \quad \rho\dot{\varphi} = v\sin(\psi - \varphi), \quad \dot{\lambda} \cong \rho v r^{-1} \cos(\varphi - \psi) - \dot{\delta}, \quad \lambda \cong -\delta - \frac{\rho^2}{2r^2} \tag{3.2}$$

В формулах (3.2) отброшены члены более высокого порядка малости по сравнению с  $\delta$  и  $\rho^2/r^2$ . В результате найдем



$$\begin{aligned} \dot{U} &\cong \frac{s}{h} [r\dot{\delta} - \rho v r^{-1} \cos(\varphi - \psi)], \\ \dot{V} &\cong -\frac{s^2(3h-s)}{2\zeta h^3} \left\{ \rho\dot{\delta} - v[\cos(\varphi - \psi) - \sin(\varphi - \psi)] \left( \delta + \frac{\rho^2}{2r^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя соотношения (3.3) в (3.1), найдем

$$D(\dot{\delta}, v, \delta) = \chi_1 N \frac{\pi r^2 \delta}{h} (r^2 \dot{\delta}^2 - \delta \frac{v^2}{2}) - \chi_2 \frac{3\pi \Gamma r^2}{\zeta^2 h^3} \delta^2 (\dot{\delta}^2 - v^2 \delta/3), \quad \delta < 0 \quad (3.4)$$

Отметим, что диссипативная функция (3.2) представлена положительно определенной квадратичной формой переменных  $\dot{\delta}$  и  $v\sqrt{-\delta}$ . Силы сопротивления, порождаемые диссипативной функцией (3.2), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_{v1} &= -\frac{\partial D}{\partial v} = -\chi_1 N \frac{\pi r^2 \delta^2}{h} v + 2\chi_2 \Gamma \frac{\pi r^2 \delta^3}{\zeta^2 h^3} v \\ F_{\delta 1} &= -\frac{\partial D}{r\partial \delta} = \chi_1 N \frac{\pi r^4 \delta}{h} \dot{\delta} - 6\chi_2 \Gamma \frac{\pi r^2 \delta^2}{\zeta^2 h^3} \dot{\delta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Силы сопротивления (3.5) характеризуются как нелинейные вязкие силы. Их следует добавить в правые части уравнений движения.

Таким образом, уравнения движения мяча с учетом ударных сил, возникающих при вовлечении стержней в механическую систему, сил вязкого трения между концами стержней и сил внутренней вязкости при деформации стержней имеют вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -2\mu\sqrt{-2\delta} \left( -\frac{4}{3} v^2 \delta + r^2 \dot{\delta}^2 - \frac{\pi}{2} v r \dot{\delta} \sqrt{-2\delta} \right) - \\ &- 4\pi\chi\kappa r^4 \delta^2 [v + r(\omega_1 \sin \psi - \omega_2 \cos \psi)] - \chi_1 N \frac{\pi r^2 \delta^2}{h} v + 2\chi_2 \Gamma \frac{\pi r^2 \delta^3}{\zeta^2 h^3} v \\ m v \dot{\psi} &= -4\pi\chi\kappa r^5 \delta^2 (\omega_1 \cos \psi + \omega_2 \sin \psi) \\ m r \ddot{\delta} &= \mu(-\pi v^2 \delta + \pi r^2 \dot{\delta}^2 - 4v r \dot{\delta} \sqrt{-2\delta}) - mg + \pi\kappa r^3 \delta^2 - \\ &- \chi_1 N \frac{\pi r^4 \delta}{h} \dot{\delta} + 6\chi_2 \Gamma \frac{\pi r^2 \delta^2}{\zeta^2 h^3} \dot{\delta}, \quad \delta < 0 \\ J\dot{\omega}_1 &= -4\pi\chi\kappa r^5 \delta^2 (\omega_1 + v r^{-1} \sin \psi) \\ J\dot{\omega}_2 &= -4\pi\chi\kappa r^5 \delta^2 (\omega_2 - v r^{-1} \cos \psi) \\ J\dot{\omega}_3 &= \frac{8}{3} \pi\chi\kappa r^5 \delta^3 \omega_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учет сил внутренней вязкости при деформациях стержней приводит к тому, что пятно контакта меняется в процессе движения. В разделах 1. и 2. всюду предполагается, что зона контакта является симметричным шаровым сегментом и проецируется на опорную плоскость как круг. Так как силы сопротивления (3.5) малы по сравнению с упругими, возмущенное пятно контакта будет отличаться от исходного не более, чем на малую величину по сравнению с характерными размерами зоны контакта.

Точную зависимость формы зоны контакта от остальных параметров системы можно найти, разрешив уравнения (3.3) относительно переменных  $U$  и  $V$ . Такие вычисления можно проделать, к примеру, численно.

#### Заключение.

В работе построена модель механической системы, состоящей из массивного твердого мяча неизменной шаровой формы и газона, описываемого как множество вязкоупругих стержней, нижними концами жестко прикрепленными к опорной плоскости. В сущности, рассмотрена система переменного состава, так как в процессе движения мяча происходит как вовлечение стержней во взаимодействие с мячом, так и их выход из зоны контакта.

Описаны причины возникновения сил реакции: удары при соприкосновении мяча со стержнями, трение свободных концов стержней о поверхность мяча на протяжении контакта, внутренняя вязкость при деформации стержней. Перечисленные силы вычислены (в качестве модели трения было использовано вязкое трение, пропорциональное скорости движения мяча), описан характер их зависимости от переменных задачи.

Исследована диссипация энергии при ударах стержней о поверхность мяча и найдена результирующая сила сопротивления, возникающая вследствие ударных воздействий. Показано, что эта сила имеет квадратичный характер зависимости от скорости мяча.

Показан нелинейный характер результирующей силы вязкого трения между свободными концами стержней и поверхностью мяча, даны указания относительно общего вида результирующей силы в случае моделей трения, отличных от вязкого.

Получены силы внутренней вязкости при деформациях стержней в предположении об их малости по сравнению с упругими силами, определен их нелинейный характер.

С учетом полученных сил были сформулированы уравнения движения, проведен их качественный анализ. Подробно исследованы частные режимы движения гладкого мяча: вертикальные колебания мяча на газоне, движение мяча по наклонной плоскости в отсутствие внешних сил и моментов. Выявлен характер взаимосвязи между погружением мяча в газон и его горизонтальной скоростью. Для случая движения мяча по наклонной плоскости найдены условия существования стационарных движений, показана их устойчивость или неустойчивость.

Для случая шероховатой поверхности мяча найдено положение равновесия и показано, что оно является единственным аттрактором системы. Дано качественное описание характера движения мяча под воздействием сил вязкого трения между свободными концами стержней и поверхностью мяча.

Полученные результаты были опубликованы в журнале «Прикладная математика и механика» 2011 №5, а также были изложены на конференции «Ломоносовские чтения» в 2011 году, Седьмом международном симпозиуме по классической и небесной механике (ССМЕСН 7). Работа вошла в сборник статей по итогам симпозиума ССМЕСН 7.

### Литература

1. Hertz H. Über die berührung fester elastischer. In: *Miscellaneous Papers*. Jones and Schott, Editors, *J. reine und angewandte Mathematik* 92, Macmillan, London (1896), p. 156.
2. Flom D.G., Bueche A.M. Theory of rolling friction for spheres // *J. Appl. Phys.* 1959. V.30, N 11. P. 1725–1730.
3. Penner A.R. Physics of putting // *Can. J. Phys.* V.80. N 2. P. 83–96.
4. Ишлинский А.Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 623 с.
5. Contensou P. Couplage entre le frottement de glissement et de frottement de pivotement dans la théorie de la toupie//*Kreiselprobleme Girodynamics: IUTAM Symp. Celerina*, 1962. Berlin etc.: Springer, 1963. P. 201–216. = Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка//*Проблемы гироскопии*. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
6. Журавлев В.Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // *Изв. РАН. МТТ*. 2006. №6. С. 3–9.
7. Карапетян А.В. Двухпараметрическая модель трения // *ПММ*. 2009. Т.73. Вып. 4. С. 515–519.
8. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
9. Poschel T., Brilliantov N.V., Zaikin A. Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // *Europhys. Lett.*, 69 (3), pp. 371–377 (2005).
10. Poschel T., Schwager T., Brilliantov N.V., Zaikin A. Rolling friction and bistability of rolling motion // *Powders and Grains 2005: Proc. of the 5th Internat.*, pp. 505-509.
11. Poschel T., Schwager T., Brilliantov N.V. Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane // *Eur. Phys. J. B* 10, 169{174 (1999).

12. Penner A. R. The run of a golf ball // Can. J. Phys. Vol. 80, 2002, pp. 931–940.
13. Kireenkov A.A. About the motion of the symmetric rigid solid alone the plane // 8th CONFERENCE on Dynamical Systems: Theory and Applications. December 12–15, 2005. Lodz, Poland. Proceedings. V.1. pp. 95–102.
14. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht: Kluwer, 1990. 314 p.
15. Pacejka H.B. Tyre and Vehicle Dynamics. L.UK: Elsevier, 2005. 621 p.
16. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MDSLS

*Т.А. Езангина, С.А. Гайворонский*

*Национальный исследовательский Томский Политехнический Университет*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию актуальной проблемы – определение настроек линейных регуляторов, обеспечивающих максимальную степень устойчивости систем с интервальными параметрами при ограничениях на их колебательность и добротность. Дано описание разработанного программного продукта для синтеза интервальных систем автоматического управления максимальной степени устойчивости с применением коэффициентного метода.

### **Введение.**

Практически все реальные системы автоматического управления (САУ) содержат интервально-неопределенные параметры. Их интервальность обусловлена неточным знанием параметров или их изменением в процессе эксплуатации систем в заданных диапазонах по заранее неизвестным законам. Системы с подобными параметрами получили название интервальных систем (ИС) [1].

Одним из важных направлений современной теории автоматического управления является разработка методов анализа робастной устойчивости и робастного качества ИС. Под робастной устойчивостью понимают сохранение системой устойчивости при любых возможных значениях ее интервальных параметров. Анализ робастного качества ИС предусматривает определение наихудших показателей качества системы при изменении интервальных параметров в заданных диапазонах.

Для ИС актуальна задача параметрического синтеза широко используемых в инженерной практике линейных регуляторов: пропорционального (П), пропорционально-интегрального (ПИ), пропорционально-дифференциального (ПД) или пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регуляторов. Ее решением является нахождение таких настроек регуляторов, которые обеспечивают гарантированные показатели качества ИС.

К настоящему времени разработано большое число методов синтеза линейных САУ, позволяющих осуществлять обоснованный выбор структуры и параметров регулятора для обеспечения в системе заранее заданных требований к ее качеству. Показатели качества можно разбить на четыре группы: частотные, временные, корневые и коэффициентные. Последние определяются набором коэффициентов передаточной функции системы.

Анализ методов синтеза САУ показывает, что для выбора настроек регулятора желательно иметь простые аналитические или графические зависимости, позволяющие легко перейти от показателей качества САУ к искомому параметрам регулятора. За исключением простых случаев (для систем первого и второго порядков) такие зависимости сложно получить при использовании частотных или временных показателей качества. Значительно проще задача параметрического синтеза регулятора решается на основе корневого подхода или при использовании коэффициентных методов. Коэффициентные методы позволяют получить пусть и приближенные в некотором смысле, но простые соотношения, позволяющие связать (обычно некоторыми неравенствами) показатели качества САУ произвольного порядка и искомые параметры регулятора [2].

Одним из широко используемых при проектировании САУ критериев является максимальная степень устойчивости системы. Известно, что системы, синтезированные по этому критерию, при прочих равных условиях, обладают более высоким быстродействием, меньшим перерегулированием и большим запасом устойчивости.

Синтезу линейных регуляторов, обеспечивающих максимальную степень устойчивости в стационарных САУ, посвящены работы [3–8]. В большинстве из них применяется подход,

предложенный в [4, 6], где используются полиномы, как правило, нормированные по определенному параметру. Для решения задачи обеспечения максимальной степени устойчивости представляет интерес также применение метода нелинейного программирования [7, 8]. Однако получаемые в [7, 8] системы уравнений позволяют аналитически находить максимальную степень устойчивости и обеспечивающие ее параметры регулятора только для систем низкого порядка, а для сложных САУ приходится применять численные методы синтеза.

Наряду с теоретическими исследованиями большое внимание при проектировании ИС уделяется разработке пакетов прикладных программ, дающих проектировщику эффективный инструмент для решения указанных выше задач. Важным с практической точки зрения является доведение разрабатываемых алгоритмов анализа и синтеза до программной реализации на ЭВМ, позволяющей проектировщику быстро и эффективно исследовать ИС.

В настоящее время существуют специализированные комплексы программ, позволяющие проводить на персональных компьютерах исследования реальных систем управления и автоматических устройств с использованием их моделей. При этом широкое распространение получил пакет MatLab, способный выполнять как численные, так и аналитические операции, и являющийся интерактивной системой для инженерных и научных расчетов. Однако существует и другие языки программирования, позволяющие создавать программные продукты для проектирования и анализа систем управления (например, языки C++, Delphi и т.д.).

Представляет интерес разработка на основе коэффициентного метода отдельного модуля для синтеза ИС максимальной степени устойчивости на языке программирования высокого уровня C++. Такой программный продукт получил название «Максимизация степени устойчивости линейной системы» (MDSLS).

Целью данной работы является разработка программного продукта для синтеза интервальных систем автоматического управления максимальной степени устойчивости с применением коэффициентного метода. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- формирование набора вершинных характеристических полиномов, позволяющих проводить анализ максимальной робастной степени устойчивости ИС с интервальной неопределенностью;
- формирование выражений для расчета параметров регулятора через показатели качества (степени устойчивости и колебательности) и точности САУ;
- разработка методик интервально-параметрического синтеза П-, ПИ-, ПД-, ПИД-регуляторов для ИС с интервальной неопределенностью на основе корневых показателей качества;
- разработка методики интервально-параметрического синтеза ПИ-, ПИД-регуляторов, обеспечивающего апериодический вид переходного процесса в ИС с интервальной неопределенностью на основе корневых показателей качества.

При решении поставленных задач применялись разделы интервальной математики, теория автоматического управления, теория устойчивости и робастное расширение метода оценок показателей качества системы. Для экспериментальных исследований синтезируемых систем использовался язык программирования C++, среда Matlab и Matchad.

На основе составленного алгоритма разработан программный продукт MDSLS (создан в программном пакете Borland C++).

Интерфейс модуля предполагает выбор типа регулятора и заданных ограничений (требуемой добротности САУ и допустимого показателя колебательности), а также возможность задавать значения коэффициентов объекта управления.

На рисунке 1 приведено главное окно ПП MDSLS.

При этом ширина поля (задать коэффициенты В) варьируется в зависимости от количества переменных полинома В.

Приведем ниже назначение, входные и выходные параметры функций ПП MDSLS.

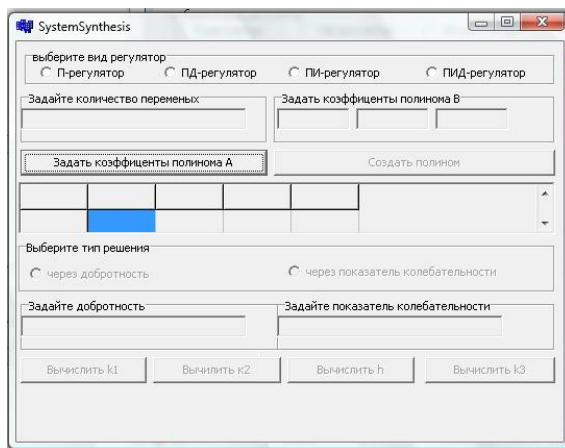


Рис. 1. Главное окно ПП MDSLS

Функция `double functionobject(double *d1, double *d2)` формирует интервальный характеристический полином  $D(s)$ . Функция `double functionkd (double k0)` возвращает вычисленное значение параметра  $k_0$  при ограничении на добротность. Функция `double functionq (double *q)` формирует массив значений, состоящий из показателей колебательности. Функция `double functionkq (double k1)` вычисляет значение параметра  $k_1$  при заданном ограничении на показатель колебательности. Функция `double functionalpha (double *al)` необходима для получения уравнения  $\lambda_i = 0.465$ . Функция `double functionh (double h)` возвращает значение максимальной робастной степени устойчивости. Функция `double functionaf (double *f)` формирует дополнительные функции  $f(\eta)$  для системы неравенств (9). Функция `double functionk0h (double k1h)` находит значение параметра  $k_0$  при известном значении максимальной степени устойчивости. Функция `double functionk1h (double k1)` вычисляет значение параметра  $k_1$  при известном значении максимальной степени устойчивости.

Большинство программных продуктов создано для вычисления степени устойчивости при фиксированных параметрах. По сравнению с аналогами программный продукт MDSLS позволяет вычислять максимальную степень устойчивости для ИС. Производства, где необходима стабилизация важных параметров технологического процесса, например, в теплоэнергетической и нефтегазовой отрасли, а также при управлении сложными робототехническими комплексами.

### 1. Постановка задачи.

Пусть САУ включает интервальный объект управления  $W_{oy}$  и регулятор  $W_p$ . Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_{OY}(s) = \frac{b}{A(s)}, \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

где  $\underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i$  ( $\underline{a}_i$  – нижний предел,  $\overline{a}_i$  – верхний предел) – коэффициенты полинома  $A(s)$ ;  $b$  – коэффициент передачи объекта управления,  $s$  – оператор Лапласа. Передаточная функция регулятора имеет вид  $W_p(s, \bar{k}) = f(s, \bar{k})$ , где  $\bar{k}$  – вектор настраиваемых параметров регулятора. Тогда характеристический полином САУ может быть представлен в виде

$$D(s, \bar{k}) = \sum_{i=0}^m d_i(\bar{k}) s^i \tag{1.1}$$

Область возможных значений интервальных параметров системы (многогранник  $P_n$ , являющийся прямоугольным гиперпараллелепипедом) отображается на комплексную плоскость корней в виде областей их локализации и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рис. 2). Необходимо выбрать такие значения параметров вектора  $\bar{k}$ , которые на основе достаточных условий коэффициентного метода [2] обеспечивают макси-

мизацию степени устойчивости  $\eta_{\max}^*$  САУ при заданной добротности  $D$  системы по скорости и расположении корней полинома (1) в заданном секторе  $\pm\varphi$ .

Корни полинома при этом должны лежать левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $(-\eta_{\max}^*, j0)$ , как показано на рисунке 2.

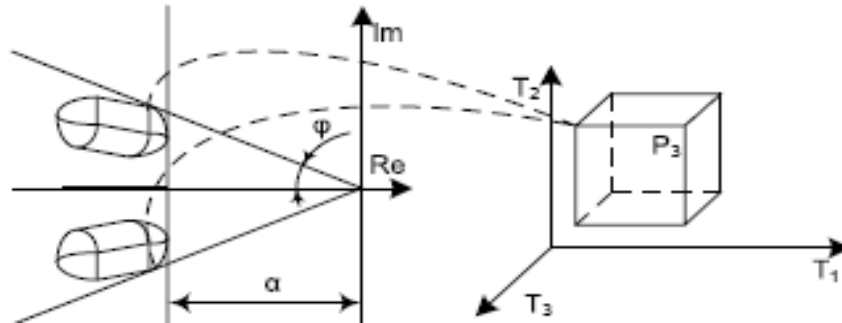


Рис. 2. Отображение параметрического многогранника САУ

## 2. Условия обеспечения показателей качества и точности интервальной системы.

Для определения точности системы в установившемся режиме необходимо воспользоваться выражением установившейся ошибки САУ [1]

$$\varepsilon_{uw}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{dA(s)}{s(sA(s) + k_p b)} = \frac{d}{k_p},$$

где  $k_p$  – передаточный коэффициент разомкнутой системы, являющийся добротность по скорости  $D$ . Тогда для заданной передаточной функции объекта управления  $W_{Oy}(s)$  и функции регулятора  $W_P(s)$  величина добротности по скорости будет определяться выражением

$$D = \frac{k_0 b}{d_0} \quad (2.1)$$

Введём в рассмотрение основные коэффициентные показатели качества и на их основе найдем выражения для определения максимальной степени устойчивости и соответствующих ей параметров регулятора. Склонность системы к колебаниям проявляется при наличии в решении ее характеристического уравнения комплексных корней вида  $-\alpha + j\beta$ . Если имеются корни характеристического уравнения, то легко определить связанный с колебательностью системы угловой сектор  $\pm\varphi$ , в пределах которого расположены все его корни. Однако эту характеристику системы желательно получить непосредственно по коэффициентам характеристического полинома. Согласно [2], для анализа колебательности стационарной системы на основе коэффициентного метода используют параметры:

$$\delta_t = \frac{d_t^2}{(d_{t-1} d_{t+1})} \quad t = \overline{1, n-1}$$

Эти параметры являются безразмерными и называются показателями колебательности [2]. В [2] на основе  $\delta_t$  приведено достаточное условие заданной колебательности: для расположения корней характеристического полинома САУ в заданном секторе  $\pm\varphi$  достаточно выполнения условий:

$$\delta_t \geq \delta_d(n, \varphi), \quad \forall t = \overline{1, n-1},$$

где  $\delta_d$  – допустимый показатель колебательности, определяемый из таблицы 1.

Табл. 1. Зависимость  $\delta_d$  от порядка системы и размера сектора.

$\varphi^\circ \backslash n$	65°	70°	75°	80°	85°	90°
3	1.846	1.684	1.518	1.348	1.175	1
4		1.75	1.696	1.609	1.515	$\sqrt{2}$
5					1.52	1.465

На основе данного условия доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для того чтобы корни интервального полинома (1.1) лежали в заданном угловом секторе, необходимо выполнение условий

$$\delta_i = \frac{d_i^2}{d_{i-1} d_{i+1}} > \delta_d, i = \overline{1, n-1} \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $d_i^2 = m$ , а  $l = d_{i-1} d_{i+1}$ . Согласно [2] для оценки колебательности системы с переменными параметрами желательно определить ее наихудшее качество в наихудшем режиме. В данном случае система обладает наихудшим качеством, если

$$\delta_i \rightarrow \min \quad (2.3)$$

Для выполнения условия (2.3), необходимо, чтобы

$$m \rightarrow \min, l \rightarrow \max \quad (2.4)$$

Очевидно, что (2.4) достигается при выборе следующих пределов:  $m = \underline{d}_i$ , а коэффициента  $l = \overline{d_{i-1} d_{i+1}}$ . Если условия (2.3) выполняется для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов.

Введем вспомогательные параметры  $\lambda_i$ , образуемые четверками рядом стоящих коэффициентов характеристического полинома

$$\lambda_i = \frac{d_{i-1} d_{i+2}}{(d_i d_{i+1})} \quad i = \overline{1, n-2} .$$

Параметры  $\lambda_i$  называют показателями устойчивости [2]. На основе  $\lambda_i$  в [2] разработано достаточное условие устойчивости стационарной системы: для устойчивости системы с заданным характеристическим полиномом достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\lambda_i < \lambda^* \approx 0.465 \quad \forall i = \overline{1, n-2} .$$

На основе этого условия доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Чтобы все корни интервального полинома (1.1) ИС лежали левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $(-\eta, j0)$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ , достаточно выполнения условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{\overline{d_{i-1} d_{i+2}}}{\left( \underline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta \right) \left( \overline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta \right)} < 0.465 \quad i = \overline{1, n-2} \\ \underline{d_k} \geq \overline{d_{k+1}}(n-k-1)\eta, k = \overline{1, n-1} \\ \underline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\underline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$



**Доказательство.** Согласно [2] для оценки степени устойчивости ИС с интервальными параметрами желательнее определить ее наихудшее качество, а именно максимальные значения ее показателей устойчивости, то есть

$$\lambda_i \rightarrow \max \quad (2.6)$$

Введем обозначения:

$$d_{i-1} d_{i+2} = m, \\ (d_i - d_{i+1}(n-i-1)\eta)(d_{i+1} - d_{i+2}(n-i-2)\eta) = l.$$

Очевидно, что условие (2.6) выполняется при

$$m \rightarrow \max, \text{ и } l \rightarrow \min. \quad (2.7)$$

На основе интервального анализа условия (2.7) выполняются при  $m = \overline{d_{i-1}} \overline{d_{i+2}}$  и  $l = \left( \underline{d_i} - \underline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta \right) \left( \underline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta \right)$ . Обозначение  $\overline{d_{i+1}}$  означает, что коэффициент  $d_{i+1}$  следует принимать как максимальным, так и минимальным. Если условия (2.6) выполняются для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов.

Данное утверждение позволяет оценить робастную степень устойчивости ИС. Для его применения к интервальным САУ с целью определения максимальной робастной степени устойчивости доказано следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Для определения максимальной робастной степени устойчивости ИС необходимо для всех вариантов сочетаний интервальных коэффициентов выбором параметров регулятора обеспечить максимальное значение  $\eta_{\max}$  в (n-2) системах

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{\overline{d_{i-1}} \overline{d_{i+2}}}{\left( \underline{d_i} - \underline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta \right) \left( \underline{d_{i+1}} - \underline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta \right)} = 0.465, i = \overline{1, n-2} \\ \lambda_j < 0.465, j = \overline{1, n-2}, j \neq i \\ \underline{d_k} \geq \overline{d_{k+1}}(n-k-1)\eta, k = \overline{1, n-1} \\ \underline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\underline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

**Доказательство.** Увеличивать значение  $\eta$  в системе (2.8), меняя параметры регулятора, можно до тех пор, пока  $\lambda_i < 0.465 \forall i = \overline{1, n-2}$ . При  $\lambda_i = 0.465$  получаем максимальное значение показателя устойчивости  $\lambda_i$ , соответствующее наибольшей степени устойчивости системы. При этом интервалы коэффициентов полинома выбираются в соответствии с утверждением 2.

Получим далее основные соотношения для синтеза настроек конкретных типов регуляторов для объекта управления 3-го порядка, имеющего передаточную функцию:

$$W_{OY}(s) = \frac{b}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \text{ где } a_i \square a_i \square a_i.$$

При выводе этих соотношений примем, что задан допустимый показатель колебательности  $\delta_\sigma = 1.6$  (соответствует желаемому расположению корней характеристического уравнения в секторе  $\varphi = 68^\circ$ ) и добротность системы по скорости  $D = 10$ .

### 3. Основные соотношения для синтеза регуляторов.

#### 3.1. Основные соотношения для синтеза П-регулятора.

П-регулятор реализует самый простой из алгоритмов управления. Он формирует управляющий сигнал, пропорциональный входному, с коэффициентом пропорциональности  $k_0$ . Передаточная функция П-регулятора  $Wp(s) = k_0$ .

Решим задачу определения параметра регулятора  $k_0$ , обеспечивающего максимальную степень устойчивости САУ и расположение корней характеристического полинома замкнутой системы в заданном секторе.

Из первого условия системы (2.8) выразим параметр регулятора  $k_0$  через интервальные коэффициенты

$$k_0 = \frac{0.465(\overline{a_1} - \overline{a_2}\eta)\overline{a_2} - \overline{a_0} \overline{a_3}}{b\overline{a_3}} \quad (3.1)$$

Подставим выражение (3.1) и выражение для показателя колебательности  $\delta_i$  (2.2) в неравенства системы (2.8), получим следующую систему

$$\begin{cases} \overline{d_1} \geq \overline{d_2}\eta; \\ \overline{d_2} \geq 0 \\ \overline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\overline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \\ \frac{\overline{d_1}^2}{\overline{d_0} \overline{d_2}} - 1.6 > 0; \\ \frac{\overline{d_2}^2}{\overline{d_1} \overline{d_3}} - 1.6 > 0 \end{cases}$$

Решение данной системы позволяет определить максимальную степень устойчивости ИС при ограничении на ее степень колебательности.

### 3.2. Основные соотношения для синтеза ПД-регулятора.

Если добавить дифференцирующую составляющую к сигналу пропорционального регулятора, то получим ПД-регулятор с передаточной функцией  $Wp(s) = k_0 + k_1s$ . В данном случае за счет наличия двух настраиваемых параметров, возможно, решить две задачи:

- Определение параметров регулятора  $k_0$  и  $k_1$ , обеспечивающих максимальную степень устойчивости ИС и расположение полюсов ее передаточной функции в заданном секторе.
- Определение параметра регулятора  $k_0$  и  $k_1$ , обеспечивающие максимальную степень устойчивости и заданную добротность  $D$  системы управления.

Перейдем к рассмотрению первой задачи. Согласно (2.2) запишем достаточное условие заданной степени колебательности  $\delta_2 = \frac{\overline{d_2}^2}{\overline{d_1} \overline{d_3}} > 1.6$  и определим из него параметр регулятора  $k_1$

$$k_1 = \frac{\overline{a_2}^2 - 1.6\overline{a_1} \overline{a_3}}{1.6b\overline{a_3}} \quad (3.2)$$

Далее получим выражение для параметра  $k_0$  из выражения предельного показателя

$$\begin{aligned} \text{степени устойчивости } \lambda_1 &= \frac{\overline{d_0} \overline{d_3}}{\left(\overline{d_1} - \overline{d_2}\eta\right)\left(\overline{d_2}\right)} = 0.465 \\ k_0 &= \frac{(0.465((\overline{a_1} + k_1) - \overline{a_2}\eta)(\overline{a_2}) - \overline{a_0} \overline{a_3})}{b\overline{a_3}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сформируем систему неравенств на основании выражений (3.2) – (3.3), достаточного условия заданной степени колебательности (2.2) и условий (2.8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{d}_1 \geq \underline{d}_2 \eta; \\ \underline{d}_2 \geq 0 \\ \underline{d}_0 - \underline{d}_1 \eta + 2\underline{d}_2 \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \\ \frac{\underline{d}_1^2}{\underline{d}_0 \underline{d}_2} - 1.6 > 0; \\ \frac{\underline{d}_2^2}{\underline{d}_1 \underline{d}_3} - 1.6 > 0 \end{array} \right.$$

Из данной системы можно найти максимальную степень устойчивости САУ при заданном ограничении на ее степень колебательности. Запишем основные соотношения для решения второй задачи. Согласно (2.1) определим параметр регулятора  $k_0$

$$k_0 = \frac{D \overline{a_0}}{b} \quad (3.4)$$

Определим параметр  $k_1$  из выражения предельного показателя устойчивости  $\lambda_1$

$$k_1 = \frac{(\overline{a_0} + k_0 b) \overline{a_3} - 0.465(\overline{a_1} - \overline{a_2} \eta) \overline{a_2}}{0.465 b \overline{a_2}} \quad (3.5)$$

Решение второй задачи найдем из системы неравенств (2.8), сформированной на основании выражений (3.4) – (3.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{d}_1 \geq \underline{d}_2 \eta; \\ \underline{d}_2 \geq 0 \\ \underline{d}_0 - \underline{d}_1 \eta + 2\underline{d}_2 \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \end{array} \right.$$

### 3.3. Основные соотношения для синтеза ПИ-регулятора.

ПИ-регулятор является одним из наиболее универсальных регуляторов. Он имеет интегральную составляющую, необходимую для устранения статической ошибки, характерной для пропорционального регулятора. Его передаточная функция имеет вид  $Wp(s) = \frac{k_0 + k_1 s}{s}$ .

Рассмотрим задачу нахождения настроек ПИ-регулятора при заданном ограничении на степень колебательности ИС. На основании (2.2) найдем выражение для параметра регулятора  $k_I$

$$k_1 = \frac{\overline{a_1}^2 - 1.6 \overline{a_0} \overline{a_2}}{1.6 b \overline{a_2}} \quad (3.6)$$

Из первого условия системы (2.8) выразим параметр регулятора  $k_0$  через степень устойчивости  $\eta$

$$k_0 = \frac{0.465((\overline{a_0} + b k_1) - 2 \overline{a_1} \eta)(\overline{a_1} - \eta \overline{a_2})}{b \overline{a_2}} \quad (3.7)$$

Подставив в (2.8) выражения (3.6) – (3.7) и используя достаточное условие колебательности (2.2), получим следующую систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{d_1 d_4}}{(\overline{d_2 - \eta d_3}) \overline{d_3}} - 0.465 < 0; \\ \underline{d_1} \geq 2 \overline{d_2} \eta; \\ \underline{d_2} \geq \eta \overline{d_3}; \\ \underline{d_0} - \overline{d_1} \eta + 2 \overline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0; \\ \frac{\underline{d_1}^2}{\overline{d_0 d_2}} - 1.6 > 0; \\ \frac{\underline{d_3}^2}{\overline{d_2 d_4}} - 1.6 > 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы позволяют определить максимальную степень устойчивости интервальной САУ при заданном ограничении на ее колебательность.

Рассмотрим нахождение параметров регулятора через добротность системы. Параметр  $k_0$  определим на основе выражения (3.4). Далее из (2.8) выразим параметр регулятора  $k_1$  через степень устойчивости  $\eta$

$$k_1 = \frac{k_0 \overline{b a_2} - 0.465((\overline{a_0} - 2 \overline{a_1} \eta)(\overline{a_1} - \eta \overline{a_2}))}{0.465 b (\overline{a_1} - \eta \overline{a_2})} \quad (3.8)$$

На основании выражений (3.4) и (3.8) сформируем необходимую для решения поставленной задачи систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{d_1 d_4}}{(\overline{d_2 - \eta d_3}) \overline{d_3}} - 0.465 < 0; \\ \underline{d_1} \geq 2 \overline{d_2} \eta; \\ \underline{d_2} \geq \eta \overline{d_3}; \\ \underline{d_0} - \overline{d_1} \eta + 2 \overline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0. \end{array} \right.$$

### 3.4. Основные соотношения для синтеза ПИД-регулятора.

ПИД-регулятор – самый сбалансированный из всех регуляторов, построенных на основе типовых звеньев. Он широко применяется в различных областях промышленности, где решаются задачи автоматизации. Передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид

$W_p(s) = \frac{k_0 + k_1 s + k_2 s^2}{s}$ . Аналогично вычислению параметра  $k_0$  для ПИ-регулятора и ПД-регулятора через добротность с помощью выражения (3.4) вычислим параметр  $k_0$  для ПИД-

регулятора. Далее воспользуемся выражением (2.2) и выразим  $k_2 = \frac{\underline{a_2}^2 - 1.6 b \overline{a_1 a_3}}{1.6 b \overline{a_3}}$ .

Определим параметр  $k_1$  через  $\eta$  из выражения предельного показателя устойчивости  $\lambda_2$

$$k_1 = \frac{(0.465((\overline{a_1} + b k_2) - \overline{a_3} \eta)(\overline{a_3})) - \overline{a_0} \overline{a_3}}{\overline{b a_3}}$$

и, используя полученные выше соотношения, сформируем систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{d_0} \overline{d_3}}{\left( \overline{d_1} - 2\overline{d_2}\eta \right) \left( \overline{d_2} - \eta\overline{d_3} \right)} - 0.465 < 0; \\ \overline{d_1} \geq 2\overline{d_2}\eta; \\ \overline{d_2} \geq \eta\overline{d_3}; \\ \overline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\overline{d_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0; \\ \frac{\overline{d_1}^2}{\overline{d_0} \overline{d_2}} - 1.6 > 0; \\ \frac{\overline{d_2}^2}{\overline{d_1} \overline{d_3}} - 1.6 > 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы позволяет определить максимальную степень устойчивости ИС при заданной точности управления и ограничении на степень колебательности САУ.

#### 4. Алгоритм синтеза линейных регуляторов интервальной САУ.

Для параметрического синтеза линейных регуляторов интервальных САУ разработан алгоритм, схема которого приведена на рисунке 3.

Рассмотрим пошаговое выполнение данного алгоритма.

1. Задать начальные условия: пределы интервальных коэффициентов передаточной функции объекта управления, желаемую добротность, допустимое значение показателя колебательности, тип регулятора.
2. На основании достаточного условия заданной робастной колебательности или на основании выражения добротности САУ по скорости определить выражение для одного из параметров регулятора.
3. Получить достаточные условия максимальной робастной степени устойчивости и выразить другой параметр регулятора через степень устойчивости  $\eta$ .
4. Записать систему неравенств для нахождения максимальной робастной степени устойчивости.
5. Решить систему неравенств и определить максимальную степень устойчивости  $\eta_{\max}$  и соответствующие ей настройки регулятора.
6. Повторить п. 4, 5 для других  $\lambda_i = 0.465, i = \overline{1, n-2}$  и других вершин параметрического многогранника САУ.
7. Выбрать  $\eta^* = \max \eta_i(k)$  и определить тем самым искомую максимальную робастную степень устойчивости и робастные настройки регулятора.

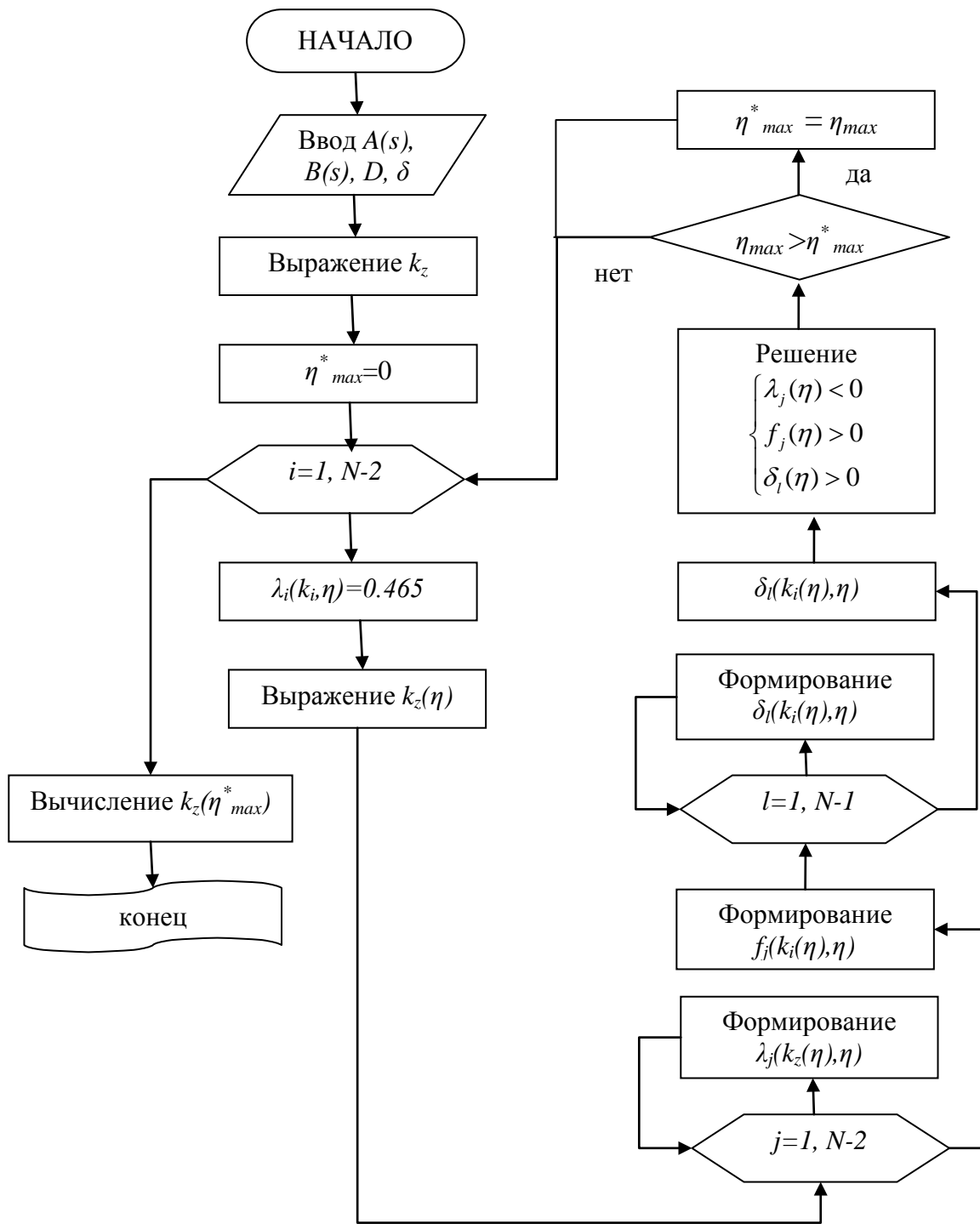
#### 5. Численный пример параметрического синтеза регулятора.

Пусть коэффициенты интервального объекта управления принимают следующие значения

$$a_3 \in [0.05; 0.1], a_2 \in [0.8; 0.9], a_1 \in [2.6; 3], a_0 \in [0.5; 1] \quad b=1.$$

Требуется обеспечить в САУ максимальную степень устойчивости при заданной добротности по скорости  $D=10$  и ограничении степени колебательности величиной, равной 1,6.

На основе приведенной выше методики найдем решение поставленной задачи с помощью ПИ-, ПИД-регулятора. Используя пакет MDSLS, рассчитаны настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие ограничение на степень колебательности величиной, равной 1,6. Значения параметров ПИ-регулятора приведены на рисунке 4.



**Рис. 3.** Алгоритм синтеза линейных регуляторов интервальной САУ.  
 (На схеме введены следующие обозначения:

$$f_i(\eta) = \begin{cases} \underline{d}_k \geq \overline{d}_{k+1}(n-k-1)\eta, k = \overline{1, n-1} \\ \underline{d}_0 - \overline{d}_1\eta + 2\underline{d}_2 \frac{\eta^2}{3} \geq 0 \end{cases}$$

Из рисунка 4 видно, что степень устойчивости  $\eta=0.49$  параметр регулятора  $k_0=1.837$ ,  $k_1=3.694$ .

SystemSynthesis

выберите вид регулятора  
 П-регулятор    ПД-регулятор    ПИ-регулятор    ПИД-регулятор

Задать количество переменных: 4      Задать коэффициенты полинома В: 1

Задать коэффициенты полинома А:      Создать полином

	0.5	2.6	0.8	0.05
	1	3	0.9	0.1

Выберите тип решения  
 через добротность       через показатель колебательности

Задать добротность:      Задать показатель колебательности: 1.6

Вычислить k1      Вычислить k2      Вычислить h      Вычислить k3

k0=1.837      k2=3.694      h=0.49

Рис. 4. Результаты синтеза регулятора в системе MDSLS

При найденных настройках ПИ-регулятора были построены области локализации корней характеристического полинома ИС, показанные на рис. 5. Из рисунка видно, что САУ имеет реальную максимальную степень устойчивости  $\eta = -0.51$ . При этом выполняются предъявленные к системе требования, а именно, степень колебательности интервальной САУ не превышает  $\mu = \text{tg}(68^\circ) = 1.6$ .

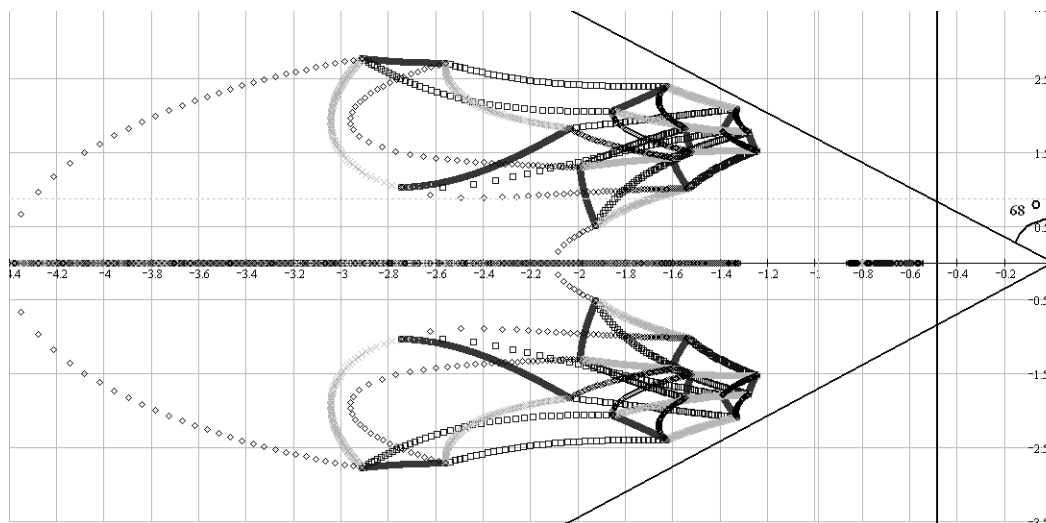


Рис. 5. Области локализации корней с найденными настройками ПИ-регулятора

На рисунке 6 представлена переходная характеристика системы с синтезированным ПИ-регулятором.

Из рисунка 6 видно, что время переходного процесса  $t_n = 6.1$  с, что соответствует найденной степени устойчивости ИС.

С помощью пакета MDSLS, рассчитаны настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие заданную добротность  $D=10$ . Значения параметров ПИ-регулятора приведены на рисунке 7.

Степень устойчивости  $\eta = 0.36$ , параметр регулятора  $k_0 = 10$ ,  $k_I = 8.9$  (рис. 7).

Корневой годограф, с полученными настройками ПИ-регулятора представлен на рисунке 8. Из рисунка видно, что САУ имеет реальную максимальную степень устойчивости  $\eta = -0.4$ .

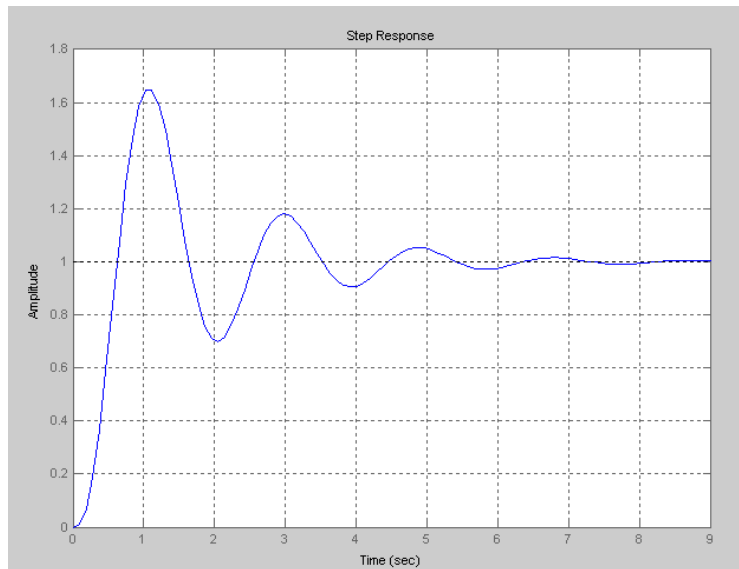


Рис. 6. Переходная характеристика системы

SystemSynthesis

Выберите вид регулятор

П-регулятор    ПД-регулятор    **ПИ-регулятор**    ПИД-регулятор

Задайте количество переменных: 4

Задайте коэффициенты полинома В: 1

Задайте коэффициенты полинома А:      Создать полином

	0.5	2.6	0.8	0.05
	1	3	0.9	0.1

Выберите тип решения

**через добротность**       через показатель колебательности

Задайте добротность: 10

Задайте показатель колебательности:

Вычислить k1      Вычислить k2      Вычислить h      Вычислить k3

k0=10      k1=8.9      h=0.36

Рис. 7. Результаты синтеза регулятора в системе MDSLS

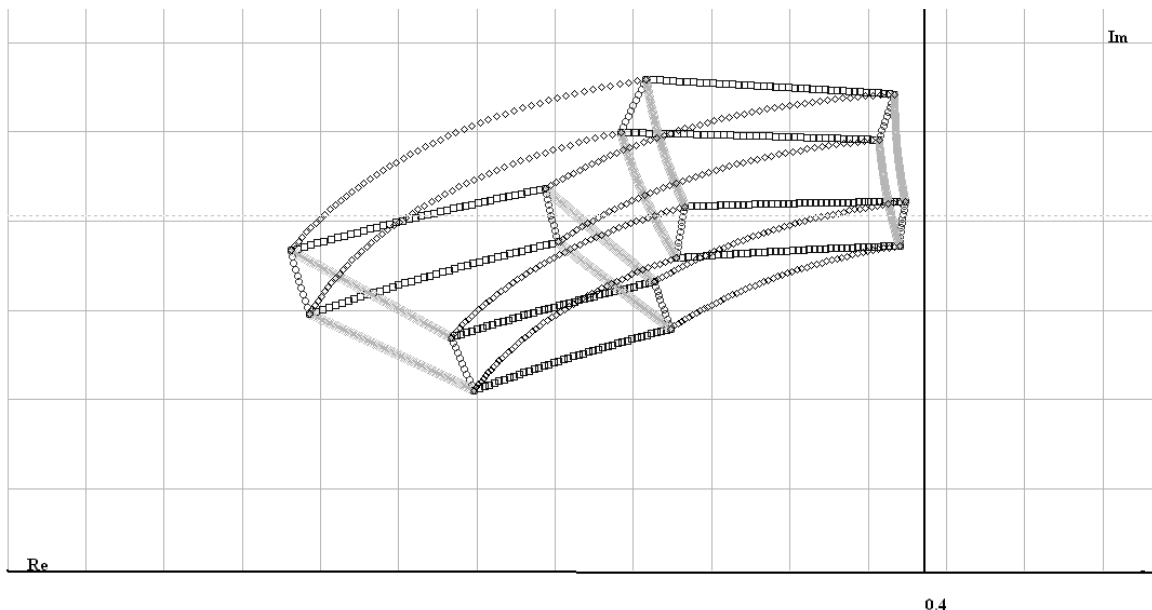


Рис. 8. Области локализации корней с найденными настройками ПИ-регулятора



На рисунке 9 приведена переходная характеристика системы с синтезированным ПИД-регулятором.

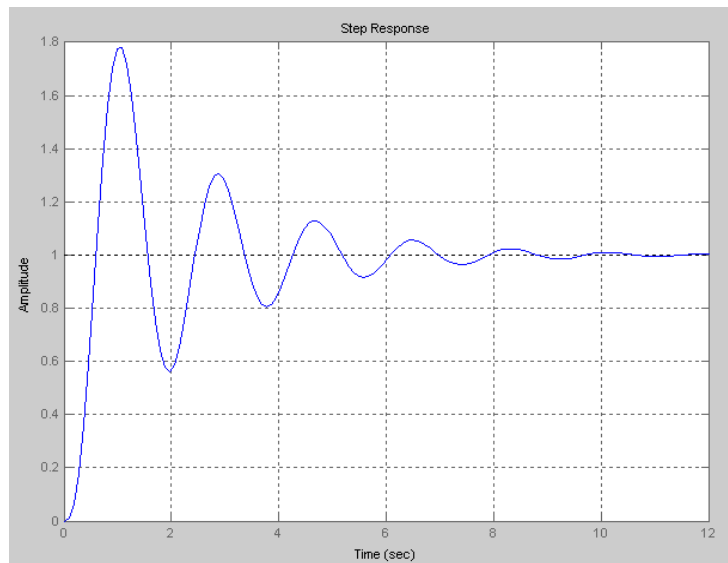


Рис 9. Переходная характеристика системы

Отсюда  $t_n=8.3$  с, что соответствует найденной степени устойчивости ИС (рис. 9).

С помощью пакета MDSLS, рассчитаны настройки ПИД-регулятора, обеспечивающие указанные выше требования. Значения параметров ПИД-регулятора приведены на рисунке 10.

Рис. 10. Результаты синтеза регулятора в системе MDSLS

Из рисунка 10 видно, что степень устойчивости  $\eta=0.73$ , параметры регулятора  $k_0=10$ ,  $k_I=11.1$ ,  $k_2=1$ .

На рисунке 11 приведена область локализации корней характеристического полинома ИС при найденных настройках ПИД-регулятора. Из рисунка видно, что САУ имеет реальную максимальную степень устойчивости  $\eta = -0.9$ . При этом выполняются предъявленные к системе требования: добротность по скорости соответствует заданной величине, и степень колебательности интервальной САУ не превышает  $\mu = \text{tg}(68^\circ) = 1.6$ .

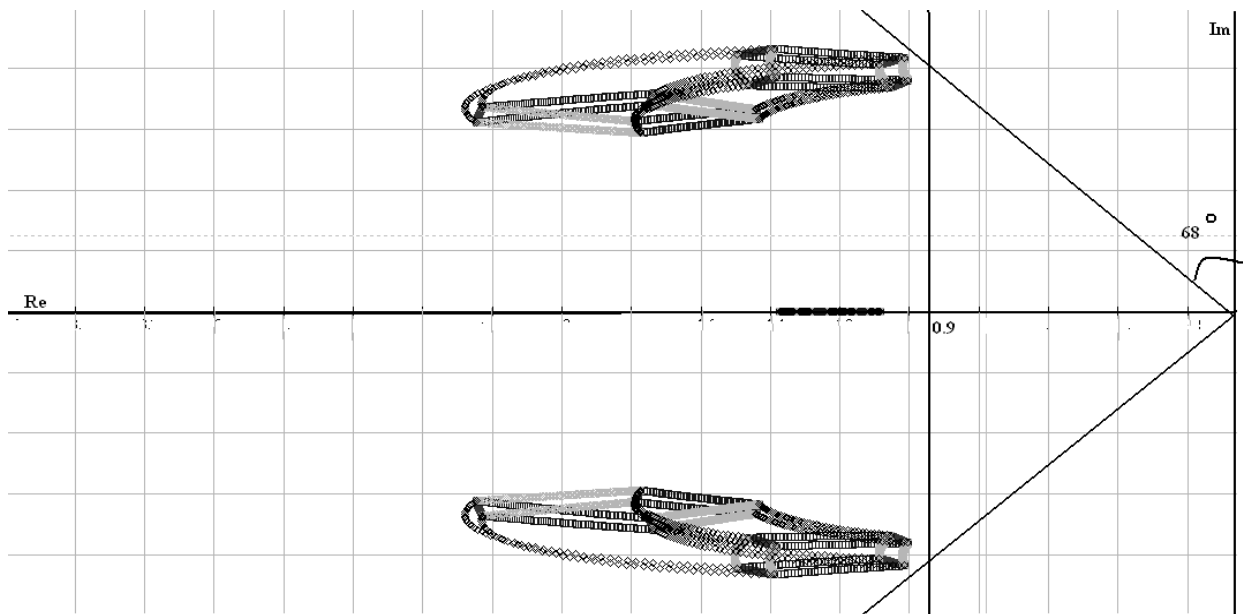


Рис. 11. Области локализации корней с найденными настройками ПИД-регулятора

Переходная характеристика системы с синтезированным ПИД-регулятором изображены на рисунке 12.

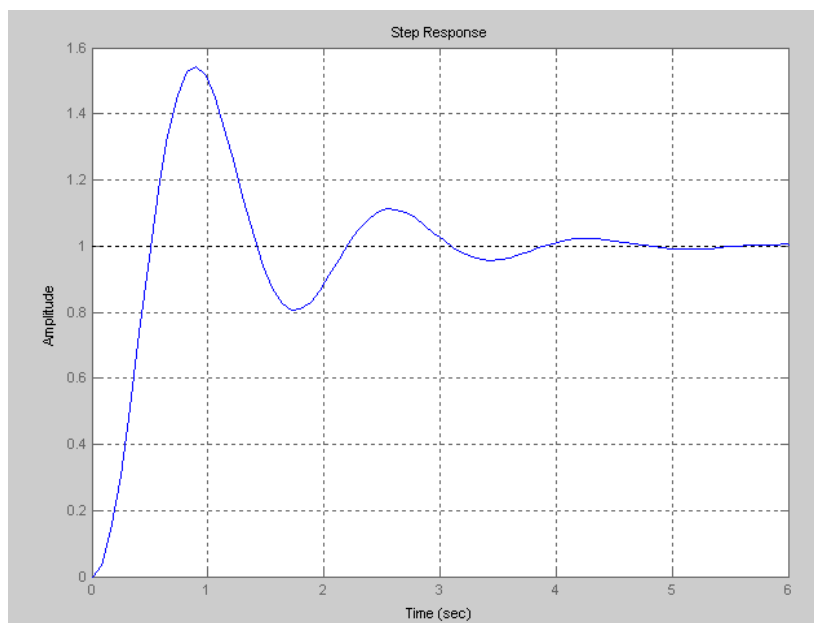
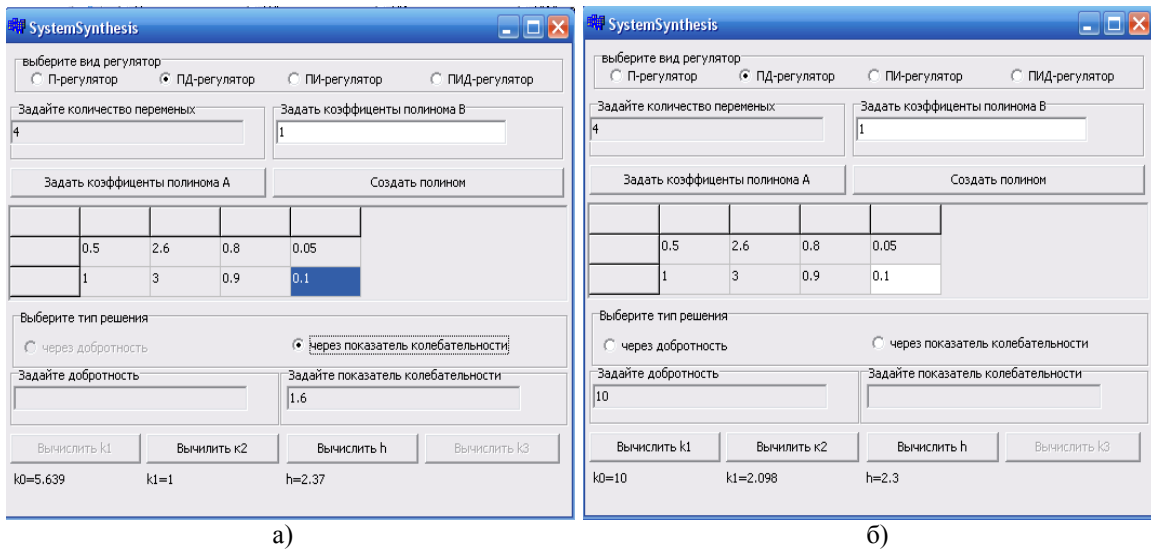


Рис 12. Переходная характеристика системы

Из рисунка 12 можно сделать вывод, что время переходного процесса  $t_n=4.2$  с, что соответствует найденной степени устойчивости ИС.

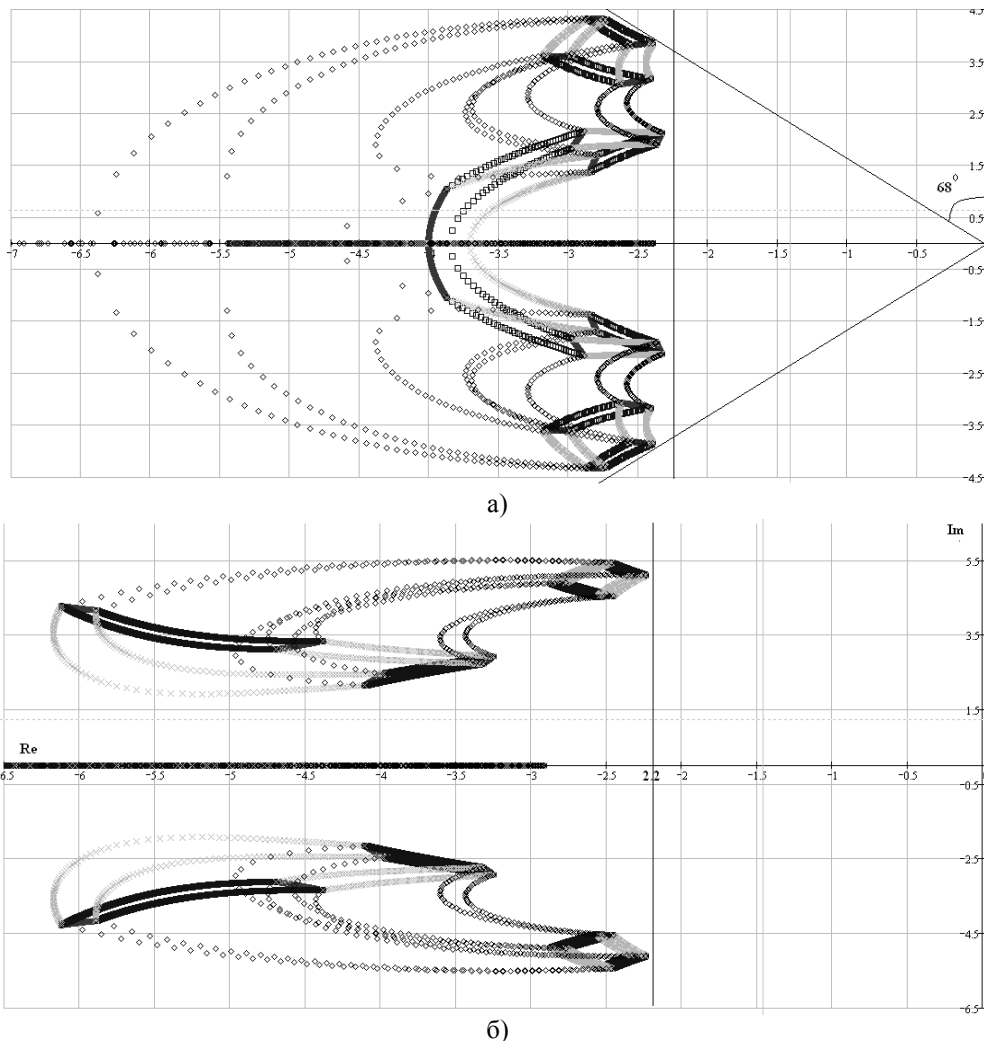
Аналогичные действия приведены для ПД-регулятора. На рисунке 13 приведены значения параметров ПД-регулятора при заданных ограничениях.



а) б)  
**Рис.13.** Результаты синтеза ПД-регулятора в системе MDSLS при  
 а) ограничении на степень колебательности б) ограничении на добротность по скорости

Из рисунка 13 видно, что степень устойчивости (а)  $\eta=2.37$  параметры регулятора  $k_0=5.639$ ,  $k_1=1$ , (б)  $\eta=2.3$  параметры регулятора  $k_0=10$ ,  $k_1=2.098$ .

Корневые годографы, для САУ с полученными настройками для синтезированных вариантов параметров регулятора (а) и (б) представлены на рисунке 14:



а) б)  
**Рис. 14.** Области локализации корней с найденными настройками ПД-регулятора  
 а) ограничение на степень колебательности б) ограничение на добротность по скорости

Из рисунка видно, что САУ имеет реальную максимальную степень устойчивости а)  $\eta = -2.4$ . б)  $\eta = -2.31$ .

На рисунке 15 представлены переходные характеристики системы с синтезированным ПД-регулятором. Время переходного процесса (а)  $t_n=1.2$  с, (б)  $t_n=1.3$  с что соответствует найденной степени устойчивости ИС.

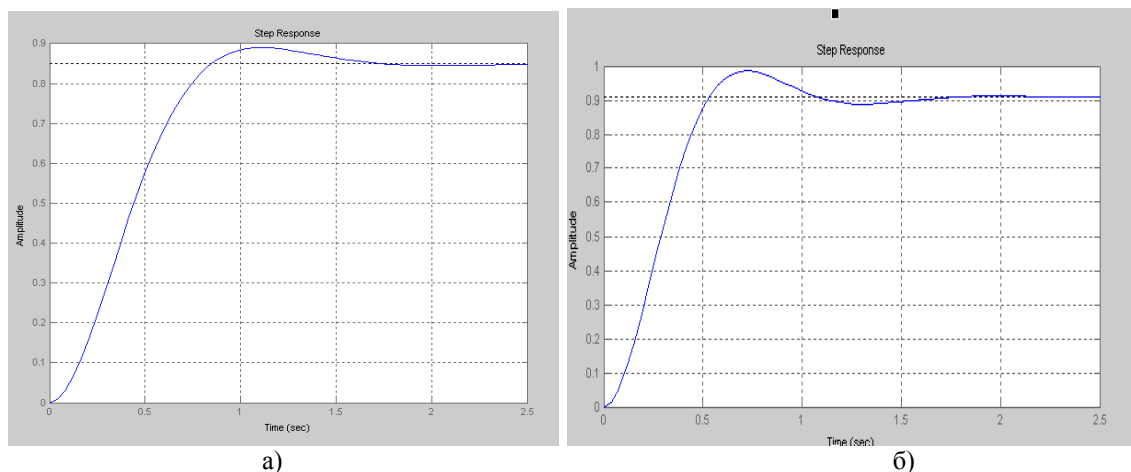


Рис. 15. Переходные характеристики системы

а) ограничение на степень колебательности б) ограничение на добротность по скорости

Рассмотрим синтез ПИ-регулятора на конкретном примере САУ стабилизации положения буксируемого подводного объекта (БПО).

#### 6. Стабилизации положения буксируемого подводного объекта (БПО).

В настоящее время остается актуальной задача синтеза законов управления для демпфирования колебаний подводного аппарата, соединенного с судном-носителем кабель-тросом. Эти колебания вызваны морским волнением и при возникновении резонанса способны привести к обрыву троса. Объект управления в такой системе является упругой много-массовой конструкцией с интервальными параметрами. Последние обусловлены как неточным знанием параметров, так и их изменением в определенных диапазонах при изменении глубины погружения подводного аппарата (длина кабель-троса, длина дополнительного троса, момент инерции лебедки, масса подводного аппарата и др.).

Структурный анализ системы управления подводным аппаратом, включающей скоростную лебедку на подводном аппарате, датчик натяжения дополнительного троса и связанный с его выходом ПИ-регулятор, показал, что стабилизацию положения подводного аппарата при качке судна-носителя возможно обеспечить путем поддержания постоянства натяжения дополнительного троса. При этом необходимо минимизировать влияние на качество управления такого фактора, как интервальная неопределенность некоторых параметров объекта управления, приводящая к появлению в системе частотно-нестабильных резонансов. Данная задача может быть декомпозирована в задачу: определение для параметрического синтеза робастного ПИ-регулятора режимы работы системы управления, которые характеризуются наилучшими показателями качества. На рисунке 16 приведена кинематическая схема системы стабилизации положения БПО.

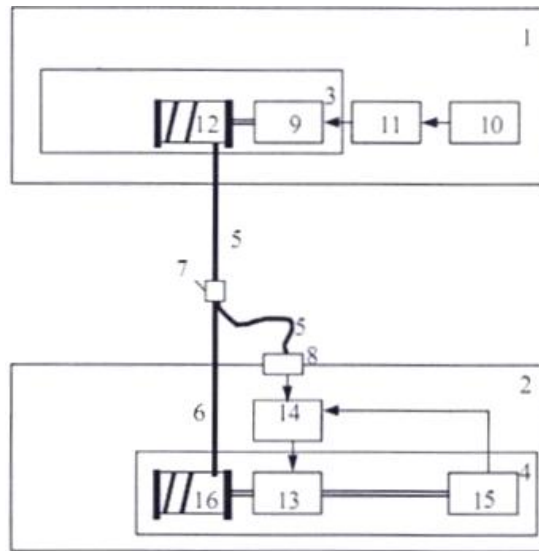


Рис. 16. Кинематическая схема системы стабилизации положения БПО

На чертеже используются следующие обозначения: 1 – судно-носитель; 2 – БПО; 3 – судовая лебедка; 4 – амортизирующая лебедка; 5 – кабель-трос; 6 – дополнительный трос; 7 – замковое соединение; 8 – гермоввод; 9, 13 – электропривод; 10 – задатчик скорости; 11, 14 – блоки управления электроприводом; 16 – барабан лебедки; 15 – измерительный преобразователь скорости БПО.

Спускоподъемное устройство с амортизирующей лебедкой изображено в виде функциональной схемы на рисунке 17.

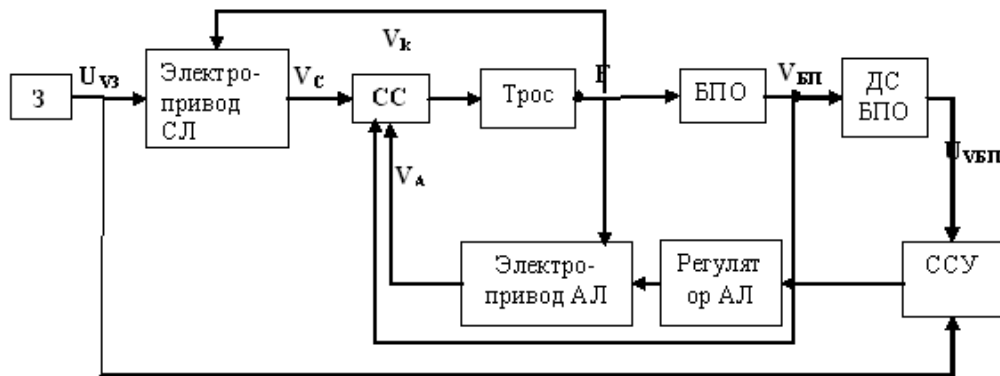


Рис. 17. Функциональная схема системы стабилизации положения БПО

На основе функциональной схемы получаем структурную схему системы.

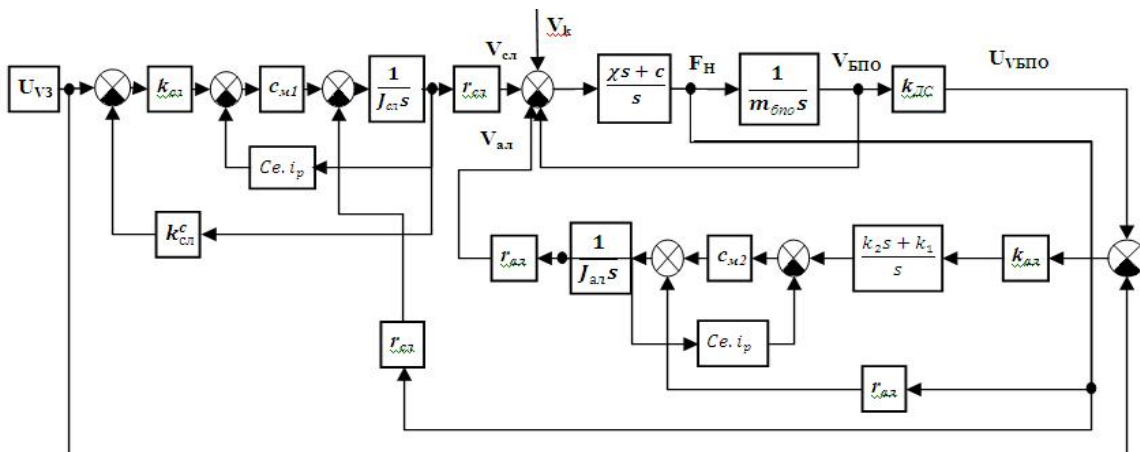


Рис. 18. Структурная схема системы стабилизации положения БПО

На чертеже используются следующие обозначения:  $k_{сл}$  – коэффициент передачи судовой лебедки,  $c_{м1}$  – коэффициент передачи по моменту,  $r_{сл}$  – радиус судовой лебедки,  $J_{сл}$  – момент инерции барабана судовой лебедки,  $C_e$  – противо-электродвижущая сила (ЭДС),  $i_p$  – коэффициент передачи редуктора,  $k_{сл}^c$  – коэффициент обратной связи по скорости судовой лебедки,  $k_{ам}$  – коэффициент передачи амортизирующей лебедки,  $c_{м2}$  – коэффициент передачи по моменту,  $r_{ам}$  – радиус амортизирующей лебедки,  $J_{ам}$  – момент инерции амортизирующей лебедки,  $\chi = \frac{\chi_{тв}}{l}$  – коэффициент демпфирования троса,  $c = \frac{c_{тв}}{l}$  – жесткость троса.

Тогда характеристический полином  $P(s)$  передаточной функции по управлению:

$$P(s) = p_6 s^6 + p_5 s^5 + p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0.$$

Причем коэффициенты характеристического полинома:

$$p_5 = J_{сл} J_{ам} m_{бно} l,$$

$$p_4 = J_{сл} J_{ам} \chi_{уд} + m_{бно} l (DJ_{сл} + AJ_{ам}) + r_{сл}^2 m_{бно} J_{ам} \chi_{уд} + J_{сл} \chi_{уд} r_{ам}^2 m_{бно},$$

$$p_3 = J_{сл} J_{ам} c_{уд} + \chi_{уд} (DJ_{сл} + AJ_{ам}) + ADm_{бно} l + r_{сл}^2 m_{бно} (c_{уд} J_{ам} + D\chi_{уд}) + r_{ам} \chi_{уд} J_{сл} B k_2 + r_{ам}^2 m_{бно} (c_{уд} J_{сл} + A\chi_{уд}),$$

$$p_2 = c_{уд} (DJ_{сл} + AJ_{ам}) + AD\chi_{уд} + r_{сл}^2 m_{бно} c_{уд} D + r_{ам} \chi_{уд} J_{сл} B k_1 + A c_{уд} r_{ам}^2 m_{бно} + B k_2 r_{ам} (c_{уд} J_{сл} + A\chi_{уд}),$$

$$p_1 = ADc_{уд} + r_{ам} B k_1 (c_{уд} J_{сл} + A\chi_{уд}) + r_{ам} A c_{уд} B k_2,$$

$$p_0 = r_{ам} A c_{уд} B k_1,$$

где  $A = c_{м1} (C_e i_p + k_{сл}^c k_{сл})$ ,  $B = k_{ам} k_{дс} c_{м2}$ ,  $D = c_{i2} C_e i_p$ .

При имеющихся начальных данных

$$K_{сл}^c = 0.2B \cdot \frac{с}{рад}; J_{сл} = 100 \text{ кг.м}^2; r_{сл} = 0.2 \text{ м};$$

$$K_{сл} = 20000; C_{м1} = 0.3 \text{ Н.} \frac{\text{М}}{\text{А}};$$

$$C_e = 0.03B \cdot \frac{с}{рад}; i_p = 36; \chi_{уд} = 60000 \text{ Н.с}; c_{уд} = 6000000 \text{ Н}; K_{дс} = 1B \cdot \frac{с}{рад};$$

$$r_{ам} = 0.1 \text{ м}; J_{ам} = 1 \text{ кг.м}^2; C_{м2} = 0.3 \text{ Н.} \frac{\text{М}}{\text{А}}; K_{ам} = 1000; m_{бно} = [300; 350] \text{ Кг};$$

$$l = [100; 120] \text{ м};$$

Характеристический полином синтезируемой системы принимает значения:

$$p_5 = 10^{-5} m_{\text{опо}} l$$

$$p_4 = 0.00624 m_{\text{опо}} + 0.000123 m_{\text{опо}} l + 0.6$$

$$p_3 = 18k_1 + 0.69 m_{\text{опо}} + 0.000038 m_{\text{опо}} l + 67.39$$

$$p_2 = 18k_0 + 2016.05k_1 + 7.29 m_{\text{опо}}$$

$$p_1 = 2016.05k_0 + 21605k_1 + 233.3$$

$$p_0 = 21605k_0$$

Согласно [1] определим значения коэффициентов интервального объекта управления и, используя алгоритм синтеза ПИ-регулятора (с ограничением по точности), найдем настройки регулятора.

	233.3	2902	69.13	1.909	0.3
	233.3	3262	69.52	2.27	0.42

Рис. 19. Результаты синтеза ПИ-регулятора в системе MDSLS

Из рисунка 19 видно, что степень устойчивости  $\eta=0.1$ , параметры регулятора  $k_1=0.1$ ,  $k_2=0.32$ .

#### Заключение.

1. Разработанный алгоритм синтеза линейного регулятора использует коэффициентные оценки показателей качества системы, на основе которых формируются упрощенные алгебраические соотношения между оценкой снизу степени устойчивости системы и коэффициентами характеристического полинома.

2. Представлена методика параметрического синтеза линейного регулятора, обеспечивающего максимальную робастную степень устойчивости, заданную добротность САУ и ее допустимую колебательность.

3. Робастная устойчивость системы автоматического управления достигается путем расположения областей локализации ее полюсов левее максимальной оценки снизу степени устойчивости системы, что обеспечивает максимальное быстродействие и снижает колебательность.

4. Разработан программный модуль на языке C++, позволяющий на ПЭВМ определять настройки линейного регулятора, обеспечивающего максимальную степень устойчивости при заданных ограничениях. Интерфейс модуля предполагает выбор типа регулятора и заданных ограничений (требуемой добротности системы автоматического управления и допустимого показателя колебательности).

5. Работоспособность разработанного алгоритма проверена на числовом примере при расчете настроек ПИ-регулятора.

### Литература

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
3. Волков А.Н., Загашвили Ю.В. Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости при наличии ограничений // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 12–19.
4. Шубладзе А.М. Методика расчета оптимальных по степени устойчивости ПИ-законов. I // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 4. – С. 16–25.
5. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 1. – С. 28–37.
6. Ким Д.П. Синтез регулятора максимальной степени устойчивости // Приводная техника. – 2003. – № 4.
7. Татаринов А.В., Цирлин А.М. Задачи математического программирования, содержащие комплексные переменные, и предельная степень устойчивости линейных динамических систем // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1995. – № 1. – С. 28–33
8. Воронина Н.О., Татаринов А.В., Цирлин А.М. Предельная степень апериодической устойчивости и соответствующие ей настройки для типовых систем регулирования // Известия вузов. Сер. Приборостроение. – 1989. – № 3. – С. 26–32.
9. Кувшинов Г.Е., Наумов Л.А., Чупина К.В. Система управления глубиной погружения буксируемых объектов. – Владивосток: Дальнаука, 2006. – 312 с.



## ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

О.С. Захарова

Казанский (Приволжский) Федеральный университет

**Аннотация.** Исследуется прямолинейное движение двухмассовой системы, состоящей из корпуса и внутренней массы, в среде с сопротивлением. Перемещение системы как целого происходит за счет периодического движения внутренней массы относительно корпуса. Такая механическая система моделирует виброробот - мобильное устройство, способное перемещаться в сопротивляющейся среде без подвижных внешних частей (колес, ног, гусениц и т. п.).

**Введение.** Мобильные механизмы, перемещающиеся за счет движения внутренних масс, имеют ряд преимуществ перед традиционными мобильными аппаратами. Они просты по конструкции, их корпус может быть сделан герметичным и не содержащим выступающих деталей, что обеспечивает возможность их использования в условиях сильно ограниченного пространства. В частности, упоминалось о возможности использования таких вибророботов в медицине, нанотехнологическом оборудовании [1, 2].

Впервые вопрос об оптимальном движении системы посредством перемещения внутреннего тела был поставлен Ф.Л. Черноушко [3, 4], рассмотревшим прямолинейное движение по горизонтальной плоскости твердого тела с полостью, содержащей другое подвижное тело (“внутреннюю массу”) при наличии кулоновского трения между плоскостью и телом. В последнее время данная проблематика широко обсуждается в литературе как для других идеализированных законов сопротивления, так и для неоднородных перемещений внутренних масс [5, 6, 7–10]. В Разделе 1 данной работы исследован случай степенного закона сопротивления среды [7–10]. Весьма общая ситуация рассмотрена в [11], где от силы сопротивления требуется лишь быть монотонно возрастающей функцией скорости движения корпуса. В Разделе 2 закон сопротивления движению корпуса в вязкой жидкости был выбран [12–15] на основе известных экспериментальных данных [16]. Заметим, что наличие кризиса сопротивления делает в этом случае зависимость силы сопротивления от скорости немонотонной. До сих пор, однако, исследования ограничивались квазистационарными законами, когда сила сопротивления однозначно определялась скоростью движения корпуса.

Гидродинамические силы сопротивления движению корпуса в вязкой жидкости определяются теми течениями, которые были сформированы телом в жидкости за все время движения. В общем случае они не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенной скорости, но должны определяться всей предысторией движения. В гидродинамике учет предыстории осуществляется посредством нелокальной по времени силы сопротивления Бассе. В Разделе 3 сила Бассе задается в своей простейшей, классической форме, имеющей строгое обоснование лишь для случая медленного движения корпуса. Тем не менее, принятая постановка полезна при изучении движения виброробота в вязкой жидкости по двум причинам: (1) как необходимый первый шаг при рассмотрении более реалистичных законов [17, 18] для наследственных сил сопротивления и (2) как средство качественной оценки границ применимости квазистационарного приближения.

Оптимизационная задача в данной работе ставится в энергетической постановке, предложенной [7, 12]. Она состоит в отыскании периодического закона движения внутренней массы, минимизирующего работу сил сопротивления за период движения системы при фиксированных периоде колебаний и средней скорости движения корпуса.

**1. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в среде со степенным законом сопротивления.**

**1.1. Постановка задачи в случае степенного закона сопротивления среды.**

Рассмотрим систему, состоящую из двух твердых тел. Основное тело (тело  $M$  – корпус) массы  $M$  находится в среде с сопротивлением, а тело массы  $m$  (далее – внутренняя

“масса”) перемещается внутри него. Изучаются продольные периодические движения внутренней массы относительно тела  $M$ , при которых вся система перемещается как целое. Обозначим через  $u$  скорость тела  $M$ , а через  $x$  и  $v = \dot{x}$  – перемещение и скорость внутренней массы относительно тела  $M$ . Уравнения движения внутренней массы и тела  $M$  в неподвижной системе координат имеют вид

$$m(\dot{u} + \dot{v}) = -F, \quad M\dot{u} = F - R \quad (1.1)$$

где  $F$  – сила взаимодействия внутренней массы и тела  $M$ ,  $R$  – сила сопротивления среды движению тела. Предполагается, что сила сопротивления может быть записана в виде

$$R = k_+ |u|^\alpha \text{ при } u > 0, \quad R = -k_- |u|^\alpha \text{ при } u < 0$$

В зависимости от выбора показателя степени  $\alpha$  имеем различные (анизотропные) законы сопротивления: при  $\alpha = 0$  – сухое трение, при  $\alpha = 1$  – линейное сопротивление, при  $\alpha = 2$  – квадратичное сопротивление. При медленном движении тела  $M$  в жидкости (т.е. в пренебрежении эффектами инерции) случаям  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  и  $1 < \alpha < \infty$  соответствуют псевдопластические, ньютоновская и дилатантные жидкости. Различие положительных коэффициентов сопротивления  $k_+$  и  $k_-$  при движении тела в положительном и отрицательном направлениях может быть обеспечено, например, несимметричностью его формы.

Исключая из уравнений (1.1) силу  $F$ , получим основное уравнение

$$(m + M)\dot{u} + R(u) = -m\ddot{x} \quad (1.2)$$

описывающее движение  $u(t)$  тела при заданном законе  $x(t)$  движения внутренней массы. Для любого заданного периодического с периодом  $T$  закона  $x(t)$  уравнение (1.2) однозначно определяет периодическую с тем же периодом функцию  $u(t)$ .

Обозначая угловыми скобками среднее по периоду, определим следующие функционалы:

$U(u) = \langle u \rangle$  – средняя скорость движения тела,

$N(u) = \langle u \cdot R(u) \rangle$  – средняя мощность, затрачиваемая на преодоление сил сопротивления,

$L(x) = \max(x) - \min(x)$  – амплитуда колебаний внутренней массы (длина тела).

Разумеется, мощность  $N$ , затрачиваемая на преодоление сил сопротивления, в точности равна мощности сил  $\langle F \cdot u \rangle$ , сообщаемых внутренней массой телу. В этом можно убедиться, умножив второе из уравнений (1.1) на  $u$  и проинтегрировав его по периоду.

Для описания энергетических затрат на движение тела с помощью внутреннего движителя (подвижной внутренней массы), введем энергетический коэффициент

$$\eta = N(\langle u \rangle) / N(u), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (1.3)$$

как отношение мощности  $UR(U)$ , необходимой для движения тела с постоянной скоростью  $U$ , к реально затрачиваемой при периодическом движении мощности  $N(u)$ . Указанное двойное неравенство следует из выпуклости и неотрицательности функции  $uR(u)$ .

Поставим задачу оптимизации движения внутренней массы следующим образом.

**Задача 1.** Найти период  $T$  и закон  $x(t)$  колебаний внутренней массы, такие, что амплитуда колебаний и средняя скорость движения тела фиксированы:

$$L(s) = L_0, \quad U(u) = U_0 > 0$$

а мощность внутреннего движителя минимальна:

$$N(u) \rightarrow \min$$

Наряду с задачей 1 рассматривается:

**Задача 2.** Найти закон  $x(t)$  колебаний внутренней массы, такой, что период  $T$  колебаний и средняя скорость движения тела фиксированы, а мощность внутреннего движителя минимальна.

Обратим внимание на то, что амплитуда  $L$  колебаний внутренней массы в задаче 2 заранее не фиксируется, а определяется после нахождения функции  $x(t)$ .

В дальнейшем будет показано, что сформулированные задачи эквивалентны. Удобство формулировки задачи 2 состоит в том, что исходная задача расщепляется на две простые, последовательно решаемые задачи: первая из них определяет оптимальный закон  $u(t)$  движения тела, вторая восстанавливает по оптимальному закону  $u(t)$  зависимость  $x(t)$  движения внутренней массы от времени. Возможность расщепления связана с тем, что никаких дополнительных условий, кроме периодичности, на функцию  $x(t)$  не накладывается. Это условие легко выразить в терминах  $u$ . Действительно, соотношение (1.2) можно рассматривать как задачу нахождения периодической функции  $x(t)$  при заданной периодической левой части. Необходимое условие разрешимости этой задачи получается взятием среднего от обеих частей равенства (1.2). С учетом периодичности функции  $x$  и  $u$  имеем условие  $\langle R(u) \rangle = 0$ , которое будет также и достаточным. Поэтому при любом законе  $u(t)$ , удовлетворяющем ограничению  $\langle R(u) \rangle = 0$ , периодическая функция  $x(t)$  находится из соотношения (1.2) простым интегрированием. Исходная задача при этом сводится к нахождению периодической с периодом  $T$  функции  $u(t)$ , минимизирующей функционал  $N(u)$  с учетом ограничений  $\langle u \rangle = U_0$ ,  $\langle R(u) \rangle = 0$ .

### 1.2. Энергетический коэффициент.

Нормируя время  $t$  на  $T$ , скорость  $u$  на  $U_0$ , мощность  $N$  на  $k_+ U_0^{\alpha+1}$ , представим ограничения, налагаемые на  $u(t)$ , как

$$\langle u \rangle = 1 \tag{1.4}$$

$$\langle k(u) |u|^\alpha \rangle = 0 \tag{1.5}$$

а задачу об оптимальном движении тела в виде

$$N(u) = \langle k(u)u |u|^\alpha \rangle \xrightarrow{(1.4), (1.5)} \min \tag{1.6}$$

Здесь

$$k(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ -\kappa & u < 0 \end{cases}, \quad \kappa = \frac{k_-}{k_+} \tag{1.7}$$

Эквивалентная (1.6) постановка, записываемая в терминах коэффициента энергозатрат  $\eta$ , имеет вид

$$\eta(u) = \frac{\langle u \rangle^{\alpha+1}}{\langle k(u)u |u|^\alpha \rangle} \xrightarrow{(1.5)} \max \tag{1.8}$$

Под стрелками в (1.6), (1.8) даны ссылки на ограничения, при которых производится минимизация. Обратим внимание на то, что в задаче (1.8) функция  $u(t)$  не подчинена ограничению (1.4), и следовательно,  $\langle u \rangle$  может иметь любое положительное значение. Эквивалентность задач (1.6) и (1.8) непосредственно следует из инвариантности функционала  $\eta(u)$  относительно нормировки  $u$ . Из задачи (1.8), в частности, следует, что исходную задачу (1.6) можно было бы также ставить как задачу максимизации средней скорости тела при заданной мощности двигателя.

Вводя множители Лагранжа  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ , отвечающие ограничениям (1.4), (1.5), перепишем задачу (1.6) как задачу поиска стационарной точки функционала

$$I(u; \lambda_1, \mu_1) = \int_0^1 \left( k(u)u |u|^\alpha + \lambda_1 u + \mu_1 k(u) |u|^\alpha \right) dt$$

Варьируя  $I(u)$ , получим для  $u$  алгебраическое уравнение

$$f(u; \mu) \equiv k(u) |u|^\alpha + \mu |k(u)| \cdot |u|^{\alpha-1} = \lambda; \quad \mu = \mu_1 \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \lambda = -\frac{\lambda_1}{1+\alpha} \tag{1.9}$$

Отсюда следует, что функция  $u(t)$ , являющаяся решением задачи (1.6), есть кусочно-постоянная функция, принимающая значения, соответствующие корням уравнения (1.9). Будем обозначать эти значения через  $u_1, \dots, u_k$ , а меру интервалов, на которых они принимаются, – через  $a_1, \dots, a_k$ , при этом  $a_1 + \dots + a_k = 1$ . В силу ограничения (1.5) среди значений  $u_1, \dots, u_k$  должны быть как положительные, так и отрицательные.

Обратим внимание на то, что множитель Лагранжа  $\lambda$  имеет простой физический смысл. Установить его можно, умножая каждое из  $k$  равенств

$$k(u_i)|u_i|^\alpha + \mu|k(u_i)| \cdot |u_i|^{\alpha-1} = \lambda \quad (1.10)$$

на  $a_i u_i$  и проводя суммирование. В результате получим

$$N(u) = \lambda \langle u \rangle - \mu \langle k(u)|u^\alpha \rangle$$

и в силу условий (1.4), (1.6)

$$N = \lambda \quad (1.11)$$

Отсюда, в частности, следует положительность  $\lambda$ . Аналогично, умножением равенства (1.10) на  $a_i$  и последующим суммированием доказывается положительность  $\mu$ .

### 1.3. Случай линейного сопротивления.

Предваряя общий анализ, рассмотрим сначала частный случай  $\alpha = 1$  анизотропного линейного трения. При  $\alpha = 1$  уравнение (1.10) принимает вид

$$u = -\mu + \begin{cases} \lambda, & u > 0 \\ \lambda/\kappa, & u < 0 \end{cases}$$

Для того чтобы оно имело положительный и отрицательный корень, должно выполняться неравенство  $\mu < \lambda < \mu\kappa$ . Оно ограничивает диапазон изменения  $\kappa$  условием  $\kappa > 1$ . В противном случае ( $\kappa \leq 1$ ) поступательное движение тела в положительном направлении в принципе невозможно. Этот факт отмечался ранее [5]. При  $\kappa > 1$  с изменением параметров  $\lambda$  и  $\mu$  в диапазонах  $0 < \mu < \lambda < \mu\kappa < \infty$  корни  $u_+ > 0$  и  $-u_- < 0$  уравнения принимают всевозможные значения из диапазона  $(0, +\infty)$  и  $(-\infty, 0)$  соответственно.

Ограничения (2.1), (2.2) записываются в виде

$$a u_+ - (1-a)u_- = 1, \quad a u_+ - (1-a)\kappa u_- = 0 \quad (1.12)$$

а минимизируемый функционал как

$$N(u_1, u_2, a) = a u_+^2 + (1-a)\kappa u_-^2 \quad (1.13)$$

Выражая из равенств (1.12)  $u_+$  и  $u_-$  через  $a$  и подставляя полученные выражения в соотношение (1.13), приходим к задаче минимизации функции

$$N(a) = \frac{\kappa}{(\kappa-1)^2} \left( \frac{\kappa}{a} + \frac{1}{1-a} \right)$$

на интервале  $(0, 1)$ . Решение этой задачи имеет вид

$$a = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}+1}, \quad u_+ = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}-1}, \quad u_- = \frac{1}{\sqrt{\kappa}-1}, \quad N = \frac{\kappa}{(\sqrt{\kappa}-1)^2}$$

Максимальное значение энергетического коэффициента

$$\eta = N^{-1} = \frac{1}{\kappa} (\sqrt{\kappa}-1)^2$$

очевидно, растет от нуля до единицы с ростом  $\kappa$  от единицы до бесконечности.

### 1.4. Случай произвольной степенной зависимости сопротивления от скорости.

Обратимся к общему случаю, рассмотрев отдельно уравнение (1.9) при  $0 < \alpha < 1$  и при  $1 < \alpha < \infty$ . Качественный вид левой части этого уравнения представлен на рисунке 1.

Так как среди корней уравнения (1.9) должны быть положительные и отрицательные, диапазон изменения множителей Лагранжа  $\lambda$ ,  $\mu$  ограничен неравенствами  $f_*(\mu) \leq \lambda < \infty$  при  $0 < \alpha < 1$  и  $0 < \lambda \leq f_*(\mu)$  при  $1 < \alpha < \infty$ . Соответствующую часть плоскости  $(\lambda, \mu)$  будем обозначать через  $S_0$ . При  $(\lambda, \mu) \in S_0$  уравнение (1.9) имеет три корня: два положительных и один отрицательный при  $0 < \alpha < 1$  либо два отрицательных и один положительный при  $1 < \alpha < \infty$ . В первом случае будем нумеровать корни  $u_1(\lambda, \mu)$ ,  $u_2(\lambda, \mu)$ ,  $u_3(\lambda, \mu)$  в порядке возрастания, а во втором – в порядке убывания.

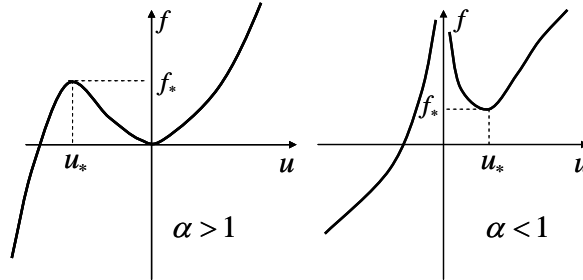


Рис. 1. Вид функции  $f(u)$

Обозначим меру интервалов, на которых  $u$  принимает значения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  через  $a$ ,  $(1-a)b$ ,  $(1-a)(1-b)$ , причем

$$0 < a < 1, \quad 0 \leq b \leq 1$$

и представим ограничения (1.4), (1.5) в виде

$$au_1 + (1-a)(bu_2 + (1-b)u_3) = 1 \tag{1.14}$$

$$\frac{a}{1-a}|u_1|^\alpha = (b|u_2|^\alpha + (1-b)|u_3|^\alpha) \times \begin{cases} \kappa^{-1}, & \alpha < 1 \\ \kappa, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Можно убедиться в том, что соотношения (1.14) однозначным образом определяют параметры  $a$  и  $b$  через значения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , а значит, и через параметры  $\lambda$ ,  $\mu$ . При этом задача (1.6) сводится к минимизации функции  $N(\lambda, \mu) \equiv \lambda$  при ограничениях

$$0 < a(\lambda, \mu) < 1, \quad 0 \leq b(\lambda, \mu) \leq 1 \tag{1.15}$$

Первое из них несущественно в том смысле, что при выполнении второго оно выполнено с необходимостью.

Действительно, при втором ограничении (1.15) из второго равенства (1.14) следует, что

$$a/(1-a) > 0 \tag{1.16}$$

При  $\alpha > 1$  (при  $\alpha < 1$ ) из первого неравенства (1.14) вытекает, что  $au_1 > 0$  (соответственно  $1-au_1 > 0$ ), а значит,  $a > 0$  ( $a < 1$ ). Любое же из условий  $a > 0$  или  $a < 1$  наряду с неравенством (1.16) дает первое ограничение (1.15).

Ясно, что допустимое множество  $S = \{(\lambda, \mu) : 0 \leq b(\lambda, \mu) \leq 1\}$  лежит внутри  $S_0$ . Поэтому задача (1.8) сводится к нахождению минимума функции  $N(\lambda, \mu) \equiv \lambda$  на множестве  $S$ . Но в силу своей линейности функция  $N$  должна принимать минимальное значение на границе  $S$ , т.е. при  $b=0$  либо при  $b=1$ . В обоих случаях решение задачи (1.8) - кусочно-постоянная функция, принимающая два значения: положительное ( $u_+$ ) на множестве меры  $a$  и отрицательное ( $-u_-$ ) на множестве меры  $1-a$ . Любая пара  $u_+ > 0$ ,  $u_- > 0$  допустима, а уравнение (1.9) выступает в качестве линейной системы для нахождения множителей Лагранжа  $\lambda$ ,  $\mu$  по заданным  $u_+$ ,  $u_-$ . Ограничения (1.4), (1.5) для указанной кусочно-постоянной функции принимают вид

$$au_+ - (1-a)u_- = 1, \quad au_+^\alpha - \kappa(1-a)u_-^\alpha = 0 \tag{1.17}$$

Выражая из них  $u_+$  и  $u_-$  через  $a$ , имеем

$$u_- = [ag(a) - (1-a)]^{-1}, \quad u_+ = u_- g(a); \quad g(a) = \left( \frac{\kappa(1-a)}{a} \right)^{1/\alpha} \quad (1.18)$$

и приходим к задаче отыскания минимума функции одной переменной

$$N(a) = au_+^{\alpha+1} + \kappa(1-a)u_-^{\alpha+1} = \frac{\kappa(1-a)(1+g(a))}{(a(1+g(a))-1)^{\alpha+1}} \quad (1.19)$$

Следует заметить, что исходный интервал  $0 < a < 1$ , на котором отыскивается минимум функции  $N$ , должен быть дополнительно ограничен требованием  $u_{\pm}(a) > 0$ . Это требование (см. равенства (1.18)) выражается как

$$ag(a) > 1-a$$

и сводится к условию  $a > a_0$  при  $\alpha > 1$  и условию  $a < a_0$  при  $\alpha < 1$ . Здесь

$$a_0 = (1 + \kappa^{1/(\alpha-1)})^{-1}, \quad 0 < a_0 < 1$$

Прямым вычислением можно показать, что на интервале  $a_0 < a < 1$  при  $\alpha > 1$  и  $0 < a < a_0$  при  $\alpha < 1$  функция  $N(a)$ , определенная равенством (1.19), строго выпукла. На концах этих интервалов она обращается в  $+\infty$ . Поэтому задача минимизации функции  $N(a)$  имеет единственное решение.

Зависимость максимального энергетического коэффициента  $\eta$  от показателя степени  $\alpha$  при  $\kappa = 10^{-4}, 10^{-2}, 0.2, 1, 2.5, 5, 10, 30, 10^2, 10^3, 10^5$  представлена на рисунке 2.

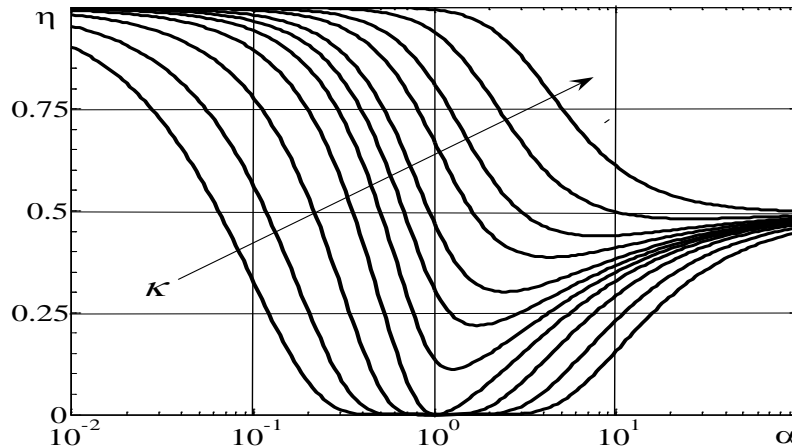


Рис. 2. Зависимость энергетического коэффициента  $\eta$  от  $\alpha$  при различных значениях параметра  $\kappa$

Стрелка на этой фигуре указывает направление роста параметра анизотропии  $\kappa$ . Основные характеристики оптимального движения тела для предельных значений параметров  $\alpha$  и  $\kappa$  приведены в таблице 1.

Табл. 1. Характеристики оптимального движения тела

$\alpha$	$-\infty$	$\infty$	0	1	2		
$\kappa$	$\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	1	10	100
$\eta$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{(\sqrt{\kappa}-1)^2}{\kappa}$	0.079	0.306	0.587
$a$	1	1	$\frac{\kappa}{1+\kappa}$	$\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}+1}$	0.965	0.933	0.945
$u_-$	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{\kappa}-1}$	6.72	1.306	0.608
$u_+$	1	1	$\frac{1+\kappa}{\kappa}$	$\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}-1}$	1.28	1.164	1.093

Там же даются некоторые численные значения для практически важного случая квадратичного сопротивления, являющегося, как известно, хорошим приближением при быстром движении тела в ньютоновской жидкости.

**1.5. Оптимальное движение массы.**

Было показано, что движение тела с максимальным энергетическим коэффициентом реализуется в том случае, когда скорость тела принимает два значения:  $u_+ U_0 > 0$  и  $-u_- U_0 < 0$ . Чередование промежутков поступательного и возвратного движения при этом может быть любым, но суммарное время каждого из видов движения на интервале периодичности должно быть равно  $aT$  и  $(1-a)T$  соответственно. Безразмерные постоянные  $u_+$ ,  $u_-$ ,  $a$  полностью определяются параметрами  $\alpha$  и  $\kappa$  закона сопротивления. Каждому из бесконечного множества оптимальных законов движения тела соответствует единственный периодический с периодом  $T$  закон  $x(t)$  движения внутренней массы. Среди всего множества оптимальных законов движения тела выделим простейший (“базовый”), при котором поступательное и возвратное движения тела осуществляются на промежутках  $(0, aT)$  и  $(aT, T)$ . Определим базовый закон  $x(t)$  движения внутренней массы и подсчитаем соответствующие амплитуду  $L$  и максимальную скорость  $V = \max |\dot{x}|$  ее колебаний. Вводя обозначения

$$w_{\pm} = \frac{1}{m} k_{\pm} u_{\pm}^{\alpha} U_0^{\alpha}, \quad u_0 = \frac{m+M}{m} (u_+ + u_-) U_0,$$

перепишем уравнение (1.2) в областях непрерывного движения следующим образом:

$$\ddot{x} = \begin{cases} -w_+, & 0 < t < aT \\ w_-, & aT < t < T \end{cases}$$

С учетом стандартных условий на скачках

$$\dot{x}(aT+0) - \dot{x}(aT-0) = u_0, \quad \dot{x}(T) - \dot{x}(0) = u_0$$

и условия периодичности движения

$$x(T) = x(0),$$

решение этого уравнения с точностью до несущественной константы имеет вид

$$x = \begin{cases} x_+(t), & t \in [0, aT] \\ x_-(t), & t \in [aT, T] \end{cases} \tag{1.20}$$

$$x_+ = -\frac{w_+}{2} t(aT - t) - u_0(1-a)t, \quad x_- = \frac{w_-}{2} (t-T)(t-aT) + u_0 a(t-T)$$

При малых периодах колебаний, а именно при  $T < T_+ = 2u_0 / w_-$ , функция  $x_+(t)$  монотонно убывает на интервале  $(0, aT)$ , а при  $T > T_+$  с ростом  $t$  она вначале возрастает, а далее, достигнув максимального значения, убывает. Аналогично, при  $T < T_- = 2u_0 / w_+$  функция  $x_-(t)$  монотонно возрастает на интервале  $(aT, T)$ , а при  $T > T_-$  она достигает внутри него единственного минимума.

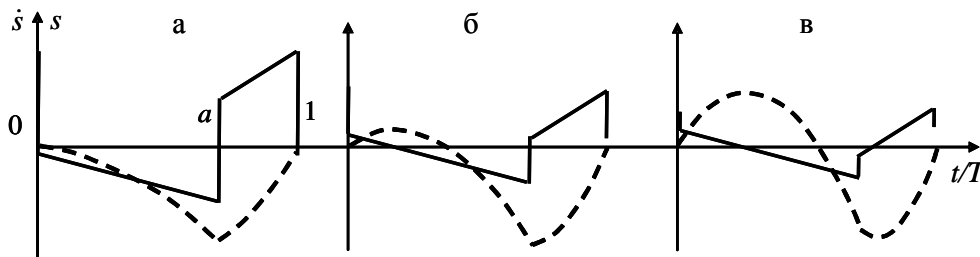


Рис. 3. Три режима движения внутренней массы:

а) инерционный, б) промежуточный, в) вязкий

(пунктирная линия – зависимость  $x(t)$ , непрерывная линия – зависимость  $\dot{x}(t)$ )

Вследствие этого с ростом периода колебаний на интервалах  $(0, T_+)$ ,  $(T_+, T_-)$  и  $(T_-, \infty)$  при  $a > 1/2$  и интервалах  $(0, T_-)$ ,  $(T_-, T_+)$  и  $(T_+, \infty)$  при  $a < 1/2$  последовательно реализуются три режима оптимального движения внутренней массы. С учетом соотношения между инерционными и вязкими силами будем говорить о них как об инерционном, промежуточном и вязком режимах. Эти режимы для случая  $a > 1/2$  схематично представлены на рисунках 3а, б и в соответственно. При очевидной модификации промежуточного режима они имеют аналогичный вид и при  $a < 1/2$ .

Амплитуда колебаний внутренней массы в случае  $a > 1/2$  определяется как

$$L(T) = \max x_- - \min x_+ = \frac{1}{8w_+} \begin{cases} 8a(1-a)u_0w_+T, & T < T_+ \\ (w_+aT + 2u_0(1-a))^2, & T_+ < T < T_- \\ 4u_0^2(1-a) + w_+^2aT^2, & T > T_- \end{cases} \quad (1.21)$$

Аналогичная формула при заменах  $T_+ \leftrightarrow T_-$ ,  $a \leftrightarrow 1-a$  имеет место при  $a < 1/2$ .

Функция  $L(T)$  монотонно возрастает с ростом  $T$  от нуля при  $T = 0$  до бесконечности при  $T = \infty$ . Для малых периодов колебаний зависимость амплитуды колебаний от периода имеет линейный характер, а для больших – квадратичный:

$$\begin{aligned} T \rightarrow 0: \quad L &= l_0 \frac{M+m}{m} U_0 T, & l_0(\alpha, \kappa) &= a(1-a)(u_+ + u_-) \\ T \rightarrow \infty: \quad L &= l_\infty \frac{k_+ U_0^\alpha}{m} T^2, & l_\infty(\alpha, \kappa) &= \frac{a}{8} u_+^\alpha \end{aligned} \quad (1.22)$$

Как и следовало ожидать, при малых  $T$  в зависимость  $L(T)$  не входят параметры  $k_\pm, \alpha$ , отвечающие за вязкие свойства среды, а при больших  $T$  – параметр  $M$ , определяющий инерционные свойства тела.

Определение максимальной по модулю безразмерной скорости тела приводит к соотношению

$$\begin{aligned} V = \max |v| &= v_0 \frac{M+m}{m} U_0 + v_\infty \frac{k_+ U_0^\alpha}{m} T \\ v_0(\alpha, \kappa) &= (u_+ + u_-) \max(a, 1-a), \quad v_\infty(\alpha, \kappa) = au_+^\alpha / 2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Как видно, с ростом периода колебаний для обеспечения одной и той же средней скорости движения тела скорость внутренней массы должна линейно расти.

Полученные формулы (1.20), (1.21) представляют простейшее из оптимальных – базовое решение задачи 1. С учетом однозначной связи (1.21) в базовом решении между периодом колебаний и длиной тела они же определяют решение задачи 2.

Базовое решение, помимо того, что является простейшим из оптимальных решений, обладает замечательным экстремальным свойством [7]. Область в плоскости  $(L, T)$ , соответствующая всему множеству оптимальных движений, определяется как

$$\Omega = \{(L, T): T > 0, L < L^{(0)}(T)\}$$

Здесь верхний нулевой индекс обозначает базовое решение. Таким образом, при заданном периоде колебаний длина тела не превосходит ту, что определяется базовым решением, а при заданной длине тела период колебаний не может быть меньше базового.

## 2. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости.

### 2.1. Энергетический коэффициент при движении в среде с немонотонным сопротивлением.

До сих пор поставленная в данной работе (см. разд. 1) и аналогичные ей задачи рассматривались [3–11] для идеализированных, монотонных, как правило, степенных, законов трения. Предложенные методы решения существенно опирались на конкретный вид закона сопротивления. Сами законы сопротивления характеризовались монотонной зависимостью



$R(u)$  и, соответственно, выпуклостью функции  $\Phi(u) = u \cdot R(u)$  энергетических потерь. Вместе с тем, во многих практически важных ситуациях нет ни монотонности  $R(u)$ , ни выпуклости  $\Phi(u)$ . Это относится, в частности, к случаю, когда плохо обтекаемое основное тело движется в вязкой жидкости (вода, воздух и т.п.). Эксперименты по обтеканию сферы (см. [20]) показывают, что на графике зависимости  $R$  от безразмерной скорости (числа Рейнольдса)  $u$  при  $u \approx 3 \cdot 10^5$  наблюдается провал (“кризис сопротивления”). Он объясняется турбулизацией пограничного слоя на сфере и сопутствующим этому перемещением точки отрыва пограничного слоя вдоль тела вниз по потоку [16]. Кризис сопротивления приводит к немонотонности функции  $\Phi(u)$  (рис. 4).

В данной части работы алгебраическая задача нахождения оптимального движения тела

$$\min_{u \in (2.2), (2.3)} \langle \Phi(u) \rangle \tag{2.1}$$

$$\langle u \rangle = U_0 \tag{2.2}$$

$$\langle R(u) \rangle = 0 \tag{2.3}$$

решается применительно к практически важному случаю движения сферы в вязкой жидкости с существенно немонотонным законом сопротивления. Метод решения носит общий характер, прямо распространяясь и на другие законы сопротивления. Обозначение принадлежности безразмерной скорости соотношениям (2.2), (2.3) здесь (в формуле (2.1)) и далее следует понимать как ограничения, при которых производится минимизация.

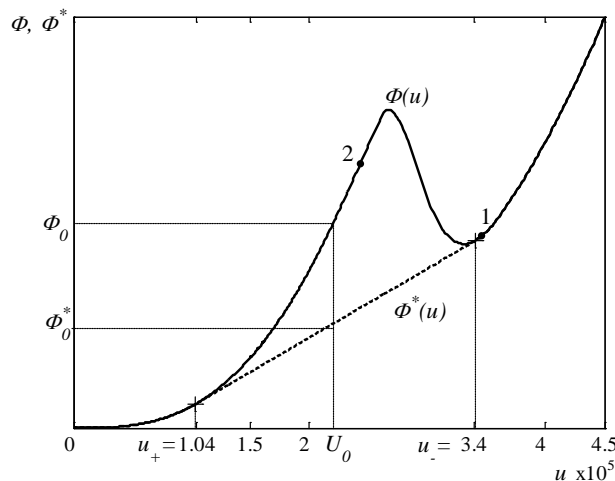


Рис. 4. Величина энергетических потерь  $\Phi$  в зависимости от безразмерной скорости (числа Рейнольдса)  $u$

Для описания энергетических затрат на движение тела с помощью внутреннего движителя (подвижной внутренней массы), введем энергетический коэффициент следующим образом

$$\eta = \min_{u \in (4.2)} \langle \Phi(u) \rangle / \min_{u \in (4.2), (4.3)} \langle \Phi(u) \rangle, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \tag{2.4}$$

Числитель здесь представляет минимальные энергетические затраты при произвольном движении корпуса со средней скоростью  $U_0$ , а знаменатель – те же затраты при движении за счет колебаний внутренней массы.

Для эффективного вычисления числителя в (2.4) проведем операцию овыпукления  $\Phi$ , обозначив через  $\Phi^*$  максимальную выпуклую функцию, не превосходящую  $\Phi$ . Функция  $\Phi^*$  устроена так (фиг. 4), что область ее определения разбивается на два типа интервалов; на одних (интервалах строгой выпуклости)  $\Phi^*(u) = \Phi(u)$ , на других (интервалах линейности)  $\Phi^*$  – линейная функция. В силу неравенства  $\Phi^*(u) \leq \Phi(u)$  и выпуклости  $\Phi^*$  имеем

$$\langle \Phi(u) \rangle \geq \langle \Phi^*(u) \rangle \geq \Phi^*(\langle u \rangle) = \Phi^*(U_0) \tag{2.5}$$

В том случае, когда  $U_0$  лежит в интервале строгой выпуклости, равенство в (2.4) достигается на тождественно постоянной функции  $u \equiv U_0$ . Если же  $U_0$  лежит в интервале линейности, то (см. рис. 4)

$$\Phi^*(U_0) = \frac{u_+ - U_0}{u_+ - u_-} \Phi(u_-) + \frac{U_0 - u_-}{u_+ - u_-} \Phi(u_+)$$

а, значит, равенство в (2.5) достигается на кусочно-постоянных функциях, принимающих два значения  $u_+$ ,  $u_-$  на множествах меры  $aT$  и  $(1-a)T$  соответственно,  $a = (U_0 - u_-)/(u_+ - u_-)$ .

Таким образом, числитель в (2.4) определяется соотношением

$$\min_{u \in (2.2)} \langle \Phi(u) \rangle = \Phi^*(U_0) \quad (2.6)$$

Для выпуклых  $\Phi$  правая часть в (2.6) совпадает с  $\Phi(U_0)$ , коэффициент эффективности (2.4) оказывается определенным так же как в случае степенного закона сопротивления (см. разд. 1). Для невыпуклых  $\Phi(u)$  величина  $\Phi^*(U_0)$  может быть существенно меньше  $\Phi(U_0)$ . Так, для движения сферы в ньютоновской жидкости (рис. 4) энергетические затраты могут быть снижены более чем вдвое за счет неравномерности движения.

### 2.2. Решение задачи об оптимальном движении тела.

Вводя множитель Лагранжа  $\lambda$  для ограничения (2.3) и обозначая  $C(u; \lambda) = \Phi(u) + \lambda R(u)$ , имеем

$$\min_{u \in (4.2), (4.3)} \langle \Phi(u) \rangle = \min_{u \in (4.2), (4.3)} \langle C(u; \lambda) \rangle \geq \min_{u \in (4.2)} \langle C(u; \lambda) \rangle \quad (2.7)$$

Решение задачи минимизации последнего функционала в (2.7) проводится так же, как в предыдущем пункте работы. Обозначая через  $C^*(u; \lambda)$  овыпукленную функцию  $C(u; \lambda)$ , получим

$$\min_{u \in (3)} \langle C(u; \lambda) \rangle = C^*(U_0; \lambda) = \langle C(u_*; \lambda) \rangle \quad (2.8)$$

с кусочно-постоянной функцией  $u_*(t; \lambda)$ . После решения (2.8) в семействе решений  $u_*(\lambda)$  необходимо выделить то, для которого выполнено ограничение  $\langle R(u_*) \rangle = 0$ . Обозначив через  $\lambda_*$  соответствующее значение множителя Лагранжа, получим согласно (2.7), (2.8)

$$\min_{u \in (2.2), (2.3)} \langle \Phi(u) \rangle \geq \langle \Phi(u_*(\lambda_*)) \rangle$$

Отсюда следует, что искомый минимум достигается на элементе  $u_*(\lambda_*)$ ; значение минимума равно  $C^*(U_0; \lambda_*)$ .

Фактическую реализацию решения удобно проводить полуобратным методом, когда для каждого  $\lambda$  величина  $U_0$  не фиксируется, а подбирается так, чтобы выполнить ограничение (2.3). Алгоритм расчета при этом выглядит следующим образом:

1. При каждом фиксированном  $\lambda$  строятся функции  $C(u; \lambda)$ ,  $C^*(u; \lambda)$  и определяется содержащий нулевую точку интервал  $[u_-, u_+]$  линейности  $C^*$ . Такой интервал при  $\lambda \neq 0$  заведомо существует. Это следует из того, что в окрестности нуля поведение  $C(u; \lambda) = (u + \lambda)R(u)$  определяется поведением невыпуклой в этой окрестности функции  $R(u)$ .

2. В ситуации общего положения (двухфазное движение)  $C(u) > C^*(u)$  при  $u_- < u < u_+$ ,  $C(u_{\pm}) = C^*(u_{\pm})$ ,  $R_+ = R(u_+) > 0$ ,  $R_- = R(u_-) < 0$ . При этом  $u_*(t)$  определяется как кусочно-постоянная функция, принимающая два возможных значения  $u_-$  и  $u_+$  на подмножествах интервала  $[0, T]$  меры  $Ta_-$  и  $Ta_+$  соответственно ( $a_- + a_+ = 1$ ,  $a_{\pm} > 0$ ).

$$a_- = \frac{R_+}{R_+ - R_-}, \quad a_+ = \frac{-R_-}{R_+ - R_-}$$

3. В особых случаях (трехфазное движение) интервал  $[u_-, u_+]$  включает точку  $u_0$ , в которой значения  $C(u_0)$  и  $C^*(u_0)$  совпадают; в остальных точках интервала  $(u_-, u_+)$  по-прежнему  $C(u) > C^*(u)$ . При этом  $u_*(t)$  определяется как кусочно-постоянная функция, принимающая три возможных значения  $u_-, u_0, u_+$  на подмножествах интервала  $[0, T]$  меры  $Ta_-, Ta_0, Ta_+$  соответственно ( $a_- + a_0 + a_+ = 1, a_i > 0$ ). Величины  $a_i$  при  $u_0 < 0$  подсчитываются по формулам:

$$a_- = \frac{aR_+}{R_a}, \quad a_0 = \frac{(1-a)R_+}{R_a}, \quad a_+ = \frac{R_a - R_+}{R_a}, \quad R_a = R_+ - R_-a - R_0(1-a)$$

При  $u_0 > 0$  аналогичные формулы имеют вид

$$a_+ = -\frac{aR_-}{R_a}, \quad a_0 = -\frac{(1-a)R_-}{R_a}, \quad a_- = \frac{R_a + R_-}{R_a}, \quad R_a = aR_+ + (1-a)R_0 - R_-$$

В обоих случаях  $a$  – произвольный параметр из интервала  $a \in [0, 1]$ .

4. После нахождения  $u_*$  средняя скорость вычисляется как  $U_0(\lambda) = \langle u_* \rangle$ . При двухфазном движении она равна  $U_0 = a_-u_- + a_+u_+$ , при трехфазном -  $U_0 = a_-u_- + a_0u_0 + a_+u_+$ .

### 2.3. Результаты расчетов.

Расчеты показывают, что трехфазное движение реализуется при двух значениях параметра  $\lambda$ :  $\lambda_1 = 6.95 \cdot 10^5$ ,  $\lambda_2 = 1.87 \cdot 10^6$ . Интервалы  $(0, \lambda_1)$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $(\lambda_2, \infty)$  отвечают двухфазному движению. С ростом параметра  $\lambda$  внутри этих интервалов средняя скорость  $U(\lambda)$  монотонно возрастает соответственно от нуля до  $U_1 = 3.76 \cdot 10^4$ , от  $U_2 = 1.44 \cdot 10^5$  до  $U_3 = 1.55 \cdot 10^5$  и от  $U_4 = 2.63 \cdot 10^5$  до бесконечности (рис. 5).

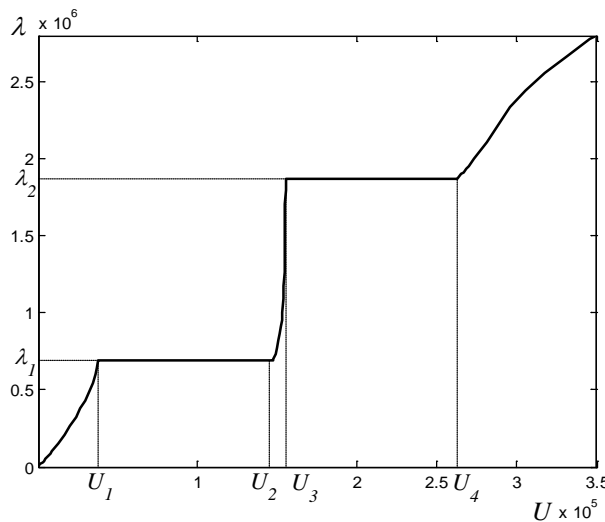


Рис. 5. Зависимость величины параметра  $\lambda$  от средней скорости  $U$  движения сферы

На первой стадии трехфазного движения, при  $\lambda = \lambda_1$ , фиксированными остаются скорости  $u_+^{(1)} = 3.46 \cdot 10^5$ ,  $u_+^{(2)} = 5.38 \cdot 10^4$ ,  $u_- = -2.43 \cdot 10^5$  двух поступательных и одной возвратной фазы движения. Большая из поступательных скоростей соответствует «кризисному» состоянию с малым гидродинамическим сопротивлением (точка 1 на рис. 4), в то время как возвратное движение проходит при больших сопротивлениях, отвечающих «предкризисной» скорости

(точка 2 на рис. 4). Средняя скорость на данной стадии монотонно растет от  $U_1$  до  $U_2$  с изменением параметра  $a$  от нуля до единицы. В процессе роста средней скорости происходит перераспределение продолжительностей поступательных фаз движения в пользу энергетически выгодной быстрой фазы (табл. 2). На второй стадии трехфазного движения, при  $\lambda = \lambda_2$ , фиксированными остаются скорости  $u_+^{(1)} = 3.52 \cdot 10^5$ ,  $u_-^{(1)} = -2.61 \cdot 10^5$ ,  $u_0 = -1.14 \cdot 10^6$  одной поступательной и двух возвратных фаз движения. Скорости  $u_+, u_-^{(1)}$  несущественно отличаются от скоростей  $u_+, u_-$  предыдущей трехфазной стадии; по-прежнему положительная скорость соответствует «кризисному», а отрицательная – «предкризисному» состоянию. Вторая, более быстрая, стадия возвратного движения проходит на «закризисной» скорости. С ростом средней скорости от  $U_3$  до  $U_4$  происходит перераспределение продолжительностей возвратных фаз движения в пользу быстрой фазы (табл. 2).

Табл. 2. Параметры оптимального движения виброробота

$U$	$\eta$	$u_+$	$a_+$	$u_-$	$a_-$	$u_0$	$a_0$
95	0.051	141.7	0.9557	-911.9	0.0443	0	0
$2.57 \cdot 10^3$	0.085	$3.26 \cdot 10^3$	0.9646	$-1.65 \cdot 10^4$	0.0354	0	0
$2 \cdot 10^4$	0.078	$2.57 \cdot 10^4$	0.9648	$-1.33 \cdot 10^5$	0.0352	0	0
$4.3 \cdot 10^4$	0.063	$3.46 \cdot 10^5$	0.0321	$-2.43 \cdot 10^5$	0.0682	$5.38 \cdot 10^4$	0.8997
$1.24 \cdot 10^5$	0.217	$3.46 \cdot 10^5$	0.5229	$-2.43 \cdot 10^5$	0.2779	$5.38 \cdot 10^4$	0.1992
$1.53 \cdot 10^5$	0.253	$3.48 \cdot 10^5$	0.6775	$-2.57 \cdot 10^5$	0.3225	0	0
$1.72 \cdot 10^5$	0.219	$3.52 \cdot 10^5$	0.7202	$-1.14 \cdot 10^6$	0.0096	$-2.61 \cdot 10^5$	0.2702
$2.56 \cdot 10^5$	0.17	$3.52 \cdot 10^5$	0.9225	$-1.14 \cdot 10^6$	0.0561	$-2.61 \cdot 10^5$	0.0215
$3.62 \cdot 10^5$	0.12	$4.37 \cdot 10^5$	0.9647	$-1.71 \cdot 10^6$	0.0353	0	0
$4.525 \cdot 10^5$	0.117	$5.44 \cdot 10^5$	0.9662	$-2.15 \cdot 10^6$	0.0338	0	0
$8.13 \cdot 10^5$	0.087	$9.79 \cdot 10^5$	0.972	$-4.97 \cdot 10^6$	0.028	0	0
$4.75 \cdot 10^6$	0.0789	$6.07 \cdot 10^6$	0.9654	$-3.20 \cdot 10^7$	0.0346	0	0

Основным результатом вычислений является представленная на рис. 6 зависимость энергетического коэффициента от средней скорости движения тела. Там же изображен использованный в расчетах график коэффициента сопротивления  $C_x(U) = U^{-2}R(U)$  сферы.

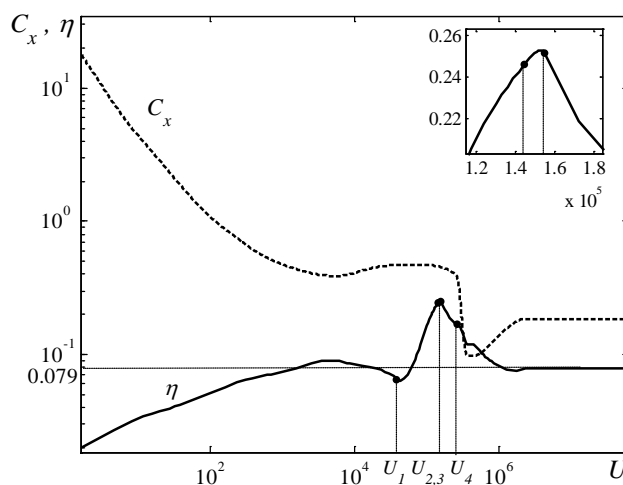


Рис. 6. Зависимости коэффициента сопротивления  $C_x$  и энергетического коэффициента  $\eta$  от средней скорости  $U$  движения сферы

Как видно, энергетический коэффициент  $\eta$  с небольшим запозданием по скорости  $U$  отражает изменения в зависимости  $C_x(U)$ . При стремлении числа Рейнольдса  $U$  к нулю энергетический коэффициент стремиться к нулю. Это связано с тем, что на малых скоростях  $U$  закон сопротивления линеен, а при линейных законах, как известно (см. разд. 1), поступательное движение виброробота невозможно. С ростом  $U$  в докризисном диапазоне зависимость  $C_x(U)$  выполаживается, а коэффициент  $\eta$  приближается к значению 0.079, найденному в разд. 1 для квадратичных законов сопротивления. Движение тела при этом имеет двухфазный характер с продолжительной поступательной и короткой высокоскоростной возвратной фазами (строки 1–3 в табл. 2). Такой режим движения будем называть базовым. При приближении  $U$  к  $U_1$  скорость возвратного движения приближается к кризисным значениям. Однако, энергетически невыгодно, чтобы возвратное движение осуществлялось при низких сопротивлениях. Вследствие этого на интервале  $(U_1, U_2)$  реализуется трехфазное движение, при котором возвратное движение проводится с докризисной скоростью, а фаза медленного поступательного движения с ростом  $U$  замещается фазой быстрого поступательного движения со скоростью, отвечающей кризису сопротивления (строки 4–5 в табл. 2).

Далее, в узком диапазоне  $(U_2, U_3)$  скоростей реализуется наиболее энергетически выгодная ситуация с двумя фазами движения: докризисной возвратной и кризисной поступательной. Именно здесь энергетический коэффициент достигает максимального значения (строка 6 в табл. 2). При этом, в отличие от базового режима, скорость поступательного движения превосходит скорость возвратного. Обратная инверсия скоростей происходит в интервале  $(U_3, U_4)$  посредством трехфазного движения с одной поступательной и двумя возвратными фазами. С ростом скорости  $U$  докризисная возвратная фаза замещается закризисной (строки 7–8 в табл. 2). После полного замещения, начиная с  $U = U_4$ , реализуется двухфазный базовый режим, отвечающий в пределе  $U \rightarrow \infty$  квадратичному закону сопротивления (строки 9–11 в табл. 2).

### 3. Задача об осцилляционном движении тела в вязкой жидкости. Учет вязких сил и сил Бассе.

#### 3.1. Постановка задачи.

Основное уравнение, описывающее движение  $u(t)$  корпуса при заданном законе  $x(t)$  движения внутренней массы сохраняет свой вид

$$(m + M)\dot{u} + R = -m\ddot{x} \quad (3.1)$$

Лишь сила сопротивления  $R$  движению корпуса со стороны жидкости здесь зависит не только от текущего значения скорости  $u(t)$ , но и от ее предыстории  $\{u(\tau), \tau < t\}$ .

До сих пор поставленная выше и аналогичные ей задачи рассматривались нами [7–10, 12–15] в квазистационарной постановке, когда сопротивление  $R$  полностью определялось текущей скоростью тела. В случае движения в вязкой жидкости сферического виброробота

$$R(u) = \frac{1}{2} C_x(\text{Re}) \pi \rho a^2 |u| u, \quad \text{Re} = \frac{ua}{\nu} \quad (3.2)$$

Здесь  $a$  – радиус сферы,  $\nu$  и  $\rho$  – кинематическая вязкость и плотность жидкости. Коэффициент сопротивления  $C_x$  считается известной функцией мгновенного числа Рейнольдса  $\text{Re}$ . При  $C_x = \text{const}$  оптимизационная задача была решена в разделе 1 [7], при заданной по результатам экспериментов зависимости  $C_x(\text{Re})$  – в разделе 2 [12].

В данной части мы откажемся от условия квазистационарности и будем решать задачу об оптимальном осцилляционном движении тела в вязкой жидкости в более общей постановке. Наряду с вязкими силами, учтем также силы Бассе и, связанные с коэффициентом присоединенной массы, инерционные силы.

При движении тела в вязкой жидкости условие квазистационарности гидродинамических сил сопротивления применимо лишь при малых ускорениях тела, и, следовательно, неизбежно нарушается с ростом частоты колебаний внутренней массы. К сожалению, до сих пор единственным строго обоснованным выражением для действующих на сферу гидродинамических сил, остается формула, полученная в пределе бесконечно малых чисел Рейнольдса [19]

$$R = 6\pi a \rho \nu u + 6\pi \rho \nu a^2 \int_{-\infty}^t \frac{du/d\tau}{\sqrt{\pi \nu (t-\tau)}} d\tau + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{du}{dt} \quad (3.3)$$

В ней первое слагаемое описывает силы вязкого сопротивления, второе – силы Бассе, третье – инерционные силы «присоединенных масс». Легко видеть, что формула (3.3) не допускает поступательного движения виброробота. Действительно, беря среднее от обеих частей, пользуясь условием периодичности  $u$  и удовлетворяя ограничению  $\langle R \rangle = 0$  находим, что  $\langle u \rangle = 0$ . Таким образом, для того, чтобы движение было возможно, оно должно проводиться не при бесконечно малых, а при конечных числах Рейнольдса.

Естественное и широко используемое на практике [20] обобщение (3.3) на случай конечных чисел Рейнольдса получается при замене вязких сил в (3.3) зависимостью вида (3.2) с эмпирически определяемым коэффициентом сопротивления. Такой подход подвергается обоснованной критике [18, 21]. Тем не менее, на наш взгляд, он является полезным первым шагом при изучении движения виброробота в присутствии сил гидродинамического сопротивления. Исключая дополнительно инерционные силы в (3.3) за счет увеличения в (3.1) кажущейся массы основного тела на присоединенную массу  $M_0 = 2\pi \rho a^3 / 3$  (половину массы вытесненной корпусом жидкости), приходим к используемому в данной работе выражению для сил сопротивления

$$R = \frac{1}{2} C_x \pi \rho a^2 |u|u + 6\pi \rho \nu a^2 \int_{-\infty}^t \frac{du/d\tau}{\sqrt{\pi \nu (t-\tau)}} d\tau \quad (3.4)$$

Как видно, отличие (3.4) от квазистационарного приближения (3.2) состоит лишь в дополнительном учете сил Бассе.

Ограничимся рассмотрением важного частного случая  $C_x = \text{const}$  квадратичного сопротивления. Он отвечает диапазону  $800 < \text{Re} < 3 \cdot 10^5$  умеренных чисел Рейнольдса. Внутри этого диапазона  $C_x$  изменяется в пределах  $0.4 \div 0.5$  [16]. Нормируя скорость  $u$  на  $U$ , время  $t$  на период  $T$ , запишем задачу об оптимальном движении тела в виде

$$N_{\min} = \min (N_V(u) + s N_H(u)) \quad (3.5)$$

$$\langle u \rangle = 1 \quad (3.6)$$

$$\langle u|u \rangle = 0 \quad (3.7)$$

$$N_V = \langle |u|^3 \rangle, \quad N_H = \langle u R_H \rangle, \quad R_H = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}$$

Минимизация в (3.5) проводится на множестве периодических с периодом единица функций, удовлетворяющих ограничениям (3.6), (3.7). При записи (3.7) дополнительно учтено, что  $\langle R_H \rangle = 0$  для любой периодической функции  $u$ . Единственный безразмерный параметр задачи (3.5)

$$s = \frac{12}{C_x U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi T}} \quad (3.8)$$

характеризуя отношение сил Бассе к вязким силам, задает степень нестационарности движения тела.

После определения в результате решения задачи (3.5) – (3.7) оптимальных зависимостей  $u(t)$ ,  $R(t)$  решается задача нахождения оптимального закона движения внутренней массы. Нормируя относительную координату  $x$  внутренней массы на  $\xi a$ , запишем эту задачу в виде

$$\ddot{x} = -p\dot{u} - p^2 R \quad (3.9)$$

$$p = \frac{1}{qs^2}, \quad q = \frac{\pi C_x \xi_2}{108} \cdot \frac{Ua}{v}, \quad \xi = \frac{4\xi_2 \xi_1}{3C_x}$$

Параметры  $\xi_1, \xi_2$  характеризуют отношения масс

$$\xi_1 = \frac{m + M + M_0}{m}, \quad \xi_2 = \frac{m + M + M_0}{M_0}$$

Заметим, что в отличие от параметра  $s$ , введенный здесь безразмерный параметр  $q$  не зависит от периода колебаний  $T$ . С точностью до постоянного множителя это - число Рейнольдса, построенное по средней скорости движения корпуса.

Основными отыскиваемыми в результате решения задач (3.5) – (3.7) и (3.8) интегральными характеристиками оптимального движения будут энергетический коэффициент  $\eta_{\max}(s)$  и размах колебаний внутренней массы  $l(s, q)$

$$\eta_{\max} = \frac{1}{N_{\min}}, \quad l = \max x - \min x$$

Энергетический коэффициент  $\eta$  характеризует эффективность внутреннего движителя. Он определен [7] как отношение энергетических затрат при равномерном движении корпуса к энергетическим затратам при движении корпуса за счет внутренней массы с той же средней скоростью.

### 3.2. Оптимальное движение корпуса.

При  $s = 0$  задача (3.5) – (3.7) оптимального движение корпуса является алгебраической. Ее решение [7] показывает, что движение корпуса с максимальным энергетическим коэффициентом  $\eta_{\max}^{(0)} = 0.079$  реализуется в том случае, когда его скорость принимает два значения:  $u_+ = 1.286$  и  $u_- = -6.653$ . Чередование промежутков возвратного и поступательного движения при этом может быть любым, но суммарное время каждого из видов движения на интервале периодичности должно быть равно  $2\Delta = 0.035$  и  $(1 - 2\Delta) = 0.976$  соответственно. Единственный (базовый в терминологии [7]) среди всего множества оптимальных законов движения тела выделяется требованием того, что на промежутке периодичности происходит единственная смена (поступательное – возвратное – поступательное) фаз движения.

Такое же требование мы наложим и в общем случае ненулевых значений параметра  $s$ . Это позволит не рассматривать множество локальных «высокочастотных» минимумов функционала мощности  $N(u)$ . Наличие такого рода минимумов легко понять, заметив, например, что если  $u(t; \sqrt{2}s)$  есть решение задачи (5)-(7), то  $u(2t; \sqrt{2}s)$  наряду с  $u(t; s)$  также будет доставлять локальный минимум функционалу  $N(u; s)$ . Значения функционалов в этих минимумах равны  $N_{\min}(\sqrt{2}s)$  и  $N_{\min}(s)$  соответственно. Первое заведомо больше в силу положительной определенности оператора Бассе.

Вводя отвечающие ограничениям (3.7), (3.8) множители Лагранжа  $\lambda$  и  $\mu$ , и варьируя полученный из (3.5), (3.6), (3.7) функционал, найдем следующее уравнение для  $u(t)$

$$3|u|u + s \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau) \frac{\text{sign}(t - \tau)}{\sqrt{|t - \tau|}} d\tau + \lambda|u| - \mu = 0 \quad (3.10)$$

В силу инвариантности (3.10) относительно сдвига и обращения времени можно рассматривать задачу (3.6), (3.7), (3.10) на полупериоде  $0 < t < 1/2$ , задав на его концах условия симметрии

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(1/2) = 0 \quad (3.11)$$

Дальнейшее упрощение полученной задачи связано со снятием ограничений (3.6), (3.7) за счет выбора множителей Лагранжа. Интегрирование (3.10) по периоду дает  $\mu = \lambda \langle |u| \rangle$ . Здесь использовалось ограничение (3.7) и тот факт, что среднее от второго слагаемого в левой части (3.10) равно нулю. Оставшийся множитель Лагранжа  $\lambda$  можно выбрать произвольно, положив, например  $\lambda = 1$ . Полученное при этом решение  $\bar{u}(t; \bar{s})$ , будучи нормированным на  $\langle \bar{u} \rangle$ , удовлетворит при простом пересчете величины  $s = \bar{s} / \langle \bar{u} \rangle$  как уравнению (3.10), так и всем дополнительным условиям.

Задача (3.10) – (3.11) решалась численно, с использованием сеточных методов. Типичный размер сетки составлял 4097 узлов.

Как отмечалось выше, решение рассматриваемой задачи не единственно. Для того, чтобы получать отвечающие глобальному минимуму (3.5) базовые (т.е. не имеющие на выделенном полупериоде других точек экстремума кроме 0 и  $1/2$ ) решения, необходимо, чтобы начальное приближение попадало в окрестность этих решений. В численной процедуре это гарантировалось постепенным продвижением по параметру  $s$ , когда  $u(t; s)$  выбиралось в качестве начального приближения для  $u(t; s + ds)$ . Начальный шаг использовал наличие базового аналитического решения при  $s = 0$ .

Результаты расчетов представлены на рис. 7, 8. На первой из них на половине  $(0, 1/2)$  периода изображены оптимальные зависимости  $u(t)$  при различных значениях параметра  $s$ . Как видно, с ростом  $s$  характер квазистационарного оптимального закона движения корпуса сохраняется, но скачок скоростей при  $t = a$  постепенно сглаживается. Максимальная скорость движения корпуса возрастает с ростом  $s$  от  $u_+ = 1.286$  при  $s = 0$  до  $u_+ = 1.436$  при  $s = \infty$ , минимальная скорость убывает от  $u_- = -6.653$  до  $u_- = -8.562$ , продолжительность возвратной фазы возрастает от  $\Delta = 0.035$  до  $\Delta = 0.054$ .

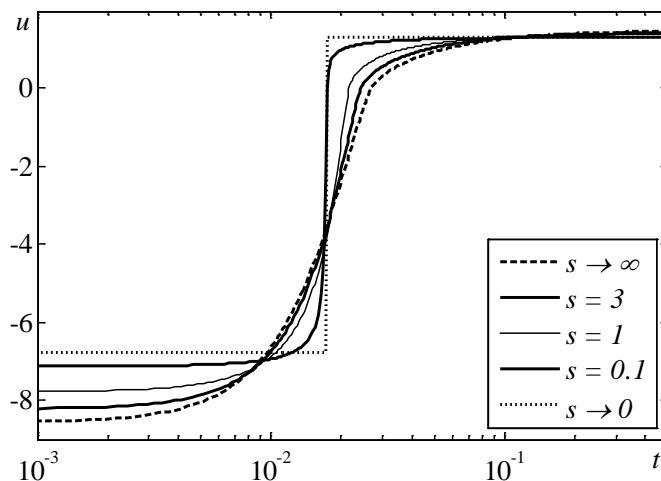
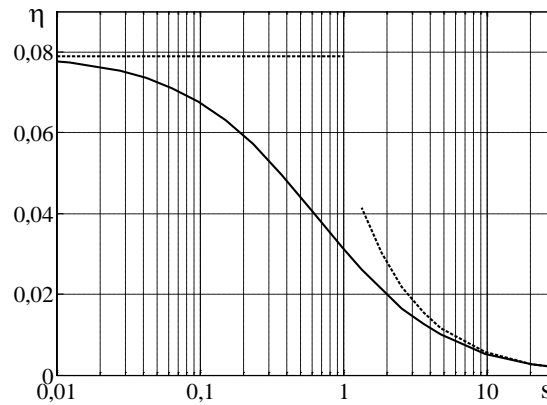


Рис. 7. Оптимальный закон движения  $u(t)$  при различных значениях параметра  $s$

Из рисунка 7 видно, что наиболее существенное изменение оптимального закона движения  $u(t; s)$  происходит в диапазоне  $s$  от 0,1 до 3. При меньших чем 0,1 значениях  $s$  закон движения близок к квазистационарному  $u_0(t)$ , полученному в пренебрежении силами Бассе. При больших чем 3 значениях  $s$ , наоборот, можно пренебречь силами вязкого трения. Здесь  $u(t; s)$  практически совпадает с  $u_\infty(t) = u(t; \infty)$ .

На рисунке 8 сплошной линией показана зависимость основной интегральной характеристики – энергетического коэффициента  $\eta_{\max}$  – от параметра  $s$ . Штриховые линии на этом рисунке отвечают значению  $\eta_{\max}^{(0)} = 0.079$  и асимптотике  $\eta_{\max}(s) = \eta_\infty s^{-1}$  ( $s \rightarrow \infty$ ).





**Рис. 8.** Зависимость энергетического коэффициента  $\eta_{\max}$  от параметра  $s$  – сплошная линия (штриховые линии – асимптотики при  $s \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow \infty$ )

Величина  $\eta_{\infty} = 0.056$  подсчитывается по мощности сил Бассе для  $u_{\infty}(t)$  согласно формуле  $\eta_{\infty} = (N_H(u_{\infty}))^{-1}$ . Как и следовало ожидать, энергетический коэффициент монотонно падает с ростом параметра  $s$ , что соответствует дополнительным потерям мощности двигателя на преодоление сил Бассе.

### 3.3. Оптимальное движение внутренней массы.

После решения задачи минимизации оптимальный закон движения внутренней массы находится интегрированием (3.9). Ограничимся тем, что представим результаты, относящиеся к вычислению безразмерного размаха колебаний  $l$  внутренней массы. Удобно выразить  $l$  непосредственно в терминах оптимального закона  $u(t)$  движения корпуса. Для этого введя функцию  $\Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = R, \quad \langle \Phi \rangle = 0$$

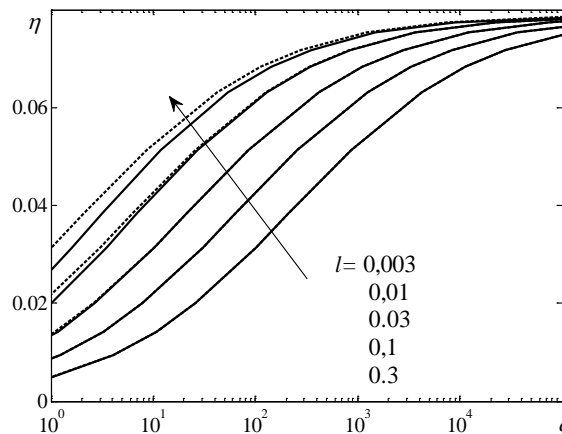
и интегрируя один раз уравнение (3.9), получим

$$\dot{x} = -p(u-1) - p^2\Phi \tag{3.12}$$

Периодичность  $\Phi(t)$  гарантируется условием  $\langle R \rangle = 0$ , периодичность  $x$  – условиями  $\langle \Phi \rangle = 0, \langle u \rangle = 1$ . Взяв модуль от обеих частей полученного соотношения и интегрируя результат по периоду, придем к искомому выражению

$$2l = p \langle |(u-1) + p\Phi| \rangle \tag{3.13}$$

С учетом того, что  $p = q^{-1}s^{-2}$ , а оптимальный закон  $u(t)$  определяется параметром  $s$ , который, в свою очередь, однозначно связан с энергетическим коэффициентом  $\eta$ , размах колебаний  $l$  является функцией энергетического коэффициента  $\eta$  и «числа Рейнольдса»  $q$ . На рисунке 9 сплошными линиями изображены линии уровня этой функции.



**Рис. 9.** Линии уровня размаха колебаний внутренней массы  $l(\eta, q)$

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, при фиксированном значении параметра  $q$  функция  $l(s)$  монотонно убывает с ростом своего аргумента от бесконечности при  $s=0$  до нуля при  $s=\infty$ . Поэтому  $l(s)$  обратима и каждому значению  $l$  можно поставить в соответствие свое значение  $s$ . Во-вторых, как будет видно из дальнейшего, основной физический интерес представляет диапазон  $l < 0.1$ ,  $q > 10$  значений параметров. При работе в этом диапазоне реализуется т.н. инерционный [7] режим движения внутренней массы, когда вторым слагаемым в правых частях (3.12), (3.13) можно пренебречь. Этот факт проиллюстрирован на фиг.9 близостью линий уровня функции  $l(\eta, q)$ , построенных по общей формуле (3.13) (сплошные линии) и в предположении

$$2l = p \langle |u-1| \rangle \quad (3.14)$$

инерционности режима (пунктирные линии). Из соотношения (3.14) следует, что

$$lqs^2 = b \quad (3.15)$$

где  $b(s) = \langle |u-1| \rangle / 2$ . Расчеты показывают, что при изменении  $s$  от нуля до бесконечности  $b(s)$  возрастает от 0,275 до 0,335. Слабое изменение  $b$  позволяет на практике считать эту величину константой  $b \approx 0,305$ .

### 3.4. Обсуждение результатов.

Формулировка исходной задачи предполагала фиксацию диаметра корпуса виброробота, средней скорости его движения и периода колебаний внутренней массы. В безразмерных переменных это соответствовало заданию параметров  $s$  и  $q$ . После минимизации интеграла мощности подсчитывался размах  $l$  колебаний внутренней массы. Вместо того, чтобы фиксировать период колебаний внутренней массы можно было бы фиксировать размах колебаний, подсчитывая отвечающий ему период после решения соответствующей задачи минимизации. Результат в обоих случаях был бы одним и тем же. Фиг. 9 при этом трактовалась бы как серия графиков зависимости энергетического коэффициента  $\eta$  (а, значит, и однозначно связанного с ним безразмерного периода колебаний  $s$ ) от безразмерной средней скорости  $q$  движения корпуса при различных значениях  $l$ .

Далее удобно остановиться именно на этой трактовке. Дело в том, что величина размаха колебаний, в отличие от периода, имеет чисто конструкционное ограничение. Она не может превосходить диаметра корпуса. В безразмерных переменных имеем  $l = 2r\xi^{-1}$ . Здесь коэффициент запаса  $r \leq 1$  представляет собой отношение размаха колебаний к диаметру корпуса. При  $r=1$ ,  $C_x=0.45$ , нулевой массе корпуса и нейтральной плавучести виброробота ( $2M_0 = M + m$ ) имеем  $l=0.15$ . Уточнение грубых оценок для коэффициента запаса и массы корпуса может привести к снижению  $l$  в разы и десятки раз.

При  $C_x=0.45$  в условиях нейтральной плавучести безразмерная скорость  $q$  связана с числом Рейнольдса, построенным по средней скорости движения корпуса соотношением  $q = 0.02 Re$ . Диапазон квадратичности закона вязкого сопротивления в терминах  $q$  запишется как  $16 < q < 6 \cdot 10^3$ .

В указанных диапазонах изменения  $l$  и  $q$  заведомо реализуется (см. рис. 9) инерционный режим движения внутренней массы. В инерционном режиме для оптимальных движений выполняется формула (3.15), которой в размерных переменных можно придать следующий простой вид

$$UT = \frac{3.28m}{m + M + M_0} ra \quad (3.16)$$

Она связывает перемещение  $UT$  виброробота за один период с его конструкционными характеристиками. Задав среднюю скорость поступательного движения тела  $U$ , диаметр корпуса  $2a$ , соотношение масс корпуса и внутреннего движителя и зафиксировав размах колебаний, по (3.16) можно определить оптимальную продолжительность периода  $T$  колеба-

ний системы. Далее, вычисляя параметр  $s$  согласно (3.8) и пользуясь фиг. 8 можно найти энергетический коэффициент, характеризующий эффективность оптимального движения.

Столь же просто в инерционном режиме определяется скорость движения внутренней массы  $v(t)$  по оптимальной скорости  $u(t)$  движения корпуса. Пренебрегая в (3.12) вторым слагаемым в правой части, получим

$$v(t) = \frac{m + M + M_0}{m} (U - u(t))$$

Как видно, максимальная скорость движения внутренней массы в разы превышает скорость движения корпуса.

#### 4. Заключение и выводы.

В 1-ом разделе данной работе была поставлена и решена задача оптимизации (в смысле энергетических затрат) периодического движения внутренней массы, обеспечивающей перемещение тела, содержащего эту массу, с заданной средней скоростью  $U_0$  в среде со степенным законом сопротивления. То же самое решение, очевидно, определяет максимальную среднюю скорость движения тела при фиксированных энергозатратах.

Заданный в постановке задачи период колебаний внутренней массы при проектировании конкретных устройств может на самом деле варьироваться в достаточно широких пределах. Встает вопрос о наилучшем выборе периода  $T$ . Анализ формул (1.22), (1.23) показывает, что оптимальным является инерционный режим, реализующийся при высокочастотных колебаниях внутренней массы, когда

$$T \ll (M + m) / (k_+ U_0^{\alpha-1})$$

Во-первых, при  $T \rightarrow 0$  амплитуда колебаний внутренней массы стремится к нулю (см. формулу (1.22)), а, значит, размер содержащего ее тела перестает быть лимитирующим фактором. Во-вторых, для заданной средней скорости тела максимальная скорость движения внутренней массы принимает наименьшее из возможных значение при  $T \rightarrow 0$  (см. формулу (1.23)). Наконец, ударные нагрузки в момент изменения направления движения тела остаются для оптимальных движений одними и теми же независимо от  $T$ . Данный вывод, разумеется, сделан в рамках условия квазистационарности движения.

Во второй части работы при рассмотрении случая немонотонной зависимости сил сопротивления от скорости движения получено, что наличие кризиса сопротивления позволяет значительно увеличить эффективность движения.

В общем случае, однако, гидродинамические силы сопротивления не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенной скорости, но должны определяться всей предысторией движения. В гидродинамике учет предыстории осуществляется посредством нелокальной по времени силы сопротивления Бассе. В разделе 3 в силу сопротивления дополнительно включаются силы Бассе и, таким образом, задача решается для существенно нестационарного режима движения. В ходе решения было определено, что, во-первых, предложенные в первом разделе энергетическая формулировка задачи оптимизации движения виброробота и подходы к ее решению могут быть использованы при более сложных, чем квазистационарные, законах сопротивления движению со стороны внешней среды. В частности, они прямо переносятся на нелокальные по времени зависимости, учитывающие предысторию движения. Во-вторых, учет наследственных эффектов не приводит к качественному изменению оптимальных режимов движения корпуса и внутренней массы, полученных в предположении квазистационарности закона сопротивления. По-прежнему оптимальные движения имеют двухфазный характер; продолжительности и скорости поступательной и возвратной фаз движения корпуса отличаются от «квазистационарных» на первые десятки процентов. В-третьих, характеризующий эффективность движения энергетический коэффициент  $\eta_{\max}^0 = 0,079$ , вычисленный для квазистационарного случая ( $T = \infty$ ), является в общем случае  $T < \infty$  верхней оценкой для  $\eta$ . С уменьшением периода  $T$  колебаний энергетический коэффициент оптимального движения уменьшается из-за дополнительных потерь мощности

двигателя на преодоление сил Бассе. В-четвертых, в практически интересном диапазоне изменения параметров задачи реализуется инерционный режим движения внутренней массы. При этом перемещение виброробота за один период в оптимальном движении полностью определяется конструктивными характеристиками виброробота по формуле (3.16).

### Литература

1. Li H., Furuta K., Chernousko F.L. Motion generation of the capsbot using internal force and static friction // Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006. P. 6575-6580.
2. Vartholomeos P., Papadopoulos E. Dynamics, design and simulation of a novel microbotic platform employing vibration microactuators // Trans. ASME. J. Dynam. Syst., Measur., and Control. 2006. V.128. № 1. P. 122-123.
3. Черноушко Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 1. С.56-60.
4. Черноушко Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. Вып.6. С. 915-941.
5. Черноушко Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008, Т. 72, Вып. 2, С. 202-215.
6. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 216-229.
7. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620-632.
8. Захарова О.С. Об оптимальном по энергозатратам движении виброробота в среде с сопротивлением // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2009». 2009. Т. 39. С. 138-140.
9. Захарова О.С. Оптимальные по энергетическим затратам периодические движения виброробота в среде с сопротивлением// Сборник научных трудов победителей всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки. 2011. С. 62-95.
10. Zakharova O.S. The energy-optimal quasi-stationary motion of a vibration-driven robot in a resistive medium // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского Университета 2011 года: Сборник статей. С. 318-321.
11. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноушко Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3-22.
12. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости// Изв. Вузов. Матем. 2012. №2. С. 57-64.
13. Захарова О.С. Оптимальное движение виброробота в среде с немонотонным законом сопротивления // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2011». 2011. Т. 44. С. 138-140.
14. Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам квазистационарное движение виброробота в среде с немонотонным сопротивлением // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского Университета 2011 года: Сборник статей. С. 86-89.
15. Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в вязкой жидкости // Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук»: Сборник материалов конференции, принята к печати – ожидается выход в 2012 г.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. 31 с.

17. Mei R., Adrian R. J. Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream and unsteady drag at finite Reynolds number // J. Fluid Mech. 1992. V. 237. P. 323-341.
18. Kim I., Elghobashi S., Sirignano W. A. On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers // J. Fluid Mech. 1998. V. 367. P. 221-253.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
20. С. Соу. Гидродинамика многофазных сред. - М.: Мир, 1971. 29 с.
21. Mei R. Velocity fidelity of flow tracer particles// Experiments in Fluids. 1996. V. 22. P. 1-13.

## ПИРСОВСКИЕ ЦЕПИ ПОЛУКОЛЕЦ

*Р.В. Марков*

*Вятский государственный гуманитарный университет*

**Аннотация.** В работе вводится понятие пирсовской цепи конгруэнций полуколец - аналог пирсовской цепи идеалов колец. Приводятся основные свойства и некоторые приложения этой конструкции: характеристика абелевых, заменяемых справа полуколец, правых полуколец Безу.

### **Введение.**

Основной целью данной работы является определение и применение пирсовской цепи конгруэнций полукольца. Получены результаты, описывающие некоторые полукольца в терминах пирсовских слоев и пирсовских цепей конгруэнций.

Основные задачи для достижения цели данной работы состоят в:

- исследовании кольцевого аналога пирсовских цепей,
- определении и изучении свойств пирсовских цепей,
- разработке методов исследования полуколец пирсовскими цепями,
- выделении классов полуколец, к которым применимы полученные методы,
- построении конкретных примеров для иллюстрации результатов.

Актуальность данной работы обоснована применимостью полученных результатов для характеристики конкретных полуколец. Ранее аналогичное исследование проводилось для колец, полукольцевой случай характеристики пирсовскими цепями не исследовался.

В работе строится общий метод характеристики полуколец пирсовскими цепями, выполняется поиск классов полуколец, для которых применим полученный метод.

В фундаментальной работе Пирса [8] построена конструкция пучка колец, названного впоследствии пирсовским пучком, и доказана изоморфность представления произвольного кольца с единицей сечениями этого пучка. В дальнейшем появилась серия работ, в которых пирсовский пучок применялся для изучения различных классов колец. Беджесом и Стефенсоном [5, 6, 7] введено полезное понятие пирсовской цепи идеалов кольца. Идея этой конструкции следующая: центральным идемпотентам кольца при пирсовском представлении соответствуют глобальные сечения, принимающие в каждом слое либо ноль, либо единицу. Однако, в слоях могут быть нетривиальные наборы центральных идемпотентов, и следовательно, возможно содержательное пирсовское представление слоев. Эта процедура "построения пирсовских слоев для ранее построенных пирсовских слоев" и приводит к пирсовской цепи идеалов. Авторами даются некоторые приложения конструкции. На русском языке элементы теории пирсовских цепей представлены в монографии А.А. Туганбаева [2].

Конструкция пирсовского пучка была перенесена и на некоторые другие алгебраические объекты - ограниченные дистрибутивные решетки, почти-кольца, полукольца. Так, для полуколец, являющихся основными объектами настоящей статьи, пирсовское представление появилось в [3].

С терминологией и основными методами теории пучковых представлений можно познакомиться в работах Е.М. Вечтомова [1] и В.В. Черных [4].

### **1. Основные определения.**

**Определение 1.** Непустое множество  $S$  с бинарными операциями  $+$  и  $\cdot$  называется **полукольцом**, если выполняются следующие аксиомы:

1.  $(S, +)$  - коммутативная полугруппа с нейтральным элементом  $0$ ;
2.  $(S, \cdot)$  - полугруппа с нейтральным элементом  $1$ ;
3. Умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон;
4.  $0a=0=a0$  для любого  $a \in S$ .

**Определение 2.** Мультипликативный идемпотент  $e$  полукольца  $S$  называется **центральным дополняемым идемпотентом**, если:

1.  $e$  - центральный:  $(\forall x \in S)(ex = xe)$ ;
2.  $e$  - дополняемый:  $(\exists e^\perp \in S)(e + e^\perp = 1 \wedge ee^\perp = 0)$ .

Легко видеть, что дополнение  $e^\perp$  к центральному дополняемому идемпотенту  $e$  является центральным дополняемым идемпотентом и задается однозначно.

В дальнейшем, если специально не оговорено, будем называть центральные дополняемые идемпотенты **дополняемыми идемпотентами**.

Обозначим через  $BS$  множество всех дополняемых идемпотентов. Множество  $(BS, \oplus, \cdot)$  с введенной операцией сложения  $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$  и полукольцевым умножением образует булево кольцо.

Пусть  $MaxBS$  - множество всех максимальных идеалов булева кольца  $BS$ . Напомним, что топология Стоуна–Зарисского вводится на этом множестве, если определить открытые множества как

$$D(A) = \{M \in MaxBS : A \not\subseteq M\}$$

для любого идеала  $A$  кольца  $BS$ . Для произвольного дополняемого идемпотента  $e \in BS$  обозначим

$$D(e) = D(eBS) = \{M \in MaxBS : e \notin M\}.$$

Известно (см., например, [4]), что  $MaxBS$  является нульмерным компактом с базисом открытых множеств вида  $D(e)$ .

**Определение 3.** Пространство  $MaxBS$  всех максимальных идеалов булева кольца  $BS$  называется **пирсовским спектром** полукольца  $S$ .

**Определение 4.** Идеал  $A$  полукольца  $S$  назовем **регулярным**, если он порожден некоторым множеством дополняемых идемпотентов.

**Определение 5.** Пусть  $A$  - регулярный идеал. Введем отношение  $\theta_A$  на полукольце  $S$  такое, что

$$a \equiv b(\theta_A) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp$$

для некоторого дополняемого идемпотента  $e \in A$ . Стандартно проверяется, что  $\theta_A$  является конгруэнцией.

**Определение 6.** Конгруэнцию  $\theta_A$  по регулярному идеалу  $A$  назовем  **$A$ -регулярной**. Если идеал  $A$  порождается некоторым  $M \in MaxBS$ , то регулярную конгруэнцию  $\theta_A$  назовем **конгруэнцией Пирса** и обозначим  $\delta_M$ .

**Определение 7.** Семейство конгруэнций  $(\sim_x)$  на полукольце  $S$ , индексированное точками  $x$  топологического пространства  $X$ , называется открытым семейством, если для любых  $a, b \in S$  множество

$$V(a, b) = \{x \in X : a \equiv b(\sim_x)\}$$

открыто в  $X$ .

**Предложение 1.** [4] Семейство всех конгруэнций Пирса на полукольце  $S$ , индексированное точками  $M$  топологического пространства  $MaxBS$ , образует открытое семейство.

**Определение 8.** Тройка  $(P, \pi, X)$  называется **пучком полуколец**, если выполняются следующие условия:

1.  $X$  и  $P$  - топологические пространства;
2.  $\pi: P \rightarrow X$  - локальный гомеоморфизм;
3. Для каждой точки  $x \in X$  множество  $P_x = \pi^{-1}(x)$  является полукольцом;
4. Полукольцевые операции непрерывны;
5. Отображения  $\bar{0}$  и  $\bar{1}$ , ставящие каждой точке  $x \in X$  соответственно ноль  $0_x$  и единицу  $1_x$  полукольца  $P_x$ , непрерывны.

Пространства  $X$  и  $P$  называются **базисным** и **накрывающим** соответственно;  $P_x$  называется **слоем пучка**. Непрерывные функции из  $X$  в  $P$ , для которых каждая точка базисного пространства отображается в соответствующий слой пучка, носят название **глобальных сечений** пучка  $P$ . Непосредственно из определения следует, что множество всех глобальных сечений пучка полуколец с поточечно определенными операциями является полукольцом — **полукольцом глобальных сечений**.

**Предложение 2.** [4] Пусть  $S$  - полукольцо,  $X$  - топологическое пространство. Тогда эквивалентны следующие условия:

1.  $(\sim_x), x \in X$  - открытое семейство конгруэнций на  $S$ ;
2.  $(P, X)$  - пучок полуколец, где  $P = \dot{\cup} \{S/\sim_x : x \in X\}$ .

Из предложений 1 и 2 следует, что дизъюнктивное объединение  $P(S) = \dot{\cup} \{S/\delta_M : M \in MaxBS\}$  над топологическим пространством  $MaxBS$  является пучком полуколец, называемым **пирсовским пучком полуколец**.

Для каждого  $M \in MaxBS$  полукольцо  $S/\delta_M$  называется **пирсовским слоем** пучка  $P(S)$  в точке  $M$ .

Пусть  $a$  - произвольный элемент полукольца  $S$ . Стандартно проверяется, что глобальным сечением пучка  $P(S)$  над  $MaxBS$  является отображение  $\hat{a}: MaxBS \rightarrow P(S)$ , заданное равенством  $\hat{a}(M) = \bar{a}_M$  для каждого  $M \in MaxBS$ . (Здесь  $\bar{a}_M$  - класс элемента  $a$  в факторполукольце  $S/\delta_M$ .)

**Определение 9.** **Функциональным (пучковым) представлением** полукольца  $S$  называется полукольцевой гомоморфизм  $\alpha: S \rightarrow \Gamma(P(S), X)$  полукольца  $S$  в полукольцо всех глобальных сечений пучка  $P(S)$  над топологическим пространством  $X$ . Представление  $\alpha$  называется **точным, полным** или **изоморфным**, если  $\alpha$  - соответственно мономорфизм, эпиморфизм или изоморфизм.

**Теорема 1.** [3] [4] Для любого полукольца  $S$  функциональное представление  $\alpha: S \rightarrow \Gamma(P(S), MaxBS), \alpha(a) = \hat{a}$  является изоморфизмом между  $S$  и полукольцом всех глобальных сечений его пирсовского пучка.

**Предложение 3.** Для полукольца  $S$  равносильны условия:

1. Каждый идемпотент в  $S$  дополняем и централен;
2. Все пирсовские слои полукольца  $S$  не имеют нетривиальных идемпотентов;

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Покажем, что при пирсовском представлении каждый центральный дополняемый идемпотент отображается или в ноль или в единицу для каждого слоя. Рассмотрим пирсовский слой над точкой  $M$ , и  $e$  - произвольный центральный дополняемый идемпотент. Если  $e \in M$ , то  $0e^1 = ee^1$  и  $\hat{e}(M) = \bar{0}(M)$ ; если  $e \notin M$ , то  $1e = ee$  и  $\hat{e}(M) = \bar{1}(M)$ . Обозначим через  $h$  естественный эпиморфизм  $S$  на слои в точке  $M$ . Пусть  $\bar{e}^2 = \bar{e} \in S/\delta_M$ , и  $h(g) = \bar{e}$  для некоторого элемента  $g \in S$ . Тогда  $h(g) = h(g^2)$ , откуда  $gf = g^2f = g^2f^2$  для некоторого  $f \in BS \setminus M$ . Поскольку  $h(gf) = h(g) = \bar{e}$ , а по условию  $gf \in BS$ , то  $h(gf)$  равен либо  $\bar{0}$ , либо  $\bar{1}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $e^2 = e \in S$ . Поскольку сечение  $\hat{e}$  равно в каждом слое идемпотенту, то по условию принимает в каждом слое либо ноль, либо единицу. Кроме того, множества, на которых такое сечение принимает как ноль, так и единицу, открыто-замкнуты. Ясно, что  $\hat{e}$  является центральным дополняемым идемпотентом полукольца всех глобальных сечений. Поэтому  $e \in BS$ .  $\square$

## 2. Пирсовские цепи.

Известно, что неразложимость полукольца в нетривиальную прямую сумму идеалов равносильна отсутствию в полукольце центральных дополняемых идемпотентов кроме нуля и единицы.

**Определение 1.** Если  $S/\rho$  - неразложимое факторполукольцо полукольца  $S$ , и для любой конгруэнции  $\rho' \leq \rho$  факторполукольцо  $S/\rho'$  не является неразложимым, то  $S/\rho$  называется **максимальным неразложимым фактором** (mi-фактором) полукольца  $S$ .

**Определение 2.** Пусть  $\alpha$  - ординал и  $\rho_\alpha$  - конгруэнция на полукольце  $S$ , определяемая следующим образом:

1. Если  $\alpha = 0$ , то  $\rho_\alpha = 0$ ;
2. Если  $\alpha$  - непредельный ординал, то  $S/\rho_\alpha$  - некоторый пирсовский слой полукольца  $S/\rho_{\alpha-1}$ ;
3. Если  $\alpha$  - предельный ординал, то  $\rho_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} \rho_\beta$ ;



Для некоторой конгруэнции  $\rho_\gamma$  верно равенство  $\rho_\gamma = \rho_{\gamma+1}$ . Множество  $P(S) = \{\rho_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$  назовем **пирсовской цепью** полукольца  $S$ . Конгруэнция  $\rho_\gamma$  - **наибольшая конгруэнция** пирсовской цепи.

Отметим, что полукольцо  $S$  может иметь более одной пирсовской цепи.

**Предложение 1.** Если  $\{S/\delta_i : i \in I\}$  - такое множество неразложимых факторполуколец, что для любых  $i, j \in I$  конгруэнции  $\delta_i$  и  $\delta_j$  сравнимы, то  $S/\delta$  - неразложимое полукольцо, где  $\delta = \bigwedge_{i \in I} \delta_i$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что  $\bigwedge \delta_i$  - нулевая конгруэнция, множество  $I$  линейно упорядочено и если  $i \leq j$ , то  $\delta_i \geq \delta_j$ .

Пусть  $e$  - ненулевой дополняемый идемпотент в  $S$ , и  $h_i : S \rightarrow S/\delta_i$  - естественные эпиморфизмы. Если  $h_i(e) = \bar{0} \in S/\delta_i$ , то  $e \equiv 0(\delta)$ , откуда  $e = 0$ . Поэтому  $h_j(e) \neq \bar{0} \in S/\delta_j$  для некоторого  $j$ . Тогда  $h_k(e)$  - ненулевой дополняемый идемпотент полукольца  $S/\delta_k$  для любого  $k \geq j$ . А поскольку  $S/\delta_k$  неразложимые, то  $h_k(e) = \bar{1} \in S/\delta_k, k \geq j$ . Поскольку  $\bigwedge_{k \geq j} \delta_k = \delta$ , то  $e^\perp \equiv 0(\delta)$  и  $e^\perp = 0, e = 1$  и  $S$  неразложимо.  $\square$

Ниже нам потребуется утверждение, двойственно лемме Цорна, а именно, *если всякая цепь в частично упорядоченном множестве имеет точную нижнюю грань, то множество содержит минимальный элемент.*

Пусть  $S/\rho$  - неразложимое факторполукольцо и  $N$  - множество всех конгруэнций  $\delta_i$ , таких что  $\delta_i \leq \rho$  и  $S/\delta_i$  - неразложимый фактор.

Тогда по предложениям 1 и аналогу леммы Цорна справедливо

**Предложение 2.** Для любого неразложимого факторполукольца  $S/\rho$  существует такой  $m$ -фактор  $S/\delta$ , что  $\delta \leq \rho$ . В частности, каждое неразложимое факторполукольцо полукольца  $S$  - гомоморфный образ некоторого  $m$ -фактора полукольца  $S$ .

**Предложение 3.** Пусть  $S/\rho$  - ненулевое неразложимое факторполукольцо полукольца  $S$ , и  $0_\beta$  - класс нуля в  $S/\beta$ .

Если  $\{e_i, i \in I\}$  - множество всех дополняемых идемпотентов в  $S$ , лежащих в  $0_\rho$ , то  $S/\delta$  - пирсовский слой полукольца  $S$ , где  $a \equiv b(\delta) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp$  для некоторого  $e \in 0_\rho$ ;

Конгруэнция  $\rho$  содержит наибольшую конгруэнцию некоторой пирсовской цепи.

*Доказательство.*

1. Достаточно показать, что множество  $M$  всех дополняемых идемпотентов из  $0_\delta$  является максимальным идеалом из  $BS$ .

Пусть  $e \in BS \setminus M$ . Тогда  $e \notin 0_\rho$  и в силу неразложимости  $S/\rho$  идемпотент  $e^\perp$  обязан лежать в  $0_\rho$  и следовательно,  $e^\perp \in M$ . Получаем  $1 = e + e^\perp \in eBS \oplus M$  и  $M \in \text{Max}BS$ .

2. Пользуясь определением, построим пирсовскую цепь  $\{\rho_\alpha\}$ , все конгруэнции которой содержатся в  $\rho$ . Пусть  $\alpha$  - непредельный ординал, тогда на факторполукольце  $S/\rho_{\alpha-1} = S_{\alpha-1}$  конгруэнция  $\rho/\rho_{\alpha-1}$  такова, что  $S_{\alpha-1}/(\rho/\rho_{\alpha-1})$  - неразложимое факторполукольцо.

По (1) существует пирсовский слой  $S_\alpha$  и конгруэнция  $\rho_\alpha \leq \rho$  на полукольце  $S$ , связанная с естественным эпиморфизмом  $S \rightarrow S_{\alpha-1}$ . Если  $\alpha$  - предельный ординал, то  $\rho_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} \rho_\beta$  очевидно удовлетворяет условию  $\rho_\alpha \leq \rho$ . Тогда и наибольшая конгруэнция этой цепи будет содержаться в  $\rho$ .  $\square$

**Предложение 4.** Пусть  $\rho_\alpha, \rho_{\alpha+1}$  - соседние конгруэнции пирсовской цепи. Тогда  $0_{\rho_\alpha} \subsetneq 0_{\rho_{\alpha+1}}$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $h_\alpha : S \rightarrow S/\rho_\alpha, h_{\alpha+1} : S \rightarrow S/\rho_{\alpha+1}$  естественные эпиморфизмы. Пирсовский слой  $h_{\alpha+1}(S)$  изоморфен факторполукольцу  $(S/\rho_\alpha)/\delta_M$  для некоторого  $M \in \text{Max}B(S/\rho_\alpha)$ . Заметим, что идеал  $M$  ненулевой, так как  $S/\rho_\alpha$  разложимо и имеет нетривиальные дополняемые идемпотенты. Пусть  $\varphi : S/\rho_\alpha \rightarrow (S/\rho_\alpha)/\delta_M$  - естественный эпиморфизм. Имеем:  $h_{\alpha+1} = h_\alpha \circ \varphi$ . Тогда  $\text{Ker} \varphi \neq \bar{0}_{\rho_\alpha}$ , поскольку ядро содержит ненулевые до-

полняемые идемпотенты из  $M$ . Так как  $h_\alpha$  - эпиморфизм, то для подходящих  $a \in S$  и  $\bar{e} \in M \setminus \bar{0}_{\rho_\alpha}$  получаем  $h_\alpha(a) = \bar{e}$ .

Тогда  $a \in \text{Ker} h_{\alpha+1} \setminus \text{Ker} h_\alpha$ , то есть  $0_{\rho_\alpha} \subsetneq 0_{\rho_{\alpha+1}}$ .  $\square$

**Предложение 5.** Если  $\rho$  - не единичная конгруэнция на полукольце  $S$ , то  $S/\rho$  -  $mi$ -фактор  $\Leftrightarrow \rho$  - наибольшая конгруэнция некоторой пирсовской цепи.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . По предложению 3(2),  $\rho$  содержит наибольшую конгруэнцию  $\alpha$  некоторой пирсовской цепи. Поскольку  $S/\alpha$  неразложимое факторполукольцо,  $\alpha \leq \rho$  и  $S/\rho$  -  $mi$ -фактор, то  $\alpha = \rho$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $\rho_\gamma$  - наибольшая конгруэнция некоторой пирсовской цепи. Предположим, что  $S/\rho_\gamma$  не является  $mi$ -фактором. Тогда существует такая конгруэнция  $\gamma$ , что  $\gamma < \rho_\gamma$  и  $S/\gamma$  - неразложимое полукольцо. Рассмотрим два случая:

1.  $0_\gamma \subsetneq 0_{\rho_\gamma}$ . Поскольку классы нуля пирсовской цепи образуют строго возрастающую цепь, найдется ординал  $\alpha$  такой, что  $0_{\rho_\alpha} \subseteq 0_\gamma$  и  $0_{\rho_{\alpha+1}} \not\subseteq 0_\gamma$ . Пусть  $h: S \rightarrow S/\rho_\alpha$  - естественный эпиморфизм. В силу регулярности идеала  $h(0_{\rho_{\alpha+1}})$  в  $S/\rho_\alpha$  найдется дополняемый идемпотент  $\bar{e} \in h(0_{\rho_{\alpha+1}}) \setminus h(0_\gamma)$ . Рассмотрим конгруэнцию  $\gamma \setminus \rho_\alpha$  на полукольце  $\bar{S} = S \setminus \rho_\alpha$ . Полукольцо  $\bar{S} \setminus \bar{\gamma}$  неразложимо, поэтому  $\bar{e} \equiv \bar{1}(\bar{\gamma})$ . Тогда  $\bar{e}^2 \equiv \bar{0}(\bar{\gamma})$  и  $\bar{e}^\perp \in h(0_\gamma)$ . Отсюда  $\bar{1} = \bar{e} + \bar{e}^\perp \in h(0_{\rho_{\alpha+1}}) + h(0_\gamma) \subseteq h(0_{\rho_\gamma})$  и  $\bar{1} \equiv \bar{0}(\rho_\gamma \setminus \rho_\alpha)$ . Получаем  $1 \equiv 0(\rho_\gamma)$ , противоречие с тем, что по любой конгруэнции пирсовской цепи, в частности по наибольшей, ноль и единица не сравнимы.

2.  $0_\gamma = 0_{\rho_\gamma}$ . Пусть  $\gamma < \rho_\gamma$ ,  $S/\gamma$  - неразложимое факторполукольцо и  $0_\gamma = 0_{\rho_\beta}$ . Тогда  $0_{\gamma-1} \subsetneq 0_\gamma$  и  $h: S \rightarrow S/\rho_{\gamma-1}$  - естественный эпиморфизм. Конгруэнции  $\gamma/\rho_{\gamma-1} < \rho_\gamma/\rho_{\gamma-1}$  на полукольце  $S/\rho_{\gamma-1}$  различны, а классы нуля этих конгруэнций совпадают:  $0_{\gamma/\rho_{\gamma-1}} = h(0_\gamma) = h(0_{\rho_\gamma}) = 0_{\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1}}$ . Поскольку факторполукольца  $(S/\rho_{\gamma-1})/(\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1})$  и  $(S/\rho_{\gamma-1})/(\gamma/\rho_{\gamma-1})$  неразложимые, то все ненулевые дополняемые идемпотенты полукольца  $S/\rho_{\gamma-1}$  попадают в классы единицы как первого, таки второго факторполукольца. Пусть  $a \equiv b(\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1})$  для произвольных  $a, b \in S/\rho_{\gamma-1}$ . Тогда  $ae^\perp = be^\perp$  для некоторого  $e \in 0_{\rho_{\gamma-1}}$ , и  $ae^\perp \equiv be^\perp(\gamma/\rho_{\gamma-1})$ . Получаем  $a = a \cdot 1 \equiv ae^\perp \equiv be^\perp \equiv b \cdot 1 = b(\gamma/\rho_{\gamma-1})$  и  $\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1} \leq \gamma/\rho_{\gamma-1}$ , противоречие.  $\square$

**Предложение 6.** Пусть  $A$  - собственный регулярный идеал,  $\rho$  -  $A$ -регулярная конгруэнция,  $h: S \rightarrow S/\rho$  - естественный эпиморфизм.

1. Если  $S/\rho$  не является пирсовским слоем полукольца  $S$ , то существует такой дополняемый идемпотент  $e \in S$ , что  $A + eS$  и  $A + e^\perp S$  - собственные регулярные идеалы в  $S$ , строго содержащие идеал  $A$ ,

$$\begin{aligned} S &= (A + eS) + (A + e^\perp S), \\ A &= (A + eS)(A + e^\perp S) = (A + e^\perp S)(A + eS) = (A + eS) \cap (A + e^\perp S), \\ h(S) &\cong h(eS) \oplus h(e^\perp S). \end{aligned}$$

2. Для любого идемпотента  $\bar{e} \in S/\rho$  существует такой идемпотент  $e \in S$ , что  $h(e) = \bar{e}$ .

3. Если  $S/\rho$  - пирсовский слой полукольца  $S$  и  $e$  - дополняемый идемпотент в  $S$ , то либо  $e \in 0_\rho$  либо  $e^\perp \in 0_\rho$ .

4. Если полукольцо  $S/\rho$  неразложимо, то  $S/\rho$  — пирсовский слой для  $S$ .

5. Найдется хотя бы один такой пирсовский слой  $S/\gamma$ , что  $\rho \leq \gamma$ .

6. Пусть  $d$  не является левым (правым) уравниателем в полукольце  $S$ . Тогда  $h(d)$  не является левым (правым) уравниателем в полукольце  $S/\rho$ .

7. Если  $d$  - элемент в  $S$  с нулевым правым (левым) аннулятором, то в полукольце  $S/\rho$  элемент  $h(d)$  имеет нулевой правый (левый) аннулятор.

*Доказательство.*

1. Идеал  $A$  строго содержится в некотором максимальном идеале  $M \in \text{Max}BS$ , поэтому существует идемпотент  $e \in M \setminus A$ . Поскольку  $A + eS \subseteq M$ , то  $A + eS$  - собственный идеал. Если  $A + e^\perp S = S$ , то  $e \in e(A + e^\perp S) \subseteq A$ , поэтому  $A + e^\perp S$  - собственный идеал. Идеал  $A + e^\perp S$  строго содержит  $A$ , так как в противном случае  $1 = e^\perp + e \in A + eS \subseteq M$ . Оставшиеся утверждения очевидны.

2. Пусть  $\bar{e} = h(a)$ . Поскольку  $h(a^2) = \bar{e}^2 = \bar{e} = h(a)$ , то  $a^2 \equiv a(\rho)$ . Следовательно,  $a^2 e^\perp = a e^\perp$  для некоторого  $e \in A$ . Идемпотент  $e^\perp$  централен, поэтому  $(a e^\perp)^2 = a e^\perp$ . Наконец,  $h(a) = h(a(e + e^\perp)) = h(a)h(e) + h(a e^\perp) = h(a e^\perp)$ .

3. Пусть  $e \notin O_\rho$ . Идеал  $O_\rho \cap BS$  является максимальным идеалом булева кольца  $BS$ . Так как  $e e^\perp = 0 \in O_\rho \cap BS$ , то  $e^\perp \in O_\rho \cap BS$  в силу простоты максимального идеала.

4. Следует из 1.

5. Идеал  $A \cap BS$  содержится в некотором максимальном идеале  $M$  кольца  $BS$ . Для  $A$ -регулярной конгруэнции  $\gamma$  выполняется  $\rho \leq \gamma$  и  $S/\gamma$  - пирсовский слой.

6. Предположим,  $h(d)h(a) = h(d)h(b)$ . Тогда  $da \equiv db(\rho)$ , откуда  $dae^\perp = dbe^\perp$  для некоторого  $e \in O_\rho$ . Поскольку  $d$  не является левым уравнивателем, то  $ae^\perp = be^\perp$ , что означает  $h(a) = h(b)$ .

7. Следует из 6.  $\square$

### 3. Применение пирсовских цепей.

**Определение 1.** Полукольцо  $S$  называется **абелевым**, если каждый его идемпотент централен.

**Теорема 2.** Для полукольца  $S$  равносильны условия:

1.  $S$  - абелево полукольцо;
2. Для каждого собственного регулярного идеала  $A$  полукольцо  $S/\rho_A$  абелево, где  $\rho_A$  -  $A$ -регулярная конгруэнция;
3. Все пирсовские слои полукольца  $S$  - абелевы полукольца.

*Доказательство.* (2)  $\Rightarrow$  (3). Очевидно.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $e = e^2 \in S$ ,  $S/\rho_M$  - пирсовский слой для любого  $M \in \text{Max}BS$  и  $h_M: S \rightarrow S/\rho_M$  - естественные эпиморфизмы. Так как  $h_M(e)$  - идемпотент абелева полукольца  $h_M(S)$ , то  $h_M(e)h_M(a) = h_M(a)h_M(e)$  для любого  $a$  из  $S$ . Получаем, что  $ea \equiv ae(\rho_M)$  для любого  $M \in \text{Max}BS$ . Другими словами, образы элементов  $ea$  и  $ae$  совпадают в каждом слое пирсовского пучка. Поскольку пирсовское представление изоморфно для любого полукольца, то  $ea = ae$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $h: S \rightarrow S/\rho$  - естественный эпиморфизм и  $\bar{e} = \bar{e}^2 \in h(S)$ . По предложению 6(2),  $\bar{e} = h(e)$  для некоторого идемпотента  $e \in S$ . Так как  $S$  абелево, то  $e$  централен. Тогда  $\bar{e} = h(e)$  централен в  $h(S)$ .  $\square$

**Определение 2.** Пусть  $a_1, \dots, a_m \in S$  и  $f_i, g_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) - фиксированные многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от некоммутирующих переменных  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$  свободные члены которых равны 0. Отображение  $h_\rho: S \rightarrow S/\rho$  - естественный эпиморфизм. Конгруэнцию  $\rho$  назовем **специальной**, если для некоторых  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in S/\rho$  верны равенства

$$f_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$$

для всех  $i = 1, \dots, k$ .

Обозначим через  $\mathcal{E}$  множество всех неспециальных конгруэнций (относительно элементов и многочленов, указанных в предыдущем определении), через  $\mathcal{E}^*$  - подмножество в  $\mathcal{E}$ , состоящее из всех регулярных неспециальных конгруэнций.

**Лемма 1.** Если нулевая конгруэнция лежит в  $\mathcal{E}^*$ , то и  $\mathcal{E}$ , и  $\mathcal{E}^*$  содержат максимальные элементы.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную возрастающую цепь конгруэнций  $\{\rho_\alpha: \alpha \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{E}$  и покажем, что  $\rho = \bigvee_\alpha \rho_\alpha \in \mathcal{E}$ .

Для любого  $a \in I$  обозначим через  $\rho_\alpha(a) = \{s \in S: s \equiv a(\rho_\alpha)\}$  и  $\bar{a} = \bigcup_{\alpha \in I} \rho_\alpha(a)$ . Если  $\bar{a} \cap \bar{b} \ni s$ , то  $s \equiv a(\rho_{\alpha_1}), s \equiv b(\rho_{\alpha_2})$  для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ . Тогда  $\bar{a} = \bar{b}$ , откуда получаем разбиение полукольца  $S$  на классы вида  $\bar{a}$  и соответствующее бинарное отношение  $\bar{\rho}$ . Стандартно проверяется, что  $\bar{\rho}$  - конгруэнция на  $S$ , очевидно являющаяся верхней гранью конгруэнций  $\rho_\alpha, \alpha \in I$ .

Если  $\bar{\rho}$  является специальной, то выполняются равенства

$$f_i(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n).$$

Заметим, что тогда

$$\overline{f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)} = \overline{g_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)} \in S/\bar{\rho}$$

и по определению  $\bar{\rho}$

$$\begin{aligned} f_i(h_{\rho_{j_i}}(a_1), \dots, h_{\rho_{j_i}}(a_m), h_{\rho_{j_i}}(b_1), \dots, h_{\rho_{j_i}}(b_n)) = \\ = g_i(h_{\rho_{j_i}}(a_1), \dots, h_{\rho_{j_i}}(a_m), h_{\rho_{j_i}}(b_1), \dots, h_{\rho_{j_i}}(b_n)) \end{aligned}$$

для некоторых  $\rho_{j_i}, j_i \in I$ . Выбрав максимум  $j$  из  $j_i, i = 1, \dots, k$ , получим, что  $\rho_j \in \mathcal{E}$  является специальной, противоречие. Тогда точная верхняя грань  $\rho$  не является специальной, поскольку  $S/\bar{\rho}$  является факторполукольцом полукольца  $S/\rho$ . (Рассуждения фактически показывают совпадение  $\rho$  и  $\bar{\rho}$ ).

Рассмотрим ситуацию с  $\mathcal{E}^*$ . Заметим, что регулярная конгруэнция однозначно определяет и определяется регулярным идеалом - своим классом нуля. Поскольку объединение любой возрастающей цепи регулярных идеалов является регулярным идеалом, то точная верхняя грань возрастающей цепи конгруэнций из  $\mathcal{E}^*$  лежит в  $\mathcal{E}^*$ . По лемме Цорна  $\mathcal{E}^*$  содержит максимальный элемент.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $S$  - полукольцо,  $a_1, \dots, a_m \in S, f_i, g_i (i = 1, \dots, k)$  - многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от некоммутирующих переменных  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$  и свободные члены многочленов равны 0. Через  $h_p: S \rightarrow S/\rho$  обозначим естественный эпиморфизм. Равносильны условия:

1.  $f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = g_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n), i = 1, \dots, k$  для некоторых  $b_1, \dots, b_n \in S$ ;

2. Для каждого факторполукольца  $S/\rho$  найдутся такие  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in S/\rho$ , что справедливы равенства:

$$f_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n), i = 1, \dots, k;$$

3. Для каждого пирсовского слоя  $S/\rho$  найдутся такие  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in S/\rho$ , что справедливы равенства:

$$f_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n), i = 1, \dots, k;$$

4. Для каждого неразложимого факторполукольца  $S/\rho$  найдутся такие  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in S/\rho$ , что справедливы равенства:

$$f_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n), i = 1, \dots, k;$$

5. Для каждого  $ti$ -фактора  $S/\rho$  найдутся такие  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in S/\rho$ , что справедливы равенства:

$$f_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = g_i(h_\rho(a_1), \dots, h_\rho(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n), i = 1, \dots, k.$$

*Доказательство.* Очевидны импликации (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3), (2)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5). Импликация (5)  $\Rightarrow$  (4) верна потому, что каждое неразложимое факторполукольцо изоморфно факторполукольцу некоторого  $ti$ -фактора.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Допустим, (1) не верно. Тогда нулевая конгруэнция лежит в  $\mathcal{E}^*$  и, по лемме 1, в  $\mathcal{E}^*$  существует максимальный элемент  $\rho$ . Покажем, что  $S/\rho$  является пирсовским слоем. Предположим, что это не так. Тогда, по предложению 6(1), существует такой дополняемый идемпотент  $e \in S$ , что  $A = 0_\rho + eS$  и  $B = 0_\rho + e^\perp S$  - собственные регулярные идеалы в  $S$ , строго содержащие  $0_\rho$  и  $S/\rho \cong S/\rho_A \times S/\rho_B$ . Через  $\rho_A$  и  $\rho_B$  обозначены  $A$ -регулярная и  $B$ -регулярная конгруэнции соответственно. Конгруэнции  $\rho_A$  и  $\rho_B$  строго больше  $\rho$ , поэтому



не лежат в  $\mathcal{E}^*$ . Тогда конгруэнции  $\rho_A$  и  $\rho_B$  являются специальными, поэтому и  $\rho$  специальна. Противоречие показывает, что  $S/\rho$  - пирсовский слой. Таким образом, если не верно (1), то не выполняется (3).

(4)  $\Rightarrow$  (1). Допустим, (1) не верно. В этом случае нулевая конгруэнция лежит в  $\mathcal{E}$  и, по лемме 1, в  $\mathcal{E}$  существует максимальный элемент  $\rho$ . Достаточно показать, что  $S/\rho$  неразложимое полукольцо. Предположим, что  $S/\rho$  разложимо и  $S/\rho \cong S/\rho_1 \times S/\rho_2$  для некоторых конгруэнций  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Поскольку  $\rho < \rho_1$  и  $\rho < \rho_2$ , то  $\rho_1, \rho_2 \notin \mathcal{E}$ . Непосредственно проверяется, что  $\rho$  - специальная конгруэнция, противоречие.  $\square$

**Определение 3.** Полукольцо  $S$  назовем **заменяемым справа**, если для любых  $a, b \in S$ , таких что  $a + b = 1$  найдется дополняемый (не обязательно центральный) идемпотент  $e$ , такой что  $e \in aS, e^\perp \in bS$ .

**Лемма 2.** Факторполукольцо по регулярной конгруэнции заменяемого справа полукольца заменяемо справа, в частности, пирсовский слой заменяемого справа полукольца – заменяемое справа полукольцо.

*Доказательство.* Пусть  $S$  – заменяемо справа,  $A$  – регулярный идеал и  $\rho$  –  $A$ -регулярная конгруэнция. Допустим,  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{1}$  в  $S/\rho$  для некоторых  $a, b \in S$ , тогда  $a + b \equiv 1(\rho)$ , поэтому  $(a + b)g^\perp = g^\perp$  для подходящего дополняемого идемпотента  $g \in A$ . Имеем  $(ag^\perp + g) + bg^\perp = 1$  и по условию найдется такой дополняемый (не обязательно центральный) идемпотент  $e$ , что  $e = (ag^\perp + g)s$  и  $e^\perp = bg^\perp t$  для некоторых  $s, t \in S$ . Получаем:  $\bar{e} = \overline{ag^\perp s + gs} = \overline{ag^\perp s} \in \overline{aS/\rho}, \bar{e}^\perp = \overline{e^\perp} = \overline{bg^\perp t} \in \overline{bS/\rho}$ .  $\square$

**Теорема 4.** Для полукольца  $S$  равносильны условия:

1.  $S$  - заменяемое справа полукольцо;
2. Все пирсовские слои  $S$  - заменяемые справа полукольца;
3. Все  $mi$ -факторы для  $S$  - заменяемые справа полукольца.

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) по лемме 2.

(1)  $\Rightarrow$  (3). По теореме 5  $mi$ -фактор полукольца  $S$  является “последним пирсовским слоем” для некоторой пирсовской цепи.

Докажем трансфинитной индукцией, что факторполукольца  $S/\rho_\gamma$  заменяемого справа полукольца  $S$  по конгруэнциям  $\{\rho_\gamma\}$  пирсовской цепи заменяемы справа. Учитывая лемму 2, требуется показать справедливость утверждения только для предельного ординала: пусть  $\alpha$  - предельный ординал,  $\rho_\alpha$  - конгруэнция пирсовской цепи. Если  $h_\alpha(a) + h_\alpha(b) = h_\alpha(1)$  ( $h: S \rightarrow S/\rho_\alpha$  - естественный эпиморфизм), то  $a + b \equiv 1(\rho_\beta)$  для некоторой конгруэнции  $\rho_\beta \in \{\rho_\gamma\}, \beta < \alpha$ . В силу заменяемости справа конгруэнций с меньшими индексами, чем  $\alpha$ , существуют такие дополняемые идемпотенты  $h_\beta(e)$  и  $h_\beta(e)^\perp$ , что  $h_\beta(e) \in h_\beta(a)S/\rho_\beta, h_\beta(e)^\perp \in h_\beta(b)S/\rho_\beta$ . Пусть  $\varphi: S/\rho_\beta \rightarrow S/\rho_\alpha$  – естественный гомоморфизм, тогда  $\bar{e} = \varphi(h_\beta(e))$  и  $\bar{e}^\perp = \varphi(h_\beta(e)^\perp)$  – дополняемые (не обязательно центральные) идемпотенты, такие что  $\bar{e} \in h_\alpha(a)S/\rho_\alpha, \bar{e}^\perp \in h_\alpha(b)S/\rho_\alpha$ . Таким образом, верна импликация (1)  $\Rightarrow$  (3).

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$  - некоммутирующие переменные. Выберем многочлены:

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= y_1, \\ f_2(y_1, y_2) &= y_1 + y_2, \\ f_3(y_1, y_2) &= y_1 y_2, \\ f_4(y_1) &= y_1, \\ f_5(y_2) &= y_2, \\ g_1(y_1) &= y_1^2, \\ g_2(x_1) &= x_1, \\ g_3(x_2) &= x_2, \end{aligned}$$

$$g_4(x_3, y_3) = x_3y_3,$$

$$g_5(x_4, y_4) = x_4y_4.$$

Пусть  $S/\rho$  - пирсовский слой полукольца  $S$ ,  $h: S \rightarrow S/\rho$  - естественный эпиморфизм. Выберем  $a, b \in S$ , такие что  $a + b = 1$ , следовательно,  $h(a) + h(b) = \bar{1}$ . По условию  $h(S)$  - заменяемое справа полукольцо, поэтому найдутся такие  $\bar{e}, \bar{f}, \bar{s}, \bar{t} \in h(S)$ , что

$$\begin{aligned} f_1(\bar{e}) &= \bar{e} &= \bar{e}^2 &= g_1(\bar{e}), \\ f_2(\bar{e}, \bar{f}) &= \bar{e} + \bar{f} &= h(1) &= g_2(h(1)), \\ f_3(\bar{e}, \bar{f}) &= \bar{e}\bar{f} &= h(0) &= g_3(h(0)), \\ f_4(\bar{e}) &= \bar{e} &= h(a)\bar{s} &= g_4(h(a), \bar{s}), \\ f_5(\bar{f}) &= \bar{f} &= h(b)\bar{t} &= g_5(h(b), \bar{t}). \end{aligned}$$

По теореме 3 равенства  $f_i(1, 0, a, b, e, f, s, t) = g_i(1, 0, a, b, e, f, s, t)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , верны в  $S$  для некоторых  $e, f, s, t \in S$ , значит  $S$  заменяемо справа.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Доказывается аналогично предыдущей импликации с заменой слов “пирсовский слой” на “максимальный неразложимый фактор”.  $\square$

**Определение 4.** Полукольцо  $S$  называется **правым полукольцом Безу**, если каждый конечно порожденный правый идеал из  $S$  является главным правым идеалом.

**Лемма 3.** Для полукольца  $S$  равносильны условия:

1. Полукольцо  $S$  является полукольцом Безу;
2.  $(\forall m, n \in S)(\exists a, b, c, d \in S)(m = mac + nbc, n = nbd + mad)$ .

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $m, n \in S$ . Правый идеал  $mS + nS$  является главным правым идеалом  $zS$  для некоторого  $z \in S$ . Тогда  $z = ma + nb$  для некоторых  $a, b \in S$ . С другой стороны,  $m = zc, n = zd$  для некоторых  $c, d \in S$ , откуда следует (2).

(2)  $\Rightarrow$  (1). Покажем, что правый идеал  $mS + nS$  является главным правым идеалом. Рассмотрим произвольный элемент  $ms_1 + ns_2 \in mS + nS$ . По условию  $ms_1 + ns_2 = macs_1 + nbc s_1 + nbd s_2 + mads_2 = (ma + nb)(cs_1 + ds_2) \in zS$ , где  $z = ma + nb$ . Очевидно,  $zS \subseteq mS + nS$ .  $\square$

**Теорема 5.** Для полукольца  $S$  равносильны условия:

1.  $S$  - правое полукольцо Безу;
2. Все пирсовские слои полукольца  $S$  - правые полукольца Безу;
3. Все неразложимые факторполукольца полукольца  $S$  - правые полукольца Безу;
4. Все  $m_i$ -факторы для  $S$  - правые полукольца Безу.

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3) следуют из того, что каждое факторполукольцо правого полукольца Безу - правое полукольцо Безу. (3)  $\Rightarrow$  (4) очевидно. По той же причине, с помощью предложения 2, следует (4)  $\Rightarrow$  (3).

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $m, n \in S$  и

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1, g_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1y_1y_3 + x_2y_2y_3 \\ f_2(x_2) &= x_2, g_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_4) = x_1y_1y_4 + x_2y_2y_4 \end{aligned}$$

- многочлены над полукольцом целых неотрицательных чисел от некоммутирующих переменных  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4$ .

Пусть  $h(S) = S/\rho$  - произвольный пирсовский слой полукольца  $S$ ,  $h: S \rightarrow S/\rho$  - естественный эпиморфизм. Поскольку  $h(S)$  - правое полукольцо Безу, то существуют такие  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in h(S)$ , что

$$h(m) = h(m)\bar{a}\bar{c} + h(n)\bar{b}\bar{c}, h(n) = h(m)\bar{a}\bar{d} + h(n)\bar{b}\bar{d}.$$

По теореме 3 существуют такие  $a, b, c, d \in S$ , что  $m = mac + nbc, n = nbd + mad$ . По лемме 3,  $S$  - правое полукольцо Безу.

(3)  $\Rightarrow$  (1) доказывается аналогично.  $\square$

Также построена характеристика пирсовскими цепями регулярных полуколец, аналог пирсовских цепей получен для полумодулей и полуколец с инволюцией.

**Литература**

1. Вечтомов Е.М. Функциональные представления колец. М.: Изд-во МПГУ, 1993.
2. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
3. Чермных В.В. Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, 5. С. 185–186.
4. Чермных В.В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. матем., 17:3 (2012), 111–227.
5. Burgess W.D., Stephenson W. Pierce sheaves of noncommutative rings // Comm. Algebra. 1976. V. 39. P. 512–526.
6. Burgess W.D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for noncommutative rings // Comm. Algebra. 1978. V. 6, 9. P. 863–886.
7. Burgess W.D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. V. 22, 2. 1979. P. 159–164.
8. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V. 70. P. 1–112.

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА

Г.П. Омарова

Южный Федеральный Университет

**Аннотация.** В данной работе изучаются псевдодифференциальные операторы на  $\mathbb{R}^n$  с символами из класса Хермандера  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  при  $0 \leq \rho < 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$  в шкале пространств Гельдера-Зигмунда  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  при  $s \in \mathbb{R}$ . Основные вопросы, которые здесь рассматриваются, - это условия ограниченности и условия компактности изучаемых операторов. Кроме того, полученные результаты об ограниченности и компактности псевдодифференциальных операторов обобщаются на случай весовых пространств Гельдера-Зигмунда.

### Введение.

Теория псевдодифференциальных операторов начала формироваться в 1960-е годы. Эти операторы оказались необходимыми при решении проблемы вычисления индекса общего эллиптического оператора. С появлением псевдодифференциальных операторов выяснилось, что они применимы ко многим другим задачам в особенности в теории уравнений в частных производных. Оказалось, что исчисление псевдодифференциальных операторов позволяет преодолеть многие технические трудности и открывает возможности новых продвижений в анализе. Эти продвижения столь существенны, что современную математику и математическую физику нельзя представить без теории псевдодифференциальных операторов. В этом направлении было проведено необозримое количество исследований. Одними из первых работ с исчислениями псевдодифференциальных операторов являются [9] и [10]. Не иссякает интерес к псевдодифференциальным операторам и по сей день. Например, издательство Springer в 2010 году начало выпускать электронный журнал "Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications" (<http://www.springerlink.com/content/1662-9981/>).

Наиболее естественно рассматривать псевдодифференциальные операторы в пространствах бесселевых потенциалов (пространствах Соболева-Слободецкого). Однако, когда речь идет об исследовании гладкости решений операторных уравнений, эти пространства не всегда удобны. В этом случае более адекватными задаче являются пространства Гельдера (пространства непрерывных функций или несколько раз дифференцируемых функций рассматривать нельзя, так как в них псевдодифференциальные операторы не являются непрерывными). Поэтому возникает задача о действии псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера. Здесь, правда, возникают свои трудности: псевдодифференциальные операторы неограничены в пространствах Гельдера при целых показателях гладкости. Эта трудность обходится заменой пространств Гельдера на пространства Зигмунда, которые совпадают при нецелых положительных показателях. Кроме того, пространства Зигмунда можно определить и при отрицательных показателях гладкости. Это удобно, так как позволяет включить в рассмотрение многие обобщенные функции, такие как дельта-функция.

Всюду будем использовать следующие стандартные обозначения. Для элементов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  вещественного  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$  их скалярное произведение выражается формулой  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ , при этом  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$  и  $dx = dx_1 \dots dx_n$ .

Для мультииндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , то есть вектора с неотрицательными целыми элементами  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , обозначим, как обычно,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  и  $\partial_{x_j}^{\alpha_j} = \partial^{\alpha_j} / \partial x_j^{\alpha_j}$ ,  $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ . Удобно обозначить  $D_j = \partial / (i \partial_{x_j})$ , где  $i$  - мнимая единица (то есть  $i^2 = -1$ ), тогда  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ .

Будут использоваться следующие множества функций:

а) множество  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  - множество всех бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}^n$  функций;



б)  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  - множество всех бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}^n$  функций с компактными носителями;

с)  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  - банахово пространство с нормой, определяемой для функции  $f$  соотношением

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|;$$

д) пространство Шварца всех быстро убывающих функций  $S(\mathbb{R}^n)$  состоит из бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}^n$  функций  $u$ , стремящихся к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени  $|x|$ , т.е. для любых мультииндексов  $\alpha, \beta$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta u)(x)| < +\infty;$$

е) пространства Шварца  $S'(\mathbb{R}^n)$  линейных непрерывных функционалов над  $S(\mathbb{R}^n)$ .

В первой части настоящей работы приводятся основные факты и определения (здесь мы исходили из [1], [2], [9]). В этой части определяются классы символов  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  Л. Хермандера, в этих классах вводится набор полунорм  $|a|_{p, q}^m$ , каждому символу  $a(x, \xi)$  ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор  $T_a(x, D)$ , приводится несколько важных в символьном исчислении теорем о псевдодифференциальных операторах. Также здесь содержатся определения пространств Гельдера  $C^s(\mathbb{R}^n)$  и Зигмунда  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ , понятие осцилляторных интегралов и их основные свойства, рассматриваются амплитуда  $a(x, y, \xi)$ , и амплитудная запись псевдодифференциального оператора.

Во второй части данной работы рассматривается вопрос об ограниченности псевдодифференциальных операторов с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  в пространствах Гельдера-Зигмунда  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  при  $\rho < 1$ .

Хорошо известно (см. напр., [2], [4]), что при  $\rho = 1$  псевдодифференциальный оператор  $T_a$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  ограничен из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m}(\mathbb{R}^n)$  для любого  $s \in \mathbb{R}$  и  $0 \leq \delta \leq 1$ . Отметим, что в [2] рассмотрен только случай  $s > 0$ . Условие  $\rho = 1$  является в некотором смысле и необходимым для ограниченности псевдодифференциальных операторов в указанных пространствах. Поэтому долгое время случай  $\rho < 1$  не исследовался. В 2009 году китайские исследователи Ян Лин и Шан Зен Лю в статье [3] доказали ограниченность псевдодифференциальных операторов для произвольного  $\rho$  из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+1)}(\mathbb{R}^n)$  при  $s > 0$  и  $s > m + (1-\rho)(n+1)$ . Тот факт, что случай  $\rho < 1$  рассмотрен совсем недавно, говорит об актуальности этой задачи. Здесь мы формулируем аналогичную теорему, но с некоторыми уточнениями. В этой части мы доказываем для  $0 < \rho \leq 1$  ограниченность псевдодифференциальных операторов из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+s)}(\mathbb{R}^n)$  при любом  $s \in \mathbb{R}$  и любом  $\varepsilon > 0$ . Этот результат был опубликован в [5] и [6].

В третьем пункте исследованы условия компактности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда. Следует отметить, что при  $\rho = 1$  в статье [7] доказан критерий компактности псевдодифференциальных операторов в шкале пространств Гельдера-Зигмунда. Используя метод, предложенный в [7], здесь доказывается критерий компактности псевдодифференциальных операторов для случая  $0 < \rho < 1$ .

В четвертом пункте настоящей работы рассматриваются вопросы ограниченности и компактности псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда. В этой части вводятся определения весовой функции  $\omega(x)$  и пространств Гельдера-Зигмунда с весом  $\Lambda^{s, \omega}(\mathbb{R}^n)$  ([7]), формулируются и доказываются теорема об ограниченности псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда и критерий компактности псевдодифференциальных операторов в этих пространствах.

### 1. Основные определения и вспомогательные сведения.

**Псевдодифференциальные операторы.** Будем рассматривать псевдодифференциальные операторы с символами из следующих классов.

**Определение 1.** ([9]) Через  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  ( $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ ) будем обозначать классы символов Л. Хермандера - множество всех функций  $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  таких, что для любых мультииндексов  $\alpha$  и  $\beta$  существуют такие константы  $c_{\alpha,\beta} > 0$ , не зависящие от  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , что справедливы неравенства

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq c_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Наименьшие константы в этих неравенствах обозначим

$$c_{\alpha,\beta}(a) = \sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^n} (|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-m + \rho|\alpha| - \delta|\beta|}) < \infty. \quad (1.1)$$

Заметим, что в классе символов Л. Хермандера  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  для функции  $a(x, \xi)$  вводится набор полунорм для любых неотрицательных целых чисел  $p$  и  $q$

$$|a|_{p,q}^m := \max_{|\beta| \leq p, |\alpha| \leq q} \sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{\rho|\alpha| - \delta|\beta| - m} < \infty. \quad (1.2)$$

Этот набор полунорм определяет топологию в  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Для каждого символа  $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  можно построить единственный псевдодифференциальный оператор:

**Определение 2.** ([9]) Пусть символ  $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда псевдодифференциальный оператор  $T_a(x, D)$ , построенный по символу  $a(x, \xi)$ , действует на функцию  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  по формуле

$$(T_a f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

где  $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$  – преобразование Фурье функции  $f(x)$ .

Хорошо известно, что псевдодифференциальный оператор из указанного класса непрерывен из  $S(\mathbb{R}^n)$  в  $S(\mathbb{R}^n)$ . Кроме того, хорошо известны следующие утверждения, которые приводятся без доказательства.

Для продолжения псевдодифференциальных операторов на пространство  $S'(\mathbb{R}^n)$  необходимо введение в рассмотрение транспонированного оператора.

**Определение 3.** ([9]) Транспонированный оператор  $T_a^t$  к псевдодифференциальному оператору  $T_a$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  определяется следующим образом: это такой оператор, что для любых  $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$  имеет место равенство  $\langle T_a u, v \rangle = \langle u, T_a^t v \rangle$ , где

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(x) dx.$$

**Теорема 1.** ([9]) Пусть  $T_a$  - псевдодифференциальный оператор с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда символ  $a'(x, \xi)$  транспонированного оператора принадлежит  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , и он определяется единственным образом с точностью до слагаемого из  $S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  следующим асимптотическим разложением

$$a'(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, -\xi),$$

в том смысле, что

$$a'(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, -\xi) \in S_{\rho,\delta}^{m-N(\rho-\delta)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

для любого натурального  $N$ .

Теперь (так как транспонированный оператор является псевдодифференциальным) действие псевдодифференциального оператора  $T_a$  можно распространить на любые обобщенные функции из пространства Шварца  $S'(\mathbb{R}^n)$  линейных непрерывных функционалов над  $S(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 4.** ([9]) Псевдодифференциальный оператор  $T_a(x, D)$ , действует на функцию  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  по формуле

$$\langle T_\alpha f, u \rangle = \langle f, T_\alpha^* u \rangle,$$

где  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ , а  $\langle g, v \rangle$  - обозначение для результата применения линейного непрерывного функционала (обобщенной функции)  $g$  к основной функции  $v$ .

Очевидно, что так продолженный на  $S'(\mathbb{R}^n)$  псевдодифференциальный оператор является непрерывным.

Аналогичный результат справедлив и для формально сопряженного оператора:

**Определение 5.** ([9]) Формально сопряженный оператор  $T_\alpha^*$  к псевдодифференциальному оператору  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , определяется следующим образом: это такой оператор, что для любых  $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$  имеет место равенство  $(T_\alpha u, v) = (u, T_\alpha^* v)$ , где (в отличие от транспонированного оператора)

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

**Теорема 2.** ([9]) Пусть  $T_\alpha$  - псевдодифференциальный оператор с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда символ  $a^*(x, \xi)$  формально сопряженного оператора принадлежит  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , и он определяется единственным образом с точностью до слагаемого из  $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  следующим асимптотическим разложением

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \overline{D_x^{\alpha} a(x, \xi)},$$

в том смысле, что

$$a^*(x, \xi) - \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \overline{D_x^{\alpha} a(x, \xi)} \in S_{\rho, \delta}^{m-N(\rho-\delta)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

для любого натурального  $N$ .

Часто в дальнейшем будет использована теорема о композиции двух псевдодифференциальных операторов.

**Теорема 3.** ([9]) Пусть  $T_\alpha$  - псевдодифференциальный оператор с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho_1, \delta_1}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , и  $T_b$  - псевдодифференциальный оператор с символом  $b(x, \xi) \in S_{\rho_2, \delta_2}^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , где  $\delta_1 < \rho_2$ . Тогда их композиция  $T_c = T_b \circ T_\alpha$  является псевдодифференциальным оператором с символом  $c(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , где  $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ ,  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$  и  $m = m_1 + m_2$ . Символ  $c(x, \xi)$  определяется единственным образом с точностью до слагаемого из  $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  следующим асимптотическим разложением

$$c(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} b(x, \xi) \partial_x^{\alpha} a(x, \xi),$$

в том смысле, что

$$c(x, \xi) - \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} b(x, \xi) \partial_x^{\alpha} a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m-N(\rho_2-\delta_1)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

для любого натурального  $N$ .

### Пространства Гельдера на $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 6.** ([2]) Для любого положительного нецелого числа  $s$ , банахово пространство Гельдера  $C^s(\mathbb{R}^n)$  состоит из всех функций, непрерывных и ограниченных на  $\mathbb{R}^n$  со всеми своими частными производными до порядка  $[s]$ , причем частные производные порядка  $[s]$  равномерно непрерывны по Гельдеру на  $\mathbb{R}^n$  с показателем  $\{s\}$ . Норма в  $C^s(\mathbb{R}^n)$  равна

$$\|f\|_s = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_x^{\alpha} f(x)| + \sum_{|\alpha| = [s]} \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|\partial_x^{\alpha} f(x) - \partial_y^{\alpha} f(y)|}{|x - y|^{\{s\}}}.$$

Большое неудобство состоит в том, что псевдодифференциальные операторы из классов Л. Хермандера не являются ограниченными в пространствах Гельдера в случае целого  $s$ . Эту проблему можно решить, заменив пространства Гельдера на пространства Зигмунда.

**Пространства Зигмунда на  $\mathbb{R}^n$ .** Для того чтобы ввести функциональные пространства Зигмунда воспользуемся разбиением единицы Литтлвуда-Пели (см. напр. [2], [4]).

Пусть  $\lambda_0$  — бесконечно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , причем

$$\lambda_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{для } |\xi| \geq 2. \end{cases}$$

Для целого  $j \geq 1$  положим

$$\lambda_j(\xi) = \lambda_0(2^{-j}\xi) - \lambda_0(2^{-j+1}\xi). \quad (1.4)$$

Заметим, что эти функции и образуют разбиение единицы, то есть

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(\xi) = 1$$

для любого  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Рассматривая функции  $\lambda_j$  как символы, построим псевдодифференциальные операторы

$$\Delta_j = \lambda_j(D). \quad (1.5)$$

Разбиение единицы для символов приводит к разбиению единицы для операторов

$$I = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j. \quad (1.6)$$

Теперь все готово для определения пространств Зигмунда.

**Определение 7.** ([2]) Будем говорить, что обобщенная функция  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  принадлежит пространству Гельдера-Зигмунда  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , если существует такая константа  $C > 0$ , что

$$\|\Delta_j(f)\|_{\infty} \leq C 2^{-js}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Наименьшее  $C > 0$ , удовлетворяющее этим оценкам, может быть взято за норму обобщенной функции в  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ .

Заметим (см. [4]), что в случае  $s > 0$  для функции  $f \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  конечна норма  $\|f\|_{\infty} \leq C$ . Для любого положительного нецелого числа  $s$  пространство  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  совпадает с пространством Гельдера  $C^s(\mathbb{R}^n)$  и  $C^s(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  для целого неотрицательного  $s$ .

**Осцилляторные интегралы.** Для того, чтобы иметь возможность записывать псевдодифференциальный оператор в виде двойного интеграла, последнему необходимо придать смысл (в обычном смысле он расходится). Пусть функция  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  такая, что

$$\chi(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ и } |\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1 \text{ или } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

**Определение 8.** ([1]) Пусть  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда осцилляторным интегралом от функции  $a(x, \xi)$  называется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) a(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi} dx d\xi, \quad (1.7)$$

если он существует, и обозначается  $Os.[a(x, \xi)e^{-ix \cdot \xi}]$ .

Пусть, как обычно, псевдодифференциальный оператор  $(1 - \Delta)^k$  имеет символ  $p(\xi) = (1 + |\xi|^2)^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . В следующей хорошо известной теореме утверждается существование осцилляторного интеграла и дается его регуляризация.

**Теорема 4.** (см. напр. [1]) Осцилляторный интеграл от  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  существует, не зависит от выбора функции  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  и может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} & Os.[a(x, \xi)e^{-ix \cdot \xi}] = \\ & = \iint e^{-ix \cdot \xi} (1 + |\xi|^2)^{-k_1} (1 - \Delta_x)^{k_1} (1 + |x|^2)^{-k_2} (1 - \Delta_{\xi})^{k_2} a(x, \xi) dx d\xi, \end{aligned}$$



где  $k_1, k_2$  - любые натуральные числа такие, что  $2k_1 > m + n$  и  $2k_2 > n$ .

В дальнейшем нам будут необходимы следующие свойства осцилляторных интегралов:

$$\begin{aligned} Os. [\xi^\alpha a(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi}] &= Os. [D_x^\alpha a(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi}]; \\ Os. [x^\alpha a(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi}] &= Os. [D_\xi^\alpha a(x, \xi) e^{-ix \cdot \xi}]; \end{aligned}$$

любая функция  $u \in S(\mathbb{R}^n)$  может быть представлена в виде

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} Os. [u(y) e^{-i(x-y) \cdot \xi}]. \quad (1.8)$$

**Амплитудная запись псевдодифференциального оператора.** Рассмотрим интеграл вида

$$(T_\alpha f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) f(y) dy d\xi, \quad (1.9)$$

где  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .

В (1.9) вместо символа  $a(x, \xi)$  стоит более общая функция  $a(x, y, \xi)$ , называемая амплитудой или двойным символом, от трех переменных  $x, y, \xi \in \mathbb{R}^n$ .

На амплитуду накладываются условия, аналогичные условиям на символ, а именно амплитуда  $a(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ , если  $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$  и для любых мультииндексов  $\alpha, \beta, \gamma$  выполняется

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq c_{\alpha, \beta, \gamma} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\gamma| + \delta|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Запись оператора в виде интеграла (9) часто бывает удобна, при этом ее введение не приводит к расширению множества псевдодифференциальных операторов, что видно из следующей хорошо известной теоремы.

**Теорема 5.** (см. напр. [1]) Пусть  $a(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда оператор  $T_\alpha$ , определенный в (1.9), является псевдодифференциальным оператором с символом  $a(x, \xi)$  из класса  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Символ  $a(x, \xi)$  определяется единственным образом с точностью до слагаемого из  $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  следующим асимптотическим разложением

$$a(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}$$

в том смысле, что

$$a(x, \xi) - \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x} \in S_{\rho, \delta}^{m-N(\rho-\delta)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

для любого натурального  $N$ .

## 2. Теорема ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда при $\rho < 1$ .

Хорошо известно (см. напр., [2], [4]), что при  $\rho = 1$  псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  ограничен из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m}(\mathbb{R}^n)$  для любого  $s \in \mathbb{R}$  и  $0 \leq \delta \leq 1$ . Отметим, что в [2] рассмотрен только случай  $s > 0$ . Условие  $\rho = 1$  является в некотором смысле и необходимым для ограниченности псевдодифференциальных операторов в указанных пространствах. Поэтому долгое время случай  $\rho < 1$  не исследовался. В 2009 году китайские исследователи Ян Лин и Шан Зен Лю в статье [3] рассмотрели вопрос об ограниченности псевдодифференциальных операторов при произвольном  $\rho$ . Ими была доказана следующая теорема.

**Теорема 6.** ([3]) Псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , где  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$  и  $0 \leq \rho \leq 1$ , является ограниченным из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+1)}(\mathbb{R}^n)$  при  $s > 0$  и  $s > m + (1-\rho)(n+1)$ .

Эта теорема нуждается в некотором уточнении, которое удалось установить и сформулировать в следующей теореме, являющейся основным результатом данной работы.

**Теорема 7.** Пусть  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \rho \leq 1$  и  $0 \leq \delta < 1$ . Псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  является ограниченным из пространства Гельдера-

Зигмунда  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в пространство Гельдера-Зигмунда  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ , для любого  $s \in \mathbb{R}$  и любого  $\varepsilon > 0$ . И при этом существуют постоянные  $C > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $g \geq 0$  такие, что норма оператора удовлетворяет следующей оценке:

$$\|T_\alpha\| \leq C|a|_{p,g}^m.$$

**Доказательство.** Напомним, что псевдодифференциальный оператор  $(1 - \Delta)^{\frac{r}{2}}$  имеет символ  $p(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}}$ , где  $r \in \mathbb{R}$ . Известно (см. напр. [2], [4]), что  $(1 - \Delta)^{\frac{r}{2}}$  является топологическим изоморфизмом из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-r}(\mathbb{R}^n)$ , поэтому доказательство достаточно провести для положительного  $s - m - (1 - \rho)(n + \varepsilon)$ . Действительно, достаточно рассмотреть композицию  $T_\alpha \circ (1 - \Delta)^{\frac{r}{2}}$ . По теореме 3 при  $\rho > 0$  композиция  $T_\alpha \circ (1 - \Delta)^{\frac{r}{2}}$  является псевдодифференциальным оператором с символом порядка  $m + r$ . Тогда можно выбрать  $r$  так, чтобы  $s - m - (1 - \rho)(n + \varepsilon) - r > 0$ .

Заметим, что число  $\varepsilon$  можно выбрать рациональным, так как имеет место вложение  $\Lambda^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ , непрерывное при  $s' > s$ .

В дальнейших рассуждениях будем придерживаться схемы, предложенной в книге [2].

Используя операторное разбиение единицы, представим псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  в виде суммы

$$T_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} T_\alpha \Delta_j := \sum_{j=0}^{\infty} T_{\alpha_j},$$

где

$$a_j(x, \xi) = a(x, \xi) \lambda_j(\xi), \quad (2.1)$$

для  $j = 0, 1, 2 \dots$

Пусть  $T_{\alpha_j}^\alpha = \partial_x^\alpha T_{\alpha_j}$  для любого мультииндекса  $\alpha$ . Тогда

$$T_{\alpha_j}^\alpha f(x) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} a_j(x, \xi) f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Обозначим

$$a_j^\alpha(x, \xi) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} (i\xi)^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} a_j(x, \xi). \quad (2.2)$$

Получим, записывая преобразование Фурье функции  $f$  в явном виде

$$T_{\alpha_j}^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_j^\alpha(x, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{i(x-z) \cdot \xi} dz d\xi.$$

Далее, применяя замену переменных под знаком интеграла, имеем

$$T_{\alpha_j}^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_j^\alpha(x, \xi) e^{iz \cdot \xi} d\xi f(x - z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} K_j^\alpha(x, z) f(x - z) dz,$$

где

$$K_j^\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_j^\alpha(x, \xi) e^{iz \cdot \xi} d\xi. \quad (2.3)$$

Таким образом, мы получили запись псевдодифференциального оператора  $T_{\alpha_j}^\alpha$  в виде интегрального оператора с интегрируемым и гладким ядром  $K_j^\alpha$ .

Нам необходима следующая лемма об оценках для ядер  $K_j^\alpha$  интегральных операторов, причем для рациональных чисел  $M \geq 0$ , входящих в оценки. Отметим, что лемма для целого числа  $M$  была доказана в работе [3].

**Лемма 1.** Пусть  $a \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  и  $0 \leq \delta \leq 1$ . Тогда для любых мультииндексов  $\beta, \gamma$  и любого рационального числа  $M \geq 0$  существуют такие постоянные  $p \geq 0$ ,  $g \geq 0$  и  $C_{M, \alpha, \beta, \gamma} > 0$ , что

$$|\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)| \leq C_{M, \alpha, \beta, \gamma} \max_{|\theta| \leq p, |\xi| \leq \varrho} c_{\theta, \xi, \beta}(\alpha) |z|^{-M} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho M+|\gamma|+\delta|\beta|)}, \quad (2.4)$$

Отметим, что  $c_{\theta, \xi, \beta}(\alpha)$  - постоянные из (1.1).

**Доказательство.** Для полноты изложения приведем полностью доказательство леммы для целого  $M$ , используя рассуждения из [3].

Для любого мультииндекса  $\theta$  с  $|\theta| = M$ , где  $M \geq 0$  целое число, учитывая (2.2) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} & (-iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z) = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} (iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma [(i\xi)^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} a_j(x, \xi) e^{ix \cdot \xi}] d\xi. \end{aligned}$$

Продифференцировав, получим

$$\begin{aligned} & (-iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z) = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} (iz)^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] e^{ix \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & (-iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z) = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} (-1)^{|\theta|} \int_{\mathbb{R}^n} [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] \partial_\xi^\theta (e^{iz \cdot \xi}) d\xi. \end{aligned}$$

Интегрированием по частям по  $\theta$  имеем

$$\begin{aligned} & (-iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z) = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] e^{iz \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Использование равенства (2.1) приводит к

$$\partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] = \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a(x, \xi) \lambda(2^{-j} \xi)],$$

откуда дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} & \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] = \\ & = \sum_{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta} C_{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_1, \gamma} \xi^{\alpha_1 + \gamma - \theta_1} \partial_\xi^{\theta_2} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a(x, \xi) 2^{-j|\theta_3|} (\partial_\xi^{\theta_3} \lambda)(2^{-j} \xi). \end{aligned}$$

Так как  $a \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ , и учитывая оценки для символа (1.1), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] \right| \leq \\ & \leq \sum_{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta} C_{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_1, \gamma} |\xi|^{\alpha_1 + \gamma - \theta_1} c_{\theta_2, \alpha_2 + \beta}(\alpha) (1 + |\xi|)^{m - \rho|\theta_2| + \delta|\beta| + \delta|\alpha_2|} 2^{-j|\theta_3|}. \end{aligned}$$

Исходя из того, что для  $j = 0$  носителем подынтегральной функции по  $\xi$  является шар  $|\xi| \leq 2$ , а при  $j \geq 1$  - кольцо  $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] \right| \leq \\ & \leq \sum_{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta} C_{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_1, \gamma} 3 c_{\theta_2, \alpha_2 + \beta}(\alpha) 2^{j(|\alpha_1| + |\gamma| - |\theta_1| + m - \rho|\theta_2| + \delta|\beta| + \delta|\alpha_2| - |\theta_3|)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\xi^\theta [(i\xi)^{\alpha_1 + \gamma} \partial_x^{\alpha_2 + \beta} a_j(x, \xi)] \right| \leq \\ & \leq C_{M, \alpha, \beta, \gamma} \max_{|\eta| \leq M} c_{\eta, \alpha_2 + \beta}(\alpha) 2^{j(m + |\alpha| - \rho M + |\gamma| + \delta|\beta|)}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$|(-iz)^\theta \partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)| \leq$$

$$\leq C_{M,\alpha,\beta,\gamma} \max_{|\eta| \leq M, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) 2^{j(m+|\alpha|-\rho M+|\gamma|+\delta|\beta|)}, \quad (2.5)$$

где  $g$  - неотрицательное целое число. Берем в (2.5) супремум по всем  $\theta$  таким, что  $|\theta| = M$ , получим справедливость соотношения (2.4) для целого числа  $M \geq 0$ .

Итак, мы получили, что для любого целого числа  $M \geq 0$

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)| \leq \\ & \leq C_{M,\alpha,\beta,\gamma} \max_{|\theta| \leq M, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) |z|^{-M} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho M+|\gamma|+\delta|\beta|)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Возведем соотношение (2.6) в положительную целую степень  $(k-1)$  и запишем (2.6), беря  $(M+l)$  вместо  $M$ , где  $l$  также целое неотрицательное число.

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)|^{k-1} \leq C_{M,\alpha,\beta,\gamma}^{k-1} \times \\ & \times \left( \max_{|\theta| \leq M, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) \right)^{k-1} |z|^{-M(k-1)} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho M+|\gamma|+\delta|\beta|)(k-1)} \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)| \leq \\ & \leq C_{M+l,\alpha,\beta,\gamma} \max_{|\theta| \leq M+l, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) |z|^{-M-l} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho(M+l)+|\gamma|+\delta|\beta|)}. \end{aligned}$$

Возьмем почленное произведение двух последних неравенств, получим

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)|^k \leq C_{M,\alpha,\beta,\gamma}^{k-1} C_{M+l,\alpha,\beta,\gamma} \times \\ & \times \left( \max_{|\theta| \leq M+l, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) \right)^k |z|^{-Mk-l} 2^{jk(n+m+|\alpha|+|\gamma|+\delta|\beta|)} 2^{-jk\rho M-j\rho l}. \end{aligned}$$

Извлекая арифметический корень  $k$ -ой степени из последнего соотношения, имеем

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x, z)| \leq \\ & \leq C_{M,l,\alpha,\beta,\gamma} \max_{|\theta| \leq M+l, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta+\beta}(\alpha) |z|^{-M-\frac{l}{k}} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho(M+\frac{l}{k})+|\gamma|+\delta|\beta|)}. \end{aligned}$$

Итак, мы завершили доказательство леммы.

Полученное выше неравенство позволяет доказать следующую лемму о действии операторов  $T_{\alpha_j^\alpha}$  в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  и об оценке их норм.

**Лемма 2.** (см. [3]) Пусть  $\alpha \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  и  $0 \leq \delta \leq 1$ . Тогда псевдодифференциальный оператор  $T_{\alpha_j^\alpha} = \partial_x^\alpha T_{\alpha_j}$  является ограниченным в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , существуют такие константы  $p \geq 0$ ,  $g \geq 0$  и не зависящая от  $j$  константа  $C_\alpha$ , что

$$\|T_{\alpha_j^\alpha} f\|_\infty \leq C_\alpha \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+\varepsilon))} \|f\|_\infty, \quad (2.7)$$

где  $c_{\theta,\zeta}(\alpha)$  — постоянные из (1.1).

**Доказательство.** Напомним, что

$$T_{\alpha_j^\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j^\alpha(x, z) f(x-z) dz.$$

Применим здесь лемму 1 при  $\beta = \gamma = 0$ , полагая поочередно  $M = 0$  и  $M = n + \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \|T_{\alpha_j^\alpha} f\| & \leq \|f\|_\infty \left( \int_{|z| \leq 2^{-j}} |K_j^\alpha(x, z)| dz + \int_{|z| > 2^{-j}} |K_j^\alpha(x, z)| dz \right) \leq \\ & \leq C_\alpha \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) \times \\ & \times \left( \int_{|z| \leq 2^{-j}} 2^{j(n+m+|\alpha|)} dz + \int_{|z| \geq 2^{-j}} |z|^{-n-\varepsilon} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho(n+\varepsilon))} dz \right) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

и

$$\|T_{\alpha_j^\alpha} f\| \leq C_\alpha \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+\varepsilon))} \|f\|_\infty,$$

что доказывает лемму.



Продолжим доказательство теоремы 7.

Для функции  $f \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ , существует константа  $C > 0$  такая, что

$$\|\Delta_j(f)\|_\infty \leq C2^{-js},$$

для любого  $j \geq 0$ . Наименьшая постоянная  $C$  сравнима с нормой функции  $f$  в пространстве  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ .

Учитывая очевидные свойства носителей функций  $\lambda_j$ , определенных в (1.4), для операторов  $\Delta_j$  (1.5) имеем равенство

$$\Delta_j = \Delta_j(\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}), \quad (2.8)$$

где будем считать, что  $\Delta_{-1} = 0$ .

Для оператора  $T_\alpha$  с символом  $\alpha \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  с учетом (2.7) справедливо равенство

$$T_\alpha f = \sum_{j=0}^{\infty} T_\alpha \Delta_j f$$

Применив свойство (2.8) для операторов  $\Delta_j$ , запишем цепочку равенств

$$T_\alpha f = \sum_{j=0}^{\infty} T_\alpha \Delta_j (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}) f = \sum_{j=0}^{\infty} T_{\alpha_j} f'_j = \sum_{j=0}^{\infty} F_j,$$

где

$$f'_j = (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1})f$$

и

$$F_j = T_{\alpha_j} f'_j.$$

При этом  $f'_j$  имеет норму

$$\|f'_j\|_\infty \leq C(2^s + 1 + 2^{-s})2^{-js}. \quad (2.9)$$

Для любого мультииндекса  $\alpha$  по лемме 2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha F_j\|_\infty &= \|\partial_x^\alpha T_{\alpha_j} f'_j\|_\infty \leq \\ &\leq C_\alpha \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+s))} \|f'_j\|_\infty. \end{aligned}$$

Последнее соотношение преобразуем с учетом (2.9), тогда

$$\|\partial_x^\alpha F_j\|_\infty \leq C_{\alpha,s} \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+s)-s)}. \quad (2.10)$$

Так как  $s > m + (1 - \rho)(n + \varepsilon)$ , при  $\alpha = 0$ , сумма будет сходиться по норме в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|Tf\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|F_j\|_\infty \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(m+(1-\rho)(n+s)-s)} \leq C.$$

Далее нам понадобится следующее разбиение единицы, введенное в [2].

Зафиксируем гладкую финитную функцию  $\phi(\xi)$  равную 1 в окрестности точки  $\xi = 0$ .

Возьмем

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= \phi(\xi), \\ \phi_j(\xi) &= (1 - \phi(\xi)) \frac{\xi_j}{|\xi|^2}, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\phi_j \in S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  для  $j = 0, 1, \dots, n$  и

$$1 = \phi_0(\xi) + \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) \xi_j.$$

Тогда, очевидно, что для любого целого  $l \geq 0$ ,

$$1 = \left( \phi_0(\xi) + \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) \xi_j \right)^l.$$

Из последнего соотношения имеем непосредственное следствие

$$I = \sum_{|\alpha| \leq l} T^\alpha \partial_x^\alpha,$$

где  $T^\alpha$  - псевдодифференциальные операторы с не зависящими от  $x$  символами из  $S_{-1,0}^{-l}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Для любых  $i \geq 0$  и  $j \geq 1$ , учитывая, что операторы коммутируют, получим

$$\Delta_j(F_i) = \Delta_j \left( \sum_{|\alpha| \leq l} T^\alpha \partial_x^\alpha \right) (F_i) = \sum_{|\alpha| \leq l} T^\alpha \Delta_j \partial_x^\alpha (F_i).$$

Применим результат леммы 2 к операторам  $T^\alpha \Delta_j$  при  $m = -l$ ,  $\rho = 1$ ,  $\delta = 0$ , полагая  $T_{\alpha_j} = T^\alpha \Delta_j$ . Тогда получим

$$\|T^\alpha \Delta_j f\|_\infty \leq C 2^{-jl} \|f\|_\infty.$$

Учитывая полученное выше представление  $\Delta_j(F_i)$  в виде суммы имеем

$$\|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq l} \|T^\alpha \Delta_j \partial_x^\alpha (F_i)\|_\infty.$$

По лемме 2

$$\|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} 2^{-jl} \|\partial_x^\alpha (F_i)\|_\infty.$$

Применим теперь оценку (2.10) и получим

$$\|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leq C_{l,\alpha,s} 2^{-jl} \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+l+(1-\rho)(n+s)-s)}.$$

Выбираем  $l = l_1$ , где  $l_1$  наименьшее целое число, большее чем  $s - m - (1 - \rho)(n + \varepsilon)$  при  $i \leq j$ . При  $i > j$  положим  $l = 0$ .

Тогда для  $i \leq j$  имеем

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_j \left( \sum_{i \leq j} F_i \right) \right\|_\infty &\leq \sum_{i \leq j} \|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leq \\ &\leq C 2^{-jl_1} \sum_{i \leq j} \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{j(m+l_1+(1-\rho)(n+s)-s)}, \end{aligned}$$

то есть

$$\left\| \Delta_j \left( \sum_{i \leq j} F_i \right) \right\|_\infty \leq C \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+s))},$$

и для  $i > j$

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_j \left( \sum_{i > j} F_i \right) \right\|_\infty &\leq \sum_{i > j} \|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leq \\ &\leq C \sum_{i > j} \max_{|\theta| \leq p} c_{\theta,0}(\alpha) 2^{i(m+(1-\rho)(n+s)-s)}, \end{aligned}$$

то есть

$$\left\| \Delta_j \left( \sum_{i > j} F_i \right) \right\|_\infty \leq C \max_{|\theta| \leq p} c_{\theta,0}(\alpha) 2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+s))}.$$

Объединив две последние оценки, получим

$$\|\Delta_j(Tf)\|_\infty = \left\| \Delta_j \left( \sum_{i=0}^{\infty} F_i \right) \right\|_\infty \leq C \max_{|\theta| \leq p, |\zeta| \leq g} c_{\theta,\zeta}(\alpha) 2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+s))},$$

что доказывает теорему.

### 3. Теорема компактности.

В данном пункте будем исследовать условия компактности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда. Следует отметить, что при  $\rho = 1$  в статье [7] доказан критерий компактности псевдодифференциальных операторов в шкале пространств Гельдера-Зигмунда.

**Теорема 8.** ([7]) Псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , является вполне непрерывным из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m}(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|x|+|\xi| \rightarrow \infty} a(x, \xi)(1 + |\xi|)^{-m} = 0.$$

Используя метод, предложенный в [7], далее доказывается критерий компактности псевдодифференциальных операторов для случая  $0 \leq \rho < 1$ .

**Теорема 9.** Псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq \delta < 1$ ,  $0 < \rho < 1$  является вполне непрерывным из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$  для любого  $\varepsilon > 0$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x, \xi)(1 + |\xi|)^{-m} = 0. \quad (3.1)$$

**Доказательство.**

1. Докажем сначала теорему в случае, когда  $m = 0$ ,  $0 < t < 1$ . Пусть условие (3.1) выполняется. Обозначим

$$\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ причем } \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{для } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Для каждого  $v > 1$  рассматриваем псевдодифференциальный оператор  $T_{\alpha_v}$  с символом  $a_v(x, \xi) = a(x, \xi)\phi(v^{-1}x)$ .

Возьмем  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ . По теореме 7 оператор  $T_{\alpha_v}$  ограничен из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^r(\Omega_v)$  при  $r = t - (1 - \rho)(n + \varepsilon_1)$ , где  $\Omega_v = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2v\}$  и  $\Lambda^r(\Omega_v)$  – банахово пространство всех функций из  $\Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon_1)}(\mathbb{R}^n)$  с носителями в  $\Omega_v$ .

Для ограниченного множества  $\Omega_v$  вложение  $\Lambda^r(\Omega_v) \subset \Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\Omega_v)$  компактно (см. [8]) и  $\Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\Omega_v) \subset \Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$  непрерывно.

Следовательно  $T_{\alpha_v}$  компактен из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ . Так как  $T_{\alpha_v} \rightarrow T_\alpha$  по операторной норме при  $v \rightarrow \infty$ , то и оператор  $T_\alpha$  компактен.

2. Для дальнейшего доказательства потребуется следующая лемма, доказанная в работе [7]:

**Лемма 3.** ([7]) Пусть последовательность  $v_k$  ограничена в  $C^t(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < t < 1$ , функция  $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$  и последовательность элементов  $h_k \in \mathbb{R}^n$  такая, что существует  $\sigma > 0$ , удовлетворяющее неравенству  $|h_k| - |h_{k-1}| \geq \sigma$  для любого  $k$ . Тогда последовательность функций  $u_k(x) = v_k(x)\phi(x - h_k)$  слабо стремится к нулю в  $C^t(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть теперь псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  является компактным оператором. Для любой функции  $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$  такой, что ее преобразование Фурье  $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , рассмотрим последовательность функций  $u_j = \phi(x - q_j)e^{ix \cdot \eta}$ , где  $|q_j| \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ ,  $|\eta| < \text{const} < \infty$ .

По лемме 3 последовательность  $u_j$  слабо стремится к нулю в  $C^t(\mathbb{R}^n)$ , поэтому  $T_\alpha u_j$  стремится к нулю в  $\Lambda^{t-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ .

Легко проверить, что

$$(2\pi)^n e^{-ix \cdot \eta} (T_\alpha u_j)(x + q_j) = \int a(x + q_j, \xi + \eta) \hat{\phi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Так как оператор сдвига унитарен, то

$$\|(T_\alpha u_j)(x + q_j)\|_t = \|(T_\alpha u_j)(x)\|_t \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что  $|(T_\alpha u_j)(q_j)| \leq \|(T_\alpha u_j)(x + q_j)\|_t$ . Следовательно,

$$\left| \int a(q_j, \xi + \eta) \hat{\phi}(\xi) d\xi \right| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Так как это выполняется для всех  $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  и всех  $\eta$ ,  $|\eta| < \text{const}$ , то  $a(q_j, \xi) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Таким образом, критерий полной непрерывности доказан для  $m = 0$ ,  $0 < t < 1$ .

3. Пусть теперь  $m$  и  $t$  произвольные. Псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  с символом  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  компактен из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда компактен псевдодифференциальный оператор  $B = (1 - \Delta)^{t-m-r} \circ T_\alpha \circ (1 - \Delta)^{r-t}$  с символом из  $S_{\rho, \delta}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , действующий из  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{r-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ , при  $0 < r < 1$ . Таким образом, этот случай сводится к рассмотренному выше. Теорема доказана.

#### 4. Ограниченность и компактность псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда.

**Определение 9.** Функцию  $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  будем называть весовой, если она удовлетворяет следующим условиям: существуют постоянные  $c > 0$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

$$c^{-1}(1 + |x|)^{l_1} \leq \omega(x) \leq c(1 + |x|)^{l_2}, x \in \mathbb{R}^n; \quad (4.1)$$

для некоторого  $\delta_0 > 0$  и для любого мультииндекса  $\beta$  существует постоянная  $c_\beta > 0$  такая, что

$$\left| \frac{\partial^\beta \omega(x)}{\partial x^\beta} \right| \leq c_\beta \omega(x) (1 + |x|)^{-\delta_0 |\beta|}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

**Определение 10.** Будем говорить, что обобщенная функция  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  принадлежит банахову пространству Гельдера-Зигмунда  $\Lambda^{s, \omega}(\mathbb{R}^n)$  с весом  $\omega$ , если  $\|f\|_{\Lambda^{s, \omega}(\mathbb{R}^n)} := \|\omega^{-1} f\|_{\Lambda^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$ , где  $\omega^{-1}(x) = 1/\omega(x)$ . Очевидно, что если  $0 < c_1 < \omega(x) < c_2 < \infty$ , то  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{s, \omega}(\mathbb{R}^n)$ .

**Лемма 4.** Для любого  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  и любой весовой функции  $\omega$  оператор  $B = \omega^{-1} T_\alpha \omega$  имеет символ из того же класса. Символ оператора  $B$  допускает представление

$$b(x, \xi) = a(x, \xi) + r(x, \xi),$$

где  $r \in S_{\rho, \delta}^{m-\rho}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  и  $(1 + |\xi|)^{\rho-m} r(x, \xi) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$  равномерно по  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Кроме того, существует  $N$  такое, что

$$|r|_{p, q}^{m-\rho} \leq C_{p, q, m, N, \omega} |a|_{p, q+N}^m \quad (4.3)$$

с независимой от оператора  $T_\alpha$  постоянной  $C_{p, q, m, N, \omega}$ .

**Доказательство.** Оператор  $B = \omega^{-1} T_\alpha \omega$  можно записать в виде

$$Bu(x) = (2\pi)^{-n} \iint \omega^{-1}(x) a(x, \xi) \omega(y) u(y) e^{i(x-y)\cdot \xi} dy d\xi$$

с двойным символом (амплитудой)

$$b(x, y, \xi) = \omega^{-1}(x) a(x, \xi) \omega(y). \quad (4.4)$$

Символ псевдодифференциального оператора  $B$  равен

$$b(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} B(e^{i0 \cdot \xi})$$

и может быть вычислен по формуле

$$b(x, \xi) = \iint b(x, x+y, \xi+\eta) e^{-iy \cdot \eta} dy d\eta, \quad (4.5)$$

где двойной интеграл понимается как осцилляторный.

Считая  $x$  и  $y$  параметрами и раскладывая  $b(x, x+y, \xi+\eta)$  по формуле Тейлора в окрестности  $\xi$  по степеням  $\eta$ , получим

$$\begin{aligned} b(x, x+y, \xi+\eta) &= \sum_{|\alpha| < N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha b(x, x+y, \xi) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=N} \frac{N \eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\xi^\alpha b(x, x+y, \xi+t\eta) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

После подстановки (4.6) в (4.5) учтем свойства осцилляторного интеграла (1.8):

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \iint \eta^\alpha \partial_\xi^\alpha b(x, x+y, \xi) e^{-iy \cdot \eta} dy d\eta = \\ & = b(x, x, \xi) + \sum_{0 < |\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha b(x, y, \xi)|_{y=x}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \iint \eta^\alpha e^{-iy \cdot \eta} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\xi^\alpha b(x, x+y, \xi + t\eta) dt dy d\eta = \\ & = \iint e^{-iy \cdot \eta} \int_0^1 (1-t)^{N-1} D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha b(x, x+y, \xi + t\eta) dt dy d\eta. \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание вид двойного символа (4.4), получим следующее представление для символа  $b(x, \xi)$  оператора  $B$ :

$$b(x, \xi) = a(x, \xi) + r(x, \xi), \quad r(x, \xi) = r_1(x, \xi) + r_2(x, \xi),$$

где

$$\begin{aligned} r_1(x, \xi) &= \sum_{0 < |\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \omega^{-1}(x) \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) D_x^\alpha \omega(x), \\ r_2(x, \xi) &= \omega^{-1}(x) \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \iint e^{-iy \cdot \eta} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \times \\ & \quad \times \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + t\eta) D_y^\alpha \omega(x+y) dt dy d\eta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим по отдельности все слагаемые, стоящие в правой части равенства (4.7). Учитывая неравенство (4.2), для каждого слагаемого в (4.7) имеем

$$|\omega^{-1}(x) \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) D_x^\alpha \omega(x)| \leq c_\alpha (1+|x|)^{-\delta_0 |\alpha|} |\alpha|_{0, |\alpha|}^m (1+|\xi|)^{m-\rho |\alpha|}.$$

Тогда

$$|r_1(x, \xi)| \leq \left( |\alpha|_{0, N-1}^m \sum_{0 < |\alpha| < N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \right) (1+|x|)^{-\delta_0} (1+|\xi|)^{m-\rho}. \quad (4.8)$$

Аналогично получаются оценки для производных  $r_1(x, \xi)$  по  $x$  и  $\xi$ .

Перейдем к оценке символа  $r_2(x, \xi)$ . Осцилляторный интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \iint e^{-iy \cdot \eta} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \omega^{-1}(x) \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + t\eta) D_y^\alpha \omega(x+y) dt dy d\eta = \\ & = \omega^{-1}(x) \int (1-t)^{N-1} \int (1-\Delta_\eta)^{t_1} \{ (1+|\eta|^2)^{-t_2} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + t\eta) \} \times \\ & \quad \times e^{-iy \cdot \eta} d\eta \int (1+|y|^2)^{-t_1} (1-\Delta_y)^{t_2} D_y^\alpha \omega(x+y) dy dt. \end{aligned}$$

Учитывая (4.1), (4.2) и неравенство

$$(1+|x+y|)^m \leq (1+|x|)^m (1+|y|)^{|m|},$$

получим при  $|\alpha| = N$  оценку

$$|\omega^{-1}(x) D_y^\alpha \omega(x+y)| \leq c^2 c_\alpha (1+|x|)^{l_2 - l_1 - \delta_0 N} (1+|y|)^{|l_2 - \delta_0 N|}.$$

Выберем  $N$  и затем  $t_1$  и  $t_2$  так, чтобы  $d = \delta_0 N - l_2 + l_1 > 0$ ,  $2t_2 > n + |m - N\rho|$  и  $2t_1 > n + |l_2 - \delta_0 N|$ . Тогда

$$|r_2(x, \xi)| \leq C |\alpha|_{0, N}^m (1+|x|)^{-d} (1+|\xi|)^{m-N\rho}, \quad (4.9)$$

где постоянная  $C$  не зависит от оператора  $T_\alpha$ .

Аналогично оцениваются производные  $r_2(x, \xi)$  по  $x$  и  $\xi$ . Тогда из (4.8) и (4.9) для символа  $r(x, \xi) = r_1(x, \xi) + r_2(x, \xi)$  следует утверждение леммы.

Воспользовавшись этим результатом, мы сформулируем следствия из теоремы 7 и теоремы 9 для весовых пространств Гельдера-Зигмунда.

**Теорема 10.** Пусть  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \delta < 1$  и  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  является ограниченным из  $\Lambda^{s, \omega}(\mathbb{R}^n)$  в



$\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon),\omega}(\mathbb{R}^n)$ , для любого  $s$  и любого  $\varepsilon > 0$ . При этом существуют постоянные  $C > 0, p \geq 0, g \geq 0$  такие, что норма оператора удовлетворяет следующей оценке:

$$\|T_\alpha\| \leq C|\alpha|_{p,g}^m.$$

**Доказательство.** Согласно лемме 4 псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  является ограниченным из  $\Lambda^{s,\omega}(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon),\omega}(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда псевдодифференциальный оператор  $B = \omega^{-1}T_\alpha\omega$  ограничен из  $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ .

Оператор  $B$ , в свою очередь, удовлетворяет условиям теоремы 7, то есть ограничен в указанных пространствах, что и доказывает теорему.

**Теорема 11.** Пусть  $m \in \mathbb{R}, 0 < \rho < 1, 0 \leq \delta < 1$  и  $\alpha(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  является вполне непрерывным из  $\Lambda^{t,\omega}(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m-(1-\rho)(n+\varepsilon),\omega}(\mathbb{R}^n)$  для любого  $\varepsilon > 0$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \alpha(x, \xi)(1 + |\xi|)^{-m} = 0. \quad (4.10)$$

**Доказательство.** По условиям леммы 4 псевдодифференциальный оператор  $T_\alpha$  является компактным из  $\Lambda^{t,\omega}(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m-(1-\rho)(n+\varepsilon),\omega}(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда псевдодифференциальный оператор  $B = \omega^{-1}T_\alpha\omega$  вполне непрерывен из  $\Lambda^t(\mathbb{R}^n)$  в  $\Lambda^{t-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$ .

А для псевдодифференциального оператора  $B$  применима теорема 9. Теорема доказана.

### Литература

1. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Добросвет, 2005.
2. Stein E.M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 1993 г.
3. Yan Lin, Shan Zhen Lu. Pseudo-Differential Operators on Sobolev and Lipschitz Spaces // Acta Mathematica Sinica, English Series. January 2010, Vol. 26, № 1, pp. 131-142.
4. V.S. Rabinovich. Fredholm Property of Pseudo-Differential Operators on Weighted Holder-Zygmund Spaces. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 164, pp. 95–114.
5. Кряквин В.Д., Омарова Г.П. Условия ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда // Международная конференция. Двадцать вторая крымская осенняя математическая школа. Сборник тезисов. 2011, с. 31.
6. Кряквин В.Д., Омарова Г.П. Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011, № 4, с. 45-48.
7. Кряквин В.Д. Критерии компактности и нетеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда // Уравнения с частными производными. 2009, том 45, № 1, с.101-110.
8. Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Шкалы банаховых пространств // Успехи мат. наук. 1966. Т.21. Вып. 2.
9. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипозеллиптические уравнения // Псевдодифференциальные операторы. Сборник статей. М.: Мир, 1967.
10. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. Алгебра псевдодифференциальных операторов // Псевдодифференциальные операторы. Сборник статей. М.: Мир, 1967.

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ЗАКОНА И АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ЭЛЕКТРОСВАРКИ ИЗДЕЛИЙ

*К.Н. Омеляненко*

*Самарский государственный технический университет*

**Аннотация.** В производственных условиях при аргодуговой сварке изделий действуют технологические и конструктивные возмущения на сварной шов, вызывающие отклонение номинальных параметров шва, трещины, подрезы, несплавления, непровары и прожоги изделий. Возникает актуальная проблема повышения качества сварных соединений и его стабилизации в пределах партии однотипных изделий. С целью получения сварных соединений с требуемыми свойствами в сварочном производстве широко применяются системы стабилизации параметров режима сварки с изменением их по заданному закону, автоматические системы регулирования проплавлением с использованием обратной связи по некоторому обобщенному технологическому параметру, а также другие системы и устройства для автоматического, в том числе программного управления процессом аргодуговой электросварки.

### **Введение.**

Несмотря на известные достижения в области разработки систем автоматического управления технологическим процессом электросварки, задача поиска простых и практически эффективных законов и алгоритмов управления в условиях технологических и конструктивных возмущений сохраняет свою актуальность.

Целью работы являются разработка и исследование автоматической системы эффективного управления процессом электросварки изделий, обеспечивающей повышенную точность стабилизации геометрических размеров сварочного шва и его заданный термический цикл в условиях действия технологических и конструктивных возмущений.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- анализ особенностей технологического процесса аргодуговой сварки, режимов работы электрооборудования, уровня развития систем управления;
- построение математической модели сварочного процесса как объекта автоматизации;
- разработка закона, алгоритма и системы автоматического управления аргодуговой электросваркой, субоптимальной по совокупности критериев качества (по быстродействию и интегральному квадратичному);
- исследования переходных процессов и процессов стабилизации технологических параметров на сварочной установке УСК-22 М при использовании разработанного блока управления.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач в работе использовались методы теории автоматического управления, идентификации объектов управления, анализа и синтеза релейных и непрерывных систем автоматического регулирования, цифрового моделирования. Экспериментальные исследования проводились на действующем сварочном оборудовании и разработанных аппаратных и программных средствах.

**Научная новизна.** Выполненная работа расширяет и углубляет теоретические и практические представления в области построения систем автоматического управления технологическим процессом аргодуговой сварки, работающих в условиях конструктивных и технологических возмущений.

Получены следующие основные результаты, отличающиеся научной новизной:

- предложен алгоритм дискретно-непрерывного управления и разработано устройство его реализующее, на которое получен патент на изобретение;
- разработана структура релейно-непрерывной системы управления технологическим процессом аргодуговой сварки, отличающаяся от известных совместным функционированием непрерывного и релейного регулятора с зоной нечувствительности, которые обеспечивают субоптимальный характер процессов управления по различным критериям качества в зависимости от уровня отклонения регулируемой величины от заданных значений;

- методом компьютерного моделирования доказана эффективность предложенной системы управления, обеспечивающей достижение целевых показателей при управлении технологическим процессом аргодуговой сварки при наличии значительных экспериментально определенных внешних возмущений;

- экспериментально обоснована эффективность устройства и его алгоритма управления длиной дуги при электросварке, обеспечивающих высокое быстродействие обработки возмущающих воздействий и высокую точность стабилизации длины дуги (напряжения дуги), приводящих к повышению производительности сварочного процесса.

Практическая полезность исследований определяется следующими результатами:

- разработана эффективная и технически простая релейно-непрерывная система управления, субоптимальная по совокупности переменных критериев оптимальности, которая может применяться для модернизации сварочных автоматов;

- разработано специальное математическое, алгоритмическое, программное обеспечение для моделирования, анализа и синтеза систем управления технологическим процессом электросварки;

- разработан и предложен блок управления технологическим процессом электросварки, предназначенный для стабилизации параметров сварочного процесса;

- обоснована целесообразность практического использования метода построения системы управления с релейным и непрерывным регулятором.

Реализация результатов работы. Результаты диссертационных исследований испытаны и использованы на авиастроительном предприятии ОАО «АВИАКОР – авиационный завод» (г. Самара) при разработке системы автоматической стабилизации напряжения дуги на электросварочной установке для аргодуговой сварки кольцевых швов типа УСК-22М.

Блок управления представлен на рис. 1 предназначенный для автоматической стабилизации напряжения дуги в процессе непрерывной сварки изделий и для управления механизмами различного назначения.

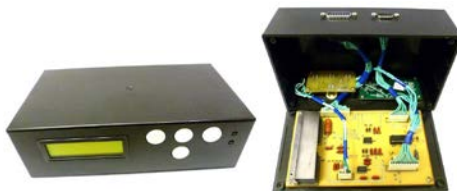


Рис. 1. Блок субоптимального двухкритериального алгоритма управления стабилизацией напряжения дуги

Плата расположена на крышке корпуса таким образом, чтобы установленные светодиоды, жидкокристаллический индикатор и кнопки свободно входили в отверстия. В корпус блока управления встроены две вилки типа DB-9M и DB-15M. Вилка DB-9M из девяти контактов применяется для подключения питания, вилка DB-15M используется для подсоединения датчиков и двигателя. По средствам проводов вилки присоединены к контактным площадкам печатной платы.

На рис. 2 представлены чертежи корпуса с обозначением установочных мест под электронные элементы.

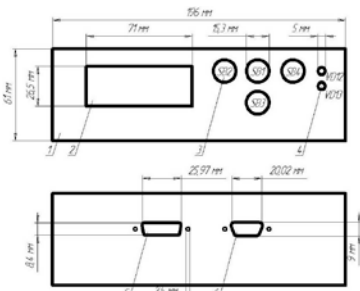


Рис. 2. Чертежи корпуса для установки электронных элементов субоптимального двухкритериального алгоритма управления



Перечень элементов, устанавливаемых в корпус, и назначение мест под аппаратуру: 1 – корпус; 2 – жидкокристаллический индикатор типа DV-16244S1F фирмы DACE VISION, предназначен для отображения сигнала длины дуги, сигнала задания и коэффициентов управления; 3 – кнопка SB2 – прокрутка меню, SB1 – увеличения значения параметра, SB3 – уменьшения значения параметра и SB4 – подсветка дисплея; 4 – светодиоды используются для индикации направления вращения двигателя; 5 – разъем служит для подключения внешних сигналов с датчиков и сигнала управления к двигателю; 6 – разъем для подключения питания.

Алгоритм управления и реализующее его микроконтроллерное устройство обеспечивают по сравнению с известными системами повышенное быстродействие управления, что позволяет надежно поддерживать длину дуги в условиях различного рода неидеальностей и как следствие – повысить производительность труда и качество свариваемых изделий. Устройство, по сравнению с известными, проще в устройстве и обладает значительно более высокой точностью стабилизации длины дуги.

Разработанный блок управления автоматического регулирования может быть использована для модернизации сварочных автоматов различного назначения, на которых свариваются ответственные детали ракет и подводных лодок, двигатели самолетов, кузова легковых автомобилей и крупногабаритных тракторов, а также другая продукция специального назначения, к которой предъявляются повышенные требования по качеству.

Содержание научно-исследовательской работы. Современные методы проектирования многокритериальных систем основаны на теории синтеза систем последовательной оптимизации, предполагающей декомпозицию фазового пространства системы на ряд непересекающихся областей со своими критериями оптимальности и соответствующими им управлениями. Для широкого класса систем практически ограничиваются двумя областями пространства состояний: внутренней, содержащей начало координат  $G1$  или окрестность заданного конечного состояния, и внешней –  $G2$ , которым ставят в соответствие режимы малых ( $G1$ ), и больших ( $G2$ ) отклонений системы от заданного конечного состояния. Большие отклонения возникают при пуске объектов, изменении режимов их работы или действию значительных возмущений иного порядка. Основными требованиями, предъявляемыми к качеству движения объекта в области  $G1$ , являются высокая точность, малая чувствительность к изменениям параметров объекта и среды, асимптотическая устойчивость движения.

Наиболее распространенным требованием к качеству управления системой в области  $G2$  является минимум времени движения изображающей точки до попадания в область  $G1$ ,

то есть минимизация критерия быстродействия:  $J = \int_{t_1}^{t_2} dt$ .

В настоящей работе исследуется алгоритм управления динамическими объектами, субоптимальный по совокупности двух критериев качества – критерию быстродействия (при больших отклонениях выходной координаты от своего заданного конечного значения) и интегральному квадратичному функционалу (при малых и больших отклонениях):

$$J = \int_0^{\infty} ((e^2(t) + T^2 \dot{e}^2(t))) dt \quad (1.1)$$

где  $T$  – постоянный коэффициент, а  $e(t)$  и  $\dot{e}(t)$  соответственно ошибка и производная ошибки, с минимальным числом характеристик управления, требующих согласования на границе областей  $G1$  и  $G2$ .

Разработан алгоритм управления, сущность которого заключается в применении релейного двухинтервального управления при больших отклонениях ( $G2$ ) и непрерывного с ПИД – регулятором – при малых ( $G1$ ) и больших отклонениях ( $G2$ ). Для согласования управлений на границе областей малых ( $G1$ ) и больших ( $G2$ ) отклонений настройкой управление переводится в скользящий режим работы.

Блок-схема применительно к стабилизации напряжения дуги для сварочных автоматов представлена на рис. 3.

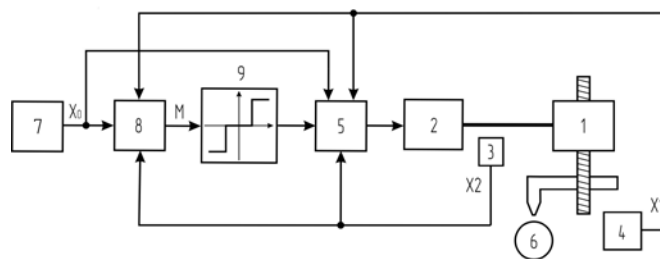


Рис. 3. Блок-схема субоптимальной двухкритериальной системы автоматического регулирования напряжения дуги

- 1 – механизм перемещения электрода; 2 – электродвигатель;  
 3 – датчик скорости вращения вала электродвигателя; 4 – датчик измерения длины дуги;  
 6 – свариваемая деталь; 5 – суммирующее устройство; 7 – задатчик; 8 – сумматор;  
 9 – релейный регулятор с зоной нечувствительности

Субоптимальная двухкритериальная система, в отличие от применяемых в настоящее время, содержит релейный регулятор с зоной нечувствительности 9, на входе которого действует алгебраическая сумма трех сигналов – с задатчика 7, с датчика скорости 3 и датчика длины дуги 4. При изменении длины дуги в процессе сварки система максимально быстро вводит электрод (горелку) в зону нечувствительности регулятора, обеспечивая устранение статической ошибки в зоне по ПИД – закону. Она обладает высоким быстродействием вследствие того, что выходной сигнал релейного регулятора, являющийся управляющим сигналом для электродвигателя 2, изменяется практически мгновенно, «скачком».

Подобным соединением элементов реализован закон управления в системе следующим образом:

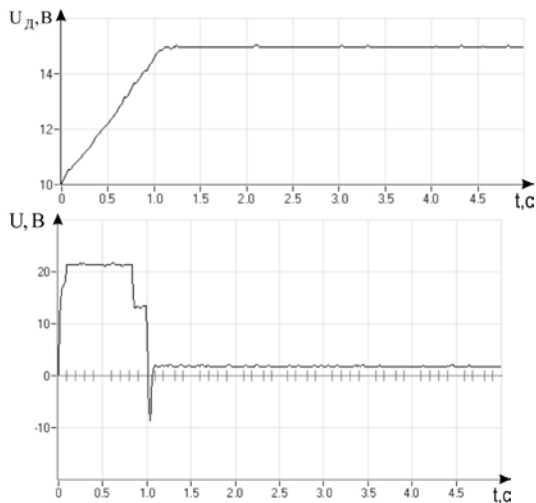
$$U(t) = \begin{cases} B \cdot \text{Sign}(M(t)) + U1(t) \text{ при } x_0 + a < x1(t) \vee x1(t) < x_0 - a \\ U1(t), \text{ при } x_0 + a \geq x1(t) \geq x_0 - a \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $M(t) = x_0 - x1(t) - k1 \cdot x2(t)$  – сигнал, реализующий функцию переключения релейного регулятора,  $k1$  – постоянный коэффициент,  $x1(t)$ ,  $x2(t)$  – выходные сигналы датчиков длины дуги и скорости,  $x_0$  – выходной сигнал задатчика (заданное конечное значение регулируемой координаты  $x1(t)$ ),  $a$  – величина половины зоны нечувствительности релейного регулятора,  $\text{Sign}$  – знаковая функция, равная +1 или –1 в зависимости от знака функции  $M(t)$ ,  $B$  – величина управляющего воздействия («полка» реле) – сигнал с выхода релейного регулятора,  $U1(t)$  – сигнал формируемый по закону  $U1(t) = k5 + k4 \cdot \int_0^{\infty} (k2 \cdot (x_0 - x1(t)) - k3 \cdot x2(t)) dt$ ,  $k2$ ,  $k3$ ,  $k4$  и  $k5$  – постоянные коэффициенты.

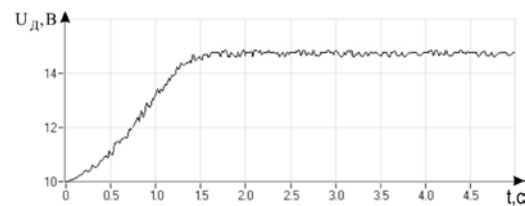
Закон управления реализован на микроконтроллере типа ATmega8 фирмы Atmel. В качестве датчика скорости 3 использован тахогенератор, датчик измерения длины дуги 4 при испытаниях микроконтроллерной системы реализован так же, как и в установке УСК-22М. Это RC-цепь, подключенная к источнику постоянного тока сварочной установки. Напряжение дуги, снимаемое с RC-цепи, находится в линейной зависимости от длины дуги. Силовая часть управления реализована на стандартном элементе типа OPA544T фирмы BURRBROWN (мощный операционный усилитель).

В момент включения системы на входе релейного регулятора 9 формируется сигнал  $M(t)$  с выхода сумматора 8 ( $M(t) = x_0 - x1(t) - k1 \cdot x2(t)$ , где  $x_0$ ,  $x1(t)$  и  $x2(t)$  – сигналы соответственно с задатчика 7, датчиков 3 и 4, действующие на входе сумматора 8), воздействующий на регулятор 9. Выходной сигнал регулятора 9 суммируется в устройстве 5 с сигналом  $U1$ , и воздействует на управляемый электродвигатель 2, который через механизм перемещения электрода 1 движет электрод к свариваемой детали 5. Коэффициент  $k1$  настраивается в сумматоре 8 таким образом, чтобы в устройстве в момент начала горения дуги возник скользкий режим движения. В результате механизм перемещения электрода 1 прибли-

жает электрод к детали 6, на так называемой «ползучей скорости», без перерегулирования, и останавливает его, когда сигнал  $M$  достигает значения зоны нечувствительности релейного регулятора 9. Релейный регулятор 9 отключается и на входе электродвигателя 2 через суммирующее устройство 5 теперь действует только сигнал  $U_1(t)$ , сформированный в процессе движения механизма перемещения электрода 1 к свариваемой детали 6. Этот сигнал обеспечивает сведение разности выходных сигналов с задатчика 7 и датчика измерения длины дуги 4 к нулю при действии «малых» возмущений (в зоне нечувствительности релейного регулятора 9). При изменении длины дуги за счет действия возмущений, превышающих зону нечувствительности релейного регулятора 9, последний своим выходным сигналом, воздействующим на электродвигатель 2, возвращает электрод (горелку) в исходное состояние максимально быстро, поскольку на входе электродвигателя скачком формируется предельно возможное входное воздействие. На рис. 4 и рис. 5 представлены осциллограммы переходных процессов в системах стабилизации напряжения дуги.



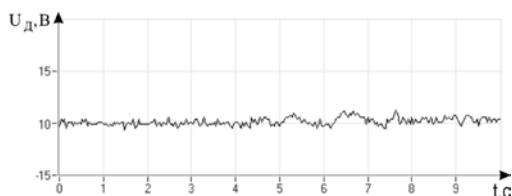
**Рис. 4.** Переходный процесс и сигнал управления субоптимальной двухкритериальной системы при ступенчатом входном воздействии:  
 $U$  – сигнал управления двигателем



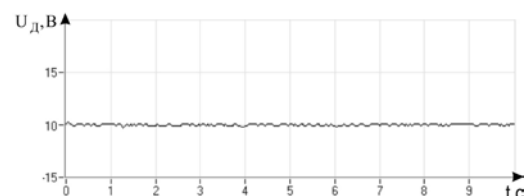
**Рис. 5.** Переходный процесс импульсной системы при ступенчатом входном воздействии:  
 $U_d$  – напряжение дуги;  $t$  – время

Время регулирования разработанной системы составляет  $\sim 1$ с, что в полтора раза меньше, чем в существующей импульсной системе, применяемой на установке УСК-22М. Алгоритм функционирования управления  $U$  реализует закон (1.2). Исполнительный механизм перемещает электрод из заданного начального состояния в конечное состояние, за одно переключение управления, а в зоне нечувствительности действует единственный сигнал  $U_1$ , который устраняет рассогласования между напряжением дуги и сигналом задания.

На рис. 6 и рис. 7 приведены сравнительные испытания процессов стабилизации напряжения дуги при сварке тонкостенной алюминиевой трубы искривленной под углом  $20^\circ$ .



**Рис. 6.** Процесс стабилизации напряжения дуги при импульсном управлении двигателем:  
 $U_d$  – напряжение дуги;  $t$  – время



**Рис. 7.** Процесс стабилизации напряжения дуги при субоптимальном двухкритериальном управлении двигателем:  
 $U_d$  – напряжение дуги;  $t$  – время

Последние осциллограммы сняты в установочных режимах автоматической аргодуговой сварки соединения встык без присадки: сварочный ток 80 А, скорость сварки 15 м/ч, длина дуги 1 мм и расход аргона 4 л/мин. При испытаниях импульсного управления двигателем погрешность стабилизации напряжения дуги  $\pm 0.4$  В без учёта неустойчивого поведения системы, а при субоптимальном двухкритериальном управлении погрешность  $\pm 0.1$  В. Качество стабилизации напряжения дуги субоптимальной двухкритериальной системой соответствует требованиям производственной инструкции «Сварка дуговая алюминиевых и магниевых сплавов в среде защитных газов» (ПИ 1.4.1555-2000). Зафиксированное осциллографом максимальное отклонение напряжения дуги без ее стабилизации при сварке алюминиевых труб составило  $\pm 1.5$  В.

Путем экспериментальных испытаний разработана математическая модель релейно-непрерывной системы стабилизации напряжения дуги сварочной установки типа УСК-22М, ее цифровая модель представлена на рис. 8 в программной среде Matlab.

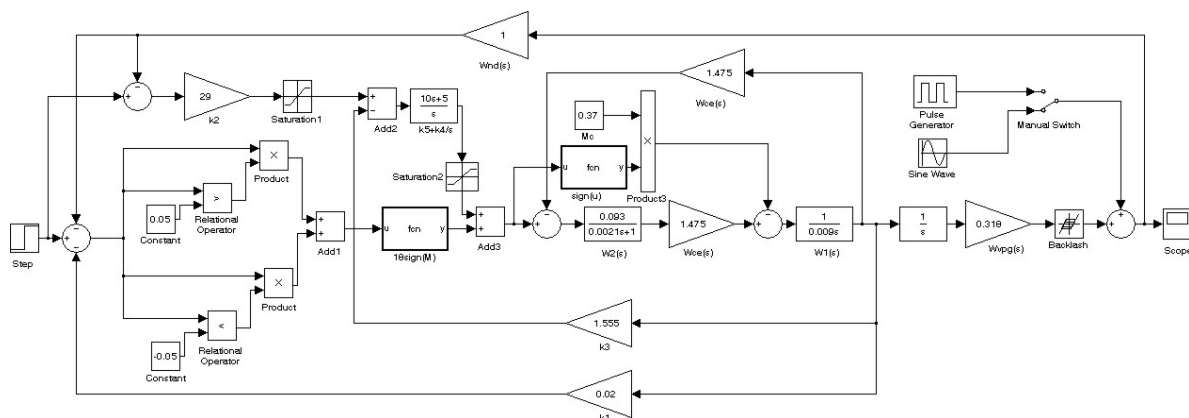


Рис. 8. Цифровая модель релейно-непрерывной системы управления стабилизацией напряжения дуги

Она содержит следующие элементы:

$1/s * W_{vpg}(s)$  – интегрирующее звено вертикального перемещения горелки, характеризует зависимость отклонения перемещение от частоты вращения двигателя; Backlash – люфт вертикального перемещения горелки;  $W1(s)$  – интегрирующее звено, устанавливает зависимость частоты вращения двигателя от разности моментов вращения и сопротивления, учитывает момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя;  $W2(s)$  – апериодическое звено, характеризует зависимость тока якоря от ЭДС, учитывает электромагнитную постоянную времени ДПТ;  $Wce(s)$  – пропорциональное звено скоростного коэффициента двигателя;  $M_c$  – момент сопротивления прикладываемый к валу ДПТ;  $sign(u)$ ,  $product$  – блок сигмаидальной функции ( $u$  – напряжение подаваемое на якорную обмотку двигателя) и блок умножения необходимы для смены полярности момента сопротивления при реверсе двигателя;  $W1(s), W2(s), Wce(s), M_c, sign(u), product$  – составляющие блоки структурной схемы ДПТ с независимым возбуждением;  $18sign(M)$  – двухпозиционное безгистерезисное реле, где 18 – напряжение, прикладываемое к якорной обмотке двигателя;  $M$  – функция переключения; Constant, Relational Operator, Product и Add1 – блоки реализующие зону нечувствительности реле; Add2, Add3 – суммирующее устройство; Saturation – ограничение напряжением питания ( $\pm 10$ );  $k_2$  и  $k_3$  – постоянные коэффициенты;  $U_z$  – задатчик напряжения;  $W_{tg}(s)$  – пропорциональное звено тахогенератора, преобразующие частоту вращения в напряжение;  $W_{nd}(s)$  – пропорциональное звено напряжения дуги, характеризует зависимость отклонения напряжения дуги от отклонения длины дуги; Saturation – ограничение напряжением питания ( $\pm 10$ ); Pulse Generator – возмущающее воздействие прямоугольной формы; Sine Wave – возмущающее воздействие гармонической формы; Manual Switch – ручной переключатель; Scope – осциллограф.

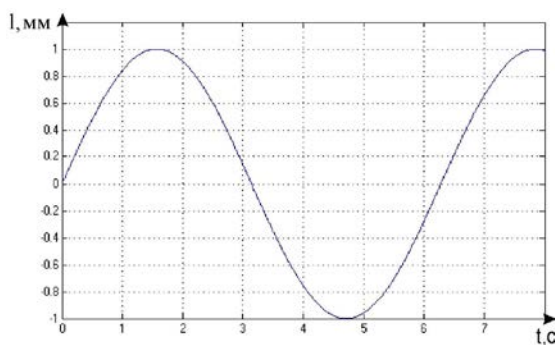
Настройка параметров  $k_2, k_3, k_4$  и  $k_5$  непрерывного управления с ПИД-регулятором выполнялась методом Гаусса-Зайделя. Для лучшей и наглядной настройки ПИД-регулятора

был реализован критерий оптимальности (1.1) в программе Matlab. Изменение коэффициента пропорционального звена производилось с шагом 0.1 до тех пор, пока не наступило ухудшение критерия оптимальности (при ступенчатом входном сигнале и возмущении). Затем определялись параметры интегрирующей составляющей. Увеличение производилось также до ухудшения критерия оптимальности с шагом 0.1. После аналогичным образом выполнялась настройка дифференциальной составляющей. При настройке параметров по числу на дисплее было видно улучшение или ухудшение критерия оптимальности. Коэффициент  $k_1$  релейного управления определен из характеристик двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Половина постоянной времени двигателя и есть минимальное значение для постоянной дифференцирующего звена  $k_1$ , при котором переходные процессы монотонные.

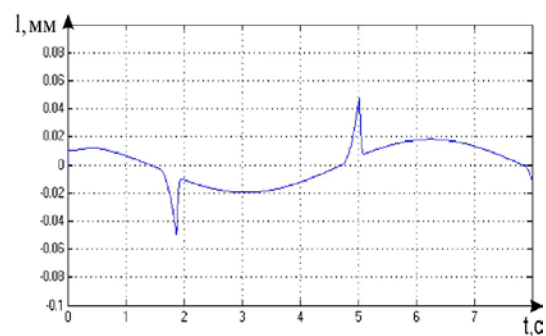
Настройки и параметры регуляторов имели следующие значения:

$$B = 18, -10 \geq U_1(t) \leq 10, k_1 = 0.02, k_2 = 29, k_3 = 1.555, k_4 = 5, k_5 = 10, a = 0.05.$$

Представлены на рис. 9 и рис. 10 результаты цифрового моделирования, а именно, возмущающего воздействия и процесса стабилизации длины электрической дуги.



**Рис. 9.** Возмущающее воздействие синусоидальной формы



**Рис. 10.** Стабилизация длины дуги при субоптимальном двухкритериальном управлении двигателем

Как видно из рис. 10 погрешность поддержания искрового промежутка при использовании субоптимальной двухкритериальной системы не превышает  $\pm 0.05$  мм.

Таким образом, закон управления (1.2) обеспечивает повышенную точность стабилизации напряжения дуги, что существенно уменьшает количество дефектов в сварном шве, и как следствие повышает производительность труда и экономию трудовых ресурсов. В дальнейшем планируется провести подробное исследование методом цифрового моделирования алгоритма управления для стабилизации величины проплавления сварного соединения (поддержания температуры сварочного шва на заданном уровне).

### Литература

1. Гладков Э.А. Управление процессами и оборудованием при сварке: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2006. 432 с.
2. Пат. №. 2440220. Российская Федерация. Устройство для автоматического регулирования длины дуги при электросварке / Вохрышев В.Е., Омеляненко К.Н. Опубл. Бюл.. 2012, №2.

## ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИЙ $W = W(z)$ , ПРЕДСТАВИМЫХ СВОИМИ ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Е.Д. Остроушко

Кубанский государственный университет

**Аннотация.** В работе обобщаются классические результаты J. Gergen, F. Dressel на класс функций, имеющих обобщенную производную. При этом предполагается, что эти производные оцениваются через основную функцию с помощью неограниченной весовой функции. Такого рода оценки необходимы для исследования квазиконформных отображений в весовых пространствах С.Л. Соболева.

**Введение.**

**Основные задачи,** которые предполагается решить в научно-исследовательской работе – доказательство теорем об ограниченности функций, удовлетворяющих весовому интегральному неравенству, и существования предела в граничной точке функций, обобщенные производные которых обладают упомянутыми выше свойствами, в том случае, когда аналитическая функция из интегрального представления рассматриваемой функции, является регулярной в этой точке.

**Основные методы,** которые будут использованы при решении поставленных задач – интегральные представления для функций, обладающих обобщенными производными, использование свойств операторов Рисса потенциального типа.

В работе доказана теорема об ограниченности функции, оцениваемой потенциалом Рисса. Кроме того, используя свойства аналитической функции в окрестности граничной точки, из обобщенной формулы Коши для функций  $W(z)$ , обладающих обобщенными производными по сопряженной переменной, доказывается ее непрерывность в этой точке.

**1. Основные результаты работы.**

Пусть  $S := \{z \in C : |z| < a\}$ ,  $\Gamma := \{z \in C : |z| = a\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $W \in L_2(S)$ ,  $M^2(z) \in L_p(S)$ ,  $p > 2$ .

Допустим, что имеет место неравенство

$$|W(z)| \leq A_1 + A_2 \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)||W(\zeta)|}{|z - \zeta|} dS_{\zeta} \tag{1.1}$$

для произвольного фиксированного измеримого подмножества  $\sigma \subset S$ ,  $A_1, A_2$  – константы. Тогда существуют константы  $B_1, B_2$ , зависящие лишь от  $A_1, A_2, M(z)$  такие, что для  $W(z)$  из (1.1) имеет место неравенство:

$$|W(z)|^2 \leq B_1 + B_2 \iint_{\sigma} |W(\zeta)|^2 dS_{\zeta}, \tag{1.2}$$

здесь

$$B_1 = 2A_1^2(1 + A_3E)^2, \tag{1.3}$$

$$B_2 = A_3^3E^2, \tag{1.4}$$

$$A_3 := 2A_2^2 \sup_{z \in S} \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)|^2}{|z - \zeta|} dS_{\zeta},$$

$E$  – верхняя грань по  $z_1, z_2 \in S$ ,  $z_1 \neq z_2$ , значений следующих функций в круге  $S$

$$\iint_{\sigma} \frac{1}{|z_1 - \zeta|} d\xi d\eta, \quad \iint_{\sigma} \log \frac{3a}{|z_1 - \zeta|} d\xi d\eta, \quad \iint_{\sigma} \frac{1}{|z_1 - \zeta|} \log \frac{3a}{|\zeta - z_2|} d\xi d\eta,$$

$$\iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{|z_1 - \zeta||\zeta - z_2|} \left[ \log \frac{3a}{|z_1 - z_2|} \right]^{-1} \right] d\xi d\eta.$$

**Доказательство:**

Возводя в квадрат обе части неравенства (1.1), получаем

$$\omega = |W(z)|^2 \leq A_1^2 + 2A_1A_2 \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)||W(\zeta)|}{|z-\zeta|} dS_{\zeta} + A_2^2 \left( \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)||W(\zeta)|}{|z-\zeta|} dS_{\zeta} \right)^2. \quad (1.5)$$

Из неравенства (1.5) легко получить следующее неравенство

$$\omega \leq 2A_1^2 + 2A_2^2 \left( \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)|^2}{|z-\zeta|} dS_{\zeta} \iint_{\sigma} \frac{\omega}{|z-\zeta|} dS_{\zeta} \right). \quad (1.6)$$

Функция  $|M|^2$  интегрируема со степенью  $p > 2$ . Поэтому в соответствие со свойствами

оператора Рисса функция  $\iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)|^2}{|z-\zeta|} dS_{\zeta}$  непрерывна по Гельдеру в замкнутом круге  $\bar{S}$  с по-

казателем  $\alpha = \frac{p-2}{p}$  (см. [1]).

Поэтому неравенство (1.6) легко переписать в виде

$$\omega \leq 2A_1^2 + A_3 \iint_{\sigma} \frac{\omega}{|z-\zeta|} dS_{\zeta}, \quad (1.7)$$

где

$$A_3 := 2A_2^2 \sup_{z \in \bar{S}} \iint_{\sigma} \frac{|M(\zeta)|^2}{|z-\zeta|} dS_{\zeta}.$$

Подставляя в неравенство (1.7) вместо  $\omega$  под знаком интеграла его правую часть, получим (см. [2])  $\omega \leq B_1 + B_2 \iint_{\sigma} \omega dS_{\zeta}$ , здесь  $B_1, B_2$  - константы, определяемые формулами (1.3),

(1.4).

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $W \in L_2(S)$ , обладает обобщенной производной  $W_{\bar{z}}$ , для которой имеет место неравенство

$$|W_{\bar{z}}(z)| \leq M(z)|W(z)|, \quad M^2(z) \in L_p(S), \quad p > 2. \quad (1.8)$$

Тогда функция

$$W(z) = \Phi(z) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{1}{\zeta - z} W_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{z}{a^2 - z\bar{\zeta}} \bar{W}_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta},$$

здесь  $\Phi = \Phi(z)$  - аналитическая в  $S$  функция.

Допустим, что в точке  $z_0 \in \Gamma$  функция  $\Phi$  является регулярной, тогда для функции  $W(z)$  существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} W(z) = \Phi(z_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{1}{\zeta - z_0} W_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{z_0}{a^2 - z_0 \bar{\zeta}} \bar{W}_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta}.$$

**Доказательство:**

Из неравенства (1.8) следует, что функция  $W_{\bar{z}}$  интегрируема в  $S$ , поэтому для функции  $W$  имеет место интегральное представление (см. [2])

$$W(z) = \Phi - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{1}{\zeta - z} W_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{z}{a^2 - z\bar{\zeta}} \bar{W}_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta},$$

здесь  $\Phi = \Phi(z)$  - аналитическая в  $S$  функция.

Поскольку  $\Phi$  является регулярной в точке  $z_0 \in \Gamma$ , то выберем  $h, h > 0$  настолько малым, чтобы  $\Phi$  была ограничена на множестве  $\sigma_h(z, z_0) := \{z \in S : |z - z_0| < h\}$ .

Для всех  $z \in \sigma = \sigma_h(z, z_0)$  имеем следующую оценку:

$$|W(z)| \leq A_1 + \left| \frac{1}{2\pi} \left( \iint_{\sigma} \frac{1}{\zeta - z} W_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta} \right) \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \left( \iint_{S/\sigma} \frac{1}{\zeta - z} W_{\bar{\zeta}} dS_{\zeta} \right) \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \left( \iint_{\sigma} \frac{1}{t - \bar{\zeta}} \overline{W_{\bar{\zeta}}} dS_{\zeta} \right) \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \left( \iint_{S/\sigma} \frac{1}{\frac{a^2}{|z|^2} z - \bar{\zeta}} \overline{W_{\bar{\zeta}}} dS_{\zeta} \right) \right|,$$

где  $A_1 = \sup_{z \in \sigma_h(z, z_0)} |\Phi(z)|$ .

В том случае, когда точка  $z$  принадлежит множеству  $\sigma^* = \left\{ z \in \sigma : |z - z_0| < \frac{h}{2} \right\}$  функции  $\iint_{S/\sigma} \frac{W_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dS_{\zeta}$ ,  $\iint_{S/\sigma} \frac{\overline{W_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{t - \bar{\zeta}} dS_{\zeta}$  являются ограниченными на  $\sigma^*$ . Это означает, что для доказательства ограниченности функции  $W$  в  $\sigma^*$  достаточно доказать ограниченность функции  $I(z)$ .

$$I(z) := \iint_{\sigma_h(z, z_0)} \frac{|W_{\bar{\zeta}}|}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \text{ на множестве } \sigma_1 = \{z \in C : |z - z_0| \leq h\}.$$

С этой целью заметим, что для значений функции  $|W(z)|$ ,  $z \in \sigma^*$  имеет место следующая оценка

$$|W(z)| \leq A_1^* + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{|W_{\bar{\zeta}}|}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{|\overline{W_{\bar{\zeta}}}|}{\left| \frac{a^2}{|z|^2} z - \zeta \right|} dS_{\zeta}, \quad (1.9)$$

здесь

$$A_1^* = A_1 + \sup_{z \in \sigma^*} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{S/\sigma} \frac{W_{\bar{\zeta}}}{\zeta - z} dS_{\zeta} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{S/\sigma} \frac{\overline{W_{\bar{\zeta}}}}{\frac{a^2}{|z|^2} z - \zeta} dS_{\zeta} \right| \right\}.$$

Используя неравенства (1.8) и (1.9), получим

$$\begin{aligned} I(z) &\leq \iint_{\sigma} \frac{M(\zeta) |W(\zeta)|}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \leq \iint_{\sigma} \frac{A_1^* M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \iint_{\sigma} \frac{|W_{\bar{t}}|}{|t - \zeta|} dS_t + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \iint_{\sigma} \frac{|W_{\bar{t}}|}{\left| \frac{a^2}{|\zeta|^2} \zeta - t \right|} dS_t \leq \\ &\leq A_2^* + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \iint_{\sigma} \frac{M(t) |W(t)|}{|t - \zeta|} dS_t + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta} \iint_{\sigma} \frac{M(t) |W(t)|}{\left| \frac{a^2}{|\zeta|^2} \zeta - t \right|} dS_t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

здесь  $A_2^* = \sup_{z \in S} \iint_{\sigma} \frac{A_1^* M(\zeta)}{|\zeta - z|} dS_{\zeta}$ .



Используя для оценки повторных интегралов в неравенстве (1.10) теорему Фубини для неотрицательных функций и применяя неравенство Гельдера для повторных интегралов с измененным порядком интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
 I(z) \leq & A_2^* + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} M(t) |W(t)| \left( \iint_{\sigma} [M(\zeta)]^q dS_{\zeta} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \iint_{\sigma} \frac{dS_{\zeta}}{|\zeta - z|^{q^*} |t - \zeta|^{q^*}} \right)^{\frac{1}{q^*}} dS_t + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} M(t) |W(t)| \left( \iint_{\sigma} \frac{dS_{\zeta}}{|\zeta - z|^{q^*} \left| \frac{a^2}{|\zeta|^2} \zeta - t \right|^{q^*}} \right)^{\frac{1}{q^*}} \left( \iint_{\sigma} [M(\zeta)]^q dS_{\zeta} \right)^{\frac{1}{q}} dS_t. \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

Функция  $M(\zeta)$  интегрируема со степенью  $q > 4$ , следовательно, ограничена.

Пусть  $I(\alpha, \beta) = \iint_{\sigma} \frac{dS_{\zeta}}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}}$ , здесь  $\alpha < 2$ ,  $\beta < 2$ , тогда в соответствии с известным результатом Векуа (см. [3]) для случая  $\alpha + \beta > 2$  имеет место следующая оценка

$$I(\alpha, \beta) \leq K |z_1 - z_2|^{2 - (\alpha + \beta)}, \quad (1.12)$$

где  $K$  – константа, зависящая от  $\alpha, \beta$ .

Обозначим через

$$I_1 = \iint_{\sigma} \frac{dS_{\zeta}}{|\zeta - z|^{q^*} \left| \frac{a^2}{|\zeta|^2} \zeta - t \right|^{q^*}} = \iint_{\sigma} \frac{dS_{\zeta}}{|\zeta - z|^{q^*} \left| \frac{a^2}{t} - \bar{\zeta} \right|^{q^*} |\bar{\zeta}|^{-q^*} |t|^{q^*}}.$$

Функция  $\frac{1}{|\bar{\zeta}|^{-q^*} |t|^{q^*}}$  ограничена, в случае если  $0 \notin \sigma$ , тогда используя (1.12), получаем

следующую оценку для  $I_1$

$$I_1 \leq K_1 \left| t - \frac{a^2}{|z|^2} z \right|^{2-2q^*} \leq K_2 |t - z|^{2-2q^*}, \quad (1.13)$$

где  $K_1, K_2$  – константы, зависящие от  $q^*$ ;  $q$  и  $q^*$  связаны равенством  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$ . Легко за-

метить, что  $q^* = \frac{4}{3}$ .

Применяя в (1.11) оценки (1.12) и (1.13), имеем

$$I(z) \leq A_2^* + A_3^* \iint_{\sigma} \frac{M(t) |W(t)|}{|t - z|^{\frac{1}{2}}} dS_t, \quad (1.14)$$

здесь

$$A_3^* := \sup_{t, \zeta \in \sigma} \left( \iint_{\sigma} [M(\zeta)]^q dS_{\zeta} \right)^{\frac{1}{q}} |z - t|^{\frac{1}{2-2q^*}} \left( \iint_{\sigma} \frac{\left(1 + \frac{1}{K_2}\right)}{|\zeta - z|^{q^*} |t - \zeta|^{q^*}} dS_{\zeta} \right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Применим к (1.14) неравенство Гельдера

$$I(z) \leq \left( \iint_{\sigma} |W^2(t)| ds_t \right)^{\frac{1}{2}} \iint_{\sigma} \frac{M^2(t)}{|t-z|} dS_t.$$

Ограниченность  $\iint_{\sigma} |W^2(t)| ds_t$  следует из того, что функция  $W \in L_2(S)$ . Функция  $M^2$  интегрируема со степенью  $p > 2$ .

Функция  $\iint_{\sigma} \frac{M^2(t)}{|t-z|} dS_t$  непрерывна по Гельдеру в замкнутом круге  $\bar{S}$  с показателем  $\alpha = \frac{p-2}{p}$  (см. [1]), следовательно, ограничена. Отсюда получаем ограниченность интеграла  $I(z)$ .

Теорема доказана.

### Литература

1. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: Пер. с англ. / Под ред. А.К. Гущина. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 464 с.
2. Gergen J.J., Dressel F.G. Mapping by  $p$  – regular functions // Duke math. J. 1951. V.18-№1. P. 185–210.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, гос. изд-во Физ.-мат.лит. М., 1959. 628 с.

## ОБ УПРАВЛЕНИИ ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНЫМ ОМНИ-РОБОТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СТРУКТУРЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ<sup>1</sup>

Д.Ю. Сухоносова

Ульяновский государственный университет

**Аннотация.** Рассматривается задача слежения для мобильных роботов с четырьмя роликонесущими колесами при учете запаздывания в структуре обратной связи. Для решения данной задачи предлагается использовать непрерывное управление с насыщением, которое представляет собой комбинацию релейного управления и быстро меняющегося линейного управления. Предлагаемый закон управления обосновывается с помощью метода сравнения с вектор-функции Ляпунова, компоненты которой имеют вид векторной нормы.

### Введение.

Настоящая работа посвящена построению управления движением мобильных роботов с четырьмя роликонесущими колесами при учете запаздывания в структуре обратной связи. Отличительной особенностью данного типа роботов является конструкция колес: на колесах робота закреплены ролики, это позволяет роботу перемещаться в любом направлении без предварительного разворота. Омни-роботы обладают более высокой маневренностью по сравнению с обычными колесными роботами, что обуславливает эффективность их использования, например, в тесных помещениях.

Задачам исследования динамики мобильных омни-роботов с четырьмя роликонесущими колесами и построения управления их движением посвящены известные работы [3–5]. Тем не менее на данный момент синтез запаздывающего управления для мобильных колесных роботов является малоизученным вопросом. При исследовании систем с запаздыванием возникают трудности, связанные с выбором метода исследования и оценкой допустимой величины запаздывания в управлении.

В настоящей работе в качестве закона управления предлагается выбрать непрерывное управление типа насыщения, которое представляет собой комбинацию релейного управления и быстроменяющегося непрерывного управления. Обоснование представленного закона управления основано на применении к системе функций Ляпунова в виде векторных норм и оценке производных этих функций на решениях системы [2].

**1. Мобильный робот с четырьмя роликонесущими колесами.** Робот состоит из платформы, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности, и четырех колес (рис. 1). Углы между осями колес составляют  $90^\circ$ . На колесах робота закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес. При наличии подобных колес платформа может двигаться в любом направлении и с любой ориентацией.

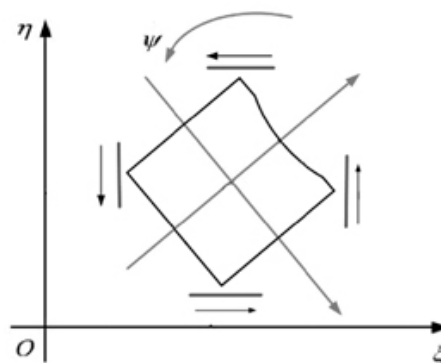


Рис. 1

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-31084 и 11-01-00541).

Предположим, что движение робота происходит без проскальзывания под действием моментов, развиваемых четырьмя независимыми электродвигателями постоянного тока. Тогда уравнения, описывающие движение робота будут иметь следующий вид [3]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = Hu(t - h(t)), \quad (1.1)$$

где  $q = (\xi, \eta, \psi)^T$ ,  $\xi$  и  $\eta$  – координаты центра масс платформы в неподвижной декартовой системе координат  $O\xi\eta\zeta$ ,  $\psi$  – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемой от оси  $O\xi$ ;  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока;  $M(q) \in R^{3 \times 3}$  – положительно-определенная матрица инерции;  $C(q, \dot{q}) \in R^3$  – вектор-функция с дважды непрерывно дифференцируемыми элементами;  $H \in R^{3 \times 4}$  – постоянная матрица;  $h(t)$  – ограниченная непрерывная функция запаздывания в управлении,  $0 \leq h(t) \leq h_0 = \text{const} > 0$ .

**2. Задача слежения для мобильного робота с четырьмя роликонесущими колесами.** Пусть имеется программное движение  $q^*(t) = (\xi^*(t), \eta^*(t), \psi^*(t))^T$ . Необходимо построить управление  $u(t - h(t))$ , при котором все решения  $q(t)$  системы (1) с начальным условием:

$$q(s) = q_0(s), \quad -h_0 \leq s \leq 0, \\ \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |q_0(s) - q^*(s)| < \delta,$$

будут удовлетворять неравенству:

$$|q(t) - q^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Здесь  $|\cdot|$  – некоторая норма в пространстве  $R^3$ ,  $\delta$  – величина начальных отклонений от программного движения,  $\varepsilon$  – погрешность слежения.

Для решения поставленной задачи возьмем управление следующего вида [1]:

$$u(t - h(t)) = K(t) \text{sat} \left[ q(t - h(t)) - q^*(t - h(t)) + D(\dot{q}(t - h(t)) - \dot{q}^*(t - h(t))) \right], \quad (2.1)$$

где  $K(t) \in R^{4 \times 3}$  – матрица коэффициентов управления, подлежащая определению,  $D \in R^{3 \times 3}$  – постоянная невырожденная матрица, достаточно произвольно подбираемая. Вектор-функция  $\text{sat}(z) = (\text{sat}(z_1), \text{sat}(z_2), \text{sat}(z_3))^T$  имеет следующие компоненты:

$$\text{sat}(z_i) = \begin{cases} \text{sign}(z_i), & |z_i| \geq \gamma, \\ \frac{z_i}{\gamma}, & |z_i| < \gamma, \end{cases}$$

где  $0 < \gamma = \text{const}$  – параметр насыщения.

Преобразуем уравнение (1.1), умножив обе его части слева на матрицу  $M^{-1}(q)$ , и получим:

$$\ddot{q} + C_1(q, \dot{q})\dot{q} = H_1(q)u(t - h(t)), \quad (2.2)$$

где  $C_1(q, \dot{q}) = M^{-1}(q)C(q, \dot{q})$ ,  $H_1(q) = M^{-1}(q)H$ .

Введем отклонения истинного движения системы от программного движения  $x = q - q^*(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^*(t)$  и линеаризуем систему в отклонениях в окрестности точки  $(x = 0, \dot{x} = 0)$ . Получим систему следующего вида:

$$\ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x = H_2(t, x)u(t - h(t)) + S(t) + G(x, \dot{x}), \quad (2.3)$$

где

$$S(t) = -C_1(q^*(t), \dot{q}^*(t))\dot{q}^*(t) - \ddot{q}^*(t), \\ H_2(t, x) = H_1(x + q^*(t)),$$

$$A(t) = \left[ \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}}(q^*(t), \dot{q}^*(t)) \right] \dot{q}^*(t) + C_1(q^*(t), \dot{q}^*(t)),$$

$$B(t) = \left[ \frac{\partial C_1}{\partial q}(q^*(t), \dot{q}^*(t)) \right] q^*(t),$$

$G(x, \dot{x})$  – остаточный член разложения.

Сделаем в системе (2.3) следующую замену переменных:

$$y = x, \quad z = x + Dx.$$

В новых переменных система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = -D^{-1}y + D^{-1}z, \\ \dot{z} = \left[ -D^{-1} + DA(t)D^{-1} - DB(t) \right] y + \left[ D^{-1} - DA(t)D^{-1} \right] z + DS(t) + DG_1(y, z) + \\ + DH_2(t, y)K(t) \operatorname{sat}(z(t - h(t))), \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $G_1(y, z) = G(y, D^{-1}(z - y))$ .

Задача отслеживания программного движения  $q^*(t)$  системы (1.1) переходит в задачу стабилизации нулевого решения ( $y = 0, z = 0$ ) системы (2.4).

Рассмотрим вначале необходимые в дальнейшем определения матричных норм.

Пусть  $R^n$  –  $n$ -мерное действительное линейное пространство векторов с нормой  $|\cdot|$ ,

$R^{n \times n}$  – линейное действительное пространство квадратных матриц,  $I \in R^{n \times n}$  – единичная матрица.

**Определение 1.** Операторной нормой  $\|A\|$  матрицы  $A \in R^{n \times n}$ , подчинённой векторной норме  $|\cdot|$ , называется величина

$$\|A\| = \max_{x \in R^n} |Ax| = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

**Определение 2.** Логарифмической нормой  $\operatorname{lgn}\|A\|$  матрицы  $A \in R^{n \times n}$  называется величина

$$\operatorname{lgn}\|A\| = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \left[ \|I + hA\| - 1 \right].$$

В качестве нормы в пространстве  $R^3$  выберем кубическую векторную норму:

$$|x| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |x_i| \} \quad \forall x \in R^3.$$

Операторная и логарифмическая матричные нормы будут подчинены выбранной кубической векторной норме.

Условия, при выполнении которых управление (2.1) будет обеспечивать отслеживание системой (1.1) заданного программного движения  $q^*(t)$ , можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть управление в системе (1.1) имеет вид (2.1), и найдутся такие положительные постоянные  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$  и  $N$ , что:

1) число  $\gamma$  удовлетворяет неравенству  $\gamma < \varepsilon$ ;

2) матрица  $D$  такова, что выполняется неравенство  $\operatorname{lgn}\| -D^{-1} \| < 0$ ;

3) матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $H_2(t, x)$ ,  $K(t)$ , векторы  $S(t)$ ,  $G(x, y)$  удовлетворяют условию: для всех  $t \geq 0$  и  $x, y \in R^3$ , таких, что  $|x| < \varepsilon$ ,  $|y| < \left( \|D^{-1}\| - \operatorname{lgn}\| -D^{-1} \| \right) \varepsilon$ , справедливы неравенства

$$\operatorname{lg}n \|D^{-1} - DA(t)D^{-1}\| \leq b, \quad |DG(x, y)| \leq N(|x|^2 + |y|^2),$$

$$\|D^{-1} - DA(t)D^{-1} + DB(t)\| \varepsilon + |DS(t)| + Nd_\delta^2 \varepsilon^2 + \|DH_2(t, x)K(t)\| \leq a,$$

$$\left[ \|D^{-1} - DA(t)D^{-1} + DB(t)\| + \frac{1}{d} \operatorname{lg}n \|D^{-1} - DA(t)D^{-1}\| \right] \varepsilon + |DS(t)| + Nd_\delta^2 \varepsilon^2 + \operatorname{lg}n \|DH_2(t, x)K(t)\| \leq 0,$$

где  $d = -\frac{\|D^{-1}\|}{\operatorname{lg}n \|D^{-1}\|} = \operatorname{const} > 0$ ,  $d_\delta^2 = (\|D^{-1}\| - \operatorname{lg}n \|D^{-1}\|)^2 + 1$ ;

- 4) величина начальных отклонений  $\delta$  удовлетворяет неравенству  $0 < d\delta < \varepsilon$ ;
- 5) максимальная величина запаздывания  $h_0$  удовлетворяет неравенству

$$h_0 < \frac{1}{b} \ln \frac{b\varepsilon + ad}{d(a + b\gamma)}.$$

Тогда решение системы (1.1) отслеживает программное движение  $q^*(t)$  посредством управления (2.1) с погрешностью слежения, не превышающей  $\varepsilon$ .

Доказательство теоремы основано на применении к системе (2.4) вектор-функции Ляпунова вида  $V = (|y|, d|z|)^T$  и оценке производной этой функции на решениях системы. Подробное исследование поведения вектор-функции Ляпунова данного типа вдоль решений системы вида (2.4) представлено в работе [1].

**Заключение.** Представленный метод построения управления движением мобильных роботов с четырьмя роликонесущими колесами обладает следующими преимуществами:

- 1) возможностью применения полученных результатов к широкому классу отслеживаемых программных движений;
- 2) возможностью установить максимально допустимое запаздывание  $h_0$  и величину начальных отклонений  $\delta$ , а также оценить погрешность слежения  $\varepsilon$ .

### Литература

1. Моторина Д.Ю. Управление с насыщением в задаче слежения для механических систем с учетом запаздывания // Автоматизация процессов управления. 2010. № 1 (19). С. 24–30.
2. Перегудова О.А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении // АИТ. 2009. № 5. С. 95–105.
3. Huang Y., Cao Q. The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR // Industrial Robot: An International Journal. 2010. V. 37. No 2. P. 193–201.
4. Oliveira H.P., Sousa A.J., Moreira A.P., Costa P.J. Precise Modeling of a Four Wheeled Omni-directional Robot // Proceedings of the 8th Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions. 2008.
5. Purwin O., D'Andrea R. Trajectory generation and control for four wheeled omni-directional vehicles // Robotics and Autonomous Systems. 2006. V. 54 (1). P. 13–22.

## ОДИН ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ ПОГЛОЩАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

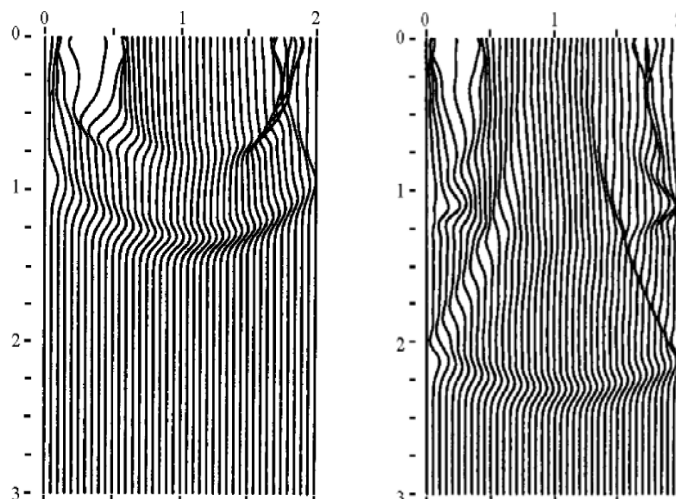
*Д.В. Фирстов, Д.В. Бережной, Е.В. Биряльцев*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

**Аннотация.** В науке и технике постоянно приходится сталкиваться с проблемой расчета систем, имеющих сложную геометрическую конфигурацию и нерегулярную физическую структуру. Компьютеры позволяют выполнять такие расчеты при помощи приближенных численных методов. Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из них. Моделирование геологических объектов с целью оценки их нефтегазоносности одна из задач, которые можно решить с помощью метода конечных элементов. Исследование данного типа сводится к моделированию конечного участка бесконечного пространства, что приводит к проблеме, существующей в численном моделировании динамических задач механики сплошной среды, а именно возникновение волн, отраженных от границ изучаемой области. При отсутствии принятых мер борьбы с воздействиями указанных типов волн, результаты моделирования приобретают различного рода артефакты, которые существенно ухудшают их адекватность. Для решения этой проблемы сформулирован принцип и условия эффективного применения “поглощающих граничных условий” на основе тела Фойгта, для различных конфигураций исследуемых сред.

### **Введение.**

Известны способы решения данной проблемы, основанные на формировании “прозрачных границ” [1, 2], разработанных для ряда частных случаев “поглощающего слоя” для упругого тела [3, 4, 5] рис. 3, которые требуют ввода дополнительных алгоритмов в численную схему и зависимы от погрешности решения, что не дает полное исключение возможности искажения результатов. Так же возможно применение увеличения размера расчетной области до величины, исключаяющей воздействие отраженных от границ волн (области расширения модели) [4], что ведет к резкому увеличению объема моделирования, особенно в случае моделей 3D. Ильгамов М.А. в своей работе [7] сделал подробный обзор основных методов, способов и подходов постановки неотражающих граничных условий. Так, в упомянутой работе, рассмотрены способы борьбы с отражениями от искусственных границ в акустическом приближении с затуханием, а так же метод постановки неотражающих граничных условий для случая распространения упругих волн без затухания (рис. 1, 2). В предложенном подходе реализован способ построения поглощающий граничных условий в случае распространения упругих волн с затуханием.



**Рис. 1.** Вертикальные перемещения. Решение без «неотражающих граничных условий» при  $t = 1,5$  и при  $t = 2,5$

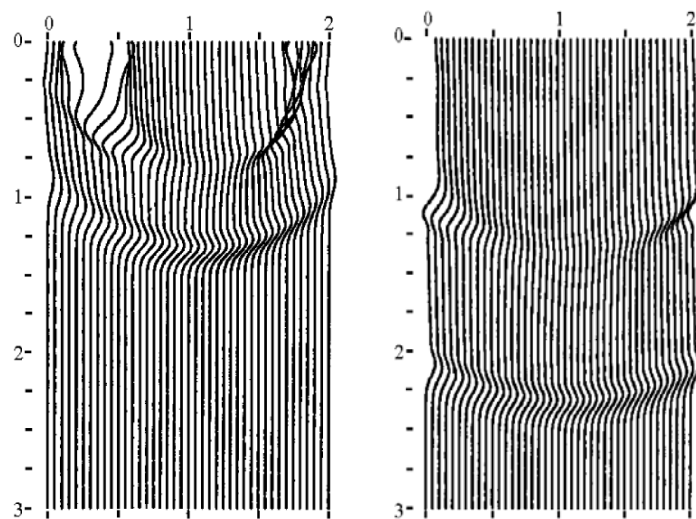


Рис. 2. Вертикальные перемещения. Решение с «неотражающим граничным условием» при  $t = 1,5$  и при  $t = 2,5$

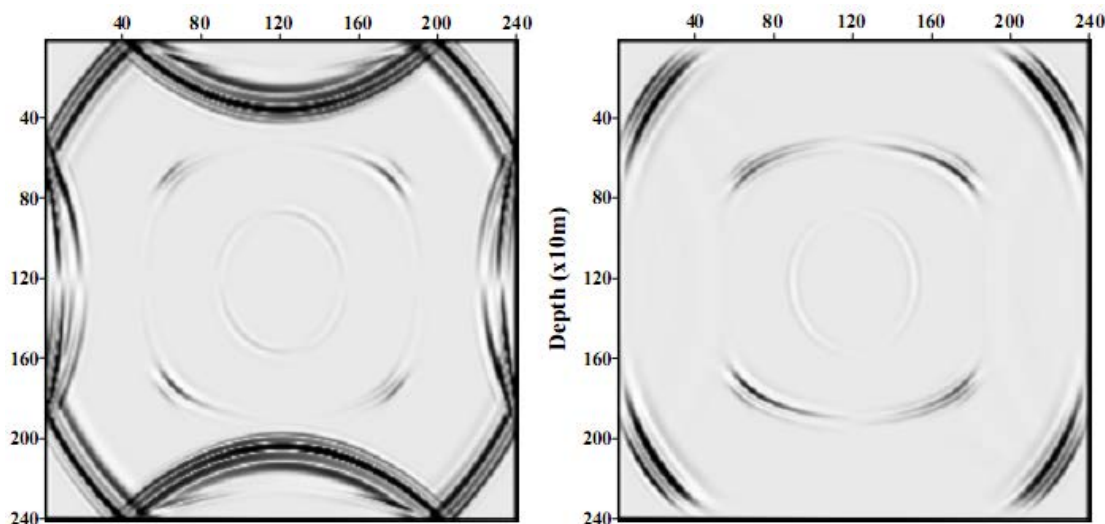


Рис. 3. Результат применения одного из частных случаев «поглощающего слоя»

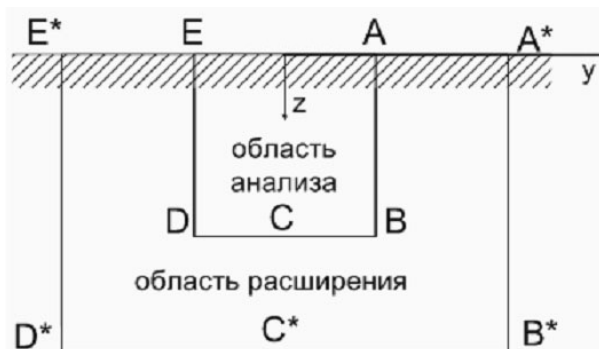


Рис. 4. Схематическое изображение «области расширения» модели.

В предлагаемом подходе к построению «поглощающих граничных условий», область моделирования и область расширения модели представлены телом Фойгта, без введения дополнительных алгоритмов в расчетную схему. Принцип построения состоит в том, что в области расширения параметры, определяющие затухание, плавно увеличиваются от границы области изучения к границе области расширения, как показано стрелками рис. 4. Плавное изменение данного параметра позволяет минимизировать отражения от слоев с различным коэффициентом затухания.



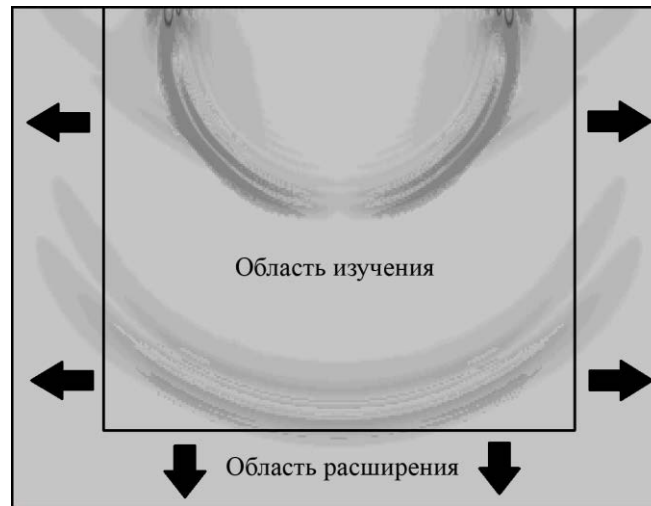


Рис. 5. Схема построения “поглощающих граничных условий”

### 1. Разработка численной модели.

С точки зрения практики расчета сложных конструкций матричными методами, МКЭ является естественным распространением методов расчета стержневых систем на задачи механики сплошной среды. Это объясняется единством методологии классических методов строительной механики и МКЭ, которая сводится к расчленению исходной конструкции на отдельные части (фрагменты), как правило, более простой структуры, механическое поведение (процесс деформирования) которых легко описывается, а затем к объединению их вновь в единую конструкцию путем выполнения условий равновесия и сплошности. С другой стороны, МКЭ можно трактовать как специфическую форму метода Рунге приближенного решения задач механики деформируемого твердого тела, что дает ключ к теоретическому обоснованию его основных положений. В настоящей работе будем придерживаться вариационной постановки задач МКЭ: либо как задач минимизации функционала энергии, либо как решение вариационных уравнений равновесия (движения).

#### 2.1. Вариационная постановка задач теории упругости.

Для единицы объема упругого тела, ориентированного вдоль произвольно выбранной декартовой системы координат  $x, y, z$ , удельная потенциальная энергия деформации записывается в виде

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (2.1)$$

Введем вектор деформаций  $\{\varepsilon\}$  и вектор напряжений  $\{\sigma\}$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}, \quad (2.2)$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}.$$

Тогда выражение  $W$  (2.1.1) можно записать

$$W = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}. \quad (2.3)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом, определяется в виде интеграла по всему объему тела  $V$

$$U = \iiint_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV. \quad (2.4)$$

Закон Гука запишем в матричном виде через матрицу упругости (матрицу упругих постоянных)  $[D]$ :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (2.5)$$

Тогда выражение потенциальной энергии деформации можем записать

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV. \quad (2.6)$$

Работу внешних сил тоже запишем в матричном виде. Для этого введем вектор перемещений

$$\{\mathcal{G}\}^T = \{u, v, w\}, \quad (2.7)$$

где  $u, v, w$  – проекции вектора перемещений вдоль осей  $x, y, z$ , вектор массовых сил  $\{Q\}$

$$\{Q\}^T = \{Q^{(x)}, Q^{(y)}, Q^{(z)}\} \quad (2.8)$$

и вектор поверхностных сил  $\{P\}$ , действующий на части поверхности  $S_\sigma$ ,

$$\{P\}^T = \{P^{(x)}, P^{(y)}, P^{(z)}\}. \quad (2.9)$$

Тогда работа внешних сил может быть записана в виде

$$A = \iiint_V \{Q\}^T \{\mathcal{G}\} dV + \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{\mathcal{G}\} dS. \quad (2.10)$$

Полная энергия (функционал Лагранжа) системы определяется как

$$L = U - A \quad (2.11)$$

откуда, с учетом (2.6), (2.10), получим окончательное выражение

$$L = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{Q\}^T \{\mathcal{G}\} dV - \iint_{S_\sigma} \{P\}^T \{\mathcal{G}\} dS. \quad (2.12)$$

В соответствии с общими теоремами механики, истинное состояние равновесия тела соответствует минимуму полной энергии, т.е. задача сводится к поиску такого вектора  $\{\mathcal{G}\}$ , и как следствие векторов  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\sigma\}$ , которые дают  $\min L$ . Уравнениями Эйлера этой вариационной задачи являются уравнения равновесия и статические граничные условия [6].

Для отдельного конечного элемента строится выражение функционала энергии как функции перемещений узлов, принадлежащих только этому конечному элементу. Схема здесь следующая. Рассмотрим некоторый  $m$ -ый элемент. Обозначим через вектор  $\{q^m\}$  – вектор узловых перемещений  $m$ -го элемента

$$\{q^m\}^T = \{q_1^m, q_2^m, \dots, q_{12}^m\}. \quad (2.13)$$

Введем аппроксимации внутри элемента

$$\{\mathcal{G}(x, y, z)\} = [U(x, y, z)] \{q^m\}, \quad (2.14)$$

где матрица  $[U]$  содержит в себе некоторые функции, конкретный вид которых будет рассмотрен далее. Однако следует сразу сказать, что ее элементами будут степенные функции, т.е. полиномы. По (2.14) можем вычислить вектор деформаций (2.2) в виде

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q^m\}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.14), (2.15) в (2.12), получим выражение энергии на элементе

$$L_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_m} \{q^m\}^T [B]^T [D] [B] \{q^m\} dV - \iiint_{V_m} \{Q^m\}^T [U] \{q^m\} dV - \iint_{S_\sigma^m} \{P^m\}^T [U] \{q^m\} dS. \quad (2.16)$$

Так как параметры  $\{q^m\}$  суть постоянные на элементе, то (2.16) можем записать в виде

$$L_m = \frac{1}{2} \{q^m\}^T [K^m] \{q^m\} - \{P^m\}^T \{q^m\}, \quad (2.17)$$

где

$$[K^m] = \iiint_{V_m} [B]^T [D] [B] dV, \quad (2.18)$$

$$\{P^m\} = \iiint_{V_m} \{Q^m\}^T [U] \{q^m\} dV + \iint_{S_\sigma^m} \{P^m\}^T [U] \{q^m\} dS,$$

$[K^m]$  – матрица жесткости элемента,  $\{P^m\}$  – вектор узловых сил.

Строится функционал энергии для всего тела как сумма значений энергии по всем элементам. При этом считается, что перемещения узлов, принадлежащих разным элементам, одинаковы для всех прилегающих элементов. Физически это означает выполнение условий неразрывности поля перемещений во всей области тела. После выполнения операций сборки, получим

$$L = \sum_m L_m = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{P\}^T \{q\}. \quad (2.19)$$

Здесь вектор  $\{q\}$  включает в себя узловые перемещения всего тела, матрица  $[K]$  называется матрицей жесткости всего тела и состоит из суммы матриц  $[K^m]$ , вектор  $\{P\}$  – вектор внешних сил, состоящий из суммы поэлементных сил  $\{P^m\}$  и заданных сосредоточенных нагрузок.

В соответствии со схемой Ритца необходимо найти такой вектор  $\{q\}$ , который дает минимум энергии  $\mathcal{E}$ . Как известно, необходимым и достаточным условием минимума полной энергии является равенство нулю ее первой вариации

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} (\{\delta q\}^T [K] \{q\} + \{q\}^T [K] \{\delta q\}) - \{P\}^T \{\delta q\} = 0, \quad (2.20)$$

откуда в силу симметрии матрицы  $[K]$  получим алгебраическую задачу

$$[K] \{q\} = \{P\}. \quad (2.21)$$

Решая эту систему, находим вектор  $\{q\}$ , который однозначно определяет поле перемещений и позволяет найти распределение напряжений в теле, что и является конечной целью задач теории упругости (2.3).

Такова в общих чертах схема решения задач теории упругости МКЭ в вариационном варианте.

## 2.2. Численное моделирование распространения волн в упругой среде.

Рассмотрим задачу о распространении волн в упругой среде. Прямоугольная плоская область со стороной 3000 м, высотой 3000 м, закреплена по всему контуру, кроме верхней грани (рис. 11). Размер конечного элемента 20 x 20 м. Для боковых и нижней границ, считаются нулевыми обе компоненты вектора перемещений. Верхняя граница считается свободной.

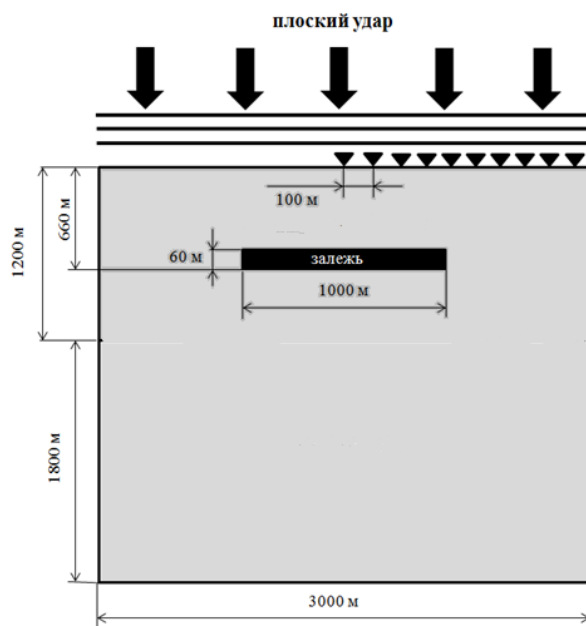
Геологическая среда моделировалась телом Фойгта. Решение проводилось методом конечных элементов по явной схеме. В качестве источника возбуждения использовался плоский удар сверху по поверхности модели. Неоднородность, по сейсмомеханическим параметрам соответствующая нефтяной залежи задавалась симметрично относительно центра модели.

Механические характеристики грунта и нефтяной залежи указаны в табл. 1. Для получения спектров записывались значения скорости вертикальных перемещений на модельной верхней поверхности (рис. 12). В табл. 2 показан результат визуализации картины волнового поля.

Для проведения численного моделирования скоростные характеристики среды были пересчитаны в сейсмомеханические параметры.

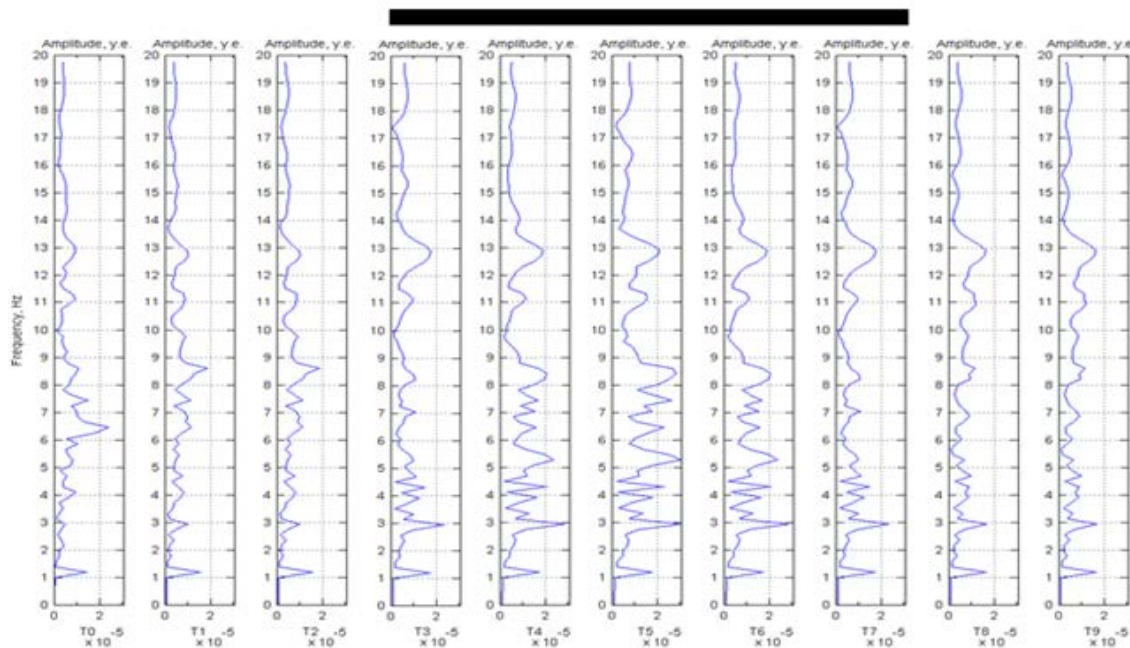
Таблица 1. Характеристика численной модели геологического объекта

Материал	Vs, м/с	Vp, м/с	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга, Па	К. Пуассона
Залежь	746	1492	1924	2853865002	0,3333
Грунт	2126	4249	2500	30128579082	0,3333



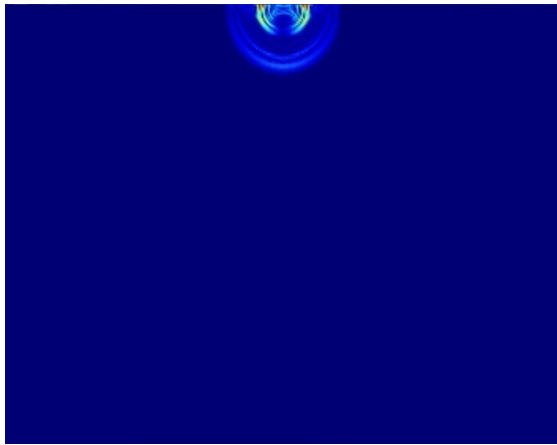
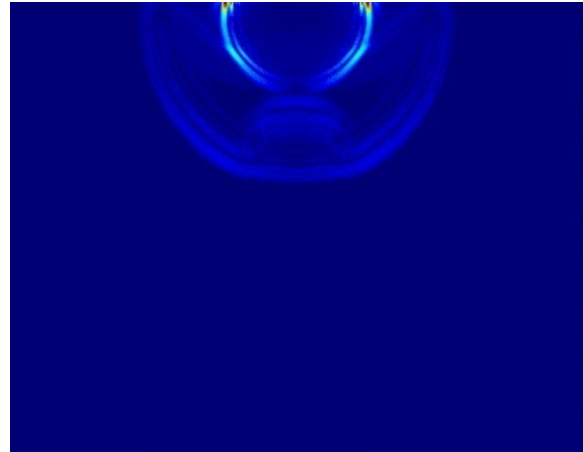
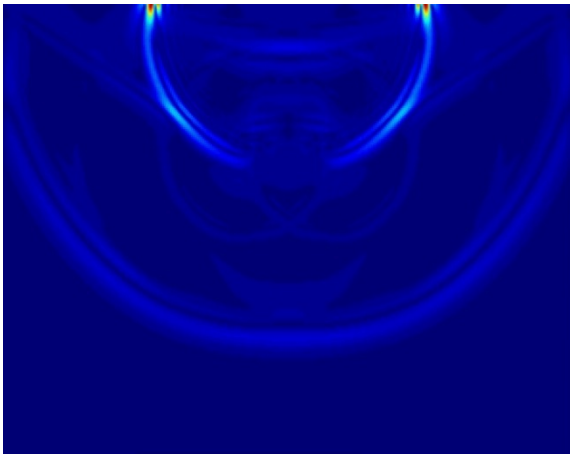
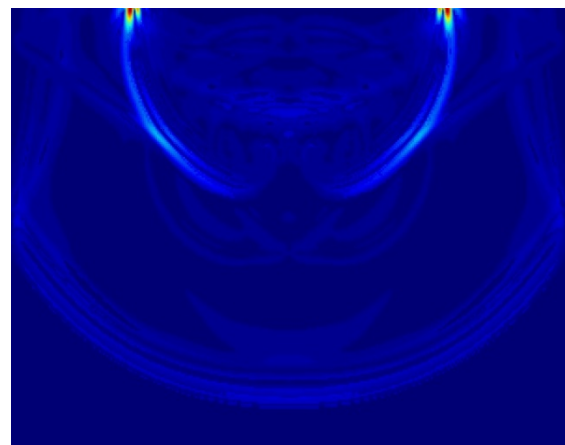
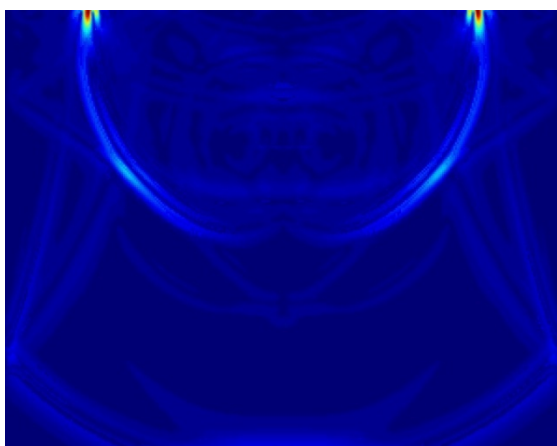
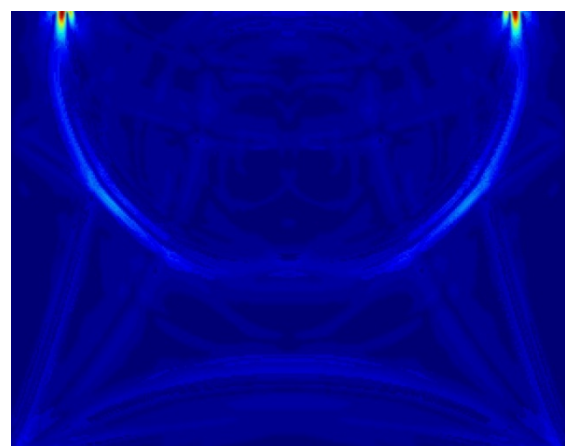
**Рис. 11.** Использовалась область численного моделирования размером 3 км по простиранию и 3 км в глубину. Геологическая среда моделировалась телом Фойгта. Контрастная область задавалась симметрично относительно центра модели

Результат проведенного численного моделирования в виде визуализации картины волнового поля (табл. 2) подтверждает возникновение волн, отраженных от границ изучаемой области, при отсутствии соответствующих методов борьбы с данным типа волнами. При времени  $t=0.34$  сек. возникает первое отражение от неоднородности, затем при времени  $t=0.78$  сек. возникает ложное, при условии моделирования бесконечномерного пространства, отражение от границ счетной области. Данный эффект подтверждается и при построении спектральных кривых.



**Рис. 12.** Спектральные кривые снятые на верхней поверхности, без применения методов исключения ложных отражений. Черной полосой указаны спектры над неоднородностью

Таблица 2

 $t=0.2\text{sec}$  $t=0.34\text{sec}$  $t=0.78\text{sec}$  $t=0.2\text{sec}$  $t=1.35\text{sec}$  $t=1.47\text{sec}$ 

### 3. Результаты применения поглощающих граничных условий.

В предлагаемом подходе к построению “поглощающих граничных условий”, область моделирования и область расширения модели представлены телом Фойгта, без введения дополнительных алгоритмов в расчетную схему.

В области расширения параметры, определяющие затухание, плавно увеличиваются от границы области изучения к границе области расширения, как показано стрелками на рисунке 13. Плавное изменение данного параметра позволяет минимизировать отражения от слоев с различным коэффициентом затухания.

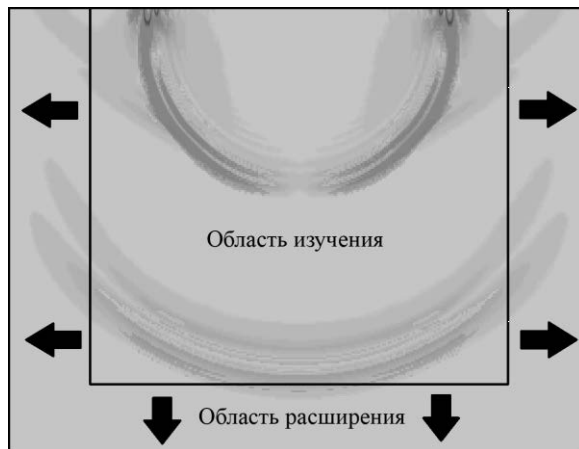


Рис. 13. Схема построения “поглощающих граничных условий”

На основе данного подхода разработан алгоритм определения распределения коэффициента затухания в области расширения. С помощью программного комплекса [6] проведен ряд численных экспериментов, показавших хорошее совпадение модельных упругих волн при использовании предложенного подхода и моделирования с областью расширения, исключая приход отраженных волн от границ расчетной области в область моделирования.

Предложенный подход не требует введения специальных процедур и функций в используемую численную схему. Требуемая область расширения существенно меньше, чем в стандартном случае применения области расширения без использования параметров затухания специальным образом.

В таблице 3 показан результат визуализации картины волнового поля.

Основным результатом разработки поглощающих граничных условий является практически полное совпадение максимумов амплитуд спектральных кривых (рис. 14, 15), в случае их применения со случаем применения метода расширения области. Данный эффект наблюдается для всего диапазона частот, необходимого для анализа геологического объекта на наличие неоднородности, по сейсмомеханическим параметрам соответствующей залежи нефти [3].

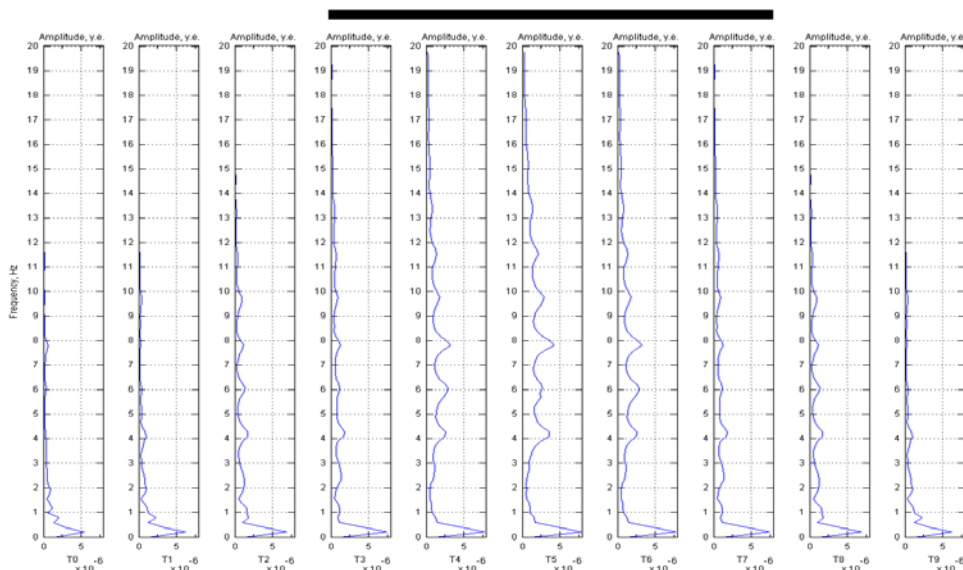


Рис. 14. Спектральные кривые, снятые на верхней поверхности, с применением поглощающих граничных условий. Черной полосой указаны спектры над неоднородностью

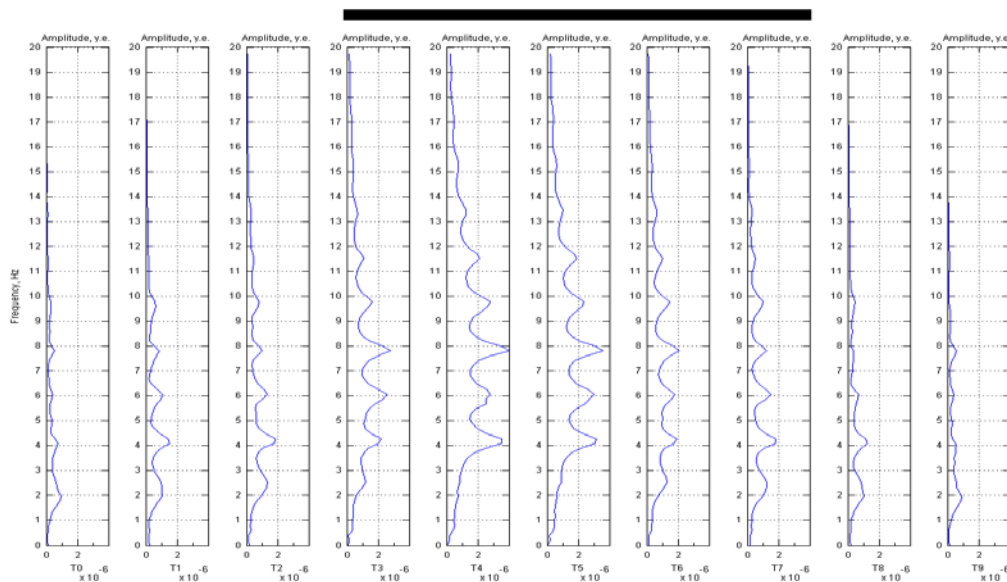


Рис. 15. Спектральные кривые, снятые на верхней поверхности, с применением метода расширения расчетной области. Черной полосой указаны спектры над неоднородностью

Сопоставление картин волнового поля (табл. 4) при случае численного моделирования без поглощающих граничных условий (табл.4, левый столбец) и с применением поглощающих граничных условий (табл. 4, правый столбец) демонстрирует эффективность применения предложенного подхода.

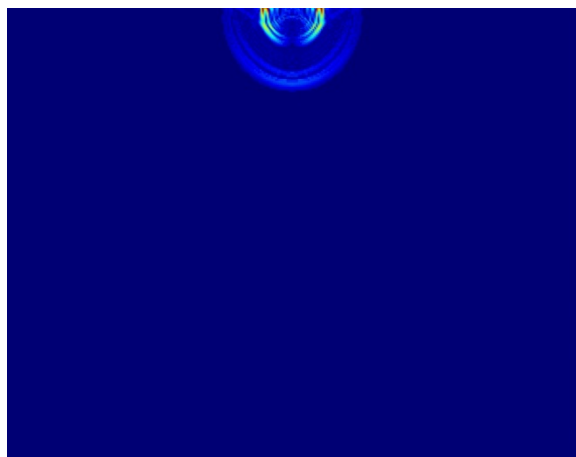
#### Заключение.

В данной работе были рассмотрены основные аспекты моделирования геологических объектов, с помощью метода конечных элементов. Предложен и исследован вариант построения “поглощающих граничных условий” на основе тела Фойгта в задачах динамики механики сплошной среды, позволяющий при моделировании конечного участка бесконечного пространства пропускать упругие волны за границы расчетной области без ложных отражений.

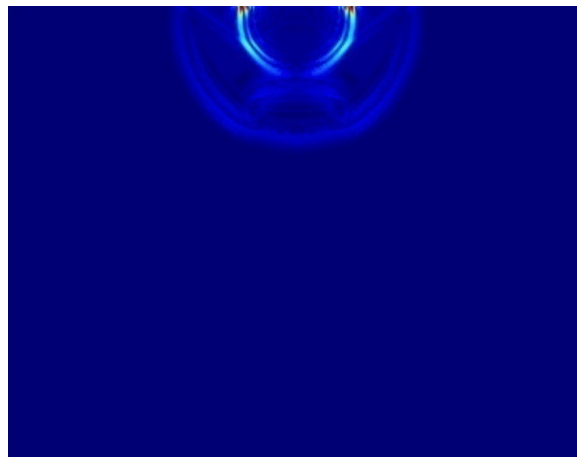
В результате проведенного исследования:

- Сформулирован алгоритм построения поглощающих граничных условий позволяющий получать спектры, удовлетворяющие критериям метода низкочастотной сейсморазведки.
- Исследованы случай неоднородной горизонтально слоистой модели и случай трехмерного объекта.
- Проведена опытная эксплуатация разработанной методики при решении практических задач в геофизической компании.

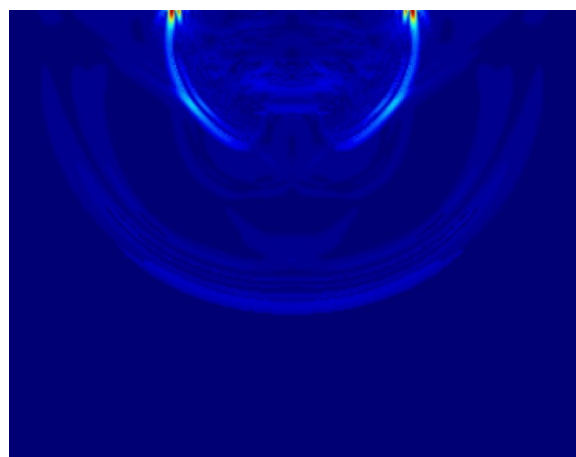




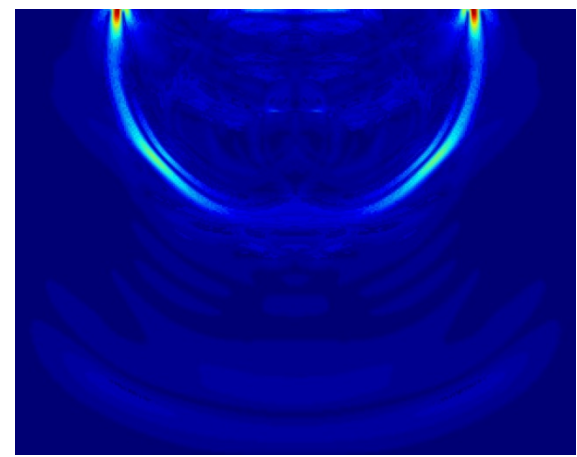
$t=0.2\text{sec}$



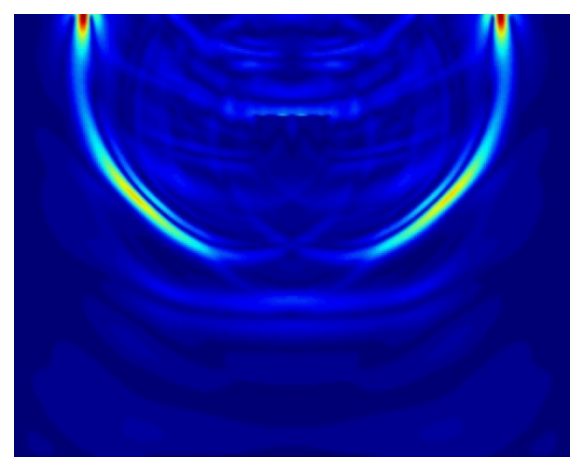
$t=0.34\text{sec}$



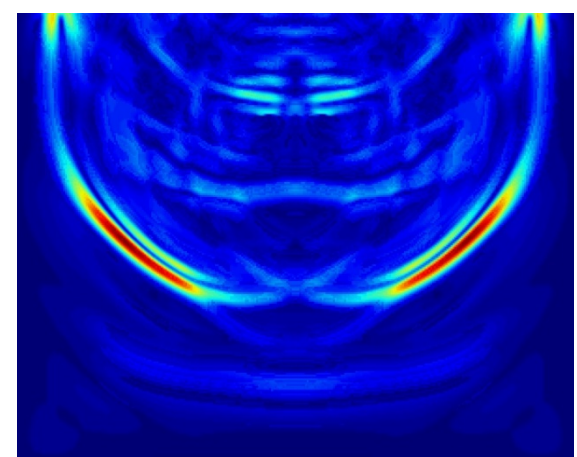
$t=0.78\text{sec}$



$t=1.22\text{sec}$



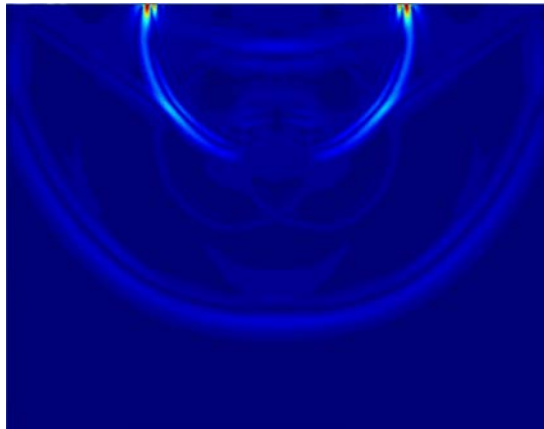
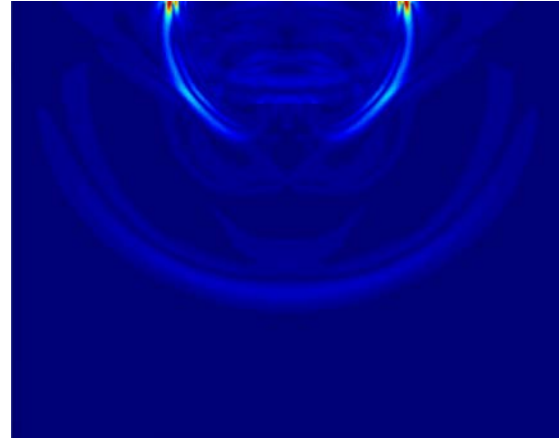
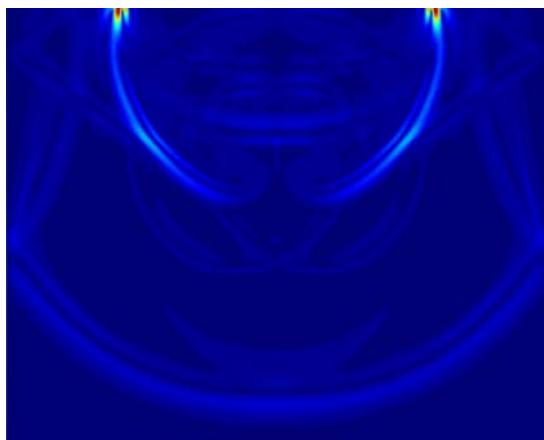
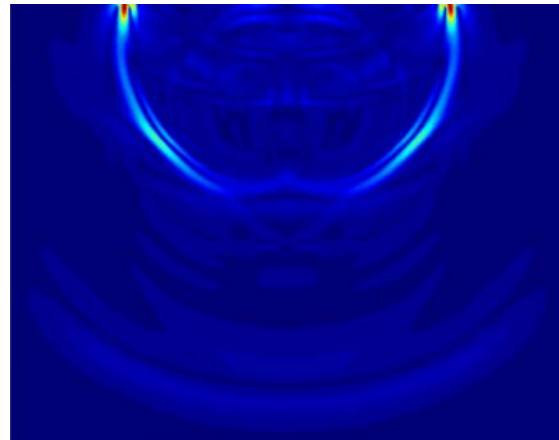
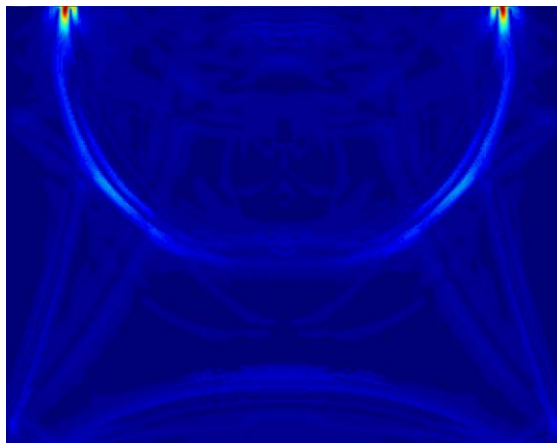
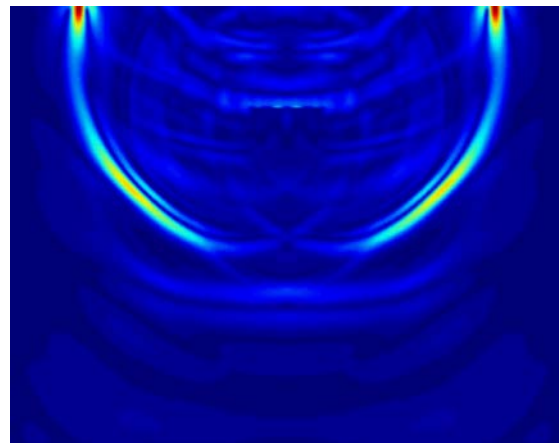
$t=1.35\text{sec}$



$t=1.47\text{sec}$



Таблица 4.

 $t=0.34\text{sec}$  $t=0.34\text{sec}$  $t=0.78\text{sec}$  $t=0.78\text{sec}$  $t=1.47\text{sec}$  $t=1.47\text{sec}$ 

### Литература

1. Бате К., Вилсон Р. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
2. Бережной Д.В., Биряльцев Е.В., Фирстов Д.В. Численное моделирование неоднородных горизонтально слоистых сред с поглощающими граничными условиями // XVIII Международный симпозиум "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. Ярополец, Россия 2012.

3. Биряльцев Е.В., Рыжов В.А., Шабалин Н.Я. Особенности интерпретации спектральных характеристик природных микросейсм для локального прогноза нефтеносности в условиях республики Татарстан. – Прием и обработка информации в сложных информационных системах, выпуск № 22, Казань, 2005, с.113-120.

4. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

5. Фирстов Д.В., Бережной Д.В. Оценка адекватности 2D и 3D сейсмогеологических моделей // Сборник итоговой студенческой конференции 2011. Казань, Россия 2011. С. 81-84.

6. Фирстов Д.В., Бережной Д.В., Биряльцев Е.В. Один подход к реализации поглощающих граничных условий при численном решении динамических задач механики сплошной среды // XXIV Международная конференция Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций/ Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург, Россия 2011. С. 82-87.

7. Фирстов Д.В., Бережной Д.В., Биряльцев Е.В. Реализация поглощающих граничных условий при решении динамических задач механики сплошной среды мкэ // Лобачевские чтения 2011. Казань, Россия 2011. С. 299-301.

8. Фирстов Д.В., Бережной Д.В., Биряльцев Е.В. Численное моделирование 2D и 3D сейсмогеологических моделей // Международная научно-практическая конференция "Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук". Казань, Россия 2011. С. 102-105.

## СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ<sup>1</sup>

*Е.В. Цветова (Фокеева), В.Н. Ковальногов*

*Ульяновский государственный технический университет*

**Аннотация.** Приведены методика и результаты расчетного исследования влияния различных факторов на эффективность газодинамической температурной стратификации дисперсного потока. Обоснована возможность существенного повышения эффективности температурной стратификации за счет использования дисперсного рабочего тела и продольных ребер на поверхности теплообмена в тракте дозвукового течения и оптимизации их размеров.

### **Введение.**

Повышенный интерес к эффектам газодинамической температурной стратификации связан с реальными перспективами их скорого технического приложения. Так на основе вихревого эффекта были построены системы кондиционирования воздуха летательных аппаратов, системы охлаждения режущих инструментов как при обработке металлов, так и при буровых работах, вихревые холодильные установки и т.д.

Газодинамический метод и устройство температурной стратификации в сверхзвуковом потоке предложены академиком РАН Леонтьевым А.И. [1], [2]. Температурная стратификация обусловлена отличием адиабатной температуры стенки  $T_{r_2}$  в сверхзвуковом тракте трубы Леонтьева от адиабатной температуры стенки  $T_{r_1}$  в тракте дозвуковом. В таких условиях происходит теплообмен между потоками в дозвуковом и сверхзвуковом трактах.

Эффективность температурной стратификации определяется передаваемым тепловым потоком. Плотность теплового потока при теплопередаче от газа в дозвуковом тракте к газу в сверхзвуковом тракте выражается уравнением

$$q = k(T_{r_1} - T_{r_2}), \quad (1)$$

где коэффициент теплопередачи  $k$ , пренебрегая термическим сопротивлением стенки, через которую происходит передача теплоты, можно найти по выражению

$$k = 1/(1/\alpha_1 + 1/\alpha_2). \quad (2)$$

Как видно из выражения (1), плотность теплового потока (и эффективность температурной стратификации) увеличивается при увеличении температурного напора  $\Delta T = T_{r_1} - T_{r_2}$  и при увеличении коэффициента теплопередачи  $k$ . Температурный напор  $\Delta T$  увеличивается при уменьшении температуры  $T_{r_2}$ , которая зависит от коэффициента восстановления температуры  $r_2$ .

Температуры  $T_{r_1}$ ,  $T_{r_2}$ , выражаются через термодинамические температуры потока  $T_1$ ,  $T_2$ , температуру торможения  $T^*$  и коэффициенты восстановления  $r_1$ ,  $r_2$

$$T_{r_1} = T_1 + r_1(T^* - T_1); \quad T_{r_2} = T_2 + r_2(T^* - T_2) \quad (3)$$

Заметим, что в однородном газовом потоке коэффициенты восстановления  $r_1$  и  $r_2$ , определяемые числом Прандтля, можно считать одинаковыми ( $r_1 = r_2 = r$ ). В этом случае при уменьшении коэффициента восстановления  $r$  температура  $T_{r_2}$  уменьшается, а температурный напор  $\Delta T$ , плотность теплового потока  $q$  и эффективность температурной стратификации увеличиваются.

Из выражений (1), (2) видно, что для повышения эффективности температурной стратификации надо стремиться также увеличить коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые определяют коэффициент теплопередачи  $k$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 08-08-99004 офи).

У значительной части газов число  $Pr$  и зависящий от него коэффициент восстановления  $r$  не сильно отличаются от 1, а эффективность температурной стратификации мала. Для повышения эффективности температурной стратификации в работах [3–6] предложено использовать в качестве рабочего тела дисперсный поток (газ с распределенными в нем частицами конденсированной фазы), специальным образом организовав его движение в проточной части устройства (см. [6]). Повышение эффективности температурной стратификации в дисперсном потоке обусловлено тем, что в нем в условиях направленного поперечного (инерционного) перемещения частиц в пограничном слое (которое организуется специально) имеет место существенная интенсификация теплоотдачи, а в сверхзвуковом потоке такая интенсификация сопровождается уменьшением коэффициента восстановления температуры. Оба эти фактора способствуют увеличению теплового потока через стенку, разделяющую тракты дозвукового и сверхзвукового потоков в трубе Леонтьева, и повышению эффективности температурной стратификации. Практическая реализация течения дисперсного потока с инерционным выпадением частиц достигается (см. [6]) его закруткой в сверхзвуковом тракте трубы Леонтьева [2].

Следует отметить, что при увеличении концентрации конденсированных частиц в потоке и значения обобщенной переменной  $G$  [3], характеризующей их влияние на интенсивность теплоотдачи и коэффициент восстановления температуры в сверхзвуковом тракте трубы Леонтьева, коэффициент теплопередачи и передаваемый тепловой поток сначала (при малых  $G$ ) возрастают интенсивно, а затем (при больших  $G$ ) темп их возрастания существенно снижается. Это происходит из-за того, что коэффициент теплоотдачи в сверхзвуковом тракте становится существенно больше коэффициента теплоотдачи в тракте дозвуковом. В таких условиях для дальнейшего увеличения передаваемого теплового потока целесообразно на поверхности с меньшим коэффициентом теплоотдачи (в дозвуковом тракте) установить ребра. По функционально-технологическим соображениям ребра следует выполнить продольными.

### 1. Расчетные уравнения.

Анализ выполним применительно к использованию прямых плоских продольных ребер постоянной толщины. Коэффициенты теплоотдачи к поверхности ребер и к межреберной поверхности полагаются одинаковыми.

Для оребренной поверхности относительный (в форме [3], [4]) тепловой поток на основном участке устройства газодинамической температурной стратификации (на котором скорости движения рабочего тела в дозвуковом и сверхзвуковом трактах поддерживаются неизменными) выражается зависимостью

$$\bar{q} = \varepsilon \cdot \frac{(1-r_1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-1} + (r_1-r_2) - (1-r_2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{-1}}{\frac{F}{F_m + \eta_p F_p} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (4)$$

Здесь комплекс  $\varepsilon$  определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left[ M_1^2 Pr \frac{\gamma R_0 (\gamma_0 + 1)}{\gamma_0 R (\gamma + 1)} \right]^{0.4} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{0.8}{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma_0 + 1}{2} \right)^{\frac{0.8}{\gamma_0-1}} \left[ \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\frac{0.4(1+\gamma)}{1-\gamma}} \quad (5)$$

Отношение  $\alpha_1/\alpha_2$  определяется зависимостью [5]

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left( \frac{\rho_1 u_1}{\rho_2 u_2} \right)^{0.8} \left( 1 + r_2 \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{-0.11} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{0.8} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{0.4(1+\gamma)}{1-\gamma}} \left( \frac{1 + r_2 \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{(1 + 5 \cdot 10^9 Re_{wx2} G^2)^{-0.2}} \right)^{-0.11} \quad (6)$$

Для течения дисперсного потока в дозвуковом тракте устройства температурной стратификации характерно отсутствие поперечного перемещения частиц в пограничном слое, а также незначительное температурное и скоростное скольжения фаз. В таких условиях определение коэффициента восстановления температуры допустимо производить по известной зависимости для однородного газового потока

$$r_1 = \sqrt[3]{Pr} \quad (7)$$

Для расчета коэффициента восстановления в сверхзвуковом тракте (где реализуется движение высокоскоростного дисперсного потока с поперечным перемещением частиц в пограничном слое) воспользуемся предложенной в работах [3], [4] зависимостью

$$r_2 = \frac{\sqrt[3]{\text{Pr}}}{1 + 28,67G^{0,3}}. \quad (8)$$

Здесь  $G = \frac{|s_v| \mu_0}{(u_{sm} - u) \rho_0^2 u_0^2}$  – обобщенная переменная (см. [7]), имеющая смысл критерия подобия, характеризующего влияние конденсированных частиц.

Интенсивность внутренних источников количества движения в пограничном слое несущей среды дисперсного потока  $s_v$  определяется на его внешней границе по выражению

$$s_v = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_B} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{si} c_{fsi}}{d_{si}} |u_{si} - u| (u_{si} - u). \quad (9)$$

Коэффициент эффективности ребра  $\eta_p$  рассчитывается по известной формуле, которую для рассматриваемых условий можно представить в форме

$$\eta_p = \text{th} \left( \frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right) / \left( \frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right), \quad (10)$$

где  $\text{Bi} = \alpha_1 \delta / \lambda_m$  – число Био.

Из выражений (4) – (8), (10) видно, что безразмерная плотность теплового потока  $\bar{q}$ , характеризующая эффективность устройства газодинамической температурной стратификации, определяется десятью параметрами:  $\gamma$ ,  $\text{Pr}$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $G$ ,  $\text{Re}_{\text{вх}2}$ ,  $\lambda_1/\lambda_0$ ,  $R/R_0$ ,  $\text{Bi}$ ,  $l/\delta$  из которых четыре ( $\gamma$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\lambda_1/\lambda_0$ ,  $R/R_0$ ) являются связанными используемым рабочим телом. Таким образом, в анализируемых условиях оптимизацией 7 параметров может быть обеспечена максимальная эффективность процесса температурной стратификации, при которой относительный тепловой поток  $\bar{q}$  достигает максимального значения.

## 2. Результаты исследования.

Расчеты в рамках настоящего исследования выполнялись для постоянных значений трех из четырех связанных параметров  $\gamma = 1,4$ ;  $\lambda_1/\lambda_0 = 1$ ;  $R/R_0 = 1$ . Исследование проводилось в 3 этапа. На первом этапе проведена оптимизация параметров при использовании в качестве рабочего тела однородных газовых потоков. На втором этапе проведена оптимизация параметров при использовании в качестве рабочего тела дисперсных потоков без оребрения рабочей поверхности устройства. На третьем этапе исследовано влияние параметров оребрения ( $\text{Bi}$ ,  $l/\delta$ ) и найдены их оптимальные значения.

Оптимизационная задача на первом этапе формулировалась следующим образом: определить значения влияющих параметров  $\text{Pr}$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  при которых функция цели  $\bar{q}$  достигает максимального значения. Задача решалась методом Зайделя-Гаусса. Погрешность отыскания экстремума соответствует единице младших разрядов полученных значений оптимальных параметров. В результате решения оптимизационной задачи первого этапа найдены следующие оптимальные значения параметров:  $\text{Pr} = 0,167$ ;  $M_1 = 0,529$ ;  $M_2 = 2,41$ . Оптимальным значениям влияющих параметров соответствует максимальное значение функции цели  $\bar{q} = 0,0338$ .

Результаты второго этапа исследований (часть этих результатов представлена в работах [3–5]) показали, что при использовании дисперсного рабочего тела так же, как и в однородном потоке имеет место немонотонное (по кривой с максимумом) изменение относительного теплового потока при увеличении числа Маха  $M_2$ . Относительный тепловой поток  $\bar{q}$  при использовании дисперсного рабочего тела может существенно (более чем на порядок) увеличиваться по сравнению с однородным рабочим телом. При этом максимум величины  $\bar{q}$  смещается в область больших чисел Маха  $M_2$ . При увеличении числа Прандтля в анализируемых условиях также имеет место немонотонное (по кривой с максимумом) изменение от-

носительного теплового потока. Максимум теплового потока  $\bar{q}$  при увеличении комплекса G смещается в область больших значений числа Pr. При этом, если при  $Pr = 1$  в однородном потоке тепловой поток  $\bar{q}$  обращается в 0, то в дисперсном потоке  $\bar{q} \neq 0$ . Зависимость относительного теплового потока  $\bar{q}$  от числа Маха  $M_1$  в тракте дозвукового течения также является немонотонной. Максимум теплового потока  $\bar{q}$  при увеличении комплекса G смещается в область больших чисел Маха  $M_1$ . При увеличении комплекса G происходит монотонное увеличение теплового потока  $\bar{q}$ . В таком случае при оптимизационных расчетах следует задавать максимально возможное в анализируемых условиях значение комплекса G, исключив параметр G из числа варьируемых и переведя его в разряд ограничений. Увеличение числа Рейнольдса  $Re_{wx2}$  приводит к некоторому (монотонному) увеличению  $\bar{q}$ . Поэтому при оптимизационных расчетах параметр  $Re_{wx2}$  также следует исключить из числа варьируемых, переведя его в разряд ограничений и задавая максимально реализуемое в анализируемых условиях значение.

Оптимизация влияющих параметров, выполненная для дисперсного потока на втором этапе исследований при  $Re_{wx2} = 10^7$ ,  $G = 5 \cdot 10^{-7}$  (значения порядка  $G = 5 \cdot 10^{-7}$  реализуются при течении потока газозвеси в соплах Лаваля), позволила найти оптимальные значения параметров:  $Pr = 0,547$ ;  $M_1 = 0,820$ ;  $M_2 = 3,14$ . Оптимальным значениям влияющих параметров соответствует максимальное значение функции цели  $\bar{q} = 0,1273$ . Как видно, за счет использования дисперсного рабочего тела при  $G = 5 \cdot 10^{-7}$  и оптимизации параметров обеспечивается увеличение передаваемого теплового потока в 3,77 раза. Расчеты показали также, что при  $G = 2 \cdot 10^{-6}$  (увеличение значения G может быть достаточно просто реализовано за счет увеличения концентрации частиц в потоке) оптимальной несущей средой дисперсного потока окажется воздух ( $Pr = 0,7$ ;  $\gamma = 1,4$ ).

Результаты исследования, выполненные в рамках третьего этапа, иллюстрируют рис. 1 и 2. Расчеты выполнялись для значений  $Pr = 0,547$ ;  $M_1 = 0,820$ ;  $Re_{wx2} = 10^7$ ;  $G = 5 \cdot 10^{-7}$ .

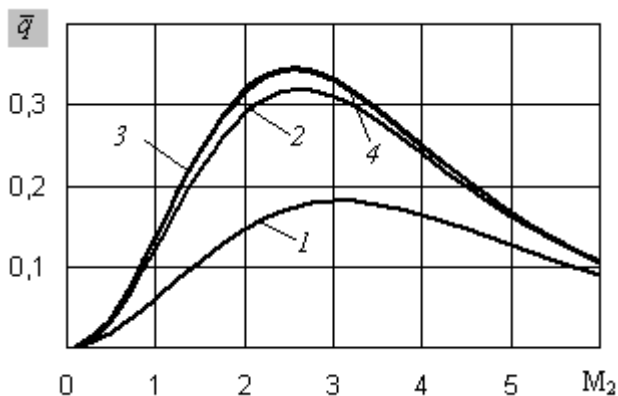
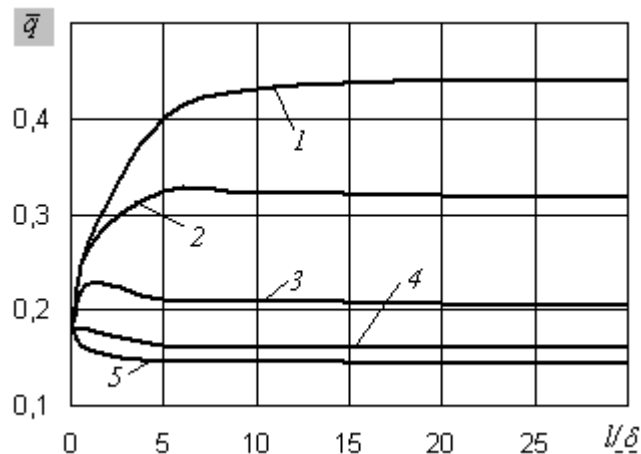


Рис. 1. Влияние числа Маха  $M_2$  и относительной длины ребер на температурную стратификацию в дисперсном потоке: 1 –  $l/\delta = 0$  (без ребер); 2 – 2; 3 – 5; 4 – 10

Приведенные на рис. 1 результаты получены для  $Vi=0,1$ . Из их анализа следует, что оребрение поверхности теплообмена приводит к существенному повышению эффективности температурной стратификации. Так при  $l/\delta = 5$  максимальное значение передаваемого теплового потока увеличивается по сравнению с неоребрённой поверхностью в 1,92 раза. При этом максимум функции  $\bar{q}$  смещается в область меньших чисел Маха (с  $M_2 = 3,14$  при отсутствии оребрения до  $M_2 = 2,5$  при  $l/\delta = 5$ ). При дальнейшем ( $l/\delta > 5$ ) увеличении относительной длины ребер (и площади оребрения) наблюдается медленное снижение эффективности температурной стратификации, что обусловлено существенным уменьшением коэффициента эффективности ребра.

На рис. 2 показана зависимость относительного теплового потока от относительной длины ребра и от числа Био. Приведенные на рис. 2 результаты получены для  $M_2 = 3,14$ .



**Рис. 2.** Влияние относительной длины ребра и числа Био на температурную стратификацию в дисперсном потоке: 1 –  $Bi = 0,01$ ; 2 –  $0,1$ ; 3 –  $1,0$ ; 4 –  $4,5$ ; 5 –  $10$

Как видно из рис. 2, в анализируемых условиях лишь при  $Bi < 4,5$  оребрение поверхности приводит к повышению эффективности температурной стратификации. При этом относительный тепловой поток изменяется в зависимости от относительной длины ребер не монотонно. Максимум теплового потока при уменьшении числа  $Bi$  смещается в область больших относительных длин ребер. Влияние числа  $Bi$  на эффективность температурной стратификации является монотонным (увеличение числа  $Bi$  приводит к уменьшению передаваемого теплового потока). Поэтому при оптимизационных расчетах число  $Bi$  следует исключить из числа варьируемых параметров, переведя его в разряд ограничений и задавая его реализуемое в анализируемых условиях значение.

Следует заметить, что оребрение поверхности приводит к положительному эффекту и в однородном газовом потоке, но в дисперсном потоке этот эффект возрастает. Так в однородном газовом потоке ( $G = 0$ ) наличие ребер ( $l/\delta = 5$ ;  $Bi=0,1$ ) приводит в рассматриваемых условиях к увеличению передаваемого теплового потока в 1,36 раза, в дисперсном потоке при  $G = 5 \cdot 10^{-7}$  увеличение составляет 1,92 раза, а при  $G = 5 \cdot 10^{-4}$  – 2,52 раза.

Оптимизация влияющих параметров, выполненная для дисперсного потока на третьем этапе исследований при  $Re_{\text{вих2}} = 10^7$ ,  $G = 5 \cdot 10^{-7}$ ,  $Bi=0,1$ , позволила найти оптимальные значения параметров:  $Pr = 0,551$ ;  $M_1 = 0,761$ ;  $M_2 = 2,625$ ;  $l/\delta = 5,205$ . Оптимальным значениям влияющих параметров соответствует максимальное значение функции цели  $\bar{q} = 0,2413$ .

### Заключение.

Таким образом, в анализируемых условиях ( $G = 5 \cdot 10^{-7}$ ) за счет использования дисперсного рабочего тела и оптимизации параметров обеспечивается увеличение передаваемого теплового потока в 3,77 раза. За счет оребрения рабочей поверхности и оптимизации размеров ребер обеспечивается дополнительное увеличение передаваемого теплового потока в 1,9 раза.

Расчеты показали также, что воздух ( $Pr = 0,7$ ;  $\gamma = 1,4$ ) будет являться оптимальной несущей средой дисперсного потока при  $G = 2 \cdot 10^{-6}$ .

### Литература

1. Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Доклады академии наук. Энергетика. 1997. Т. 354. № 4. С.475–477.
2. Леонтьев А.И. Способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (Труба Леонтьева). Патент на изобретение № 2106581. Приоритет 23.05.1996. Публикация 10.03.1998.

3. Ковальногов Н.Н., Фокеева Е.В. Повышение эффективности газодинамической температурной стратификации за счет использования дисперсного рабочего тела // Материалы V Международной научно-технической конференции «Современные научно-технические проблемы транспорта». Ульяновск, 2009. С. 64–67.

4. Ковальногов Н.Н., Фокеева Е.В. Влияние различных факторов на эффективность газодинамической температурной стратификации в дисперсном потоке // Вестник Ульяновского государственного технического университета. №1, 2009. С. 51–54.

5. Температурная стратификация в сверхзвуковом дисперсном потоке / Н.Н. Ковальногов, Л.М. Магазинник, Е.В. Фокеева, М.А. Кузьмина // Труды XVII Школы-семинара молодых специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МЭИ. 2009. Т.2. С. 213–216.

6. Ковальногов Н.Н., Магазинник Л.М., Федоров Р.В. Сверхзвуковая труба температурной стратификации. Патент на изобретение № 2334178. Приоритет 09.03.2007. Публикация 20.09.2008.

7. Ковальногов Н.Н. Пограничный слой в потоках с интенсивными воздействиями. Ульяновск: Изд-во УлГТУ. 1996. 246 с.



## ПРИБЛИЖЕНИЕ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ И $h$ -СУММАМИ

П.В. Чунаев

Владимирский государственный университет им. Столетовых

**Аннотация.** Работа посвящена вопросам приближения наимпростейшими дробями (логарифмическими производными комплексных многочленов) вида

$$\rho_0(z) \equiv 0, \quad \rho_n(z) = \rho_n(\{z_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}, \quad z, z_k \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N}$$

и специальными суммами ( $h$ -суммами)

$$H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z), \quad z, \lambda_k \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N},$$

где  $h$  — некоторая фиксированная базисная функция, аналитическая в открытом единичном круге. Аппроксимация аналитических функций  $f$  такими суммами проводится за счет подбора комплексных чисел  $\lambda_k$ , зависящих от  $h$ ,  $f$  и  $n$ .

### Введение.

Задача приближения  $h$ -суммами впервые рассматривалась в работе В.И. Данченко. В этой же работе был указан эффективный способ их построения и дан ряд приложений к численному анализу. В дальнейшем такие приближения рассматривались в работах А.В. Фрянцева. В частности, им был предложен метод, позволяющий сводить линейные дифференциальные уравнения к равносильным им функциональным уравнениям (точнее, имеющим то же множество полиномиальных решений), а также найдены формулы для средних значений многочленов, которые можно использовать для «распознавания» классических ортогональных многочленов по небольшому числу их значений.

Другие вопросы, связанные с аппроксимативными свойствами  $h$ -сумм и их приложениями к численному анализу, изучались в работах П.В. Чунаева. В частности, им был значительно улучшен основной результат работы В.И. Данченко в том смысле, что получены точные окончательные оценки радиуса круга сходимости  $h$ -сумм к приближаемой функции и скорости этой сходимости.

В дальнейшем метод  $h$ -сумм использовался в совместных работах В.И. Данченко и П.В. Чунаева в задаче экстраполяции произвольных целых функций конечного порядка. Ими был предьявлен алгоритм вычисления универсальных параметров  $\lambda_k$ , не зависящих от экстраполируемых функций, и доказано, что при таком выборе  $\lambda_k$  соответствующие экстраполяционные  $h$ -суммы сходятся равномерно на компактных множествах, содержащих исходное множество задания этих функций.

Дальнейшее развитие эти методы получили в работах П.В. Чунаева. Он распространил полученные результаты на значительно более широкий класс аналитических функций, получил явную форму остаточного члена экстраполяции, на основе которой нашел точную оценку скорости сходимости экстраполяционного процесса.

Важно отметить, что метод  $h$ -сумм снимает непростой вопрос об выборе узлов экстраполяции, который возникает при классическом подходе, т.к. благодаря структуре  $h$ -сумм эти узлы не фигурируют в явном виде, и притом обеспечивается наилучшая скорость сходимости на широком классе функций.

Когда в  $h$ -сумме в качестве базисной выбирается функция  $h(z) = (z-1)^{-1}$ , возникает частный, но не менее важный класс  $h$ -сумм, которые принято называть *наимпростейшими дробями* (н.д.). Исследованию н.д. посвящено большое число работ разных авторов (см. ниже). Проблема приближения посредством н.д. тесно связана с теорией потенциала: этими дробями задаются (с точностью до постоянных множителей и операции комплексного сопряжения) плоские поля различной природы, создаваемые равновеликими источниками,

расположенными в полюсах н.д. Задача аппроксимации здесь состоит в том, чтобы определить расположение источников (полюсов н.д.), создающих заранее заданное поле.

Интерес к н.д. привлекли работы А. Макинтайра, У. Фукса, А.А. Гончара, Е.П. Долженко, Е. А. Горина, А. О. Гельфонда, Е. Г. Николаева, В. Э. Кацнельсона, Ч. Чуи и других авторов. Однако как аппарат равномерной аппроксимации они стали применяться значительно позже, когда для них был доказан аналог теоремы Мергеляна о том, что класс функций, приближаемых н. д. в равномерной метрике на ограниченном множестве, включает многочлены, а значит, и аппроксимируемые ими функции. При этом оказалось, что скорость приближения н. д. для широкого класса функций и ограниченных множеств имеет тот же порядок, что и скорость приближения многочленами. Это позволило О.Н. Косухину получить для н. д. ряд аналогов классических теорем Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В.К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша. В дальнейшем были обнаружены и существенные различия между аппроксимативными свойствами н. д. и полиномов, обусловленные в первую очередь нелинейностью задачи аппроксимации н. д.

В недавних работах В.Ю. Протасова, В.И. Данченко, О.Н. Косухина и П.А. Бородина, И.Р. Каюмова были получены результаты о приближении н. д. на неограниченных множествах: прямых, лучах, полуплоскостях. Показано, например, что каждая непрерывная на прямой функция с нулевым значением на бесконечности с любой точностью приближается н. д. в равномерной метрике; причем аналогичное утверждение становится неверным для неразвернутого угла. Этот результат указывает на нелинейность процесса аппроксимации, его зависимость от геометрических свойств множеств аппроксимации.

В работах О.Н. Косухина, А.К. Рамазанова, В.И. Данченко и П.В. Чунаева разработаны методы  $n$ -кратной интерполяции Паде, доказана единственность интерполяционной н. д. Паде. В задаче простой интерполяции, в отличие от  $n$ -кратной интерполяции, вопросы разрешимости и единственности, вообще говоря, не имеют однозначного ответа и зависят от алгебраической структуры интерполяционных таблиц.

Я.В. Новак, М.А. Комаров и другие исследовали взаимосвязь чебышевского альтернанса, оптимальности приближения и единственности н. д. наилучшего приближения. Был выявлен ряд специфических аппроксимативных свойств, не присущих полиномам и рациональным функциям общего вида.

Е.Н. Кондаковой и В.И. Данченко удалось получить условия существования и единственности решения задачи интерполяции н. д., построить пример неединственности н. д. Этими авторами для постоянных функций изучена взаимосвязь чебышевского альтернанса и наилучшего приближения н. д., доказана единственность н. д. наилучшего приближения, оценена скорость приближения интерполяционными н. д., построенными по чебышевской системе узлов.

В настоящее время продолжается исследование и экстремальных свойств н.д. (см., например, недавние работы И. Чижикова, Г. Гундерсена, Дж. Хейттокангаса, Дж. Андерсона, В. Эйдермана и других авторов).

В рамках научно-исследовательской работы предлагается дальнейшее развитие теории  $h$ -сумм и ее приложение к численному анализу. Основные задачи нашей работы отражены в следующих пунктах.

Выделим ряд задач, решение которых составляет содержание научно-исследовательской работы:

1. Предложить новый метод построения интерполяционных н.д. Паде на основе интеграла Эрмита и получить явный вид остаточного члена и удобную оценку погрешности.
2. С использованием специальных рациональных функций, представляющих собой отношения разностей н.д., получить эффективный метод вычисления многочленов и рациональных функций общего вида и сравнить их с классическим методом схемы Горнера.
3. Получить неулучшаемое значение радиуса круга сходимости  $h$ -сумм к приближаемой функции и дать точную по порядку оценку скорости этой сходимости.

4. Найти приложения аппроксимации  $h$ -суммами к высокоточному численному дифференцированию.

5. Разработать алгоритм вычисления  $h$ -сумм, экстраполирующих аналитические функции. Получить явный вид остаточного члена экстраполяции и привести примеры, демонстрирующие преимущество рассматриваемого метода перед экстраполяцией многочленами.

Для решения стоящих перед автором задач кроме классических методов теории рациональных аппроксимаций, теории потенциала и численного анализа будут применяться оригинальные методы аппроксимации посредством наимпростейших дробей и  $h$ -сумм, разработанные в недавних работах Е.Н. Кондаковой, П.В. Чунаева, М.А. Комарова, В.И. Данченко, а также в работах П.А. Бородина, О.Н. Косухина, В.Ю. Протасова и других авторов.

**1. Постановка задачи.** В работе изучается аппроксимация наимпростейшими дробями (н.д.)

$$\rho_0(z) \equiv 0, \quad \rho_n(z) = \rho_n(\{z_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}, \quad z, z_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

(числа  $z_k$  с разными номерами могут совпадать) и специальными суммами вида ( $h$ -суммами)

$$H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\lambda_k z), \quad z, \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

где  $h$  – функция, аналитическая в некоторой окрестности точки  $z = 0$ . При натуральном  $n$  н.д. (1) можно представить в виде  $h$ -суммы, взяв, например,  $h(z) = (z - 1)^{-1}$ ,  $\lambda_k = z_k^{-1}$ . Целое число  $n \geq 0$  называется порядком (или степенью) н.д.  $\rho_n$ .

Пусть фиксирована аналитическая в окрестности точки  $z = 0$  функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots$$

**Определение.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Скажем, что н.д.  $\rho_\nu$  порядка  $\nu$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ , является н.д. Паде  $n$ -кратной интерполяции (с узлом  $z = 0$ ) функции  $f$ , если

$$|f(z) - \rho_\nu(z)| = O(|z|^\nu) \quad \text{їдї} \quad z \rightarrow 0.$$

Это равносильно равенствам

$$\rho_\nu^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) = k! f_k, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Отметим, что  $\nu = 0$  и  $\rho_\nu(z) \equiv 0$  в случае  $f_0 = \dots = f_{n-1} = 0$ .

Н. д. Паде всегда существует и единственна. Различные методы построения н. д. Паде имеются в работах В.И. и Д.Я. Данченко (2001), О.Н. Косухина (2001, 2005). В первой главе данной работы предлагается еще один метод, основанный на формуле Эрмита. Такой подход удобен для нахождения остаточного члена интерполяции и его оценки. В второй главе н.д. используются для построения специальных рациональных дробей, достаточно быстро аппроксимирующих рациональные функции общего вида, что позволяет применять н.д. для соответствующих приближенных вычислений. В третьей главе получены некоторые окончательные результаты об аппроксимации аналитических функций  $h$  посредством их  $h$ -сумм и даны несколько приложений к численному анализу. Подробно рассматривается вопрос экстраполяции посредством  $h$ -сумм.

На протяжении всей работы мы будем использовать формулы, выражающие степенные суммы

$$S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

комплексных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  через элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

т. е. известные рекуррентные формулы Ньютона вида:

$$S_1 = \sigma_1, S_m = (-1)^{m+1} m \sigma_m - \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} S_j \sigma_{m-j}, \quad m = 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Если решить систему уравнений (1.5) относительно  $\sigma_m$ , то получатся следующие формулы обращения:

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left( S_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j S_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

## 2. Формула Эрмита для наимпростейших дробей Паде.

Пусть при натуральных  $n$  и  $\nu \leq n$  задана рациональная функция

$$R_n(z) = \frac{z^n}{Q(z)}, \quad Q(z) := \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k) = z^{\nu} + q_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + q_0, \quad z_k \neq 0, \quad (2.1)$$

с не обязательно различными полюсами  $z_k$ , отличными от нуля, так что

$$q_0 = (-1)^{\nu} z_1 z_2 \dots z_{\nu} = Q(0) \neq 0. \quad (2.2)$$

Пусть  $\gamma$  — некоторый спрямляемый жорданов контур, содержащий внутри себя точку  $z = 0$ , и пусть функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots \quad (2.3)$$

аналитична на замыкании области  $G(\gamma)$ , ограниченной этим контуром. Рассмотрим интеграл Эрмита  $J_n(z) = J_n(f, Q; z)$ :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{R_n(\zeta) - R_n(z)}{(\zeta - z) R_n(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Q(z)} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) \zeta^n Q(z) - z^n Q(\zeta)}{\zeta^n (\zeta - z)} d\zeta, \quad (2.4)$$

где  $z \in G(\gamma)$ . Из (2.4) (см. также ниже формулу (2.6)) видно, что  $J_n(z)$  является рациональной функцией степени не выше  $n$ , полюсы которой лежат среди нулей  $z_1, \dots, z_{\nu}$  многочлена  $Q$ . Среди корней этого многочлена, вообще говоря, могут оказаться какие-то из чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , поэтому в общей ситуации дробь  $J_n$  может быть сократимой.

Отсюда видно, что  $f(z) - J_n(z) = O(z^n)$ ,  $z \rightarrow 0$ , и следовательно, независимо от выбора многочлена  $Q$  вида (2.1) с учетом (2.2) интеграл  $J_n$  является интерполяционной рациональной функцией, совпадающей с  $f$  в узле  $z = 0$  кратности не меньше  $n$ , т.е.

$$J_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) = k! f_k \quad \text{ïðå} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Далее приведем ряд вспомогательных результатов. Сначала получим **явное выражение интеграла** (2.4). Всюду в этом параграфе для удобства полагаем  $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$ ,  $q_0 \neq 0$  (см. (2.2)), считая  $q_{\nu} = 1$ ,  $q_k = 0$  при  $k > \nu$ . При всех целых неотрицательных  $k$  определим через разложение (2.3) числа:

$$p_k := \sum_{m=0}^k f_m q_{k-m}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

**Лемма 2.1 [4].** Интеграл (2.4) представляется в виде

$$J_n(f, Q; z) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_k z^k}{Q(z)}, \quad Q(0) = q_0 \neq 0, \quad (2.6)$$

где  $p_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , определяются как указано в (2.5).

**Примечание 2.1.** Из явного вида интеграла Эрмита, в частности, вновь следует, что для любого многочлена  $Q$  вида (2.1) с  $q_0 \neq 0$

$$|f(z) - J_n(f, Q; z)| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k - \sum_{m=0}^{n-1} p_m z^m}{\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k} \right| = \left| \frac{\sum_{m=n}^{\infty} p_m z^m}{\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k} \right| = O(|z|^n), \quad z \rightarrow 0,$$

где  $p_m, m = 0, \dots, \infty$ , определяются по формулам (2.5). На самом деле это верно для любой аналитической на замыкании области  $G(\gamma)$  функции  $Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots$ , где  $q_0 \neq 0$ .

Сформулируем **основную лемму**. Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и задана аналитическая в окрестности точки  $z = 0$  функция  $f$  со степенным рядом (2.3). Будем считать, что хотя бы один из коэффициентов  $f_m, m = 0, \dots, n-1$ , отличен от нуля. Рассмотрим систему уравнений (относительно  $\lambda_k$ )

$$S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m = -f_{m-1}, \quad m = 1, \dots, n.$$

Хорошо известно, что эта система всегда (независимо от правых частей  $f_{m-1}$ ) имеет и притом единственное решение  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Через

$$\mu = \mu(f), \quad 1 \leq \mu \leq n, \tag{2.7}$$

обозначим число отличных от нуля компонент  $\lambda_k$  решения, а через  $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$  – эти отличные от нуля компоненты (некоторые из них могут совпадать). Таким образом,  $\lambda_k = 0$  с номерами  $k = \mu + 1, \dots, n$ . Обозначим через  $z_1, \dots, z_\mu$  решение системы

$$S_m := \sum_{k=1}^{\mu} z_k^{-m} = -f_{m-1}, \quad m = 1, \dots, n, \quad 1 \leq \mu = \mu(f) \leq n. \tag{2.8}$$

Согласно обозначению (2.7) для чисел  $\lambda_k$  имеем  $z_k = \lambda_k^{-1}, k = 1, \dots, \mu$ .

**Лемма 2.2 [4].** Пусть имеется многочлен  $Q$  вида (2.1),  $v = \deg Q, \mu = \mu(f)$ . Тогда следующие два условия равносильны:

(а)  $v = \mu$  и корни многочлена  $Q$  совпадают с (единственным) решением  $z_1, \dots, z_\mu$  системы (2.8);

(б) интеграл (2.4) представляется в виде

$$J_n(f, Q; z) = \frac{Q'(z)}{Q(z)} \tag{2.9}$$

и является *наипростейшей дробью Паде  $n$ -кратной интерполяции функции  $f$* .

Через  $Q(f, n; z)$  обозначим многочлен вида (2.1), для которого интеграл Эрмита (2.4) является интерполяционной *наипростейшей дробью Паде*. В силу леммы 2.2 этот многочлен единственен, его степень равна  $\deg Q = v = \mu = \mu(f)$  и его корни являются решением системы (2.8).

Из леммы 2.2 можно получить также другой способ нахождения многочлена  $Q(f, n; z)$ . Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$T_n(\lambda) := \lambda^n - \tau_1 \lambda^{n-1} + \tau_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \tau_n = 0, \tag{2.10}$$

коэффициенты которого определяются по рекуррентным формулам

$$\tau_1 = -f_0, \quad \tau_m = \frac{(-1)^m}{m} \left( f_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j f_{m-j-1} \tau_j \right) \tag{2.11}$$

при  $m = 2, \dots, n$ , где  $f_k$  – коэффициенты разложения функции  $f$  из (2.3). Через  $\mu_0 = \mu_0(f) \leq n$  обозначим число отличных от нуля корней уравнения (2.10), а через  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu_0}$  – эти отличные от нуля корни.

**Лемма 2.3 [4].** Справедливо равенство  $\mu(f) = \mu_0(f)$  (см. (2.7)). При этом корни многочлена  $Q(f, n; z)$  вычисляются по формулам  $z_k = \lambda_k^{-1}$  при  $k = 1, \dots, \mu$ .

Из лемм 2.2 и 2.3 получается следующее утверждение.

**Теорема 2.1 [4].** Интеграл Эрмита  $J_n(f, Q; z)$  является наимпростейшей дробью Паде  $n$ -кратной интерполяции функции  $f$  для единственного многочлена  $Q(z) = Q(f, n; z)$  вида (2.1), имеющего корни  $z_k = \lambda_k^{-1}$ , где  $\lambda_k$  – отличные от нуля корни многочлена  $T_n$  ( $k = 1, \dots, \mu(f)$ ). При этом

$$J_n(f, Q; z) = \frac{Q'(z)}{Q(z)},$$

где многочлен  $Q$  находится по лемме 2.3, т.е.

$$Q(z) = (-1)^\mu \tau_\mu^{-1} z^n T_n(z^{-1}) = z^\mu - \frac{\tau_{\mu-1}}{\tau_\mu} z^{\mu-1} + \dots + (-1)^\mu \frac{\tau_0}{\tau_\mu}, \quad \tau_0 = 1. \quad (2.12)$$

**Примечание 2.4.** Напомним, что формула (2.12) получена при условии, что хотя бы один из коэффициентов  $f_m$ ,  $m = 0, \dots, n-1$ , разложения (2.3) отличен от нуля и, следовательно,  $\mu \geq 1$ . Случай, когда все эти коэффициенты равны нулю, не представляет интереса, поскольку тогда

$$Q(f, n; z) \equiv \text{const}, \quad J_n(f, Q; z) \equiv 0.$$

Используя теорему о вычетах, непосредственным вычислением интеграла (2.4) при  $Q(z) = Q(f, n; z)$ ,  $J_n(f, Q; z) = Q'(z)/Q(z)$  (см. (2.9)) получена **формула для остаточного члена**  $n$ -кратной интерполяции наимпростейшими дробями при условии, что  $|z| < \min_{\zeta \in \gamma} |\zeta|$ .

**Теорема 2.2 [4].** Остаточный член  $n$ -кратной интерполяции функции  $f$  (см. (2.3)) наимпростейшими дробями имеет вид:

$$f(z) - J_n(f, Q; z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{k=n}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\min\{k, \mu\}} a_m f_{k-m}, \quad |z| < \min_{\zeta \in \gamma} |\zeta|. \quad (2.13)$$

где многочлен  $Q$  определяется по формулам (2.11), (2.12).

Из формулы (2.13), например, при  $n = 3$  находим

$$f(z) - J_3(f, Q; z) = (f_0^4 + 6f_1f_0^2 + 8f_2f_0 + 3f_1^2 + 6f_3) \frac{z^3}{3!} + O(z^4).$$

Из формулы (2.13) видно также, что если  $f$  – многочлен, то остаточный член является рациональной функцией, числитель и знаменатель которой вычисляются по простому алгоритму.

Далее получим **оценку остаточного члена** при определенном условии на тейлоровские коэффициенты  $f_m$  разложения (2.3). Для этого нам понадобится лемма из работы [3].

**Лемма 2.4 [3].** Пусть для степенных сумм  $S_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m$  чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  имеем оценки  $|S_m| \leq a^m$  при  $m = 1, \dots, n$  и некотором  $a > 0$ . Тогда

$$|\lambda_k| < \frac{a}{1 - \varepsilon_n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и определяются из равенства

$$\varepsilon_n^2 - (1 - \varepsilon_n)^{n+1} = 0.$$

**Следствие леммы 2.4 [4].** Пусть при некотором  $a > 0$  для коэффициентов тейлоровского разложения (2.3) имеем  $|f_{m-1}| \leq a^m$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Тогда для  $z_k = \lambda_k^{-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , имеем

$$|z_k| \geq \frac{1 - \varepsilon_n}{a}.$$

Сформулируем **основной результат об оценке погрешности  $n$ -кратной интерполяции посредством н.д.**  $J_n(f, Q; z) = Q'(z)/Q(z)$ ,  $Q(z) = Q(f, n; z)$ .

**Теорема 2.3 [4].** Если при некотором  $a > 0$  для коэффициентов тейлоровского разложения (2.3) имеем  $|f_{m-1}| \leq a^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то при  $0 < r < a^{-1}$  и  $|z| < r$  справедливо неравенство

$$|f(z) - J_n(f, Q; z)| \leq \frac{|a|}{1 - |az|} \frac{|z|^n}{r^n} \left( \frac{1 - \varepsilon_n + ar}{1 - \varepsilon_n - ar} \right)^n \ln \frac{3r}{r - |z|}, \quad (2.14)$$

где  $n$  удовлетворяют условию  $ar < 1 - \varepsilon_n$ .

Приведем примеры построения н.д. Паде.

**Пример 2.1.** Если  $f(z) \equiv c$  – константа, то, как легко проверить по формуле (2.12),

$$Q(z) = Q(c, n; z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{c^k (n-k)!}, \quad c - J_n(c, Q; z) = c \frac{z^n}{Q(z)}.$$

**Пример 2.2.** При  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , рассмотрим функцию

$$f_a(z) = \frac{a}{1 - az} = a + a^2 z + a^3 z^2 + \dots$$

Она не является наимпростейшей дробью ( $F(z) = -f_a(z)$  является наимпростейшей дробью). По формуле (2.11) находим многочлен (2.10), а затем по формуле (2.12) – многочлен  $Q(z) = Q(f_a, n; z)$ :

$$\tau_m = (-1)^m a^m, \quad T_n(\lambda) = \frac{\lambda^{n+1} - a^{n+1}}{\lambda - a}, \quad Q(z) = \frac{1}{a^n} \frac{1 - (az)^{n+1}}{1 - az},$$

откуда

$$J_n(f_a, Q; z) = \frac{Q'(z)}{Q(z)}, \quad f_a(z) - J_n(f_a, Q; z) = (n+1) \frac{a^{n+1} z^n}{1 - (az)^{n+1}}.$$

**Пример 2.3.** Рассмотрим функцию  $F(z) = -f_a(z)$ , являющуюся наимпростейшей дробью. В этом случае  $T_n(\lambda) = \lambda^n - a\lambda^{n-1}$ . Все корни этого многочлена, кроме  $\lambda = a$ , равны нулю, т.е.  $\mu = 1$ . По формуле (2.12) имеем  $Q(z) = z - a^{-1}$  и, как и следовало ожидать,  $J_n(F, Q; z) = F(z)$ .

### 3. Вычисление значений рациональных функций и многочленов.

Для вычисления значений рациональных функций и многочленов обычно применяется схема Горнера. При больших значениях аргументов и коэффициентов этих функций использование схемы может привести к потере точности из-за многократных умножений. Поэтому может оказаться полезным предлагаемый ниже способ аппроксимации посредством рациональных функций вида

$$\theta(z) = \frac{\rho_{1,n_1}(z) - \rho_{2,n_2}(z)}{\rho_{3,n_3}(z) - \rho_{4,n_4}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

где через  $\rho_{s,n_s}(z)$ ,  $s = 1, \dots, 4$ , обозначены н.д. степени  $n_s$ .

Пусть при неотрицательных целых числах  $m$  и  $n$  задана рациональная функция:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \dots + p_0}{z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \dots + q_0}, \quad p_m \neq 0. \quad (3.2)$$

степени  $d = \max\{m, n\}$ . Будем считать, что  $d \neq 0$ . При натуральном  $p$  положим

$$q_p(z) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} R^k(z) = \frac{G(z)}{Q^p(z)}, \quad G(z) := \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} P^k(z) Q^{p-k}(z),$$

где  $G(z)$  — многочлен степени  $pd$ . Введем функцию вида (21):

$$\theta(p, R; z) = \frac{q_{p'}(z)/q_p(z)}{R'(z)/R(z)} = \frac{G'(z)/G(z) - pQ'(z)/Q(z)}{P'(z)/P(z) - Q'(z)/Q(z)}, \quad (3.3)$$

где все степени  $n_s$  не превосходят  $p \cdot d$ . Следующее предложение доказано в [2].

**Теорема 3.1 [2].** Во всех точках  $z$ , выбранных из условия  $5 | R(z) | \leq p$ , имеем

$$R(z) \approx \theta(p, R; z), \quad \text{точнее,} \quad |\theta(p, R; z) - R(z)| \leq 2e^{|R(z)|} \frac{1}{p!} |R(z)|^{p+1}. \quad (3.4)$$

Из теоремы 3.1 следует, в частности, что если для некоторой функции  $f$  ее наилучшие равномерные приближения  $R_n = R_n(f, K)$  на компакте  $K \subset \mathbb{C}$  рациональными функциями степени  $\leq n$  убывают к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то для ее наилучших равномерных приближений  $\Theta_n = \Theta_n(f, E)$  дробями вида (3.1) степени  $\leq n$  имеем оценку  $\Theta_{[n \ln(1/R_n)]} \leq C(f)R_n$  [2].

Пусть имеется многочлен  $Q(z) = z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \dots + q_0$ . Применим теорему 3.1 для рациональной функции  $R_0(z) = 1/Q(z)$ . В данном случае  $P(z) \equiv 1$ , и по формуле (3.3) находим

$$\theta(p, R_0; z) = \frac{pQ'(z)/Q(z) - G_0'(z)/G_0(z)}{Q'(z)/Q(z)}, \quad G_0(z) := \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} Q^{p-k}(z).$$

Из (3.4) при условии  $|Q(z)| \geq 5$  имеем

$$R_0(z) = \theta(p, R_0; z) + \delta_0(z), \quad |\delta_0(z)| \leq 1/p!, \quad p \geq 1.$$

Отсюда получается следующее утверждение.

**Теорема 3.2 [4].** Во всех точках  $z$ , в которых  $|Q(z)| \geq 5$ , имеем

$$Q(z) \approx \frac{Q'(z)/Q(z)}{pQ'(z)/Q(z) - G_0'(z)/G_0(z)}, \quad Q(z) = \frac{1}{\theta(p, R_0; z) + \delta_0(z)}, \quad (3.5)$$

где  $|\delta_0(z)| \leq 1/p!$ .

Для многократных вычислений значений рациональной функции  $R$  по формуле (24) (или многочлена  $Q$  по формуле (3.5)) требуется предварительно с большой точностью вычислить нули многочленов  $Q$ ,  $P$ ,  $G$  (или  $Q$ ,  $G_0$ ).

Можно предложить и другой подход к аппроксимации многочленов. Например, в случае рациональной функции  $R_1(z) = P(z)/z^n$  вида (3.2) ( $Q(z) = z^n$ ), по формуле (3.3) имеем

$$P(z) \approx z^n \frac{G_1'(z)/G_1(z) - np/z}{P'(z)/P(z) - n/z}, \quad G_1(z) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} P^k(z) z^{n(p-k)}, \quad (3.6)$$

причем функция  $z^n$  по той же схеме аппроксимируется дробью вида (21):

$$z^n \approx \frac{n/z}{np/z - G_2'(z)/G_2(z)}, \quad G_2(z) := \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} z^{n(p-k)}. \quad (3.7)$$

Оценки погрешностей формул (3.6) и (3.7) не выписываем.

Приведем результаты некоторых расчетов, проведенных в системе MAPLE 12.

**Пример 3.1.** Пусть  $R(x) = P(x)/Q(x)$ , где  $P(x) = x^2$ ,  $Q(x) = x^4 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Возьмем  $p = 4$  и из (3.3) получим приближенную формулу:

$$R(x) \approx \theta(4, R; x) = \frac{\sum_{k=1}^{16} (x - \xi_k)^{-1} - 4 \sum_{k=1}^4 (x - \zeta_k)^{-1}}{2x^{-1} - \sum_{k=1}^4 (x - \zeta_k)^{-1}},$$

где  $\{\zeta_k\} = \{1, -1, i, -i\}$ ,  $\xi_k$  – корни многочлена  $G$ . При вычислении по этой формуле значения  $R(x)$  для  $x \geq 10$  были найдены с погрешностью, меньшей  $10^{-9} x^{-2}$ . Отметим еще, что все



$|\xi_k| < 6/5$ ; поэтому при вычисления дроби  $\theta(4, R; x)$  наибольшие величины операндов имеют порядок  $x$  (при использовании схемы Горнера возникают величины порядка  $x^4$ ).

Значения многочлена  $Q(x) = x^4 - 1$  для  $x \geq 10$  при расчетах по формуле (3.5) с  $p = 4$  были найдены с погрешностью, меньшей  $10^{-11} x^{-2}$ .

**Пример 3.2.** Приведем числовой пример, в котором применение формулы (3.4) дает более точный результат, чем вычисления по схеме Горнера (расчеты проводились с пятью значащими цифрами):  $R(x) = (x^{15} - 2)/(x^{15} - 3)$ ,  $p = 3$ ,  $x = 1.0474$  (эта точка расположена между вещественными корнями числителя и знаменателя дроби  $R$ ). Абсолютная погрешность вычислений по схеме Горнера здесь больше  $3.4 \cdot 10^{-4}$ , а по формуле (3.4) – меньше  $1.9 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4. Аппроксимация $h$ -суммами.

В настоящей главе рассматривается метод  $h$ -сумм и некоторые его приложения к численному анализу. Отметим, что метод  $h$ -сумм в ряде случаев является альтернативным методу, изложенному в первой главе, т.е. методу построения наипростейших дробей с помощью интеграла Эрмита. Это позволяет в некоторых случаях эффективно решать задачу отыскания полюсов, которая представляет основную трудность при построении наипростейших дробей.

Сформулируем основной результат из работы [1]. Пусть

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots, \quad f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots$$

суть аналитические функции и их тейлоровские разложения в окрестности точки  $z = 0$ ,  $h(z)$  аналитична в круге  $D$ , причем  $h_{m-1} \neq 0$ , если  $f_{m-1} \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Введем последовательность чисел  $s_m$  следующим образом:

$$s_m = 0, \quad \text{если } f_{m-1} = 0 \quad (\text{независимо от } h_{m-1}),$$

$$s_m = \frac{f_{m-1}}{h_{m-1}}, \quad \text{если } f_{m-1} \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 4.1 [1].** Пусть  $s_m = s_m(h, f)$  и  $|s_m| \leq a^m$  при всех натуральных  $m$  и некотором  $a > 0$ . Пусть при каждом фиксированном  $n$  числа  $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$  в сумме (1.2) являются решением алгебраического уравнения

$$P_n(\lambda) := \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n = 0, \quad (4.1)$$

где коэффициенты  $\sigma_k$  находятся по рекуррентным формулам (Ньютона)

$$\sigma_1 = s_1, \quad \sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left( s_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j s_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Тогда суммы  $H_n(z)$  и функция  $f(z)$  определены и аналитичны в круге  $|z| < 2^{-1} a^{-1}$ , причем  $H_n(z) \rightarrow f(z)$  равномерно в круге  $|z| \leq (1 - \delta) 2^{-1} a^{-1}$  при любом сколь угодно малом  $\delta \in (0, 1)$ . Кроме того, справедлива оценка:

$$|f(z) - H_n(z)| \leq C(h, \delta) a n (1 - 2^{-1} \delta)^n, \quad |z| \leq \frac{1 - \delta}{2a}. \quad (4.3)$$

Отметим, что теорема 4.1 решает принципиальный вопрос о возможности равномерной аппроксимации посредством сумм вида (2.2) и дает эффективный способ построения таких сумм. В работе [1], однако, не рассматривался вопрос о точности заключений этой теоремы, т.е. о точности радиуса круга сходимости  $H_n(z) \rightarrow f(z)$  и скорости аппроксимации (4.3). Целью данной главы является получение точных значений указанных величин. Сформулируем **основные результаты главы**.

**Теорема 4.2 [3].** Пусть  $s_m = s_m(h, f)$  и  $|s_m| \leq a^m$  при всех натуральных  $m$  и некотором  $a > 0$ . Пусть при каждом фиксированном  $n$  числа  $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$  в сумме ( ) являются решением алгебраического уравнения (4.1) с условием (4.2). Тогда

1) функция  $f(z)$  определена и аналитична в круге  $|z| < a^{-1}$ , а суммы  $H_n(z)$  определены и аналитичны в кругах  $|z| < (1 - \varepsilon_n)a^{-1}$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и определяются из равенства

$$\varepsilon_n^2 - (1 - \varepsilon_n)^{n+1} = 0, \quad \varepsilon_n \in (0, 1). \quad (4.4)$$

2) имеет место равномерная сходимость  $H_n(z) \rightarrow f(z)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , в круге  $|z| \leq (1 - \delta)a^{-1}$  при любом фиксированном сколь угодно малом  $\delta \in (0, 1)$ , и, кроме того, для любого  $\theta \in (0, 1)$  при достаточно больших  $n \geq n_0(a, h, \delta, \theta)$  справедлива оценка

$$|f(z) - H_n(z)| \leq \frac{(1 - \theta\delta)^n}{\theta\delta}, \quad |z| \leq \frac{1 - \delta}{a}. \quad (4.5)$$

**Теорема 4.3 [3].** В условиях теоремы 4.2 радиус  $r_n := a^{-1}$  круга сходимости  $H_n(z) \rightarrow f(z)$  не может быть увеличен, а в оценке (4.5) скорости аппроксимации нельзя заменить  $1 - \theta\delta$  числом, меньшим, чем  $1 - \delta$ .

**Примечание 4.1.** В работе [3] отмечено, что  $\varepsilon_n = o(n^{-\gamma})$ ,  $n \rightarrow \infty$ , при любом фиксированном  $\gamma \in (0, 1)$ . Действительно, для достаточно больших  $n \geq n_0(\gamma)$  имеем  $(1 - n^{-\gamma})^{n+1} < n^{-2\gamma}$ , т.е. равенство (4.4) выполняется при  $\varepsilon_n < n^{-\gamma}$  и  $n \geq n_0(\gamma)$ .

Но эту оценку можно несколько уточнить [4]. Именно, выполняется неравенство

$$\varepsilon_n < \delta_n := \frac{\ln^2 n}{n} \quad \text{при} \quad n \geq 10.$$

Действительно, функция  $E(\varepsilon) = \varepsilon^2 - (1 - \varepsilon)^{n+1}$  возрастает и имеет единственный корень  $\varepsilon_n$  на интервале  $(0, 1)$  при любом  $n$ . Легко проверить, что  $2 \ln \delta_n > n \ln(1 - \delta_n)$ ,  $n \geq 10$ , и, значит,  $E(\delta_n) > 0$ , откуда и следует нужное неравенство.

Сформулируем **вспомогательные утверждения**. Именно, получим оценки корней многочлена (4.1) с условием (4.2) через параметр  $a$  (см. теорему 4.2).

При натуральных  $n$  и комплексных числах  $\beta_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , положим

$$g_n(z) := \beta_1 z - \frac{1}{2} \beta_2 z^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \beta_n z^n = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m} \beta_m z^m. \quad (4.6)$$

Рассмотрим функцию  $G_n(z) := e^{g_n(z)}$  и ее разложение в ряд Маклорена:

$$G_n(z) = \sum_{m=0}^n \alpha_m z^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} \alpha_m z^m =: Q_n(z) + r_n(z), \quad \alpha_m = \frac{G_n^{(m)}(0)}{m!}. \quad (4.7)$$

**Лемма 4.1 [3].** Пусть заданы числа  $\beta_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) и  $\beta_m = 0$  при  $m = n+1, n+2, \dots$ . Тогда

(а) справедливы следующие рекуррентные формулы (Ньютона):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \quad \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_m &= \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left( \beta_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \beta_{m-j} \alpha_j \right), \quad m = 2, 3, \dots; \end{aligned} \quad (4.8)$$

(б) если  $|\beta_m| \leq 1$ ,  $m = 1, \dots, n$ , то  $|\alpha_m| \leq 1$  при всех натуральных  $m$ .

**Лемма 4.2 [3].** Если  $|\beta_m| \leq 1$  при  $m = 1, \dots, n$ , то для функции  $G_n(z)$  из (4.7) справедливы неравенства:

$$|G_n(z)| \geq 1 - |z|, \quad |r_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}, \quad |z| < 1. \quad (4.9)$$

Кроме того, все корни многочлена  $Q_n(z) = G_n(z) - r_n(z)$  из (4.7) лежат во внешности круга  $D_n = \{z : |z| \leq 1 - \varepsilon_n\}$ , где величины  $\varepsilon_n$  удовлетворяют равенству (4.4).

**Лемма 4.3 [3].** Пусть задан многочлен

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0$$

степени  $n$ . Через  $S_m$  обозначим степенные суммы порядка  $m$  его корней  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , т.е.

$$S_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m, \quad m = 1, \dots, n.()$$

Тогда, если  $|S_m| \leq a^m$  при  $m = 1, \dots, n$  и некотором  $a > 0$ , то корни  $\lambda_k$  удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_k| < \frac{a}{1 - \varepsilon_n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.10)$$

где  $\varepsilon_n \in (0, 1)$  удовлетворяют равенству (4.4), причем, как указано в примечании 4.1, имеет место неравенство:

$$\varepsilon_n < \frac{\ln^2 n}{n} \quad \text{при} \quad n \geq 10.$$

Доказательство теоремы 4.2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1 в работе [1]. Теперь приведем пример, доказывающий теоремы 4.3, т.е. обоснуем окончательность результатов теоремы 4.2. Именно, покажем, что существуют удовлетворяющие условиям теоремы 4.2 функции  $f$  и  $h$ , для которых радиус круга сходимости равен  $r_a = a^{-1}$  и при любом  $\delta \in (0, 1)$  справедлива оценка (см. (4.5)):

$$|f(z) - H_n(z)| \geq (1 - \delta)^n, \quad |z| = \frac{1 - \delta}{a}, \quad n \geq \frac{1}{\delta}, \quad (4.11)$$

Действительно, пусть

$$h(z) = \frac{1}{z-1} = -1 - z - z^2 - \dots,$$

$$f(z) = \frac{a}{1-az} = a + a^2z + a^3z^2 + \dots, \quad a > 0.$$

По определению  $s_m = s_m(h, f) = -a^m$ , откуда по формулам (4.2) легко получается  $\sigma_m = (-1)^m a^m$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Для построения сумм вида (1.2) найдем числа  $\lambda_k$  как корни уравнения (4.1):

$$\lambda^n + a\lambda^{n-1} + a^2\lambda^{n-2} + \dots + a^n = \frac{\lambda^{n+1} - a^{n+1}}{\lambda - a} = 0,$$

т.е.  $\lambda_k = ae^{\frac{2\pi k}{n+1}}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Отсюда, в частности, следует, что полюсы сумм  $H_n(z)$  лежат на окружности радиуса  $r_a = a^{-1}$  и аппроксимация возможна лишь внутри этой окружности. Далее, суммы

$$S_m + a^m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m + a^m$$

равны нулю, если  $m$  не кратно числу  $n+1$  (кратко,  $m \neq (n+1)j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ) и равны  $(n+1)a^m$  в противном случае. Отсюда для степенных сумм  $S_m$  находим:

$$S_m = -a^m, \quad m \neq (n+1)j; \quad S_m = na^m, \quad m = (n+1)j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, положив  $d_n(z) = a + a^2z + \dots + a^n z^{n-1}$ , будем иметь:

$$H_n(z) = d_n(z) - na^{n+1}z^n + a^{n+1}z^{n+1}d_n(z) - na^{2(n+1)}z^{2n+1} + \dots;$$

$$f(z) - H_n(z) = (n+1)a^{n+1}z^n + (n+1)a^{2(n+1)}z^{2n+1} + \dots = (n+1)\frac{a^{n+1}z^n}{1-(az)^{n+1}},$$

откуда и получаем (4.11).

Остановимся на некоторых приложениях метода  $h$ -сумм к численному анализу.

Схема аппроксимации из теоремы 4.1 применялась в работе [1] для получения формул численного дифференцирования и интегрирования. Ниже дана еще одна формула численного дифференцирования посредством  $h$ -сумм.

**Предложение 4.1 [3].** Пусть  $h(z)$  – аналитическая в единичном круге  $D$  функция и  $s$  – натуральное число. Тогда

$$z^s h^{(s)}(z) \approx (-1)^s s! h(z) + \sum_{p=1}^s (-1)^{s+p} \left(C_s^{s-p}\right)^2 (s-p)! \sum_{k=1}^n \lambda_{k,p} h(\lambda_{k,p} z), \quad (4.12)$$

где при каждом фиксированном  $p$  универсальные числа  $\lambda_{k,p}$  вычисляются по формулам

$$(4.1) \text{ и } (4.2) \text{ при } s_k = s_{k,p} = \frac{(k+p-1)!}{(k-1)!}, \quad k=1, \dots, n.$$

Формула (4.12) применима в круге  $|z| < R$ , где  $R$  выбирается из условия  $\frac{(k-1)!}{(k+s-1)!} \leq R^k$ ,  $k=1, \dots, n$ . Кроме того, в круге  $|z| \leq (1-\delta)R$  для любого фиксированного сколь угодно малого  $\delta \in (0,1)$  и любого  $\theta \in (0,1)$  при достаточно больших  $n \geq n_0(s, \delta, \theta)$  абсолютная погрешность формулы (4.12) не превосходит  $(\theta\delta)^{-1}(1-\theta\delta)^n$ .

Доказательство этого предложения основано на следующей лемме, представляющей и самостоятельный интерес.

**Лемма 4.4 [3].** Имеет место равенство

$$z^s h^{(s)}(z) = \sum_{p=0}^s A_{s,p} \left(z^p h(z)\right)^{(p)}, \quad \text{где } A_{s,p} := (-1)^{s+p} \left(C_s^{s-p}\right)^2 (s-p)!. \quad (4.13)$$

При  $s=2$ , например, формула (4.12) принимает вид:

$$z^2 h''(z) \approx 2h(z) - 4 \sum_{k=1}^n \lambda_{k,1} h(\lambda_{k,1} z) + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,2} h(\lambda_{k,2} z),$$

где числа  $\lambda_{k,1}$ ,  $\lambda_{k,2}$  не зависят от  $h$  и вычисляются по формулам (4.1), (4.2) при  $s_{k,1} = k$  и  $s_{k,2} = k^2 + k$  соответственно. Указанная формула применима в круге  $|z| \leq 2/5$ .

Рассмотрим метод экстраполяции аналитических функций  $h$  посредством их  $h$ -сумм. При фиксированном натуральном  $n \geq 2$  и вещественном  $a > 1$  рассмотрим многочлен

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n, \quad (4.14)$$

считая, что симметрические многочлены  $\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  вида (1.4) от корней  $\lambda_k = \lambda_k(n, a)$  этого многочлена удовлетворяют равенствам

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \prod_{k=1}^{m-1} (ak - 1), \quad a > 1, \quad m = 2, \dots, n. \quad (4.15)$$

**Лемма 4.5 [4].** Для степенных сумм корней  $\lambda_k = \lambda_k(n, a)$  многочлена (4.14) имеем равенства

$$S_m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{k=1}^n \lambda_k^m = a^{m-1}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

**Лемма 4.6 [4].** Для многочлена (4.14) имеем разложение

$$P_n(\lambda) = (\lambda - a)^n + p_{n-1}(\lambda - a)^{n-1} + \dots + p_0, \quad \text{где} \quad p_k := \frac{\prod_{s=k+1}^n (as - 1)}{(n - k)!}. \quad (4.17)$$

**Лемма 4.7 [4].** Модули корней  $\lambda_k = \lambda_k(n, a)$  многочлена (4.14) удовлетворяют неравенству

$$\max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| < a - \frac{a-1}{n}, \quad a > 1, \quad n \geq 2. \quad (4.18)$$

Пусть  $h$  – функция, аналитическая в области  $D_r := \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r \leq \infty$  ( $D_\infty = \mathbb{C}$ ), и

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots, \quad z \in D_r.$$

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$  и  $\lambda_k = \lambda_k(n, a)$  – корни многочлена.  $h$ -сумму  $H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z)$  можно записать в виде:

$$H_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_{m-1} S_m z^{m-1} = \sum_{m=1}^n h_{m-1} (az)^{m-1} + \sum_{m=n+1}^{\infty} h_{m-1} S_m z^{m-1}.$$

Из (4.18) и из аналитичности функции  $h$  в  $D_r$  находим

$$|S_m| < na^m \quad \text{при} \quad m \geq n+1, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |h_{m-1} S_m|^{1/m} \leq ar^{-1}, \quad (4.19)$$

так что суммы  $H_n(z/a)$  как функции от  $z$  определены и аналитичны в  $D_r$ ,  $0 < r \leq \infty$ , и при этом

$$h(z) - H_n\left(\frac{z}{a}\right) = h(z) - \sum_{k=1}^n \lambda_k h\left(\frac{\lambda_k}{a} z\right) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \frac{S_{m+1}}{a^m}\right) z^m.$$

Из этого равенства и оценки (4.19) для  $S_m$  получается

**Теорема 4.4 [4].** Пусть  $h$  – функция, аналитическая в области  $D_r$ ,  $0 < r \leq \infty$ . Пусть при каждом  $n$  числа  $\lambda_k = \lambda_k(n, a)$  являются корнями многочлена  $P_n(\lambda)$  из (4.14), (4.15) (не зависящего от  $h$ ). Тогда имеем оценку

$$\left| h(z) - \sum_{k=1}^n \lambda_k h\left(\frac{\lambda_k}{a} z\right) \right| \leq \delta_n(h, a; z) := (1 + an) \sum_{m=n}^{\infty} |h_m| |z|^m, \quad |z| < r. \quad (4.20)$$

В частности, для многочленов  $Q$  степени  $n-1$  имеем  $Q(z) \equiv H_n(Q, \{\lambda_k\}; z/a)$ .

С учетом (4.18) соотношение (4.20) можно записать в виде следующей **экстраполяционной формулы**

$$h(z) \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k h\left(\frac{\lambda_k}{a} z\right), \quad \left| \frac{\lambda_k}{a} z \right| \leq \beta_n |z| < r, \quad \beta_n := 1 - \frac{a-1}{an}, \quad (4.21)$$

где  $a > 1$ ,  $0 < \beta_n < 1$ . Абсолютная погрешность оценивается величиной  $\delta_n(h, a; z)$ , указанной в (4.20). Повторим экстраполяцию несколько раз (т.е. сначала применим формулу (4.21) к каждому слагаемому суммы из (4.21), затем вновь применим формулу (4.21) к полученной двукратной сумме и т.д.). Получим  $\mu$ -кратную сумму  $H_n^{(\mu)}(z) = H_n^{(\mu)}(h, \{\lambda_k\}; a; z)$  вида

$$H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{k_1, \dots, k_\mu=1}^n \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_\mu} h\left(\frac{\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right), \quad \left| \frac{\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z \right| \leq \beta_n^\mu |z|, \quad (4.22)$$

причем

$$\left| h(z) - H_n^{(\mu)}(z) \right| \leq \sum_{m=1}^{\mu} n^{m-1} \delta_n(h, a; \beta_n^{m-1} z) \leq n^\mu \delta_n(h, a; z), \quad |z| < r. \quad (4.23)$$

При увеличении  $n$  при фиксированном  $\mu$  оценка (4.23) погрешности улучшается (в том смысле, что  $n^\mu \delta_n(h, a; z) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , как некоторая геометрическая прогрессия), но ухудшается оценка (4.22) радиуса круга, в котором лежат узлы экстраполяции  $\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$

(поскольку  $\beta_n^\mu \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ ). Наоборот, при увеличении  $\mu$  при фиксированном  $n$  оценка (4.23) ухудшается, но улучшается оценка (4.22). Поэтому возникает естественный вопрос: можно ли путем сбалансированного выбора параметров  $n$  и  $\mu$  экстраполировать значения функции  $h(z)$  с любой точностью на окружности  $|z|=r_1 < r$ , при условии, что все узлы экстраполяции  $\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$  лежат в некотором фиксированном круге  $|z| \leq r_0 < r_1$ ? Покажем, что этот вопрос решается положительно в случае целых функций конечного порядка. Без ограничения общности будем считать, что  $r_1 = 1$ ; для простоты положим  $a = 2$ .

**Предложение 4.2 [4].** Пусть  $h$  – целая функция конечного порядка  $\rho$  и  $b > \rho, a = 2$ . Пусть числа  $r_0 \in \mathbb{R}$  и  $\mu_n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют условиям

$$\exp\left(-\frac{1}{2b}\right) < r_0 < 1, \quad \mu_n = \left\lceil \frac{\ln r_0}{\ln(1-1/(2n))} \right\rceil + 1. \quad (4.24)$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  суммы  $H_n^{(\mu_n)}(z)$  равномерно сходятся к  $h(z)$  на окружности  $|z|=1$ , причем все узлы экстраполяции лежат в круге  $|z| < r_0$ .

Заметим, что в конкретных числовых задачах оценки для узлов экстраполяции и погрешностей могут быть значительно лучше полученных.

**Пример 4.1.** Пусть, например,  $n = 5, a = 2$  и  $\mu = 2$ . Тогда многочлен (4.14) имеет вид

$$P_5(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{5}{8}\lambda - \frac{7}{8}.$$

Вычислим приближенно его корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ . Возьмем функцию  $h(z) = e^z$  и по формуле двукратной экстраполяции получим  $H_n^{(2)}(1) = 2.71368\dots$ . Таким образом, абсолютная погрешность при  $z = 1$  меньше 0.005 (в других точках окружности  $|z|=1$  она также меньше 0.005). При этом узлы экстраполяции  $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} 4^{-1}$  лежат в круге  $|z| \leq 0.75$ .

**Пример 4.2.** Если с теми же  $n = 5, a = 2$  применить пятикратную экстраполяцию, то получим  $e \approx H_n^{(5)}(1) = 2.71051\dots$  с погрешностью, меньшей 0.008. При этом узлы экстраполяции лежат в круге  $|z| \leq 0.45$ .

Как указано выше, в работе [4] вопрос о сбалансированном выборе параметров  $n$  и  $\mu$  для сколь угодно точной экстраполяции на единичную окружность был решен положительно в случае целых функций конечного порядка. Однако, положительное решение может быть получено и для произвольных аналитических в  $D_r$  функций. Далее мы найдем **явное выражение для остаточного члена  $\mu$ -кратной экстраполяции и улучшим оценку погрешности** (4.23).

**Теорема 4.5 [5].** Пусть  $h$  – функция, аналитическая в  $D_r$  ( $0 < r \leq \infty$ ),  $a > 1$ . Тогда остаточный член  $\mu$ -кратной экстраполяции имеет вид:

$$h(z) - H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - (a^{-m} S_{m+1})^\mu\right) z^m, \quad z \in D_r, \quad (4.25)$$

и справедлива (не зависящая от  $\mu$ ) оценка погрешности:

$$\left| h(z) - H_n^{(\mu)}(z) \right| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |h_m| |z|^m, \quad z \in D_r. \quad (4.26)$$

Если  $r > 1, 0 < r_0 < 1$ , а числа  $\mu_n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют равенству

$$\mu_n = \left\lceil \ln r_0 \cdot \ln^{-1} \left( 1 - \frac{a-1}{an} \right) \right\rceil + 1, \quad \text{где } [\ ] \text{ --- целая часть,} \quad (4.27)$$

то при  $n \rightarrow \infty$  суммы  $H_n^{(\mu_n)}(z)$  равномерно сходятся к  $h(z)$  на окружности  $|z|=1$ , причем все узлы экстраполяции лежат в круге  $|z| < r_0$ .

Доказательство указанной теоремы основано на особом свойстве чисел  $S_m$  в рассматриваемой задаче экстраполяции. Именно, справедлива

**Лемма 4.8 [5].** При условии (4.15) имеем  $S_m \in \mathbb{R}$  и  $1 \leq S_m \leq a^{m-1}$ ,  $m \geq 1$ .

**Примечание 4.1.** Из (4.22) следует, что при увеличении кратности экстраполяции с фиксированным  $n$  радиусы кругов, в которых лежат узлы экстраполяции, стремятся к нулю как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\beta_n$  (число узлов, естественно, возрастает). При этом оценка погрешности (4.26) не ухудшается. Отметим еще, что для  $\mu$ -кратной экстраполяции используется не более  $C_{n+\mu-1}^\mu$  различных узлов, хотя сумма  $H_n^{(\mu)}$  содержит  $n^\mu > C_{n+\mu-1}^\mu$  слагаемых.

**Примечание 4.2.** Экстраполяция  $h$ -суммами в некоторых случаях дает более точные результаты, чем традиционная интерполяция (или экстраполяция) в корнях из единицы, т.е. по узлам  $z_k = e^{2\pi i(k-1)/n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Пусть, например,  $h(z) = (z - \rho)^{-1}$ ,  $1 < \rho < 3/2$ . При  $n > 10$  выберем  $z$  из условия  $z^n = -1$  и  $|z - \rho| < 1$ . Тогда для соответствующего интерполяционного многочлена  $p$ , построенного по узлам  $z_k$ , имеем:

$$|h(z) - p(z)| = \left| \frac{z^n - 1}{(\rho^n - 1)(z - \rho)} \right| = \frac{2}{\rho^n(1 - \rho^{-n})|z - \rho|} \geq \frac{2}{\rho^n |z - \rho|^2}.$$

Отсюда и из (4.26) находим:

$$|h(z) - H_n^{(1)}(z)| \leq \rho^{-n} |z - \rho|^{-1} < |z - \rho| |h(z) - p(z)|.$$

## Литература

1. Данченко В.И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида  $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$  // Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 643–649. Пер.: Math. Notes. 2008. Vol. 83. №5. Pp. 587–593.
2. Данченко В.И. Оценки производных простейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. 2006. Т. 197. №4. С. 33–52. Пер.: Sb. Math. 2006. Vol. 197. №4. Pp. 505–524.
3. Чунаев П.В. Об одном нетрадиционном методе аппроксимации: Дифференциальные уравнения и динамические системы: Сборник статей // Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 281–287. Пер.: Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 270. Pp. 278–284.
4. Danchenko V.I. and Chunaev P.V. Approximation by simple partial fractions and their generalizations // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 176. №6. Pp. 844–859.
5. Чунаев П.В. Об экстраполяции аналитических функций суммами вида  $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$  // Мат. заметки. М.: МАИК, 2012. 4 с. (принята к печати).

## ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Л.С. Шатина

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

**Аннотация.** В настоящей работе изучается эволюция поступательно-вращательного движения систем деформируемых планет и спутников, моделируемых однородными изотропными вязкоупругими телами. Цель работы состоит в развитии и углублении методов исследования эволюции движения систем с бесконечным числом степеней свободы и применении этих и ранее известных методов к исследованию диссипативной эволюции движения небесных тел.

### Введение.

Задача о движении вязкоупругих тел в гравитационном поле сил является модельной задачей в теории приливов. Первые фундаментальные исследования в этой области принадлежат Дж.Г. Дарвину [27]. Более детальное исследование приливных эффектов, учитывающее новую научную информацию о планетах и их спутниках, было проведено во второй половине XX века такими учеными как Г. Макдональд, П. Голдрайх, С. Пил, У. Каула и другими [42]. Ряд важных результатов по приливной эволюции вращательного движения небесных тел был получен Белецким В.В. [2–6] В данной работе применяется метод разделения движений и усреднения, разработанный Вильке В.Г. [7, 8, 10, 14] для изучения механических систем с бесконечным числом степеней свободы, движение которых описывается сложными системами интегродифференциальных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах. Указанный метод позволяет перейти от этих уравнений к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию движения исследуемой системы. Изучению систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, посвящены работы Черноусько Ф.Л. [48, 49], Вильке В.Г. [9, 11–14, 16–25], Маркова Ю.Г. [28, 30, 39–41], Маркеева А.П. [33, 36–38] и др.

Исследования по влиянию упругих и диссипативных сил на эволюцию движения небесных тел актуальны также в связи с попыткой объяснить расхождения между теоретическими результатами и данными наблюдений и необходимостью уточнения законов движения тел в гравитационном поле сил. Цель работы состоит в развитии и углублении методов исследования эволюции движения систем с бесконечным числом степеней свободы и применении этих и ранее известных методов к исследованию диссипативной эволюции движения небесных тел.

1. Для описания вращательного движения планет вводятся подвижные системы координат  $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ , где  $C_i$  – центр масс  $i$ -ой планеты. Переход от подвижных осей к осям Кенига  $C_i \xi_1^{(i)} \xi_2^{(i)} \xi_3^{(i)}$  задается ортогональным оператором  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ). Положение точки  $M_i$   $i$ -ой планеты определяется радиусом-вектором  $\mathbf{R}_{M_i}$  по формуле

$$\mathbf{R}_{M_i} = \mathbf{R}_i + \Gamma_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t)) \quad (i = 1, 2)$$

где  $\mathbf{R}_i$  – радиус-вектор точки  $C_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор точки  $M_i$  шара в недеформированном состоянии относительно подвижной системы координат  $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ ,  $\mathbf{u}_i = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$  – вектор упругого смещения.

Векторы  $\mathbf{R}_i$  и операторы  $\Gamma_i$  однозначно определяются по заданному векторному полю  $\mathbf{R}_{M_i}$  следующими условиями:

$$\mathbf{R}_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_{V_i} \mathbf{R}_{M_i}(\mathbf{r}_i, t) \rho_i dv_i, \int_{V_i} \mathbf{u}_i dv_i = 0, \int_{V_i} \text{rot} \mathbf{u}_i dv_i = 0,$$



где  $V_i = \{\mathbf{r} \in E^3 : |\mathbf{r}| \leq r_{i0}\}$  – область, занимаемая  $i$ -ой планетой в естественном недеформированном состоянии,  $dv_i = dx_1^{(i)} dx_2^{(i)} dx_3^{(i)}$ ,  $\rho_i$  – плотность  $i$ -ой планеты ( $i = 1, 2$ ).

Потенциальная энергия гравитационного поля определяется функционалом

$$\Pi = - \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{f \rho_1 \rho_2}{|\mathbf{R}_{M_1} - \mathbf{R}_{M_2}|} dv_1 dv_2,$$

где  $f$  – универсальная гравитационная постоянная.

Деформированное состояние планет описывается в рамках классической теории упругости малых деформаций с помощью квадратичного функционала

$$E[\mathbf{u}] = \sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_i[\mathbf{u}_i] = \sum_{i=1}^2 \int_{V_i} \alpha_{i1} (I_{iE}^2 - \alpha_{i2} II_{iE}) dv_i,$$

$$\alpha_{i1} = \frac{E_i (1 - \nu_i)}{2(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, \alpha_{i2} = \frac{2(1 - 2\nu_i)}{(1 - \nu_i)},$$

$$\alpha_{i1} > 0, 0 < \alpha_{i2} < 3, I_{iE} = \sum_{j=1}^3 e_{jj}^{(i)},$$

$$II_{iE} = \sum_{k < l} \left( e_{kk}^{(i)} e_{ll}^{(i)} - (e_{kl}^{(i)})^2 \right), e_{kl}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_l^{(i)}} + \frac{\partial u_l^{(i)}}{\partial x_k^{(i)}} \right)$$

где  $E_i$  – модуль Юнга  $i$ -ой планеты,  $\nu_i$  – ее коэффициент Пуассона.

Функционал диссипативных сил  $D[\dot{\mathbf{u}}] = \sum_{i=1}^2 D_i[\dot{\mathbf{u}}_i]$  согласно модели Кельвина-Фойгта определяется соотношением  $D_i[\dot{\mathbf{u}}_i] = \chi_i E_i[\dot{\mathbf{u}}_i]$  где  $\chi_i > 0$  – коэффициент внутреннего вязкого трения.

Кинетическая энергия системы задается функционалом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{V_i} \dot{\mathbf{R}}_{M_i}^2 \rho_i dv_i = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2 + \frac{1}{2} \int_{V_i} [(\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i))]^2 \rho_i dv_i + \int_{V_i} (\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i), \dot{\mathbf{u}}_i) \rho_i dv_i + \frac{1}{2} \int_{V_i} \dot{\mathbf{u}}_i^2 \rho_i dv_i \right\},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_i$  – угловая скорость  $i$ -го шара,  $\boldsymbol{\omega}_i \times (\cdot) = \Gamma_i^{(-1)} \dot{\Gamma}_i(\cdot)$  ( $i = 1, 2$ ).

Взаимное расположение планет описывается вектором  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ , соединяющим их центры масс.

Рассматривается частный случай, когда движение центров масс планет происходит в неподвижной плоскости  $OXY$ , а их вращение происходит по нормали к этой плоскости. Существование такого класса движений было доказано в монографии [7], где были получены уравнения движения рассматриваемой системы в векторном виде.

Формулируется постановка задачи, и выводятся уравнения движения системы в форме уравнений Рауса, каноническую часть которых составляют уравнения относительно переменных Андуайе-Делоне, а лагранжеву – уравнения в форме вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа относительно обобщенных координат, описывающих деформированное состояние планет. Вращательное движение планет описывается переменными  $I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2$ , а движение конца вектора  $\mathbf{R}$  – переменными  $G, g, L, l$ . Здесь  $I_i$  – модуль кинетического момента  $i$ -ой планеты относительно ее центра масс,  $\varphi_i$  – угол, задающий в рассматриваемом частном случае поворот подвижных осей  $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$  относительно соответствующих осей Кенига,  $G$  – модуль момента количества движения конца вектора  $\mathbf{R}$  относительно начала инерциальной системы отсчета,  $L$  – модуль момента количества движения по круго-

вой орбите с данным значением полной энергии,  $g$  – долгота перигелия орбиты,  $l$  – средняя аномалия.

Методом разделения движений и усреднения выводится приближенная система уравнений относительно переменных "действие" и медленных угловых переменных, описывающих диссипативную эволюцию поступательно-вращательного движения системы.

В соответствии с рассматриваемой моделью, жесткость планет предполагается большой, и вводятся безразмерные малые параметры  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ), обратно пропорциональные модулям Юнга планет. При  $\varepsilon_i = 0$  уравнения движения системы интегрируются и описывают движение двух абсолютно твердых шаров в поле сил взаимного притяжения, когда конец вектора  $\mathbf{R}$  описывает кеплеровскую орбиту, а угловые скорости планет постоянны. Это невозмущенное движение используется в качестве порождающего для определения векторов упругого смещения  $\mathbf{u}_i$  в первом приближении по малым параметрам.

В результате подстановки найденных решений  $\mathbf{u}_i$  в правые части канонических уравнений для "медленных" переменных  $I_1, I_2, G, L, g$  и усреднения их по "быстрой" угловой переменной  $l$ , получена следующая эволюционная система уравнений:

$$\dot{I}_i = \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_2(e) - \omega_i \frac{G^3}{L^3} F_1(e) \right\} \quad (i = 1, 2), \quad (1.1)$$

$$\dot{L} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_3(e) \frac{L^3}{G^3} - \omega_i F_2(e) \right\}, \quad (1.2)$$

$$\dot{G} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_2(e) - \omega_i \frac{G^3}{L^3} F_1(e) \right\}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{g} = & \sum_{i=1}^2 \frac{3\rho_i^2 \gamma_i \varepsilon_i D_{2i} f^3 m_1^6 m_2^6 G^3}{G^7 (m_1 + m_2)^3 L^3} \left[ \omega_i^2 + \right. \\ & \left. + \frac{15\gamma_i f^3 m_1^6 m_2^6}{G^6 (m_1 + m_2)^6} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right) \right], \quad (1.4) \end{aligned}$$

где  $r_{i0}$  – радиус  $i$ -ой планеты в естественном недеформированном состоянии,  $\omega_i = \frac{I_i}{A_i}$  – ее угловая скорость,  $A_i$  – центральный момент инерции в недеформированном состоянии

( $i = 1, 2$ ),  $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$  – эксцентриситет орбиты конца вектора  $\mathbf{R}$ ,  $n = \frac{f^2 m_1^3 m_2^3}{(m_1 + m_2)L^3}$  – его сред-

нее орбитальное движение,  $\gamma_1 = fm_2$ ,  $\gamma_2 = fm_1$ ,

$$\Delta_i = 18 \frac{\rho_i^2 \gamma_i^2 f^6 m_1^{12} m_2^{12} D_{2i} \varepsilon_i \chi_i}{(m_1 + m_2)^6}, \quad D_{2i} = \frac{4\pi(1 + \nu_i)(13 + 9\nu_i)r_{i0}^7}{105(5\nu_i + 7)},$$

$$F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4, \quad F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6,$$

$$F_3(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8.$$

Уравнения (1.1)–(1.4) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $I_1, I_2, L, G$ , имеющую первый интеграл, выражающий закон сохранения модуля момента количества движения системы относительно общего центра масс,

$$G + I_1 + I_2 = G_0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) интегрируется после нахождения функций  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $L$  и  $G$ .

Стационарные решения полученных уравнений найдены в п. 1.3. Показано, что в стационарном движении система двух планет движется как твердое тело, то есть планеты обращены друг к другу одной стороной, а их центры масс равномерно движутся по круговым орбитам.

В зависимости от значения первого интеграла (1.5) система может иметь не более двух стационарных решений.

При  $G_0 > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$ , где  $k = \frac{A_1 + A_2}{m_1 + m_2} f^2 m_1^3 m_2^3$ , система имеет два стационарных решения,

одно из которых, соответствующее большему расстоянию между центрами масс планет, асимптотически устойчиво, а второе неустойчиво.

Если  $G_0 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$ , то система имеет ровно одно неустойчивое стационарное движение.

В случае  $G_0 < \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$  стационарных движений нет.

Этот результат соответствует полученному ранее в монографии [7].

Полученные результаты иллюстрируются на примере Солнечной системы, где в качестве первого тела рассматривается Солнце, а в качестве второго – одна из планет. Показано, что для всех планет Солнечной системы выполнено условие существования двух стационарных решений. Вычислены радиусы стационарных орбит и проведено сравнение полученных результатов с текущими значениями больших полуосей орбит планет. Показано, что планеты земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс) находятся ближе к неустойчивым стационарным орбитам, а орбиты планет-гигантов (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна) близки к соответствующим устойчивым стационарным орбитам.

Уравнение (1.4), описывающее эволюцию медленной угловой переменной  $g$ , рассматривается отдельно на примере системы Солнце-Меркурий.

Правую часть уравнения (1.4) можно представить в следующем виде:

$$\dot{g} = g_1 + g_2 + q_1 + q_2, \quad (1.6)$$

где

$$q_i = \frac{27 f^{1/2} m_1 m_2 r_{i0} h(v_i) \varepsilon_i}{28 \pi a^{7/2} (1 - e^2)^5 (m_1 + m_2)^{1/2}} n^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right),$$

$$g_i = \frac{9(m_1 + m_2)^{1/2} f^{1/2} m_i r_{i0} h(v_i) \varepsilon_i}{140 \pi a^{7/2} (1 - e^2)^2} \omega_i^2 \quad (i = 1, 2),$$

$$h(v) = \frac{(1 + v)(13 + 9v)}{(5v + 7)},$$

$$a = \frac{G^2 (m_1 + m_2)}{f m_1^2 m_2^2} - \text{большая полуось орбиты.}$$

Следует отметить, что существенным отличием между аналогичным уравнением, полученным в диссертации [53], где изучалось движение планеты в центральном поле сил, и уравнением (1.6), описывающим изменение долготы перигелия орбиты планеты, движущейся в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела, является наличие в его правой части слагаемого  $g_1$ , зависящего от массы, радиуса и угловой скорости этого тела, причем в случае системы Солнце-Меркурий именно оно вносит основной вклад в эволюцию перигелия, так как  $\left| \frac{g_2}{g_1} \right| = 1$ ,  $\left| \frac{q_1}{g_1} \right| = 1$  и  $\left| \frac{q_2}{g_1} \right| = 1$ .

Приближенно можно считать, что

$$\dot{g} \approx \frac{9\sqrt{f(m_1 + m_2)}h(v_1)m_1r_{10}}{140\pi E_1 a^{7/2}(1 - e^2)^2} \omega_1^2. \quad (1.7)$$

Согласно данным наблюдений, смещение перигелия Меркурия составляет 570"/100лет [43].

На основании формулы (1.7) были вычислены значения модуля Юнга вязкоупругого тела, моделирующего Солнце, для разных значений коэффициента Пуассона.

Таким образом, соответствующим выбором модуля Юнга  $E_1$  в рамках данной постановки задачи можно добиться совпадения теоретического значения наблюдаемого смещения перигелия Меркурия с наблюдаемым.

2. Исследуется движение двойной планеты, моделируемой двумя вязкоупругими шарами с массами  $m_2$  и  $m_3$ , в гравитационном поле вязкоупругого тела массы  $m_1$ . Предполагается, что  $m_2/m_1 = 1$ ,  $m_3/m_2 = 1$ , а расстояние между телами, составляющими двойную планету, много меньше расстояния от их барицентра до третьего тела. Эта глава является обобщением работы [23], где движение двойной планеты осуществлялось по орбитам с нулевыми эксцентриситетами в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра.

Описывается "плоская" постановка задачи, когда центры масс планет движутся в неподвижной плоскости, а их угловые скорости ортогональны этой плоскости. Взаимное расположение планет описывается с помощью векторов  $\mathbf{R}_1 = \overline{C_1C}$  и  $\mathbf{R}_2 = \overline{C_2C_3}$ , где  $C_i$  - центр масс  $i$ -ой планеты,  $C$  - барицентр двойной планеты. Получены уравнения движения системы в форме уравнений Рауса, состоящих из канонических уравнений относительно переменных Андуайе-Делоне  $I_1, I_2, I_3, L_1, L_2, G_1, G_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_1, l_2, g_1, g_2$ , где переменные  $I_k, \varphi_k$  ( $k=1,2,3$ ) описывают вращательное движение планет, а переменные  $G_j, g_j, L_j, l_j$  ( $j=1,2$ ) - орбитальное движение концов векторов  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , и уравнения в форме вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа для определения векторов упругого смещения.

Методом разделения движений и усреднения осуществляется построение приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных "действие", описывающих эволюцию поступательно-вращательного движения двойной планеты в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела. В случае отсутствия деформаций "невозмущенные" уравнения интегрируются и описывают движение, когда концы векторов  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  движутся по кеплеровским орбитам, а планеты вращаются с постоянными угловыми скоростями. Это движение используется в качестве порождающего для определения вынужденных колебаний вязкоупругих шаров.

В результате подстановки найденных в первом приближении по малому параметру  $\varepsilon_i$  функций  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t)$  ( $i=1,2,3$ ) в правые части уравнений относительно переменных "действие" и усреднения этих уравнений по быстрым угловым переменным  $l_1$  и  $l_2$  (рассматривается нерезонансный случай), получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений седьмого порядка:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= -\frac{\Delta_{11}}{G_1^{12}} \left\{ \omega_1 \frac{G_1^3}{L_1^3} F_1(e_1) - n_1 F_2(e_1) \right\}, \\
 \dot{I}_j &= -\sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_{ij}}{G_i^{12}} \left\{ \omega_j \frac{G_i^3}{L_i^3} F_1(e_i) - n_i F_2(e_i) \right\} (j=2,3), \\
 \dot{I}_1 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta_{1i}}{G_1^{12}} \left\{ \omega_i F_2(e_1) - n_1 \frac{L_1^3}{G_1^3} F_3(e_1) \right\}, \\
 \dot{I}_2 &= \sum_{i=2}^3 \frac{\Delta_{2i}}{G_2^{12}} \left\{ \omega_i F_2(e_2) - n_2 \frac{L_2^3}{G_2^3} F_3(e_2) \right\}, \\
 \dot{G}_1 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta_{1i}}{G_1^{12}} \left\{ \omega_i \frac{G_1^3}{L_1^3} F_1(e_1) - n_1 F_2(e_1) \right\}, \\
 \dot{G}_2 &= \sum_{i=2}^3 \frac{\Delta_{2i}}{G_2^{12}} \left\{ \omega_i \frac{G_2^3}{L_2^3} F_1(e_2) - n_2 F_2(e_2) \right\},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где 
$$\Delta_{11} = \frac{18\rho_1^2 f^8 m_1^{12} (m_2 + m_3)^{14} D_{21} \varepsilon_1 \chi_1}{M^6}, \quad \Delta_{1j} = \frac{18\rho_j^2 f^8 m_1^{14} (m_2 + m_3)^{12} D_{2j} \varepsilon_j \chi_j}{M^6},$$

$$\Delta_{2j} = \frac{18\rho_j^2 f^8 m_j^{12} m_k^{14} D_{2j} \varepsilon_j \chi_j}{(m_2 + m_3)^6} (j, k = 2, 3, j \neq k),$$

$D_{2i}$  определены выше,  $f$  – универсальная гравитационная постоянная,  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $\rho_i$  – плотность  $i$ -ой планеты,  $r_{i0}$  – ее радиус в естественном недеформированном состоянии,  $\omega_i = \frac{I_i}{A_i}$  – угловая скорость  $i$ -ой планеты,  $A_i$  – ее центральный момент инерции в

недеформированном состоянии ( $i=1,2,3$ ),  $e_j = \sqrt{1 - \frac{G_j^2}{L_j^2}}$  – эксцентриситет орбиты конца вектора  $\mathbf{R}_j$  ( $j=1,2$ ),  $n_1 = \frac{f^2 m_1^3 (m_2 + m_3)^3}{ML_1^3}$ ,  $n_2 = \frac{f^2 m_2^3 m_3^3}{(m_2 + m_3)L_2^3}$  – соответствующие средние орбитальные движения.

Система уравнений (2.1) имеет первый интеграл, выражающий закон сохранения модуля кинетического момента системы относительно общего центра масс:

$$I_1 + I_2 + I_3 + G_1 + G_2 = G_0 .$$

Для случая, когда планета массы  $m_3$  моделируется материальной точкой ( $\Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$ ), проведено исследование стационарных решений соответствующей системы уравнений. Показано, что в зависимости от начальных условий система может иметь одно или два стационарных решения, оба из которых неустойчивы, либо не иметь стационарных решений. В стационарном движении все три планеты расположены на одной прямой и равномерно вращаются вокруг общего центра масс как твердое тело.

Осуществлен переход от уравнений (2.1) относительно переменных Андуайе-Делоне к уравнениям относительно переменных  $\omega_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $n_j$ ,  $e_j$  ( $j=1,2$ ). В рамках изучаемой постановки задачи рассмотрен пример системы "Солнце-Земля-Луна". На основе данных наблюдений определены числовые значения параметров системы – эквивалентных коэффициентов вязкости планет. С помощью системы Matlab 7.0.1 получены графики, отображающие картину эволюции системы в будущем.

В настоящее время Луна удаляется от Земли. Согласно полученным численным результатам, наибольшее расстояние, на которое она удалится, составит 512,4 тыс. км, что в 1,3 раза больше текущего значения большой полуоси ее орбиты. Одновременно с этим период обращения Земли вокруг оси сравняется с периодом обращения Луны вокруг Земли и составит 42,2 суток. Эти значения близки к полученным в работе [23]. Далее угловая скорость Земли продолжит убывать, а среднее орбитальное движение Луны – возрастать, и стационарного движения система не достигнет. Эксцентриситет лунной орбиты будет возрастать до максимального значения, равного 0,1112, а затем начнет убывать.

Описанная картина эволюции лунной орбиты сходна с той, что была получена Г. Макдональдом [42] при рассмотрении движения Луны по эксцентрической орбите без учета влияния Солнца.

**3.** Исследуется поступательно-вращательное движение трех планет, моделируемых однородными изотропными вязкоупругими шарами масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  в поле сил взаимного притяжения в общей постановке задачи.

На основе вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа выводятся точные уравнения движения системы.

Методом разделения движений получена система приближенных уравнений движения трех вязкоупругих шаров с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией.

В случае, когда планеты моделируются абсолютно твердыми шарами, система имеет стационарные движения, в которых центры масс планет образуют равносторонний треугольник, и система равномерно вращается относительно общего центра масс с угловой скоростью, направленной вдоль постоянного вектора кинетического момента (лагранжевы треугольные точки либрации).

Найден аналог треугольных точек либрации для системы трех вязкоупругих тел. В этом движении диссипация энергии отсутствует, планеты движутся как одно тело с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , при этом их центры масс находятся в неподвижной плоскости, ортогональной вектору угловой скорости, образуя треугольник общего положения. Стороны этого треугольника  $R_{12}$ ,  $R_{13}$  и  $R_{23}$  в первом приближении по малым параметрам  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2,3$ ) определяются следующими формулами:

$$R_{ij} = R + \frac{f}{R^4} R_{ij}^{(1)},$$

$$R_{12}^{(1)} = \Delta_1 \frac{4m_1 + 28m_2 - 5m_3}{12m_1} + \Delta_2 \frac{28m_1 + 4m_2 - 5m_3}{12m_2} + \Delta_3,$$

$$R_{13}^{(1)} = \Delta_1 \frac{4m_1 + 28m_3 - 5m_1}{12m_1} + \Delta_2 + \Delta_3 \frac{28m_1 + 4m_3 - 5m_2}{12m_3},$$

$$R_{23}^{(1)} = \Delta_1 + \Delta_2 \frac{4m_2 + 28m_3 - 5m_1}{12m_2} + \Delta_3 \frac{28m_2 + 4m_3 - 5m_1}{12m_3},$$

где  $f$  – универсальная гравитационная постоянная,  $R = \sqrt[3]{fM\Omega^{-2}}$ ,  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,

$\Delta_i = \frac{4\pi\varepsilon_i\rho_i^2(1+\nu_i)(13+9\nu_i)}{105(5\nu_i+7)} r_{i0}^7$ ,  $r_{i0}$  – радиус  $i$ -ой планеты в недеформированном состоянии,

$\rho_i$  – ее плотность ( $i=1,2,3$ ).

### Литература

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 416 с.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965, 416 с.

3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975, 308 с.
4. Белецкий В.В. К вопросу об эволюции вращательных движений небесных тел с приливной или аэродинамической диссипацией. В кн. Актуальные проблемы классической и небесной механики. ТОО "Эльф" Ltd, М., 1998, с. 23-32.
5. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Издательство ЛКИ, 2009, 432 с.
6. Белецкий В.В. Приливная эволюция наклонений и вращений небесных тел. Препринт/ Ин-т прикладной математики АН СССР, М., 1978. №43, 22 с.
7. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986, 256 с.
8. Дарвин Дж.Г. Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. М.: Наука, 1965, 252 с.
9. Демин А.В., Марков Ю.Г., Миняев И.С. О приливной эволюции наклонений и вращений небесных тел // Космические исследования, 1992, т.30, вып. 2, с.157-164.
10. Демин В.Г. Судьба Солнечной системы. Популярные очерки по небесной механике. М.: Наука, 1975, 263 с.
11. Долгачев В.В., Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В. О задаче трех тел с диссипативными силами // Космические исследования, 2000, т.38, №2, с. 193-202.
12. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968, 800 с.
13. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970, 280 с.
14. Красильников П.С., Маркеев А.П. Об устойчивости цилиндрической прецессии вязкоупругого спутника при резонансе 1:3 // Космические исследования, 1997, т.35, №5, с.515-520.
15. Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. М.-Л.:Гостехиздат, 1942, 304 с.
16. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935, 674 с.
17. Маркеев А.П. К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космические исследования, 1989, т.27, вып. 2, с.163-169.
18. Маркеев А.П. Об одном частном случае движения динамически симметричного упруговязкого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле // Космические исследования, 1990, т.28, вып. 5, с.643-650.
19. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990, 416 с.
20. Марков Ю.Г. О вращении вязкоупругого шара на условно-периодической орбите в плоской круговой ограниченной задаче трех тел // Известия АН. Механика твердого тела, 1989, №6, с.23-29.
21. Марков Ю.Г. Пространственное движение деформируемого тела в центральном поле сил // Космические исследования, 1988, т.26, вып. 2, с.236-245.
22. Марков Ю.Г., Миняев И.С. Об эволюции движения системы "планета-спутник", в поле притягивающего центра // Астрономический журнал, 1992, т.69, вып. 2, с.416-427.
23. Приливы и резонансы в Солнечной системе. Сборник статей под редакцией Жаркова В.Н. М.: Мир, 1975, 288 с.
24. Роузвер Н.Т. Перигелий Меркурия от Лавуазье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985, 244 с.
25. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений. М.: Наука, 1988, 304 с.
26. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. М.-Л., ОНТИ, т.2, 1937, 404 с.
27. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984, 295 с.
28. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.-Л., ОНТИ, 1937, 500 с.
29. Черноушко Ф.Л. О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, вып.1, с. 22-26.
30. Черноушко Ф.Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Прикладная математика и механика, 1978, т.42, вып.1, с. 34-42.
31. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990, 176 с.

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ЭВМ

А.Д. Яруллин

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

**Аннотация.** Научно-исследовательская работа выполнена в рамках развития отечественного термогидродинамического симулятора (ТГДС) нефтяной залежи НИМФА-2 создаваемого в Институте Теоретической и Математической Физики РФЯЦ-ВНИИЭФ г. Саров. В работе построена одна из наиболее востребованных и исследованных моделей нефтяных месторождений – Black Oil – модель нелетучей нефти, описывающая фильтрацию флюидов и газа с помощью системы нелинейных уравнений в частных производных [1, 4]. Для решения данной системы в мире были разработаны различные методы (SS, IMPES, SEQ) [1, 4, 8].

### **Введение.**

Основное преимущество создаваемого программного комплекса перед его зарубежными аналогами заключатся в сравнительно меньшей стоимости. Кроме того, при использовании зарубежного продукта по лицензии существует риск утечки информации через передачу данных необходимых для расчетов третьей стороне, так как действие лицензии может ограничивать подобные расчеты.

Актуальность работы характеризуется существенным ухудшением структуры запасов нефти и газа в РФ. Вследствие этого возникает задача, связанная с повышением нефтеотдачи, для решения которой необходима разработка принципиально новых технологий добычи, которые могут быть смоделированы с использованием новых быстродействующих суперкомпьютеров. Следует отметить, что отработка данных технологий путем только практических экспериментов является весьма дорогостоящей, а получаемые результаты при таких тестах очень ограничены.

Важной сферой применения математического моделирования фильтрации является решение проблем прогнозирования, контроля и управления процессами разработки пластов, в этом состоит и основное коммерческое использование программных продуктов, подобных комплексу НИМФА-2.

Предметной областью работы стал численный метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений – IMPES (неявный по давлению и явный по насыщенностям) с использованием конечно-объемной дискретизации уравнений. Для неявного решения уравнений давления нефти при аппроксимации потоков использовался метод отложенной коррекции.

Целью научно-исследовательской работы является распараллеливание неявной схемы метода IMPES по расчету диффузии в ТГДС НИМФА-2.

Научно-технические задачи работы заключаются в описании модели и методики ее расчета, а также в построении вычислительных алгоритмов на многопроцессорных ЭВМ в параллельном режиме.

### **1. Математическая модель Black Oil.**

При извлечении углеводородов возникает фильтрационный перенос жидкостей и газов, который описывается фундаментальными законами сохранения массы, импульса и энергии. Однако для описания фильтрации в пористых средах применить эти законы чрезвычайно сложно, поэтому на практике используется подход, основанный на применении закона Дарси взамен уравнения сохранения импульса.

В модели Black Oil нефть (o), вода (w) и газ (g) рассматриваются в качестве отдельных компонент и фаз. В этом случае, вместо уравнения состояния, устанавливающего связь давления – объема и температуры, используются объемные коэффициенты в зависимости от давления:



$$\frac{(V_o + V_{dgo})}{(V_o)_{STC}} = B_o(p_o), \quad (1.1)$$

$$\frac{(V_w + V_{dgw})_{RC}}{(V_o)_{STC}} = B_w(p_w), \quad (1.2)$$

$$\frac{(V_g)_{RC}}{(V_g)_{STC}} = B_g(p_g). \quad (1.3)$$

В приведенных уравнениях  $(V_\alpha)_{RC}$  – объем, занятый фиксированной массой флюида  $\alpha$  в пластовых условиях,  $(V_\alpha)_{STC}$  – объем, занятый той же массой того же флюида при нормальных условиях,  $V_{dgo}$  – объем газа, растворенного в нефти, и  $V_{dgw}$  – объем газа, растворенного в воде.

Массообмен между нефтяной и газовой, а также между водяной и газовой фазами описываются через коэффициенты растворимости:

$$\frac{(V_{dgo})_{STC}}{(V_o)_{STC}} = R_{so}(p_o), \quad (1.4)$$

$$\frac{(V_{dgw})_{STC}}{(V_w)_{STC}} = R_{sw}(p_w). \quad (1.5)$$

Закон движения описывается обобщенным законом Дарси, устанавливающим связь между скоростью фильтрации и градиентом давления для каждого из фильтрующихся флюидов:

$$\vec{W}_o = -\frac{k_{ro}K_\alpha}{\mu_o}(\nabla p_o - \gamma_o \nabla h), \quad (1.6)$$

$$\vec{W}_w = -\frac{k_{rw}K_\alpha}{\mu_w}(\nabla p_w - \gamma_w \nabla h), \quad (1.7)$$

$$\vec{W}_g = -\frac{k_{rg}K_\alpha}{\mu_g}(\nabla p_g - \gamma_g \nabla h). \quad (1.8)$$

Здесь:  $K_\alpha$  – тензор абсолютной проницаемости породы;  $k_{ro}, k_{rw}, k_{rg}$  – относительные фазовые проницаемости нефти, воды и газа;  $\mu_o, \mu_w, \mu_g$  – коэффициенты динамической вязкости нефти, воды и газа;  $p_o, p_g, p_w$  – давление, соответственно, в нефтяной, водяной и газовой фазах;  $\gamma_o = p_o g, \gamma_w = p_w g, \gamma_g = p_g g$  – веса соответствующих фаз,  $g$  – ускорение свободного падения, а  $h$  – глубина относительно уровня моря, отсчет ведется вниз по вертикали.

Далее обозначим через  $\Phi$  – пористость и введем понятие насыщенности  $S_l$ , где  $l$  – индекс фазы (нефть, газ или вода). Насыщенность – доля порового объема, занятого фазой. Используя это понятие, консервативную систему дифференциальных уравнений сохранения массы флюидов можно записать так [5–6, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi \frac{S_o}{B_o} \right) + \nabla \left( \frac{\vec{W}_o}{B_o} \right) = q_o, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi \frac{S_w}{B_w} \right) + \nabla \left( \frac{\vec{W}_w}{B_w} \right) = q_w, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \left( \frac{S_o R_o}{B_o} + \frac{S_w R_w}{B_w} + \frac{S_g}{B_g} \right) + \nabla \left( \frac{R_{so} \vec{W}_o}{B_o} + \frac{R_{sw} \vec{W}_w}{B_w} + \frac{\vec{W}_g}{B_g} \right) = \\ = q_o R_{so} + q_w R_{sw} + q_g. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поскольку насыщенности являются объемными концентрациями, то их значения в каждой точке связаны соотношением:

$$S_o + S_w + S_g = 1 \quad (1.12)$$

С учетом соотношений (1.6)–(1.8) уравнения (1.9)–(1.11), описывающие трехфазную трехмерную нестационарную фильтрацию, приобретают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) = \nabla [\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla h)] + q_o, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \nabla [\lambda_w (\nabla p_w - \gamma_w \nabla h)] + q_w, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi \left( R_{zo} \frac{S_o}{B_o} + R_{zw} \frac{S_w}{B_w} + \frac{S_g}{B_g} \right) = & \nabla [R_{zo} \lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla h)] + [R_{zw} \lambda_w (\nabla p_w - \gamma_w \nabla h)] + \\ & + \nabla [\lambda_g (\nabla p_g - \gamma_g \nabla h)] + q_o R_{zo} + q_w R_{zw} + q_g. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь  $\lambda_o, \lambda_w, \lambda_g$  – тензоры проводимости флюидов, определяемые как:

$$\lambda_o = \frac{k_{ro} K_\alpha}{\mu_o}, \quad \lambda_w = \frac{k_{rw} K_\alpha}{\mu_w}, \quad \lambda_g = \frac{k_{rg} K_\alpha}{\mu_g}. \quad (1.16)$$

## 2. Неструктурированная сетка.

Расчетная методика будет построена на неструктурированной сетке. Ячейки сетки в общем случае являются произвольными многогранниками, покрывающими расчетную область без зазоров и наложений. Вершинами граней являются узлы разностной сетки:

$$Node = \{ (x_i, y_i, z_i) : 1 \leq i \leq N \},$$

где  $i$  – номер узла. Общий вид ячеек неструктурированной сетки показан на рисунке 1.

Построение сетки связано с созданием базы данных, которая содержит списки узлов сетки, ячеек и граней, а также определенные связи между этими списками.

Для каждой ячейки указывается число граней и их номера, координаты ее геометрического центра, объем ячейки, а также список определяющих расчетных параметров, которые относятся на каждый момент времени к центру ячейки:

$$Cell = \left\{ P: F, (f_1, f_2, \dots, f_F), (x_p, y_p, z_p), \Delta V_p, (p_o, p_w, p_g, s_o, \dots)_p \right\},$$

где  $P$  – номер ячейки,  $F$  – количество граней,  $(f_1, f_2, \dots, f_F)$  – список граней ячейки,  $(x_p, y_p, z_p)$  – координаты центра ячейки,  $(p_o, p_w, p_g, s_o, \dots)_p$  – расчетные параметры, относенные к центру ячейки.

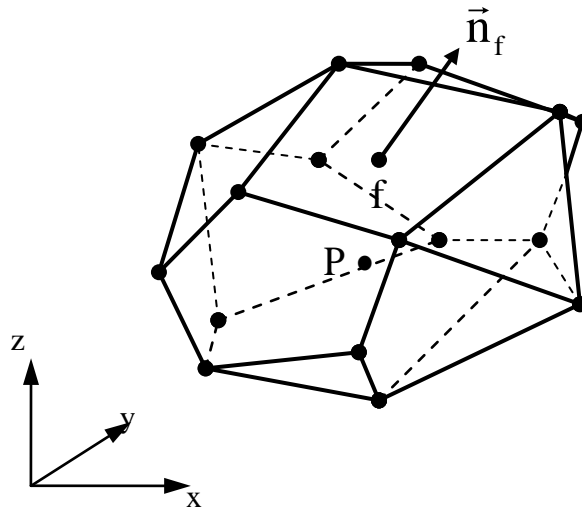


Рис. 1. Общий вид ячейки неструктурированной сетки

Каждая грань описывается номерами ячеек  $P$  и  $F$ , которые она разделяет. Для граничной ячейки номер  $P$  или  $F$  равен нулю.

Также каждая грань содержит информацию о площади и о единичном векторе нормали, внешнем относительно ячейки  $P$ . Координаты геометрического центра вычисляются как среднеарифметическое координат узлов грани. Номера узлов грани перечисляются в соот-

ветствии с положительным обходом контура грани (обход против часовой стрелки), если смотреть из  $P$  в  $F$ :

$$Face = \{f: P, F, J, (P_1, \dots, P_J), (n_x, n_y, n_z)_f, (x_f, y_f, z_f), \Delta S_f\}.$$

где  $f$  – номер грани,  $P$  и  $F$  номера ячеек, разделяющих грань,  $J$  - количество соседних ячеек,  $(P_1, \dots, P_J)$  – список номеров ячеек,  $(n_x, n_y, n_z)$  – координаты единичного вектора нормали,  $(x_f, y_f, z_f)$  – координаты центра грани,  $\Delta S_f$  – площадь грани.

Единичный вектор нормали к грани строится в геометрическом центре грани. Номер грани будем обозначать индексом  $f$ . Этим же индексом будем обозначать точку геометрического центра грани. При рассмотрении грани  $f$  будем обозначать центры ячеек индексами  $P$  и  $F$ , которые разделяет эта грань.

Координаты центра масс определяются из условия:

$$\int_{\Delta V_P} (\vec{R} - \vec{R}_P) dV = 0.$$

Для ячейки  $P$  индекс  $f$  меняется в пределах:  $f=f_1, \dots, f_F$ , где  $F$  – число граней.

В процессе дискретизации определяются значения искомым величин в центрах граней, точки с индексом  $f$ , удовлетворяющей условию:

$$\int_{\Delta S_f} (\vec{R} - \vec{R}_f) dV = 0,$$

а единичный вектор нормали к грани определяется как:

$$\Delta \vec{S} = \vec{n} \Delta S = \int_{\Delta S_f} \vec{n} dS.$$

Геометрический центр  $R_f = \{x_f, y_f, z_f\}$  граней определяется усреднением по площадям геометрических центров треугольников образующих грань:

$$\vec{R}_f = \frac{\sum_{k=1}^K \Delta S_{f_k} \vec{R}_{f_k}}{\Delta S_f},$$

где

$$\Delta S_f = \sum_{k=1}^K \Delta S_{f_k}.$$

Аналогично определяется единичный вектор нормали  $\vec{n}_f = \{n_x, n_y, n_z\}_f$  для грани:

$$\vec{n}_f = \frac{\sum_{k=1}^K \Delta S_{f_k} \vec{n}_{f_k}}{\left| \sum_{k=1}^K \Delta S_{f_k} \vec{n}_{f_k} \right|}.$$

Объем  $P$ -й ячейки определяется как сумма объемов треугольных призм, образующих ячейку:

$$\Delta V_P = \sum_{j=1}^J \Delta V_{P_j}.$$

Геометрический центр  $P$ -й ячейки определяются усреднением по объемам геометрических центров треугольных призм:

$$R_P = \frac{\sum_{j=1}^J \Delta V_{P_j} R_{P_j}}{\Delta V_P}.$$

Таким образом, ячейка сетки представляет собой многогранник, имеющий объем  $\Delta V_p$ , ограниченный поверхностью, состоящей из совокупности граней.

### 3. Общее описание метода IMPES.

Уравнения (1.13)–(1.15) представляют собой связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для решения этих уравнений в данной работе будет использован конечнообъемный метод IMPES (неявный по давлению и явный по насыщенностям), который реализуется на неструктурированной сетке совместно с дискретизацией уравнений, описанием которой займемся позже.

Для построения численного метода, следуя [1], проведем преобразование уравнений. Дифференцируя уравнения (1.9)–(1.11) с учетом (1.12), получим уравнения относительно изменения насыщенностей:

$$\Phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + B_o S_o \frac{d}{dp_o} \left( \frac{\Phi}{B_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} = -B_o \nabla \left( \frac{\vec{W}_o}{B_o} \right) + B_o q_o, \quad (3.1)$$

$$\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + B_w S_w \frac{d}{dp_o} \left( \frac{\Phi}{B_w} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} = -B_w \nabla \left( \frac{\vec{W}_w}{B_w} \right) + B_w q_w, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \Phi B_g \frac{R_{so}}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} S_o + S_o B_g \frac{d}{dp_o} \left( \Phi \frac{R_{so}}{B_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} + \\ & + \Phi B_g \frac{R_{sw}}{B_w} \frac{\partial}{\partial t} S_w + S_w B_g \frac{d}{dp_o} \left( \Phi \frac{R_{sw}}{B_w} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} + \\ & + \Phi \frac{\partial}{\partial t} S_g + S_g B_g \frac{d}{dp_o} \left( \frac{\Phi}{B_g} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} = \\ & = -B_g \nabla \left( \frac{R_{so} \vec{W}_o}{B_o} + \frac{R_{sw} \vec{W}_w}{B_w} + \frac{\vec{W}_g}{B_g} \right) + \\ & + B_g q_o R_{so} + B_g q_w R_{sw} + B_g q_g. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для замыкания системы уравнений (3.1)–(3.3) необходима связь насыщенностей (1.12) и следующие соотношения:

$$p_o - p_w = P_{cow}(S_w), \quad (3.4)$$

$$p_g - p_o = P_{cog}(S_g). \quad (3.5)$$

Уравнения (3.1)–(3.3) являются уравнениями переноса для нефти, воды и газа. Отношения (3.4)–(3.5) выражают зависимости между капиллярным давлением и насыщенностью в системе вода-нефть и газ-нефть и используются для пересчета давления воды  $p_w$  и давления газа  $p_g$  соответственно. Соотношение (1.12) применяется при подсчете насыщенностей.

Разрешим систему уравнений (1.12), (3.1)–(3.5) относительно давления нефти  $p_o$ . Для этого умножим уравнение (3.1) на  $(B_o - R_{so} B_g)$ , уравнение (3.2) на  $(B_w - R_{sw} B_g)$ , и, произведя суммирование уравнений (3.1)–(3.3), получим уравнение относительно давления нефти  $p_o$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial p_o}{\partial t} = & B_o \nabla [\lambda_o \nabla p_o] + B_w \nabla [\lambda_w \nabla p_o] + B_g \nabla [\lambda_g \nabla p_o] + \\ & + B_g (\nabla [R_{so} \lambda_o \nabla p_o] - R_{so} \nabla [\lambda_o \nabla p_o]) + \\ & + B_g (\nabla [R_{sw} \lambda_w \nabla p_o] - R_{sw} \nabla [\lambda_w \nabla p_o]) + D, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где слагаемые в правой части:

$$\begin{aligned} D &= D_o + D_w + D_g, \\ D_o &= B_o (q_o + \nabla [\lambda_o \gamma_o \nabla h]), \\ D_w &= B_w (q_w - \nabla [\lambda_w (\nabla P_{cow} + \gamma_w \nabla h)]), \\ D_g &= \bar{D}_g + D_{R_{so}} + D_{R_{sw}}, \\ \bar{D}_g &= B_g (q_g + \nabla [\lambda_w (\nabla P_{cog} - \gamma_g \nabla h)]), \end{aligned}$$

$$D_{R_{so}} = B_g(R_{so} \nabla[\lambda_o \gamma_o \nabla h] - \nabla[R_{so} \lambda_o \gamma_o \nabla h]),$$

$$D_{R_{sw}} = B_g(R_{sw} \nabla[\lambda_w (\nabla P_{cow} - \gamma_w \nabla h)] - \nabla[R_{sw} \lambda_w (\nabla P_{cow} - \gamma_w \nabla h)]),$$

слагаемые при нестационарном члене:

$$A = A_o + A_w + A_g,$$

$$A_g = \bar{A}_g + A_{R_{so}} + A_{R_{sw}},$$

$$A_o = S_o \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_o \phi dB_o}{B_o dp_o},$$

$$A_w = S_w \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_w \phi dB_w}{B_w dp_o},$$

$$\bar{A}_g = S_g \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_g \phi dB_g}{B_o dp_o},$$

$$A_{R_{sw}} = B_g S_w \left( \frac{\phi}{B_w} \frac{dR_{sw}}{dp_o} + \frac{R_{sw} \phi}{B_w^2} \frac{dB_w}{dp_o} \right),$$

$$A_{R_{so}} = B_g S_o \left( \frac{\phi}{B_o} \frac{dR_{so}}{dp_o} + \frac{R_{so} \phi}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp_o} \right).$$

Коэффициент при нестационарной части  $A$  имеет в своем составе несколько типов слагаемых: с производной по давлению от пористости  $\phi$ , от объемных коэффициентов  $B_o$ ,  $B_w$ ,  $B_g$ , и от коэффициентов растворимости  $R_{so}$  и  $R_{sw}$ . Эти коэффициенты являются функциями от давления. Слагаемые коэффициента  $D$  не зависят от давления явно, либо пересчитаны с помощью давления с предыдущего временного слоя.

Разделение слагаемых по фазовому признаку позволяет использовать уравнение (3.6) для 1, 2 и 3-х фазных процессов фильтрации путем «отключения» и «подключения» соответствующих фаз. Рассмотрим на примере. Предположим, что газовая фаза отсутствует, тогда все ее компоненты равны нулю и уравнение (3.6) можно записать в виде:

$$\left( \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{\phi S_o dB_o}{B_o dp_o} - \frac{\phi S_w dB_w}{B_w dp_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} = B_o \nabla[\lambda_o \nabla p_o] + B_w \nabla[\lambda_w \nabla p_o] + B_o (q_o + \nabla[\lambda_o \gamma_o \nabla h]) +$$

$$+ B_w (q_w - \nabla[\lambda_w (\nabla P_{cow} + \gamma_w \nabla h)]),$$

$$S_o + S_w = 1;$$

что является уравнением диффузии для системы нефть-вода.

Если же предположить еще и отсутствие воды, то  $S_o = 1$ , и уравнение (\*) примет вид:

$$\left( \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{\phi dB_o}{B_o dp_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} = B_o \nabla[\lambda_o \nabla p_o] + B_o (q_o + \nabla[\lambda_o \gamma_o \nabla h]).$$

Полученное выражение является уравнением диффузии в случае однофазной системы.

Если пористость  $\phi$  и объемный коэффициент  $B_o$  не будут зависеть от давления, то мы получим уравнение Лапласа относительно давления нефти  $p_o$ :

$$\nabla[\lambda_o \nabla p_o] + q_o + \nabla[\lambda_o \gamma_o \nabla h] = 0.$$

Такое же уравнение можно получить для воды и газа:

$$\nabla[\lambda_w \nabla p_w] + q_w + \nabla[\lambda_w \gamma_w \nabla h] = 0.$$

$$\nabla[\lambda_g \nabla p_g] + q_g + \nabla[\lambda_g \gamma_g \nabla h] = 0.$$

Для решения уравнения (3.6), будем использовать неявную по давлению разностную схему. Коэффициенты уравнения определяются по параметрам с предыдущего слоя. Решение систем линейных алгебраических уравнений в пакете программ НИМФА-2 основано на использовании комплекса библиотек параллельных решателей LParSol [2–3].

### 3.1. Дискретизация уравнений.

Проинтегрируем уравнение (3.6) по контрольному объему ячейки  $P$ . В интегральной форме уравнения содержат слагаемые следующих видов:

$$\int_{\Delta V_p} A_{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial t} dV, \int_{\Delta V_p} B_{p_o} \operatorname{div}(\chi_{p_o} \operatorname{GRAD} p_o) dV \text{ и } \int_{\Delta V_p} D_{p_o} dV \quad (3.7)$$

где  $p_o$  – давление нефти, являющейся искомым функцией, а  $A_{p_o}, B_{p_o}$  и  $D_{p_o}$  – функции, зависящие от решения.

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения (3.7) разностными. При интегрировании будем использовать теорему о среднем. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани – значение ее в центре грани. Тогда слагаемые (3.7) запишутся так:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_p} A_{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial t} dV &= (A_{p_o})_p \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} \right)_p \Delta V_p, \\ \int_{\Delta V_p} B_{p_o} \operatorname{div}(\chi_{p_o} \operatorname{GRAD} \varphi) dV &= \\ &= (B_{p_o})_p \oint_{\Sigma} \{(\chi_{p_o} \operatorname{GRAD} p_o) \cdot \vec{n}\} dS = (B_{p_o})_p \sum_{f=1}^F ((\chi_{p_o} \operatorname{GRAD} p_o) \cdot \vec{n})_f \Delta S_f, \\ \int_{\Delta V_p} A_{p_o} dV &= (D_{p_o})_p \Delta V_p. \end{aligned}$$

В операторной форме каждое из разностных уравнений может быть представлено в виде:

$$(A_{p_o})_p \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} \right)_p \Delta V_p = L(p_o) + (H_{p_o})_p,$$

где

$$L(p_o) = (B_{p_o})_p \sum_{f=1}^F ((\chi_{p_o} \operatorname{GRAD} p_o) \cdot \vec{n})_f \Delta S_f.$$

При решении уравнений относительно насыщенности нефти и воды разностные операторы  $L(p_o)$  дискретизируются по нижнему временному слою  $t^n$ :

$$(A_{p_o^n})_p \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} \right)_p \Delta V_p = L(p_o^n) + (H_{p_o^n})_p.$$

Дискретизация уравнения относительно давления в нефтяной фазе осуществляется по верхнему временному слою:

$$(A_{p_o^n})_p \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} \right)_p \Delta V_p = L(p_o^{n+1}) + (H_{p_o^n})_p.$$

Тогда, вводя обозначение  $\Delta p_o = p_o^{n+1} - p_o^n$ , разностное уравнение можно записать в  $\Delta$ -форме:

$$(A_{p_o^n})_p \left( \frac{\Delta p_o}{\tau^n} \right)_p \Delta V_p - \frac{\partial L}{\partial p_o} (\Delta p_o) = L(p_o^n) + (H_{p_o^n})_p.$$

### 3.2. Аппроксимация производной по времени.

Аппроксимация производной по времени функции  $\varphi$  (немая переменная, обозначающая искомым функцию, например, давление нефти  $p_o$ , как в предыдущем пункте) в ячейке  $P$  по схеме первого порядка точности имеет вид:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_p = \frac{\varphi_p^{n+1} - \varphi_p^n}{\tau^n}$$

### 3.3. Метод отложенной коррекции.

Вычисление значения градиента скалярного поля в центре грани происходит в зависимости от типа проводимости пласта: скалярная или тензорная это величина. Для скалярной проводимости значение градиента будем вычислять с использованием метода отложенной коррекции. В данном методе производная от давления по нормали в центре грани аппроксимируется с учетом вычисленного в ячейках сетки значения градиента, который определяется



либо по формуле Гаусса, либо методом наименьших квадратов. При неявной аппроксимации значение градиента скалярного поля в ячейках определяется по значению поля с предыдущей итерации (отложенная коррекция).

Рассмотрим  $P$ -ю ячейку и  $f$ -ю грань этой ячейки, которая является общей для  $P$  и  $F$  ячеек. Точка  $f$  – центр грани. Проведем через центры  $P$  и  $F$  ячеек плоскости, перпендикулярные нормали  $\vec{n}_f$  к  $f$ -той грани. Найдем (смотри, рисунок 2) точки  $P'$  и  $F'$  пересечения этих плоскостей с нормальной линией к грани  $f$ .

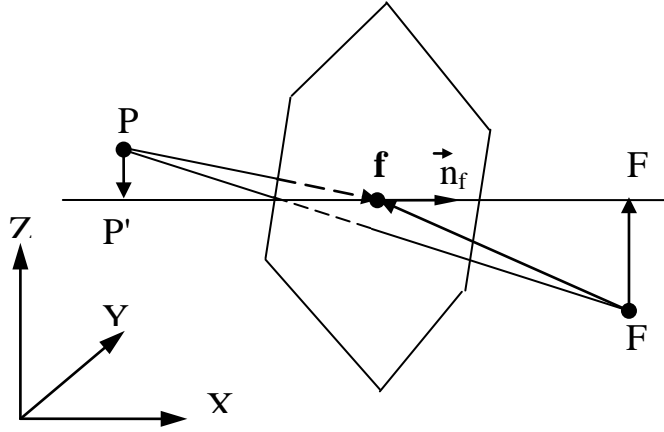


Рис. 2. Шаблон точек для аппроксимации  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f$  на внутренней грани

Вектора  $\Delta \vec{R}_{PP'}$  и  $\Delta \vec{R}_{FF'}$ , с учетом ориентации вектора нормали, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_{PP'} &= \vec{R}_{P'} - \vec{R}_P = (\vec{R}_f - \vec{R}_P) - \vec{n}_f (\vec{n}_f (\vec{R}_f - \vec{R}_P)), \\ \Delta \vec{R}_{FF'} &= \vec{R}_{F'} - \vec{R}_F = (\vec{R}_f - \vec{R}_F) - \vec{n}_f (\vec{n}_f (\vec{R}_f - \vec{R}_F)). \end{aligned}$$

Будем считать, что в точках  $P'$  и  $F'$  известны значения  $\Phi$ , тогда поток через грань определяется по формуле:

$$\left( (\lambda_\varphi \text{GRAD} \varphi) \cdot \vec{n} \right)_f \Delta S_f = \left( \lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = (\lambda_\varphi)_f \frac{\varphi_{F'} - \varphi_{P'}}{|\Delta \vec{R}_{FF'}| + |\Delta \vec{R}_{PP'}|} \Delta S_f, \quad (3.8)$$

где  $\varphi$ , как уже определялось выше – немая переменная.

Значения  $\varphi_{F'}$  и  $\varphi_{P'}$  определим с использованием  $\text{grad } \varphi$ , вычисленного в центрах ячеек:

$$\varphi_{P'} = \varphi_P + (\text{GRAD } \varphi)_P \cdot (\vec{R}_{P'} - \vec{R}_P) = \varphi_P + (\text{GRAD } \varphi)_P \Delta \vec{R}_{PP'}, \quad (3.9)$$

$$\varphi_{F'} = \varphi_F + (\text{GRAD } \varphi)_F \cdot (\vec{R}_{F'} - \vec{R}_F) = \varphi_F + (\text{GRAD } \varphi)_F \Delta \vec{R}_{FF'}. \quad (3.10)$$

При подстановке (3.9)–(3.10) в (3.8), поток будет определяться по формуле

$$\left( \lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = \frac{(\lambda_\varphi)_f}{|\Delta \vec{R}_{FF'}| + |\Delta \vec{R}_{PP'}|} (\varphi_F - \varphi_P + (\text{GRAD } \varphi)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF'} - (\text{GRAD } \varphi)_P \cdot \Delta \vec{R}_{PP'}).$$

При неявной аппроксимации потока величины  $\varphi$  через грань  $f$ , выделим неявную и явную части и запишем поток в виде:

$$\left( \lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = \chi_f^n (\varphi_F^{n+1} - \varphi_P^{n+1}) + q_f^n,$$

где

$$\chi_f^n = 2 \frac{\sigma(k_{T\varphi}) + (1-\sigma)(k_{T\varphi})_E}{(\mu_\varphi \varepsilon_\varphi)_P + (\mu_\varphi \varepsilon_\varphi)_F} \frac{k_P k_F}{(k_P |\Delta \vec{R}_{PP'}| + k_F |\Delta \vec{R}_{FF'}|)} \Delta S_f,$$

$$q_f^n = \chi_f^n [(\text{GRAD } \varphi)_F^n \Delta \vec{R}_{FF'} - (\text{GRAD } \varphi)_P^n \Delta \vec{R}_{PP'}],$$

$$\sigma_f = \begin{cases} 1, & \text{если } (p_\sigma)_P > (p_\sigma)_F, \\ 0, & \text{если } (p_\sigma)_P < (p_\sigma)_F, \end{cases}$$

Пусть  $f$ -я грань, принадлежит граничной поверхности, где задано значение функции  $\varphi$ :

$$\varphi_f = \varphi_{\partial G}(\vec{R}_f, t), \quad \vec{R}_f \in \partial G,$$

тогда поток через эту грань будет определяться по формуле:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f \Delta S_f = (\lambda_\varphi)_f \frac{\varphi_f - \varphi_P}{|\Delta \vec{R}_{Pf}|} \Delta S_f. \quad (3.11)$$

Значение  $\varphi_P$  вычисляется с использованием  $GRAD \varphi$  в центре ячейки (смотри рисунок 3) по формуле (3.9), при подстановке которой в (3.11), выражение для потока через грань приобретает вид:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f \Delta S_f = \frac{(\lambda_\varphi)_f \Delta S_f}{|\Delta \vec{R}_{Pf}|} (\varphi_{\partial G} - \varphi_P - (GRAD \varphi)_P^n \Delta \vec{R}_{Pf}),$$

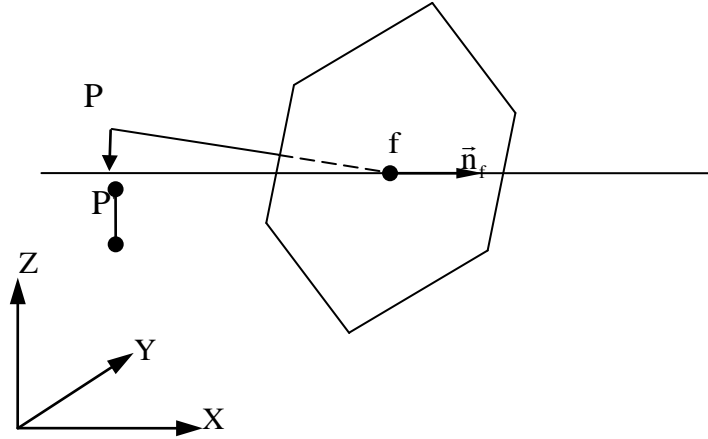


Рис. 3. Шаблон для аппроксимации  $\chi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  на внешней грани

Выражение для потока через внешнюю грань при неявной аппроксимации с учетом разделения на неявную и явную часть представим в виде:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f \Delta S_f = -(\chi_\varphi)_f^n \varphi_P^{n+1} + q_f^n,$$

где

$$\chi_f^y = \frac{(k_{T\varphi})_P}{(\mu_{\varphi B\varphi})_P} \frac{k_P}{|\Delta \vec{R}_{Pf}|} \Delta S_f,$$

$$q_f^y = \chi_f^y [\varphi_{\partial G}^{n+1} - (GRAD \varphi)_P^y \Delta \vec{R}_{Pf}].$$

Если  $f$ -я грань, принадлежит поверхности, где задан поток

$$-\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{\vec{R}_f \in \partial G} = q_\varphi(\vec{R}, t),$$

то выражение для потока через внешнюю грань запишется в виде:

$$\left(\lambda_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f \Delta S_f = -q_\varphi(\vec{R}_f, t) \Delta S_f.$$

Для расчета значения градиента  $GRAD \varphi$  в ячейках разностной сетки используются алгоритм, основанный на вычислении значения  $GRAD \varphi$  в центре  $P$ -той ячейки по формуле Гаусса:

$$(GRAD \varphi)_P = \frac{\sum_{f=1}^F \varphi_f \vec{n}_f \Delta S_f}{\Delta V_P},$$

где  $\varphi_f$  — значение в центре грани (в точке  $f$ ,  $f$ -той грани),  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к грани относительно  $P$ -й ячейки,  $\Delta S_f$  площадь грани,  $\Delta V_P$  объем ячейки, суммирование ведется по всем граням ячейки.

Значение  $\varphi$  в центре внутренней грани определяется интерполяцией по длине кривой



$$\varphi_f = \frac{\varphi_F |\Delta \vec{R}_{P_f}| + \varphi_P |\Delta \vec{R}_{F_f}|}{|\Delta \vec{R}_{P_f}| + |\Delta \vec{R}_{F_f}|}.$$

Значение функции в центре грани можно уточнить, выполнив несколько итераций, в которых значение  $\varphi$  на итерациях определяется по формуле

$$\varphi_f^{y+1} = \varphi_P (1 - \lambda_f) + \varphi_F \lambda_f + (1 - \lambda_f) (\text{GRAD } \varphi)_P^y \Delta \vec{R}_{P_f} + \lambda_f (\text{GRAD } \varphi)_F^y \Delta \vec{R}_{F_f},$$

где  $y$  – номер итерации, а параметр интерполяции  $\lambda_f$  – определяется по формуле:

$$\lambda_f = \frac{|\Delta \vec{R}_{F_f}|}{|\Delta \vec{R}_{P_f}| + |\Delta \vec{R}_{F_f}|}.$$

### 3.4. Граничные условия.

В настоящий момент в пакете программ НИМФА-2 на границе области реализовано условие непроницаемости:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

В дальнейшем возможна и реализация граничных условий первого, второго и третьего рода.

### 4. Организация пакета моделирующих программ.

Технология работы пакета программ для моделирования пласта состоит из четырех этапов:

- препроцессор – клиентская часть (ввод данных),
- препроцессор – серверная часть (генератор сетки),
- гидродинамический симулятор – серверная часть (расчет модели),
- постпроцессор – клиент-серверная часть (вывод результатов).

На этапе работы препроцессора осуществляется ввод данных о свойствах и строении пластов и жидкостей, задание скважин. На следующем этапе происходит выбор метода решения СЛАУ и, если геометрия сетки еще не сгенерирована (не была передана ссылка на файл, содержащий начальный разрез), происходит генерация сетки. Следующим шагом считывается начальный разрез, свойства породы, начальные и граничные условия. Проинициализированные поля, полученные на данном шаге, используются гидродинамическим симулятором для расчета задачи. Постпроцессор отвечает за визуализацию результатов в виде схем, графиков или таблиц.

В разрабатываемом пакете программ НИМФА-2 используются следующие основные элементы моделирования: препроцессор для ТГДС нефтяной залежи программного комплекса НИМФА-2, постпроцессор – система постобработки Scientific View и модель – black oil model, выведение уравнений которой описано выше.

### 5. Описание библиотеки параллельных решателей LParSol.

Библиотека представляет собой объектно-ориентированную, переносимую библиотеку последовательных и параллельных решателей систем линейных уравнений, возникающих при дискретизации дифференциальных уравнений на регулярных и нерегулярных сетках. Одной ячейке расчетной сетки в зависимости от числа содержащихся в ней неизвестных соответствует одно или несколько подряд идущих уравнений в системе.

Библиотека написана на языке C++. Для использования ее в программах, написанных на языках C и FORTRAN, реализован C/FORTRAN интерфейс.

Чтобы представить процесс решения распределенной линейной системы в библиотеке, необходимо сказать о том, что в настройках решателя – объекта, который решает линейную систему, задается значение предобусловливателя, предназначенного для обеспечения и ускорения сходимости итерационного процесса решения линейной системы.

### 6. Концепция распараллеливания пакета программ НИМФА-2.

Неструктурированная сетка представляется в виде распределенных параобластей с наложением на один слой (рисунок 4). Совокупность параобластей образует счетную область

всей задачи. Эти факторы послужили предпосылками для создания принципов распараллеливания.

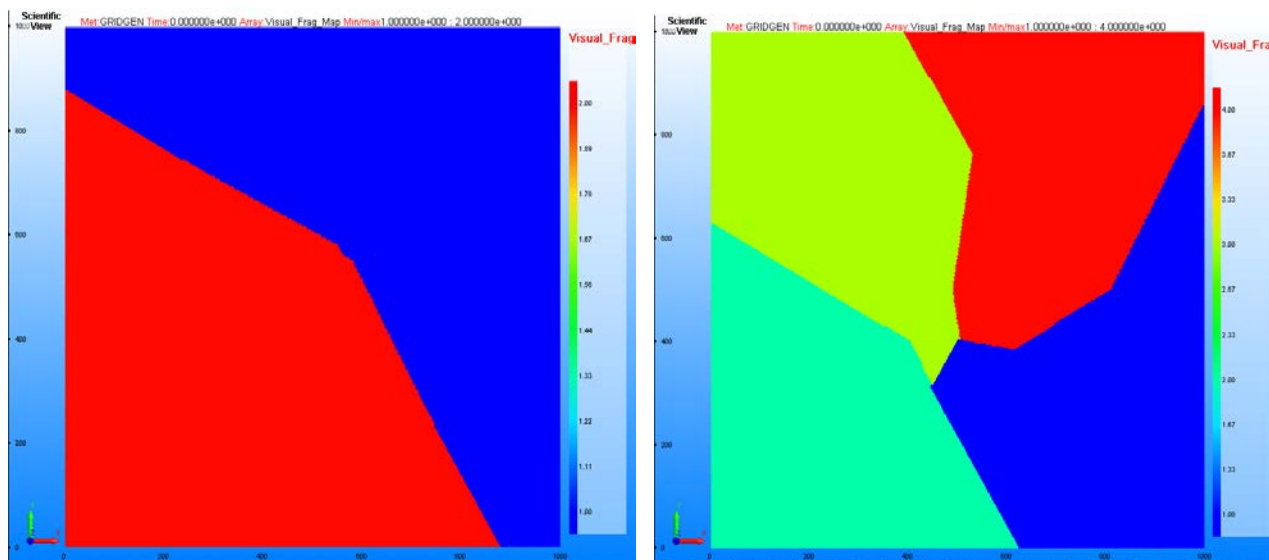


Рис. 4. Пример декомпозиции неструктурированной сетки на две (слева) и четыре (справа) параобласти

Распараллеливание комплекса производится на языке программирования С++ с использованием MPI и базируется на следующих принципах:

- распараллеливание ведется на распределенной памяти,
- используется интерфейс передачи сообщений MPI [7],
- все процессоры равноправны (нет управляющего процессора),
- все множество ячеек параобласти разделяется на три непересекающихся подмножества: ячейки, находящиеся в ядре параобласти (*kernel*), ячейки, расположенные на оболочке параобласти (*shell*) и несчетные ячейки – расположены на границе параобластей (*uncountable*),
- совмещение вычислительной работы процессора с его обменами производится на всех этапах, где это возможно.

На рисунке 5 показано, как множество ячеек параобласти разделяется на подмножества. Каждое подмножество ячеек определено своим цветом: серый – *kernel*, красный – *shell*, желтый – *uncountable*.

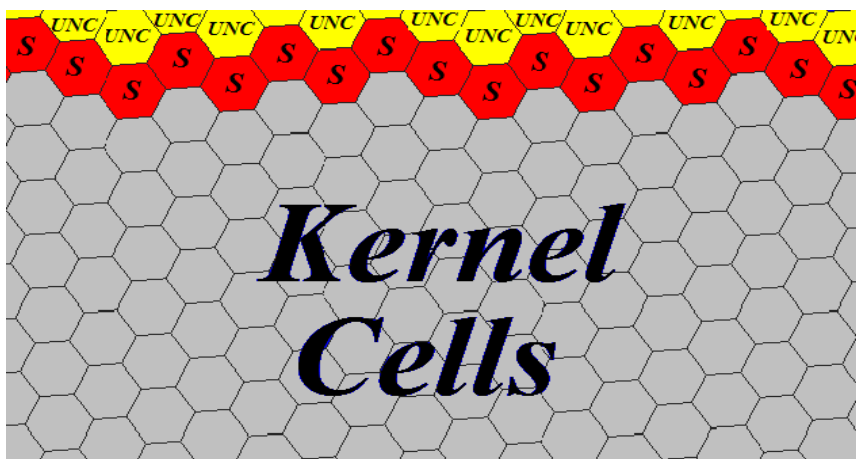


Рис. 5. Пример разбиения множества ячеек в параобласти

### 7. Описание параллельного модуля расчета диффузии.

Разработанный модуль представляет шесть основных блоков программного кода. Блок схема модуля представлена на рисунке 6.

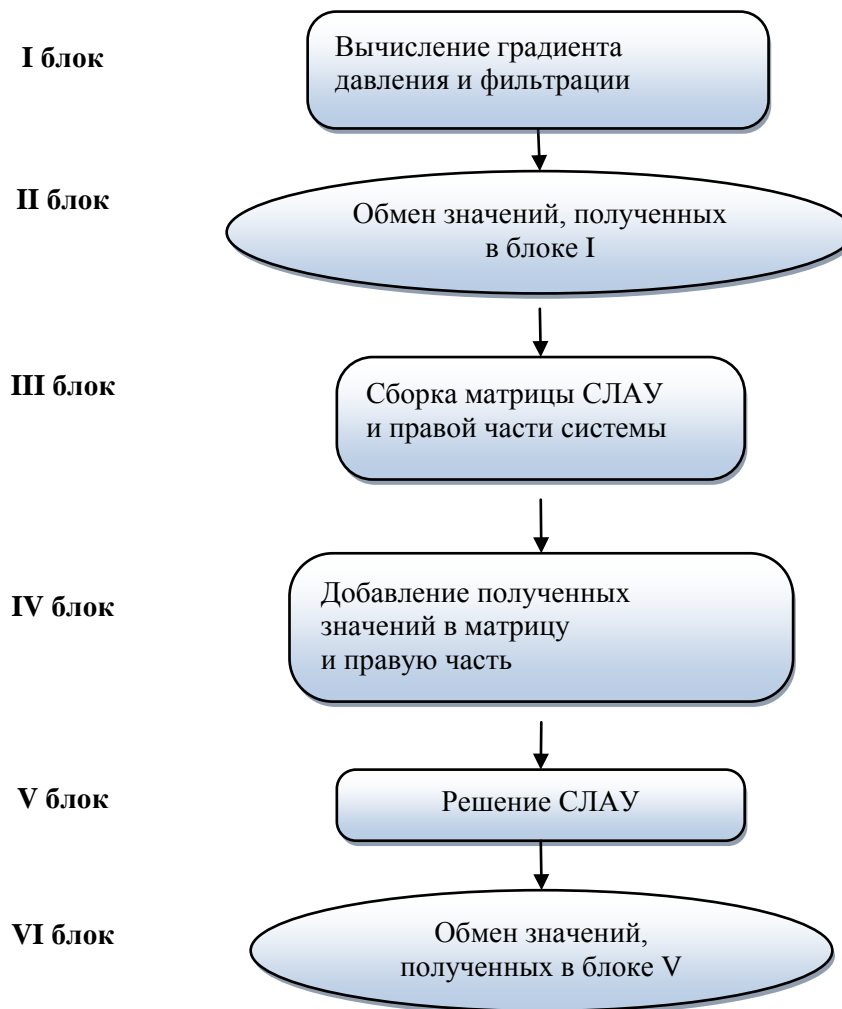


Рис. 6. Блок-схема расчета диффузии

Далее будет описана схема работы основных блоков в параллельном модуле.

### 7.1. Сборка матрицы СЛАУ.

При дискретизации дифференциальных уравнений мы получили систему линейных уравнений, которую можно записать так:

$$Ax = b,$$

где  $A$  – матрица,  $b$  – вектор правой части,  $x$  – вектор неизвестных.

Программную реализацию для получения матрицы можно осуществить двумя способами:

- Запустив цикл по ячейкам, в который будет вложен цикл по граням, ограничивающий эту ячейку;
- Или запустив цикл по граням для потоковых слагаемых и цикл по ячейкам для «объемных».

Второй способ является не самым оптимальным, так как вычисление значения потоковых величин на одной и той же грани происходит два раза. Этого можно избежать, но это требует введения специального признака, что создает дополнительные трудности. В первом способе сборки значение потоковых величин определяется один раз и отправляется на соответствующие позиции матрицы. Это можно показать на следующем примере. Пусть  $P$  и  $F$  две соседних ячейки с общей гранью  $f$  (Рисунок 9). Через грань  $f$  проходит вектор нормали, а точки  $P'$  и  $F'$  – это проекции точек  $P$  и  $F$  на эту нормаль. Вектор  $P'F'$  – это вектор, соединяющий эти точки и совпадающий с нормалью. Нормаль в случае интегрирования по объему ячейки  $P$  направлена от  $P'$  к  $F'$ , при интегрировании по объему ячейки  $F$  направлена от  $P'$  к  $F'$  (рисунок 7).

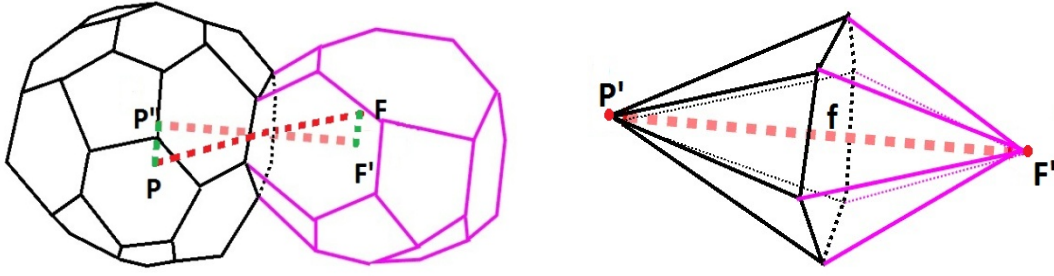


Рис. 7. Конечные объемы (слева) грань, разделяющая соседние объемы (справа)

Распишем поток через грань  $f$  для каждой из ячеек.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta V_P} B\nabla[\lambda\nabla p] dV == (B)_P \iint_{S_P} \lambda \frac{\partial p}{\partial n} dS \approx \approx (B)_P \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} (p_F - p_P + (\nabla p_F \overline{R_{FF'}}) - (\nabla p_P \overline{R_{PP'}})) + \\ + (B)_P \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^K \frac{\lambda_j \Delta S_j}{|R_j|} (p_{F(j)} - p_P + (\nabla p_{F(j)} \overline{R_{FF'(j)}}) - (\nabla p_P \overline{R_{PP'(j)}})) \quad (7.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta V_F} B\nabla[\lambda\nabla p] dV == (B)_F \iint_{S_F} \lambda \frac{\partial p}{\partial n} dS \approx \approx (B)_F \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} (p_P - p_F + (\nabla p_P \overline{R_{PP'}}) - (\nabla p_F \overline{R_{FF'}})) + \\ + (B)_F \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^K \frac{\lambda_j \Delta S_j}{|R_j|} (p_{P(j)} - p_F + (\nabla p_{P(j)} \overline{R_{PP'(j)}}) - (\nabla p_F \overline{R_{FF'(j)}})) \quad (7.2) \end{aligned}$$

где  $p_{F(j)}$ ,  $\lambda_j$ ,  $\Delta S_j$  и  $\overline{R_{FF'(j)}}$  – параметры величин ячеек соседствующих через  $j$  – ю грань с ячейкой  $P$ ,  $p_{P(j)}$ ,  $\lambda_j$ ,  $\Delta S_j$  и  $\overline{R_{PP'(j)}}$  с ячейкой  $F$  соответственно,  $\lambda_f$  – вычисленное на грани значение тензора проводимости флюидов, в общем виде вычисляется по формуле (1.16).

Осреднение на грань величин в тензоре проводимости описано в разделе, посвященном методу отложенной коррекции.

Из (7.1) и (7.2) видно, что при аппроксимации потоковых интегралов для двух ячеек через одну и ту же грань получаются одинаковые значения. Используя при сборке матрицы отдельный цикл по граням, мы с одной грани можем получить значения для соответствующих величин матрицы  $A$  сразу для четырех позиций:

$$\begin{aligned} M_{PP} = - (B)_P \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|}, M_{PP} = (B)_P \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} \\ M_{FF} = - (B)_F \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|}, M_{FF} = (B)_F \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} \end{aligned}$$

Для определения величины градиентов в объеме используется давление с предыдущего временного слоя. В результате это слагаемое можно отправить в соответствующую позицию столбца правой части.

$$\begin{aligned} PightPart_P = (B)_P \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} ((\nabla p_F \overline{R_{FF'}}) - (\nabla p_P \overline{R_{PP'}})), \\ PightPart_F = (B)_F \frac{\lambda_f \Delta S_f}{|F'P'|} ((\nabla p_P \overline{R_{PP'}}) - (\nabla p_F \overline{R_{FF'}})). \end{aligned}$$

Цикл по ячейкам удобен для расчета коэффициентов при нестационарном члене, а также величин, являющихся объемными.

$$\iiint_{\Delta V_P} A \frac{\partial p}{\partial t} dV \approx \frac{(A)_P \Delta V_P}{\tau} (p_P^{n+1} - p_P^n).$$

Из выражения (7.1) коэффициент при давлении с текущего временного слоя  $p_P^{n+1}$  отправляется на диагональный элемент  $M(P,P)$ , а коэффициент с предыдущего временного слоя в правую часть:

$$M_{PP} = \frac{(A)_P \Delta V_P}{\tau},$$

$$PightPart_P = \frac{(A)_P \Delta V_P}{\tau}.$$

Реализация данного алгоритма описана в приведенном ниже куске псевдокода:

Рассмотрим цикл по всем граням, переменная цикла –  $iFace$  (индекс грани); внутренняя грань разделяет две ячейки  $iP$  и  $iF$  (граничную грань имеет только одна ячейка  $iF$ ):

Цикл по граням  $iFace = 1, iFace \leq NFace$

$iP = \text{первый\_сосед}(iFace)$

$iF = \text{второй\_сосед}(iFace)$

$$Coef\_P = Coef\_P + (B_l)_P \frac{(\lambda_o)_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$Coef\_F = Coef\_F + (B_l)_F \frac{(\lambda_o)_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$RP\_P = RP\_P + (B_l)_P (\lambda_o \gamma_o \nabla h)_f;$$

$$RP\_F = RP\_F - (B_l)_F (\lambda_o \gamma_o \nabla h)_f.$$

Индекс  $l$  меняется в зависимости от наличия фазы (нефть, вода или газ).

Если газ растворим в воде:

$$Coef\_P = Coef\_P + (B_g)_P \frac{(\lambda_w R_{sw})_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$Coef\_F = Coef\_F + (B_g)_F \frac{(\lambda_w R_{sw})_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$RP\_P = RP\_P + (B_g R_{sw})_P (\lambda_w \gamma_w \nabla h)_f;$$

$$RP\_F = RP\_F - (B_g R_{sw})_F (\lambda_w \gamma_w \nabla h)_f.$$

Если газ растворим в нефти:

$$Coef\_P = Coef\_P + (B_g)_P \frac{(\lambda_w R_{so})_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$Coef\_F = Coef\_F + (B_g)_F \frac{(\lambda_w R_{so})_f \Delta S_f}{F'P'};$$

$$RP\_P = RP\_P + (B_g R_{so})_P (\lambda_o \gamma_o \nabla h)_f;$$

$$RP\_F = RP\_F - (B_g R_{so})_F (\lambda_o \gamma_o \nabla h)_f.$$

Рассылка в матрицу и правую часть:

$$M_{PP} = M_{PP} - Coef\_P;$$

$$M_{PF} = M_{PF} + Coef\_P;$$

$$M_{FF} = M_{FF} - Coef\_F;$$

$$M_{FP} = M_{FP} + Coef\_F;$$

$$PightPart_P = PightPart_P + RP\_P;$$

$$PightPart_F = PightPart_F + RP\_F.$$

Конец цикла по граням.

Цикл по ячейкам  $iCell = 1, iCell \leq NCell$  (одновременно с рассылкой)

$$M_{iCelliCell} = M_{iCelliCell} - (A)_{iCell} \frac{V_{iCell}}{\tau};$$

$$PightPart_F = PightPart_F + (A)_{iCell} \frac{V_{iCell}}{\tau}.$$

Конец цикла по ячейкам.

Для визуализации полученной матрицы и проверки ее характеристик (положительной определенности, симметричности и т. п.) была использована программа просмотра – Linear Systems Viewer. Матрица, собранная в комплексе НИМФА-2, показана на рисунке 8.

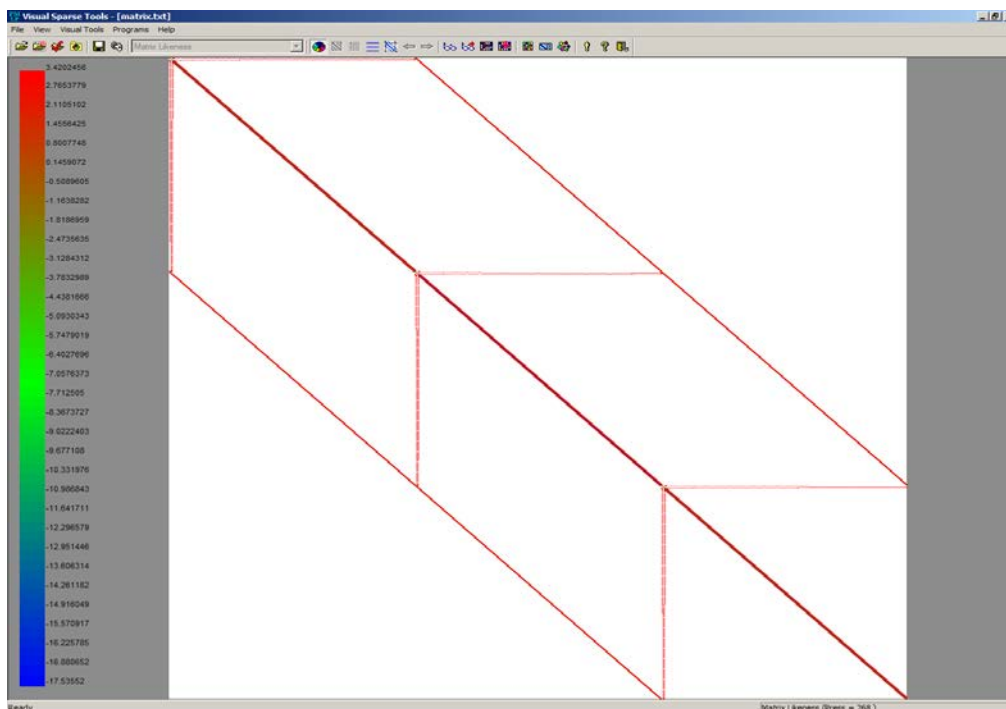


Рис. 8. Визуализация матрицы

## 7.2. Технология межпроцессорного обмена данными.

Описанные функции передачи и приема сообщений в разделе, посвященном методам параллельного программирования на основе MPI, обеспечивают выполнение передачи и приема сообщений в стандартном режиме. В разработанном блоке обмена данных были использованы функции неблокированного выполнения передачи данных между смежными процессами. Наименование неблокирующих аналогов образуется из названий соответствующих функций путем добавления префикса *I* (*Immediate*). Список аргументов таких функций содержит весь набор аргументов исходных и один дополнительный *MPI\_Request request* (в функции *MPI\_Irecv* отсутствует также параметр *status*).

Вызов неблокирующей функции приводит к инициации запрошенной операции передачи, после чего выполнение функции завершается и процесс может продолжить свои действия. Перед своим завершением эта функция определяет переменную *request*, которая далее может использоваться для проверки завершения инициированной операции обмена.

Далее возникает такая ситуация, что продолжение вычислений невозможно без получения передаваемых данных, поэтому использована блокирующая операция ожидания завершения операции:

```
int MPI_Wait (MPI_Request *request, MPI_Status *status).
```

На рисунке 9 показана блок-схема, подробно описывающая технологию обменов в блоке II и VI (рисунок 6).





Рис. 9. Блок-схема обмена

Технология обмена реализуется следующим образом. Как было показано на рисунке 7, всего в модуле два блока с обменом данных, поэтому вначале выбирается идентификатор исполняемого события. После этого формируется обменный буфер, в который заносятся величины из оболочечных ячеек и каждый процессор выставляет асинхронный прием сообщений от своих смежных процессоров. Затем производится асинхронная отправка сообщений на смежные процессоры. В конце во всех ячейках параобласти выставляется ожидание на завершение асинхронных обменов, после которого производится разбор принятых данных от смежных процессоров и обновление величин в несчетном множестве.

### 8.1. Задача о распределении давления.

Данная задача предназначена для демонстрации работоспособности блока расчета диффузии в параллельном режиме, внедренного в ТГДС НИМФА-2.

Постановка задачи выглядит следующим образом: однородный изотропный резервуар (1000 на 1000 метров, мощность 10 метров), сложен песчаником (проницаемость 277 милли Дарси, пористость 0,2) в форме параллелепипеда, насыщен водой (плотность 999 кг/м<sup>3</sup>, вязкость 0,36 санти Пуаза), литологически ограничен по кровли, подошве и тектонически экранирован по граням с 4-х сторон непроницаемыми породами (сжимаемость при давлении 100 атм. составляет 10<sup>-14</sup>). В резервуаре пробурены две вертикальных скважины диаметром 0,2 метра, добывающая (дебит 100 м<sup>3</sup>) и нагнетающая (100 м<sup>3</sup>). Требуется рассчитать изменение поля давлений (начальное давление 100 атм).

На рисунке 10 приведены фрагменты математических областей. Данные по числу счетных ячеек в сетках, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Дискретизация расчетной области

Общее число ячеек	Число ячеек по X	Число ячеек по Y	Число ячеек по Z
303426	318	318	3
254007	290	290	3
604872	449	449	3

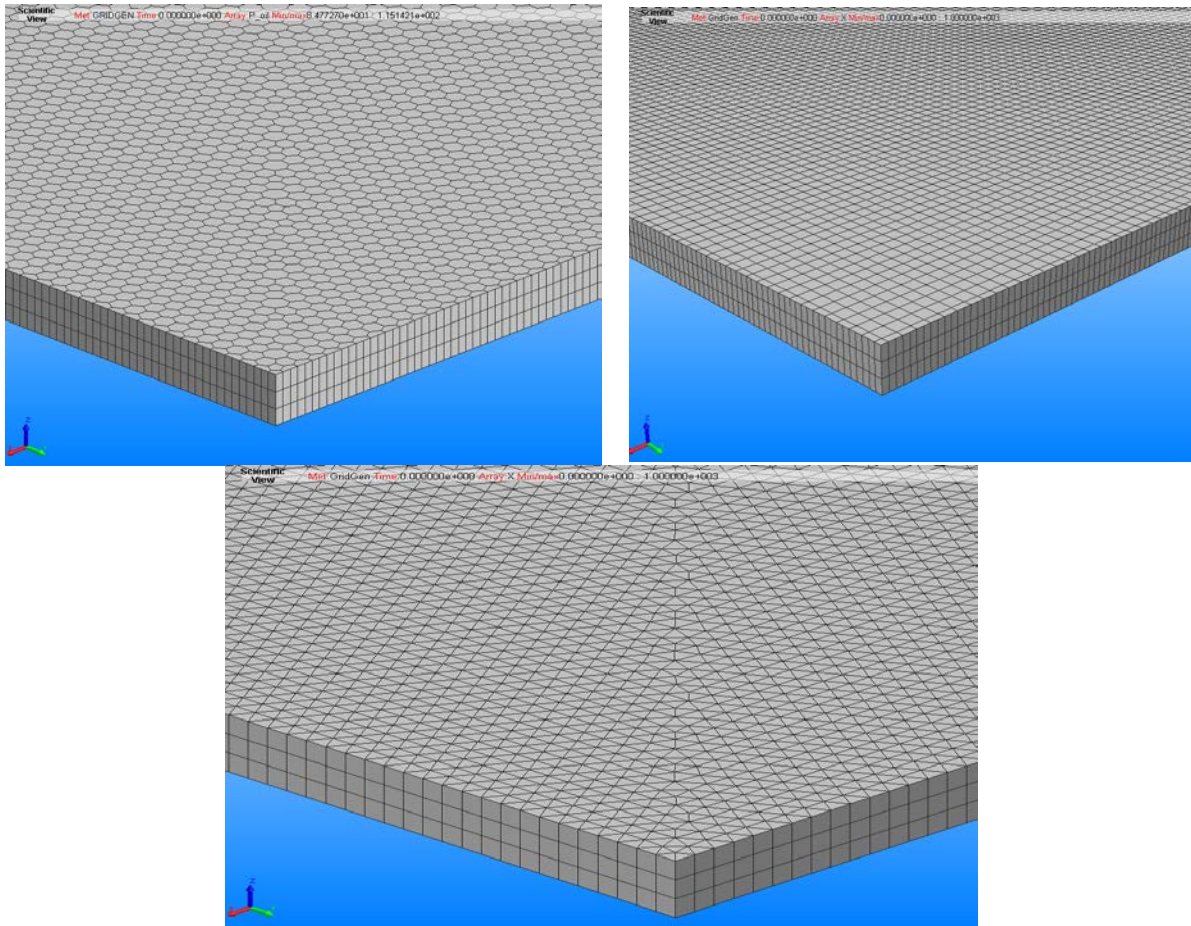


Рис. 10. Неструктурированная (слева), регулярная (справа) триангулированная (снизу)

Описание процесса сводится к решению дифференциального уравнения (8.1) для давления воды  $p_w$ .

$$\frac{d\Phi}{dp_w} \frac{\partial p_w}{\partial t} = B_w \nabla[\lambda_w \nabla p_w] + B_w (q_w + \nabla[\lambda_w \gamma_w \nabla h]). \quad (8.1)$$

На внешнюю границу расчетной области  $\Gamma$  накладывается условие непроницаемости

$$\left. \frac{\partial p_w}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0.$$

### 8.2. Анализ полученных результатов.

На рисунке 11 приведен основной результат поставленной задачи, рассчитанной в комплексе программ НИМФА-2.

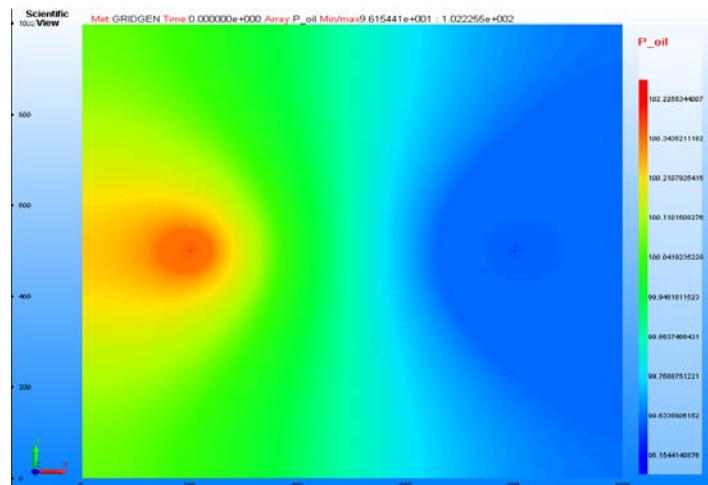


Рис. 11. Поле давлений в пласте



На рисунке 12 приведено сравнение решения ТГДС НИМФА-2 и коммерческого продукта. Стоит отметить, что в расчете комплекса НИМФА-2 лучше прослеживаются линии фронта давления.

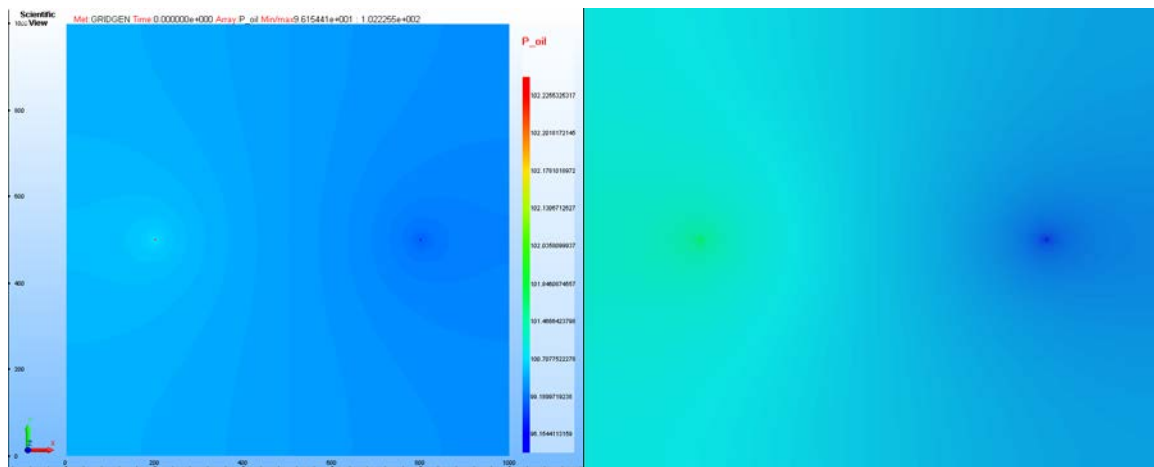


Рис. 12. Сравнение расчетов (НИМФА-2 слева и коммерческий продукт справа)

Таблица 2. Параметры давлений

Расчет	Начальное давление	Min давление	Max давление
НИМФА-2	100	97,63	102,23
Коммерческий продукт	100	98,14	102,38

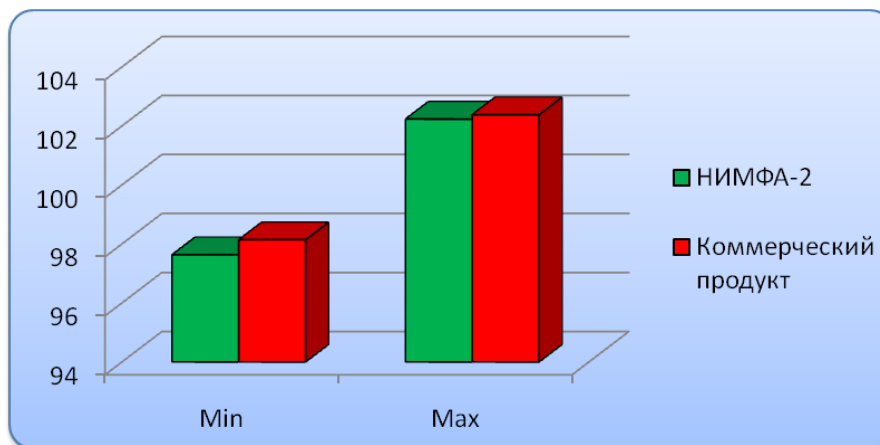


Рис. 13. Сравнение минимального и максимального давления

Разница в максимальных и минимальных давлениях практически отсутствует и составляет порядка 0,5%. Это можно объяснить разными способами пересчета давления на скважинах.

На рисунке 14 слева зеленым обозначены ячейки, в которых была расположена нагнетающая скважина, а красным – ячейки с добывающей скважиной. Координаты первой скважины:  $x = 200$  м,  $y = 500$  м,  $z = 990$ , координаты второй:  $x = 800$  м,  $y = 500$  м,  $z = 990$ , справа показан результат процесса конусообразования при воздействии давления на пласт в результате работы скважин.

В стволе скважины по всей ее высоте задано постоянное давление, в то время как в расчетной области имеет место гидростатическое распределение давления. Этим можно объяснить его неоднородность относительно оси  $Z$ .

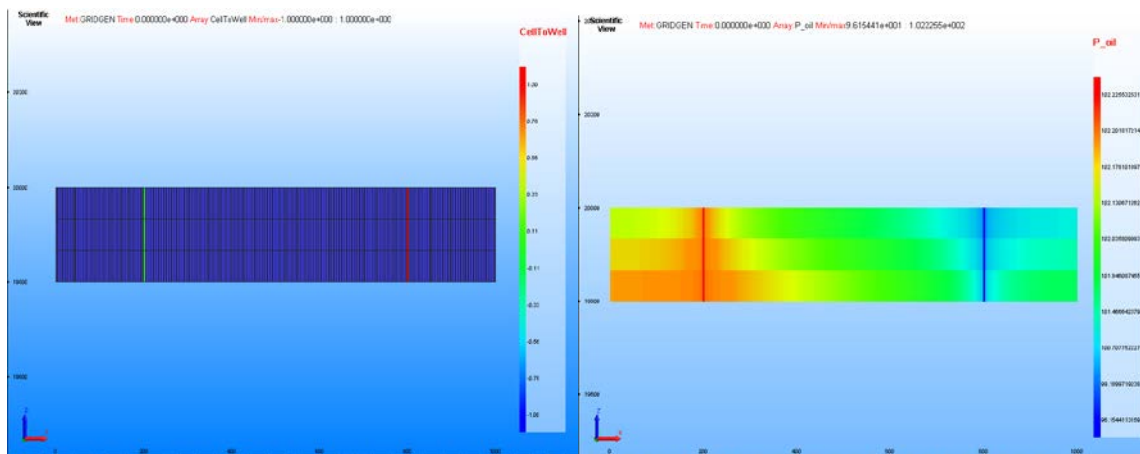


Рис. 14. Сечение области со скважинами

Для подтверждения независимости решения от вида сетки, задача была решена на сетках различной структуры и различного числа узлов. Результаты по этой работе представлены на следующих рисунках.

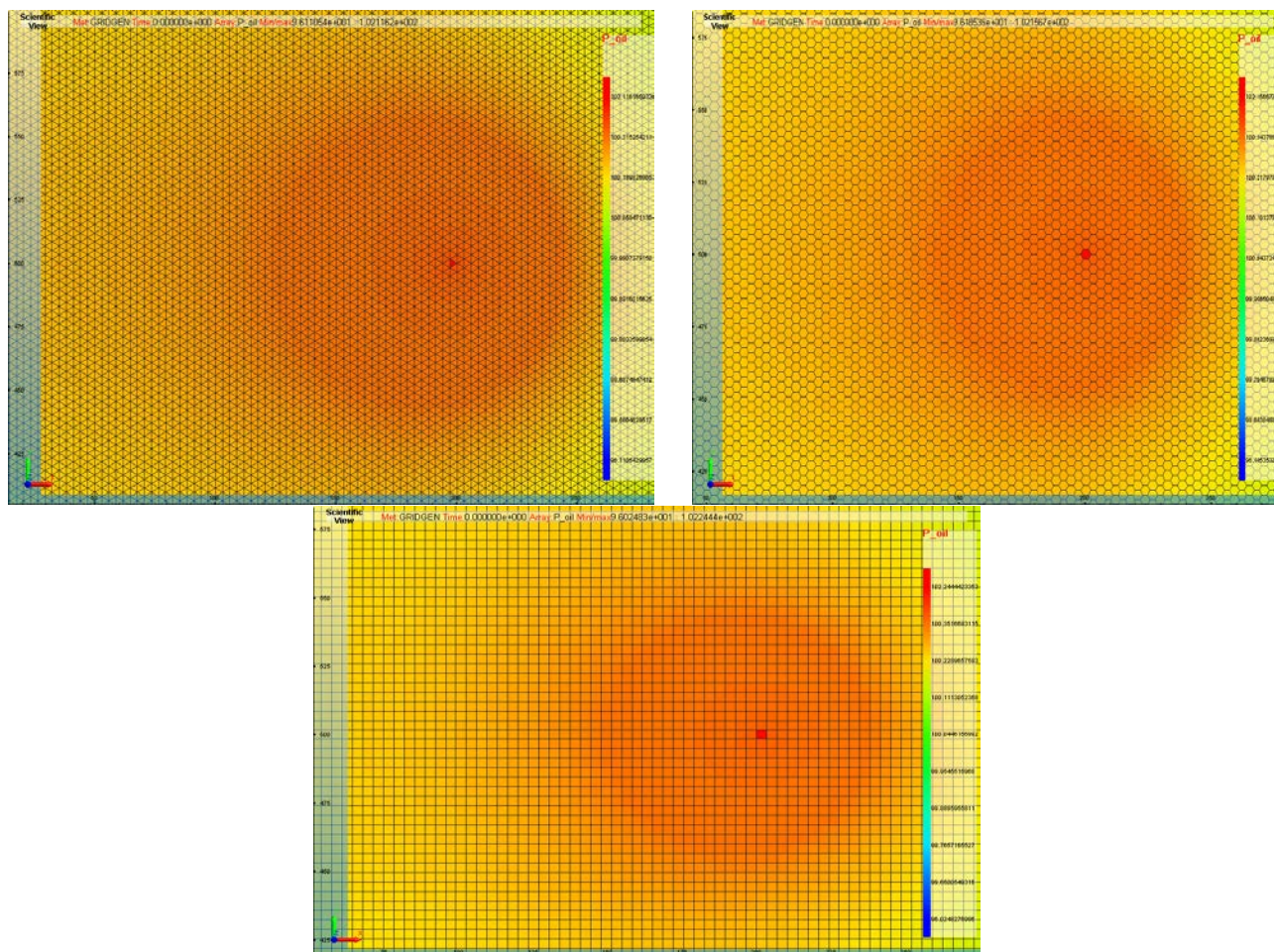


Рис. 15. Решение (вид сверху на нагнетающую скважину) на сетке с 600 тыс. ячейками (слева – треугольные призмы), с 300 тыс. (справа – многоугольные призмы) и с 250 тыс. (снизу – прямоугольные призмы)

На заключительном этапе комплекс программ НИМФА-2 был протестирован на сетке с большим числом ячеек. Для этого была сгенерирована расчетная область с количеством узлов равным 1156059. Чтобы проводить расчеты на подобных сетках, необходимы большие вычислительные возможности ЭВМ. Поэтому тест проводился на Супер-ЭВМ, которая находится в РФЯЦ ВНИИЭФ.

Таблица 3. Результаты тестов на Супер-ЭВМ

Количество процессоров	Общее время счета (сек.)	Ускорение	Эффективность (%)
1	1719,48	1	100
2	895,57	1,5	95,9
4	448,802	3,8	95,8
12	218,796	7,9	65,5
24	130,127	13,2	55,1
36	80,407	21,4	59,4
96	44,25	38,9	40,5

Согласно данным таблицы 3, на рисунке 16 показано полученное ускорение времени счета и эффективность распараллеливания.

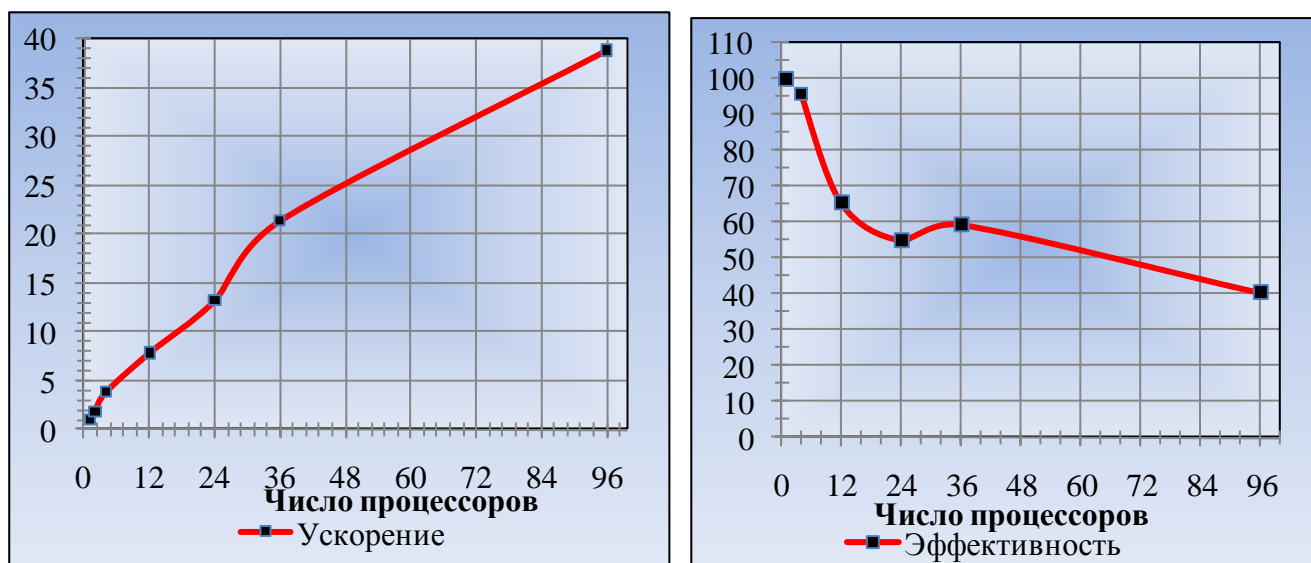


Рис. 16. Ускорение счета и эффективность распараллеливания на Супер-ЭВМ

Для проверки работоспособности реализованного модуля на сетке сверх большого объема (миллион и более), параллельный блок был протестирован на сетке до 26 миллионов ячеек при использовании до 300 процессоров. Общее время счета 360 шагов на самой крупной сетке составило около 11 минут.

Таблица 4. Тест на Супер-ЭВМ

Число ячеек	Число процессоров	Общее время счета (сек.)
1 156 059	96	44,25
12,9 млн.	96	585,358
25 999 230	288	668,1

Таким образом, автором работы была построена трехфазная модель фильтрации Black Oil, описан численный метод решения линейной системы уравнений IMPES, реализован блок расчета процесса диффузии в параллельном режиме на языке программирования C++ с использованием MPI (message passing interface – интерфейс передачи данных) [7].

Практическая значимость научно-исследовательской работы выражается в том, что реализованный блок был внедрен в основной код комплекса НИМФА-2. Работоспособность программы продемонстрирована на примере модельной задачи по расчету поля давления в пласте, создаваемого в результате работы нагнетающей и добывающей скважин. Расчет производился на Супер-ЭВМ. Эффективность распараллеливания составила не менее 40 %, на сетке 1,2 млн точек с использованием 96 процессоров получено ускорение почти в 39 раз.

Заключительным этапом было реализовано тестирование модуля на сетке объемом 1–2 млрд ячеек с использованием более 10 тыс. ядер Супер-ЭВМ.

### Литература

1. Азис Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: “НЕ-ДРА”, 1982. 407с.
2. Артемьев А.Ю., Бартенев Ю.Г., Басалов В.Г. Библиотека решателей разреженных систем. Математическое моделирование физических процессов. Саров: ВНИИЭФ, 2004.
3. Артемьев А.Ю., Бартенев Ю.Г., Басалов В.Г., Варгин А.М. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры. Математическое моделирование физических процессов. Выпуск 2. Саров: ВНИИЭФ, 2002.
4. Каневская Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
5. Кац Р.М. Андриасов А.Р. Математическое моделирование процессов разработки подгазовых и водонефтяных зон // Сборник трудов ВНИИ. 1986, № 94, с. 13–20.
6. Кац Р.М. Андриасов А.Р. Численное моделирование многофазной фильтрации с применением безитерационной разностной схемы // Сборник трудов ВНИИ. 1984, № 88, с. 92–29.
7. Корнев В.Д. Параллельное программирование в MPI. 2-е изд., испр. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2002. 215 с.
8. Zhangxin C., Guanren H., Yanle M. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Medias // Southern Methodist University. 2006. 569 с.
9. William D., Barry S. The design of data-structure-neutral libraries for the iterative solution of sparse linear systems // Argonne National Laboratory. Technical Report MCS-P3560393. August, 1993.
10. <http://www.slb.ru>.
11. <http://www.timezyx.ru>.

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСА ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА И ПОЗИЦИЙ ЕДИНИЦ В ДВОИЧНОМ КОДЕ

А.А. Смагин

Вес десятичного числа  $M$  традиционно подсчитывается разложением в виде  $M = x_n 2^n + x_{n-1} 2^{n-1} + \dots + x_0 2^0$ , где  $x = \{0,1\}$ ,  $(n+1)$  – длина двоичного числа, с последующим подсчетом единиц, стоящих перед двоичными весами или последовательным делением десятичного числа на двойку, выделением единиц на каждом шаге деления в остатках и их подсчете.

Разложим десятичное число  $M$  в ряд единиц как

$$M = \sum_{j=1}^n x_j^1, \quad (1)$$

где  $x^1$  – единица,  $n$  – число единиц в  $M$ .

Пусть каждая единица  $x_j^1$  будет представлена следующим образом

$$x_j^1 = 2^i + D, \text{ где } i=0, D=0.$$

Тогда (1) примет вид

$$M = \underbrace{(2^i + D) + (2^i + D) + \dots + (2^i + D)}_n = \sum_1^n (2^i + D) \quad (2)$$

Разложение (2) может быть более коротким, если вместо единиц вида  $2^i (i=0)$  записать другие меньшие, чем  $M$  целые десятичные числа

$$M = (2^i + D'_i) + (2^j + D'_j) + (2^k + D'_k) + \dots + (2^0 + D'_0), \quad (3)$$

причем  $i > j > k \dots$ ,  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3, \dots$ ,  $D = 1, 2, 3, \dots$

Примеры:

1)  $M=10=(2^3+2)$

2)  $M=15=(2^3+2)+(2^2+1)$ .

Возникает вопрос: как определить сумму  $(2^i + D'_i)$  и какое число их потребуется? Возьмем  $i$  таким, чтобы число  $2^i$  было бы наиболее близким к  $M$ . Например:  $M = 25$ . Тогда, положив  $i=4$ , получим разложение

$$25 = 2^4 + D \text{ или } 25 = 16 + D.$$

Откуда  $D=9$ . Для того, чтобы сумма (3) состояла из меньшего числа слагаемых требуется, чтобы разность  $(M-2^i)$  была бы минимальной, а это означает, что  $i = \lceil \log_2 M \rceil$ , где  $\lceil \dots \rceil$  – наименьшее целое, но не большее  $x$ ,  $\log$  – по основанию 2. Тогда любое десятичное число  $M$  будет разложено следующим образом

$$M = 2^{\lceil \log_2 M \rceil} + D, \quad (4)$$

где  $D$  – десятичный остаток. Если  $D \neq 0$ , то можно прибегнуть к разложению самого числа  $D$  по формуле (4)

$$D = 2^{\lceil \log_2 D \rceil} + D_1$$

и далее аналогично при  $D_1 \neq 0$  по формуле (4) и т.д. Этот процесс носит однотипный характер и завершается, когда  $D_m = 0$  ( $m$  – последний шаг разложения).

Так как процедура разложения носит последовательный и повторяющийся характер и в качестве разлагаемого числа используется результат на предыдущем шаге, то процесс представляет собой рекурсию и может быть записан как

$$\begin{cases} M = 2^{\lceil \log_2 M \rceil} + D_1, \\ D_1 = 2^{\lceil \log_2 D_1 \rceil} + D_2, \\ D_2 = 2^{\lceil \log_2 D_2 \rceil} + D_3, \\ \dots \\ D_m = 2^{\lceil \log_2 D_m \rceil} + D_{m+1} \end{cases} \quad (5)$$

Выделим остатки  $D$  из системы (5)



$$\begin{cases} D_1 = M - 2^{\lceil \log_2 M \rceil}, \\ D_{i+1} = D_i - 2^{\lceil \log_2 D_i \rceil}, \\ D_m = D_{m+1} - 2^{\lceil \log_2 D_{m-1} \rceil} \end{cases} \quad (6)$$

Общая формула рекурсивного разложения

$$M = a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-m}),$$

где  $a_{n-1} = a_{n-i-1} - 2^{\lceil \log_2 a_{n-1-i} \rceil}$ .

Число рекурсий  $m$  в точности совпадает с весом числа  $M$ :  $m = w(M)$ , где  $w$ -вес числа, при этом весовые значения  $w_i$  на каждом шаге рекурсии определяются как

$$w'_i = \begin{cases} 1 & \text{при } a_i \geq 0 \\ 0 & \text{при } a_i < 0 \end{cases}$$

а вес числа заданного веса вычисляется

$$w = \sum_{m=1}^i w'_m,$$

где  $m=1, 2, 3, \dots$

Пример.  $M = 41$ :

$$D_1 = 41 - 2^{\lceil \log_2 41 \rceil} = 41 - 32 = 9 \rightarrow w_1 = 1$$

$$D_2 = 9 - 2^{\lceil \log_2 9 \rceil} = 9 - 8 = 1 \rightarrow w_2 = w_1 + 1 = 2$$

$$D_3 = 1 - 2^{\lceil \log_2 1 \rceil} = 0 \rightarrow w_3 = w_2 + 1 = 3.$$

Ответ:  $w(41) = 3$ .

Для чисел  $N_i$ , не кратных 2 и лежащих в интервале  $[2^{i-1}, 2^i]$ , формируемые в (6) вычитаемые вида  $2^{\lceil \log_2 N_i \rceil}$  имеют одно и тоже значение, поэтому разности получаемые на каждом шаге рекурсии уникальны.

Примеры:

$$1) N_i = 17, \log_2 17 = 4.087 \dots, 2^{\lceil \log_2 17 \rceil} = 2^4,$$

$$2) N_i = 25, \log_2 25 = 4.643 \dots, 2^{\lceil \log_2 25 \rceil} = 2^4,$$

$$3) N_i = 31, \log_2 31 = 4.954 \dots, 2^{\lceil \log_2 31 \rceil} = 2^4.$$

Отсюда разложение целого десятичного числа по формуле (6) дает единственную последовательность чисел, получаемых на каждом шаге рекурсии. Так для рассмотренного выше примера, для  $M=41$  такая последовательность имеет вид

$$41 \rightarrow 9 \rightarrow 1,$$

а для  $M=103$ ,

$$103 \rightarrow 39 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Вес каждого следующего числа в последовательностях уменьшается на единицу:  $103 (w=5) \rightarrow 39 (w=4) \rightarrow 7 (w=3) \rightarrow 3 (w=2) \rightarrow 1 (w=1)$ .

Разложение (6) обладает и другим важным свойством - оно позволяет определить местоположение единиц в двоичном коде десятичного числа. Если рассмотреть в формуле (6) вычитаемое  $2^{\lceil \log_2 x \rceil}$ , то можно легко заметить, что оно всегда представляет последовательность из единицы и ряда нулей вида  $1_n 0_{n-1} \dots 0_1 0_0$ , причем единица в ней находится на позиции равной  $\lceil \log x \rceil$ .

Тогда для получения местоположения единицы в последовательности необходимо на каждом шаге формирования веса числа учитывать вычисляемое значение  $\lceil \log x \rceil$ .

Пример.  $M=15$ :

$$1\text{-й шаг: выделяем из } 2^{\lceil \log_2 15 \rceil} \rightarrow \lceil \log 15 \rceil = 3,$$

$$2\text{-й шаг: выделяем из } 2^{\lceil \log 7 \rceil} \rightarrow \lceil \log 7 \rceil = 2,$$

$$3\text{-й шаг: выделяем из } 2^{\lceil \log 3 \rceil} \rightarrow \lceil \log 3 \rceil = 1$$

4-й шаг: выделяем из  $2^{\lceil \log 1 \rceil} \rightarrow \lceil \log 1 \rceil = 0$ .

Полученные значения 3,2,1,0 задают позиции единиц в числе  $M=15 \rightarrow 1_3 1_2 1_1 1_0 \dots$

По результатам разложения достаточно легко получить двоичный эквивалент десятичного числа. Для этого необходимо последовательность  $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ , где  $x = \{0,1\}$  заполнить единицами в тех позициях, которые были вычислены на каждом шаге разложения по (6), остальные позиции обнуляются, при этом  $n$  определяется как  $(\log_e M + 1)$ .

Обратный перевод происходит также по полученным единицам возведением двойки в степень номеров вычисленных позиций, что в итоге сокращает время обратного преобразования.

Быстродействие получения веса десятичного числа по формуле (6) меньше, чем для метода деления пополам примерно в 1,2-1,5 раза. В основном из-за того, что приходится выполнять операцию вычисления целочисленного логарифма. Однако, для ускорения этой операции разработаны методы преобразования в формате IEEE 754, использования ассемблерных модулей, схемы целых чисел Гаусса и др. Наибольшей эффект достигается в случае обработки чисел с количеством нулей превышающих число единиц (для этих чисел традиционный метод обязан рассмотреть все разряды двоичного числа). Предложенный метод может найти применение в криптографии, построении помехоустойчивых кодов, выделении и обработке последовательностей нулей в двоичном коде и установлении их длин, а также в простом определении позиций старших и других битов анализируемых чисел.

В заключении можно сформулировать следующие утверждения:

1. Любое целое десятичное число  $M \neq 2^k$ , где  $k=1, 2, 3, \dots$  может быть разложено по формуле (6) на конечную убывающую последовательность целых чисел, причем вес числа на каждом шаге рекурсии уменьшается на единицу.
2. Результат вычисления  $\lceil \log D_i \rceil$  в формуле (6) на каждом  $i$ -м шаге рекурсии представляет собой индекс позиции единицы веса десятичного числа.
3. Количество рекурсий по формуле (6) в точности совпадает с весом разлагаемого десятичного числа.
4. Разложение целого числа по формуле (6) дает единственную последовательность целых чисел, получаемых на каждом шаге рекурсии.

Возможность определения позиций единиц по разложению (6) позволяет выделять последовательности нулей и вычислять их длину.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ ЦЕЛЫХ ДЕСЯТИЧНЫХ ЧИСЕЛ

А.А. Смагин, А.А. Булаев

Всё множество целых чисел из натурального ряда можно разбить на подмножества чисел с определенными весами. Построим эти подмножества с помощью метода, предложенного в предыдущей статье, положив для удобства обозрения и обработки длину двоичного числа равную 8, тогда для весового разбиения получим 8 подмножеств с разным количеством чисел в каждом. Расположим эти подмножества в порядке возрастания весов чисел от  $w=1$  до  $w=8$ .

Количество чисел  $Q(w)$  в каждом подмножестве определяется по формуле

$$Q(w) = C_n^w = \frac{n!}{w!(n-w)!}$$

Полученные числа поместим в таблицу 1.

Таблица 1

w=	1	2	3	4	5	6	7	8
Q	8	28	56	70	56	28	8	1

И отобразим их в виде графика на рис. 1.

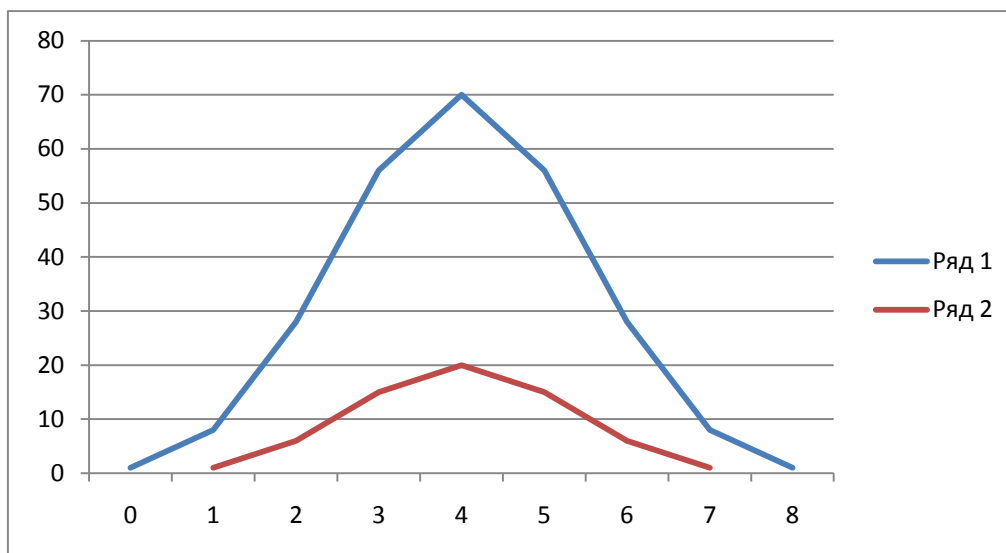


Рис. 1

Распределение чисел по подмножествам с разными весами отвечает нормальному закону распределения и выражается зависимостью

$$Q(w) = 20 \times e^{-\frac{(w-4)^2}{2S^2}},$$

где  $S = 1, 2888\dots$

Верхний график подтверждает комбинаторное свойство потенциального разнообразия (количества) чисел с весом  $w=4$  (т.е. их наибольшее количество).

Разобьем все числа, принадлежащие каждому подмножеству со своим весом, на 2 группы: нечетные и четные числа. Такое разбиение позволило выявить среди нечетных чисел последовательности чисел, которые напрямую связаны с числами из группы чётных чисел и являются образующимися для них.

Если эти числа упорядочить по возрастанию, то они образуют вектор-столбец чисел, образующих вектор-строки чётных чисел и в совокупности представляют левые верхнетреугольные матрицы видов



w=2

$N_{\text{ЧОС}}$	$N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1,1	3	6	12	24	48	96	192
2	2,1	5	10	20	40	80	160	
3	3,1	9	18	36	72	144		
4	4,1	17	34	68	136			
5	5,1	33	66	132				
6	6,1	65	130					

w=3

$N_{\text{ЧОС}}$	$N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$	1	2	3	4	5	6
1	1,1	7	14	28	56	112	224
2	2,1	11	22	44	88	176	
3	2,2	13	26	52	104	208	
4	3,1	19	38	76	152		
5	3,2	21	42	84	168		
6	3,3	25	50	100	200		
7	4,1	35	70	140			
8	4,2	37	74	148			
9	4,3	41	82	164			
10	4,4	49	98	196			
11	5,1	67	134				
12	5,2	69	138				
13	5,3	73	146				
14	5,4	81	162				
15	5,5	97	194				

w=4

$N_{\text{ЧОС}}$	$N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$	1	2	3	4	5
1	1,1	15	30	60	120	240
2	2,1	23	46	92	184	
3	2,2	27	54	108	216	
4	2,3	29	58	116	232	
5	3,1	39	78	156		
6	3,2	43	86	172		
7	3,3	45	90	180		
8	3,4	51	102	204		
9	3,5	53	106	212		
10	3,6	57	114	228		
11	4,1	71	142			
12	4,2	75	150			
13	4,3	77	154			
14	4,4	83	166			
15	4,5	85	170			
16	4,6	89	178			
17	4,7	99	198			
18	4,8	101	202			
19	4,9	105	210			
20	4,10	113	226			

w=5

$N_{\text{ЧОС}}$	$N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$	1	2	3	4
1	1,1	31	62	124	248
2	2,1	47	94	188	
3	2,2	55	110	220	
4	2,3	59	118	236	
5	2,4	61	122	244	
6	3,1	79	158		
7	3,2	87	174		
8	3,3	91	182		
9	3,4	93	186		
10	3,5	103	206		
11	3,6	107	214		
12	3,7	109	218		
13	3,8	115	230		
14	3,9	117	234		
15	3,10	121	242		

w=6

$N_{\text{ЧОС}}$	$N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$	1	2	3
1	1,1	63	126	252
2	2,1	95	190	
3	2,2	111	222	
4	2,3	119	238	
5	2,4	123	246	
6	2,5	125	250	

Левые столбцы представлены нечетными числами, образующими строки (ЧОС). Матрицы – неполные.

Для каждой матрицы, которая имеет свою собственную структуру, можно определить количество ЧОС  $n_{\text{ЧОС}}$ , которые являются её представителями и позволяют представлять матрицы экономным образом, вырезая из матрицы левый столбец.

Количество ЧОС определяется как

$$n_{\text{ЧОС}} = \text{entier}\left(\frac{Q(w)}{3} - 3\right), \quad (1)$$

где  $Q(w)$  – общее количество чисел в матрице с весом  $W$ .

Но так как  $Q(w) = C_n^w$ , то формула (7) переписется

$$n_{\text{ЧОС}} = \text{entier}\left(\frac{1}{3} \times C_n^w - 3\right). \quad (2)$$

Количество ЧОС, которое приходится на подмножестве с заданным весом  $w$  отображено на рис. 1 (нижний график) и закон их распределения также близок к нормальному.

Как указывалось выше, каждый ЧОС образует элементы строки матрицы по правилу

$$M_{i,j} = M_{i,1} \cdot 2^{j-1},$$

где  $i=1,2,3,\dots$  - номер строки,  $j=1,2,3$  – номер столбца.

Максимальное число в строке матрицы не должно превышать  $2^n$ , где  $n$  – длина двоичного кода числа (в данном случае 255). Количество умножений определяет количество столбцов в строке и максимальное значение числа в рассматриваемой матрице  $M_m(w)$ .

Для определения максимального количества столбцов в матрице предлагается формула

$$n_{\text{ст } m} = \log(2^n - M_m(w)) - 1.$$

Пример:  $w=2, n_{\text{ст } m} = \log(2^8 - 192) + 1 = 7$ .

$w=3, n_{\text{ст } m} = \log(2^8 - 224) + 1 = 6$ .

Максимальное число  $M_m(w)$  во всех матрицах занимает крайнюю правую клетку в верхних строках матрицы и используется для подсчёта количества подматриц  $n_{n/m}$ , из имеющихся в матрице с заданным весом.

Значение  $n_{n/m}(w)$  определяется через максимальное значение  $M_m(w)$  и вес чисел и имеет вид

$$n_{n/m}(w) = [ \log M_m(w) ] - w + 1$$

Пример:  $w = 4, n_{n/m}(4) = [ \log 240 ] - 4 + 1 = 4$ .

В левых клетках верхних строка всех матриц находятся числа Мерсена, которые определяются по формуле  $M^o = 2^w - 1$ , указывают вес матрицы, которой принадлежат, по формуле  $w = \log_2 (M+1)$ . Пример:

$M = 3 \rightarrow w = 2; M = 7; \rightarrow w = 3; M = 15 \rightarrow w = 4$  и т.п.

Матрицы чисел разбиваются на блоки или подматрицы – критерием их разбиений является одинаковость длин строк четных чисел, входящих в них.

Размеры матриц представлены в таблице 2.

Таблица 2

w	1	2	3	4	5	6	7
Количество столбцов	0	7	6	5	4	3	0
Количество строк	0	7	15	20	15	7	0

Графические зависимости количества столбцов  $n_{ст}$  и строк  $n_{стр}$  от веса чисел представлены на рис. 3 и рис. 4.

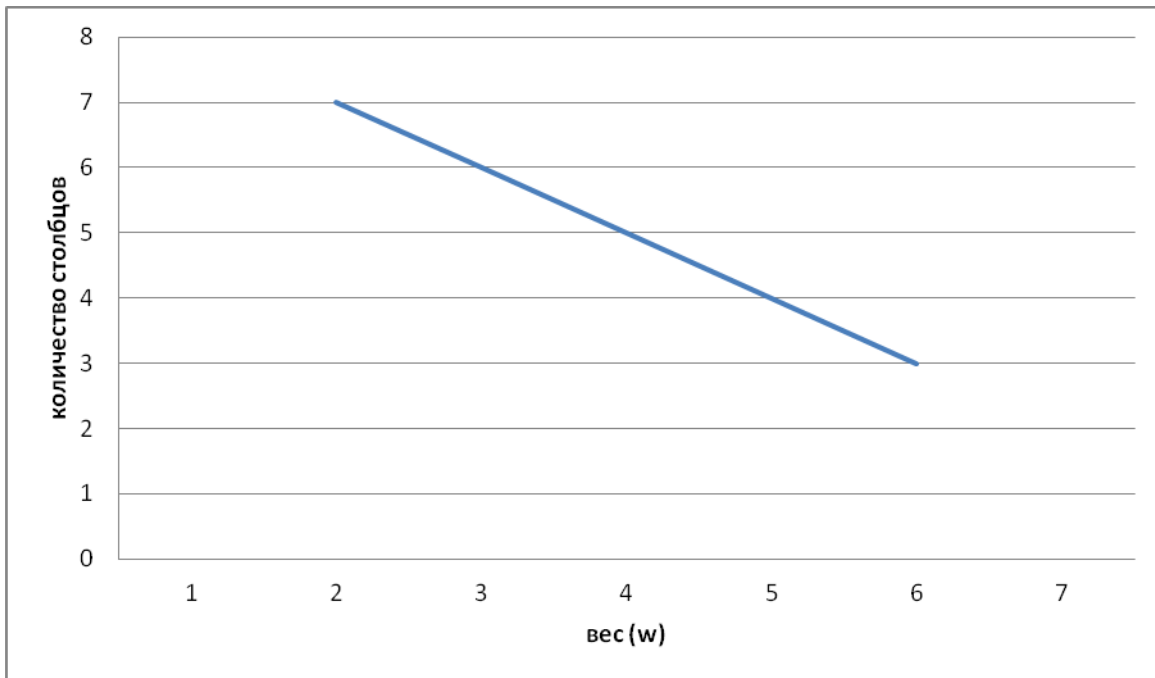


Рис. 3. Зависимость количества столбцов от веса чисел матрицы

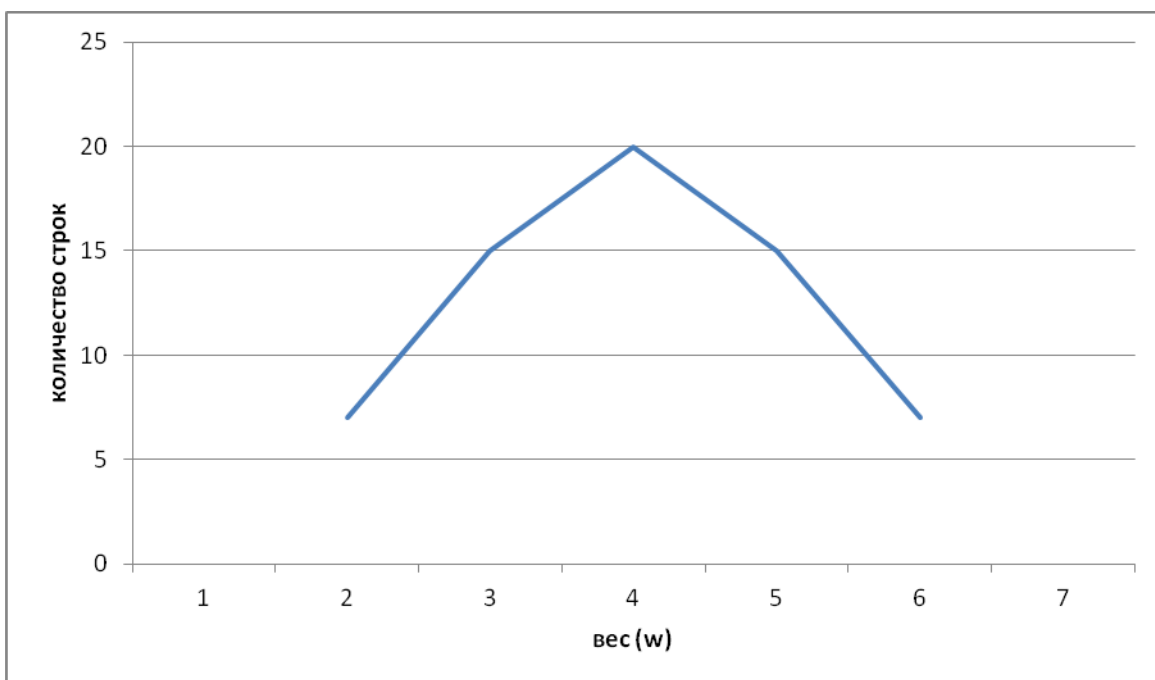


Рис. 4. Зависимость количества строк от веса матрицы

С увеличением веса числа количество столбцов уменьшается по линейному закону, а количество строк  $n_{стр}$  носит характер, близкий к нормальному распределению и имеет максимум при  $n/2$ .

Представляют интерес закономерность образования чисел в матрицах, а также связи значений с их местоположением в матрице.

Структурные особенности матриц, включающие определенные количества подматриц и их количественные характеристики – размеры, выражаемые в строках и столбцах, приведены в таблице 3.

Таблица 3

w	2	3	4	5	6	7
Число подматриц	6	5	4	3	2	-
Соотношение количества строк в подматрицах	1:1:1:1:1:1	1:2:3:4:5	1:3:6:10	1:4:10	1:5	-
Соотношение количества столбцов в подматрицах	7:6:5:4:3:2	6:5:4:3:2	5:4:3:2	4:3:2	3:2	-

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ НОМЕРОВ ЧИСЕЛ, ОБРАЗУЮЩИХ СТРОКИ В ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЕ, С ЗАДАННЫМ ВЕСОМ

А.А. Смагин, А.А. Булаев

Идея определения порядкового номера ЧОС в матрице опирается на разбиения двоичного эквивалента десятичного числа  $M_{10}$  с заданным весом  $w$  на фрагменты числа, которые образуются по следующему правилу.

Исходный двоичный код сдвигается влево до тех пор, пока на его крайней левой позиции и не появится единица, при этом эта единица и стоящая справа последовательность нулей отбрасывается. Исходный двоичный код уменьшается по длине.

После сдвига полученный фрагмент подвергается обработке с учетом веса числа (матрицы) и длины фрагмента по формуле:

$$p_i = C_{l-2}^{w-1},$$

где  $p_i$  – порядковый номер фрагмента,  $l$  – длина фрагмента в битах,  $i = \overline{1, q}$ ,  $q$  – число формируемых фрагментов в процессе разбиения числа  $N_2$ .

Такой процесс носит рекурсивный характер, и число его шагов определяется количеством единиц в двоичном коде.

Процесс завершения разбиения исходного числа  $M$  и его фрагментов происходит при выполнении условия

$$(w-1) \geq (l-2).$$

Окончательно порядковый номер ЧОС определяется как

$$p = \sum_{i=1}^q p_i + 1.$$

**Пример.** Пусть  $M^{(10)}=45$ ,  $M^{(2)}=101101$ ,  $l=6$ ,  $w=4$ . Введем пошаговый процесс фрагментации исходного двоичного кода:

**1 шаг.** Вычисляем  $p_1 = C_{l-2}^{w-1} = C_{6-2}^{4-1} = C_4^3 = 4$ . Производим сдвиг двоичного кода  $M^{(2)}$  влево на 2 позиции и получаем первый фрагмент числа  $M_1^{(2)} = 1101$ ,  $l=4$ ,  $w=3$ .

**2 шаг.** Вычисляем  $p_2 = C_{4-2}^{3-1} = 1$ . Производим сдвиг двоичного кода  $M_1^{(2)}$  влево и формируем второй фрагмент  $M_2^{(2)} = 101$ ,  $l=3$ ,  $w=2$ .

**3 шаг.** Вычисляем  $p_3 = C_1^1 = 1$ .

**4 шаг.** Окончательно

$$p = \sum_1^3 p_i + 1 = 4 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

Так как ЧОСы расположены в векторе-столбце в порядке возрастания их значений, то из этого факта следует, что и значения порядковых номеров этих ЧОС также должны увеличиваться. Отсюда каждый фрагмент должен вносить свой вклад в возрастание значения порядкового номера ЧОСа. Ясно, что чем больше нулей в двоичном коде, причем, если единицы стоят на младших разрядах, то тем меньше будет фрагментов разбиений и меньшую суммирующую составляющую они создают.

Отметим также, что с увеличением порядкового номера ЧОСа его образующая возможность уменьшается и это проявляется в меньшем числе столбцов, которые он создает в матрице.

Рассмотрим другой способ, который не требует перевода исходного числа в двоичную систему счисления, знания веса числа и основывается на разложении десятичного числа. Этот способ позволяет упрощенно получать фрагменты (разбиения) исходного числа, т.е. не делать сдвиги, отбрасывать левые части, получаемые после сдвига влево. Достаточно перевода фрагмента числа в двоичный код и выполнения операции по вычислению значений  $C_{l-2}^{w-1}$ .

Разбиения по формуле, комплексные операции сдвига и отбрасывания эквивалентны между собой и дают одинаковые результаты.

Отсюда существуют два равноценных способа разбиения десятичного числа на множество фрагментов.

Рассмотрим получение фрагментов некоторого десятичного числа  $M^{(10)}=53$  двумя способами, а именно по формуле и с помощью сдвигов и отбрасывания старших разрядов.

Пусть  $M^{(10)}=53$ .

1 способ:  $M^{(2)}=110101$ ,  $w=4$ ,  $l=6$ .

1 шаг:  $M_1^{(2)} = 110101 \rightarrow 10101 = 21$ .

2 шаг:  $M_2^{(2)} = 10101 \rightarrow 101 = 5$ .

3 шаг:  $M_3^{(2)} = 101 \rightarrow 1 = 1^{(10)}$ .

Здесь операция « $\rightarrow$ » - сдвиг и отбрасывание.

2 способ:

1 шаг:  $21 = 53 - 2^{\lceil \log_2 53 \rceil}$ ,

2 шаг:  $5 = 21 - 2^{\lceil \log_2 21 \rceil}$ ,

3 шаг:  $1 = 5 - 2^{\lceil \log_2 5 \rceil}$ .

Разложение по формуле числа  $M^{(10)}=53$  дает цепочку ( $21 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ).

Отбрасывание старших разрядов после сдвига можно определить как вычитание из двоичного числа величины  $2^q$ , где  $q$  – позиция старшей единицы в отбрасываемой части числа.

Рассмотрим пример. Пусть  $M^{(10)}=21$ , двоичный код этого числа  $M^{(2)} = 1_4 0_3 1_2 0_1 1_0$ . Сделаем сдвиг влево на две позиции и отбросим старшую часть кода  $1_4 0_3$ . Определим ее значение как  $\Delta_1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 = 16$ . Вычтем из исходного числа отброшенную часть, получим фрагмент  $\Delta = 21 - 16 = 5$ .

Другой пример:  $M^{(10)}=53$ ,  $M^{(2)}=1_5 1_4 0_3 1_2 0_1 1_0$ , сдвигаем двоичный код влево и отбросим часть кода  $\Delta_1 = 1 \cdot 2^5 = 32$ . Остаток  $\Delta = 53 - 32 = 21$ . Отсюда формула оценки величины отброшенной старшей части

$$M_{i+1}^{(10)} = M_i^{(10)} - 2^{q_i}, \text{ а } q_i = \lceil \log_2 M_i^{(10)} \rceil \text{ или } M_{i+1}^{(10)} = M_i^{(10)} - 2^{\lceil \log_2 M_i^{(10)} \rceil}.$$

Из изложенного следует утверждение.

Сдвиг влево двоичного кода  $M^{(2)}$  десятичного числа  $M^{(10)}$  с потерями старших разрядов, количество которых равно числу подряд идущих нулей в последовательности между левой старшей единицей и ближайшей правостоящей единицей равносильно десятичной операции вычитания из исходного числа  $M^{(10)}$ , величины  $2^{\lceil \log_2 M \rceil}$ .

Оба способа могут быть применены на практике: первый требует работы с битами, второй – с десятичными числами.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ЧИСЛАМИ С РАЗНЫМИ ВЕСАМИ

А.А. Смагин

Ульяновский государственный университет

Представляет интерес установление математических связей между числами, образующими строки (ЧОС) одного веса и ЧОС с разными весами. Если рассматриваются левые столбцы весовых матриц (см. предыдущие статьи настоящих Ученых записок УлГУ) т.е. ЧОСы, то их взаимосвязь, как указывалось ранее, базируется на группировании нечетных чисел с одними весами и последующим упорядочиванием в столбец в порядке возрастания их значений. Это лексикографический порядок, и значения ЧОС математически связаны с их порядковыми номерами. Однако напрямую генерацию ЧОС через предыдущие значения установить трудно.

Для получения связи между ЧОС с разными весами можно воспользоваться результатами структуризации чисел - размещением в треугольных матрицах с заданными весами. Это дает возможность ЧОС позиционировать в матрицах введя три координаты: вес матрицы ( $w$ ), номер подматрицы ( $N_{n/m}$ ), номер внутри матрицы  $N_{\text{ЧОС}_{n/m}}$ . Таким образом координаты ЧОС ( $M_d$ ) имеют вид

$$M_d(w, N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}).$$

Дополнительное позиционирование состоит в указании веса  $w$  и порядкового номера ЧОС в матрице  $N_{\text{ЧОС}}$

$$M'_d(w, N_{\text{ЧОС}}),$$

где  $d$  – порядковый номер числа в натуральном ряде.

Введение трехкоординатных позиций позволило установить связи ЧОС с соседними весами. Ранее использование формулы разложения предоставило возможность построить таблицу разложения всех ЧОС через ЧОСы с меньшими весами. Рекурсивное преобразование ЧОС по сути дела уменьшало вес формируемого числа и приводило к ЧОС с весом  $w=1$ , при этом значение ЧОС становилось равным единице.

Однако обратный ход невозможен и это выражается тем, что от некоторых ЧОС с меньшим весом имеются несколько переходов к другим с большими весами ЧОС.

Вводя матричную структуризацию чисел в виде тройки чисел  $(w, N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}})$ , а также используя порядковую индексацию чисел внутри матрицы  $N_{\text{ЧОС}}$  можно установить математические связи между ЧОС с разными весами. При этом для получения некоторых ЧОС необходимо задать значения трех координат.

Для вычисления значения ЧОС с заданными координатами  $(w, N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}})$  получена формула

$$M_d(w, N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}) = 2^{w+N_{n/m}-2} + M_{N_{\text{ЧОС}}}(w-1), \quad (1)$$

причем  $N_{\text{ЧОС}}(w-1) = N_{\text{ЧОС}_{n/m}}(w)$ .

Рассмотрим примеры для случая вершины графа с ЧОС  $M(w=3)=13$ , из которой исходят три дуги в вершины  $M(w=4)=29$ ,  $M(w=4)=45$ ,  $M(w=4)=77$ .

Первый переход:  $(13 \rightarrow 29)$ .

Возьмем координаты числа  $M=29$ , которые имеют вид  $(4;2;3)$  и подставим в (1)

$$M(4;2;3) = 2^{4+2-2} + M_3(w=3)$$

Здесь  $M_3=13$ , тогда  $M(4;2;3)=16+13=29$ .

Второй переход:  $(13 \rightarrow 45)$ ,  $w=4$ .

Здесь  $M(4;3;3)$ , подставим в (1)



$$M(4;3;3)=2^{4+3-2} + M_3(w = 3) = 32 + 13 = 45.$$

Третий переход: (13→77).

$$M(4;4;3)= 2^{4+4-2} + M_3(w = 3) = 64 + 13 = 77.$$

Таким образом, задавая три координаты ЧОС для матрицы с заданным весом, можно получать ЧОС с весом на 1 больше.

По формуле (1) можно вывести зависимость, по которой выполняется переход  $M(w) \rightarrow M(w-1)$ .

Преобразуем (1) так, чтобы в левой части уравнения находилось число  $M(w-1)$ , а в правой части – ЧОС, к которому делается переход. Тогда получим следующую зависимость

$$M(w-1)= M_d(w, N_{n/m}, N_{\text{ЧОС}_{n/m}}) - 2^{w+N_{n/m}-2} \quad (2)$$

Примеры: рассмотрим переходы - (31→15), (47→15), (79→15), которые ведут в один ЧОС.

Первый переход: (31→15).

Возьмем число  $M=31$ . Его координаты (5;1;1). Подставляем эти значения в (2)

$$M(5;1;1)= 31 - 2^{5+1-2} = 15.$$

Второй переход: (47→15).

$$M(5;2;1)= 47 - 2^{5+2-2} = 15.$$

Третий переход: (79→15).

$$M(5;3;1)= 79 - 2^{5+3-2} = 15.$$

В настоящей работе исследовался диапазон целых чисел в пределах  $1 \div 255$ , числа были сгруппированы в треугольные матрицы с соответствующими им весами, внутри которых были выделены блоки (подматрицы). Такая структуризация позволила выявить новые свойства этих чисел и позволила установить между ними межматричные связи.

Однако эти связи касались только нечетных чисел, образующих строки четных чисел. Возникает вопрос: можно ли изменить формулы связи (1), (2) для матриц, в которых нет явно выделенных подматриц, а также для случаев, когда числа не образуют строки в рассматриваемом диапазоне.

Рассмотрим случай, когда в матрицах нет явно выраженных подматриц. Это матрицы с весами  $w=2$  и  $w=7$ .

Для матрицы с весом  $w=2$  можно сделать допущение о том, что ее строки следует отождествить с подматрицами с единственными элементами-строками и в этом случае формулы связи (1) и (2) для нее будут действительными.

В матрице с весом  $w=7$  имеются следующие числа: 127, 191, 223, 239, 251, 253. Из них только одно число – 127 является ЧОС. Остальные числа не образуют строки, в которых числа не превышают правую границу диапазона – 255. То же самое для матриц с весами  $w=3$  – здесь таких чисел – 41, для  $w=4$  – 50, для  $w=5$  – 41, для  $w=6$  – 22.

Для построения цепочек нечетных чисел не входящих в подматрицы треугольных матриц чисел одного веса можно использовать простой прием, состоящий в следующем:

1) включить все «не ЧОС» в состав новой матрицы, которая их объединяет, и присвоить ей номер на единицу больше номера последней подматрицы рассматриваемой матрицы;

2) всем «не ЧОС» присвоить порядковые номера в продолжении порядковых номеров ЧОС, входящих в подматрицы этой матрицы.

Рассмотрим случай:  $M(w) \rightarrow M(w+1)$ .

Пример 1. Возьмем «не ЧОС»  $M=135$ . Его координаты с учетом выше предложенного (4;5;1). Подставим в формулу (1)

$$M(4;5;1)= = 2^{4+5-2} + M_1(w = 3) = 128 + 7 = 135.$$

Пример 2. Возьмем последний «не ЧОС» для матрицы с  $w=4$ . В пятой подматрице это число имеет порядковый номер равный 15, отсюда координаты числа 225 – (4;5;15). Подставим в формулу (1)

$$M(4;5;15)= = 2^{4+5-2} + M_{15}(w = 3) = 128 + 97 = 225.$$

Аналогичным образом получаются значения «не ЧОС» для случая перехода чисел  $M(w) \rightarrow M(w-1)$  при использовании соотношения (2).

Пример. Выполним переход для «не ЧОС». Возьмем последний пример

$$M(w=4)=225; M(4:5:15).$$

$$M(w=3)= 225 - 2^{4+5-2} = 225 - 128 = 97,$$

т.е. сделан переход (225 $\rightarrow$ 97) с понижением веса.

### Литература

- 1 Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 352 с.
- 2 Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика. М.: Наука, 1983.
- 3 Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.

## РАЗРАБОТКА ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ПРОТОТИПА СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОГНИТИВНОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ТЕХНОЛОГИЧНОСТИ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА В СРЕДЕ MATLAB

*Е.Э. Звягинцева, А.С. Мельниченко*

*Ульяновский государственный университет*

*В условиях индустриального подхода к разработке и сопровождению программного обеспечения (программного продукта) особый вес приобретают технологические оценки программного продукта (ПП), где под технологичностью понимают качество программного продукта, от которого зависят трудовые и материальные затраты на его реализацию и последующие модификации. Технологичный проект ПП сравнительно быстро и легко кодируется, тестируется, отлаживается и модифицируется [1]. Для обеспечения необходимых технологических свойств ПП, применяют специальные технологические приемы и следуют определенным методикам, сформулированным всем предыдущим опытом создания программного обеспечения. Особое значение для обеспечения технологичности программных продуктов приобретают методики, определяющие основные характеристики технологичности и их атрибуты, и связь их с характеристиками и их атрибутами метрик качества ПП. В IEEE Standard Glossary of Software Engineering Terms метрика определена как мера степени обладания свойством, имеющая числовое значение [2, 3].*

Согласно стандарту (ISO/IEC 9126 [3]) метрики качества программных продуктов определяются по **модели** измерения атрибутов ПП на всех этапах жизненного цикла (промежуточная, внутренняя метрика) и особенно на этапе тестирования или функционирования (внешние метрики) программного продукта. Измерение атрибутов ПП выполняется, как правило, на основе экспертных оценок [2]. Например, СОСОМО II – многоплановая модель, позволяющая решать задачи оценки экспертами пост архитектурных затрат на создание ПП [2]. Подобные оценки затрат в моделях СОСОМО II и при оценках других метрик ПП, определяется экспертами в виде лингвистических переменных [8] «очень низкий», «низкий» «номинальный», «высокий», «очень высокий», «сверх высокий». Как известно подобная экспертная деятельность относится к слабоструктурированным предметным областям состоящая из оценок множества разнородных взаимодействующих факторов. Некоторые из этих факторов напрямую зависят от решений лица принимающего решения (ЛПР), другие зависят от ЛПР косвенно (через цепочки других факторов), третьи не зависят от ЛПР. При принятии решений в таких предметных областях подходы имитационного моделирования, ориентированные на использование количественных объективных оценок, и методы традиционной теории принятия решений, опирающейся на методы выбора лучшей альтернативы из множества четко сформулированных альтернатив, оказываются недостаточными. Материал, на основе которого принимаются решения в таких областях, неизбежно содержит существенную долю качественных, нечетких, субъективно оцененных данных и по существу является представлением знаний эксперта (или группы экспертов) о ситуации, описывающей проблемную область.

Один из подходов к анализу слабо структурированных проблемных областей, сформировавшийся в последние десятилетия, часто называют когнитивным анализом или когнитивным моделированием. Когнитивные модели служат средством структурирования и формализации ситуации и средством ее анализа.

Целью данной работы исследование возможности построение когнитивной модели оценки технологичности программных проектов на основе экспертных оценок ПП в среде Matlab. **Объектом** исследований является система принятия решения оценки технологичности ПП на основе когнитивной модели в среде Matlab. **Предметом** исследования является применение методологии когнитивного моделирования для принятия решений в слабо структурированных ситуациях оценки технологичности ПП в среде Matlab.

Для достижения поставленной цели авторами поставлены и решены следующие задачи:

1. Анализ когнитивных методов и моделей по оценке технологичности ПП.
2. Разработка когнитивной карты по оценке технологичности ПП.
3. Разработка демонстрационного прототипа системы принятия решений в среде Matlab, для оценки технологичности ПП на основе когнитивной карты.
4. Экспериментальное исследование оценки технологичности ПП в среде Matlab для поиска рационального решения.

#### **Анализ когнитивных методов и моделей по оценке технологичности ПП**

Одним из наиболее эффективных подходов к исследованию слабо структурированных систем и процессов является методология когнитивного моделирования, предложенная Р. Аксельродом и получившая развитие, как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, в работах Ф.С. Робертса, В.Б. Силова, А.А. Кулинича [4, 5, 6] и других авторов.

В общем, под когнитивным компьютерным моделированием (ККМ) понимается моделирование ментальных, познавательных процессов, однако в виду того, что последнее время когнитивное моделирование широко применяется в трудно формализуемых задачах принятия решений [6] гораздо чаще можно встретить следующее определение:

ККМ - это способ анализа, обеспечивающий определение силы и направления влияния факторов на перевод объекта анализа в целевое состояние. Основу таких когнитивных моделей обычно представляет классическая когнитивная карта [6].

Построение когнитивной карты моделируемой системы фактически означает снятие неопределенности с ее структуры за счет формирования модели знаний эксперта об этой системе. К построенной карте применяются методы аналитической обработки, ориентированные на исследование структуры системы и получение прогнозов ее поведения при различных управляющих воздействиях.

Процесс когнитивного моделирования происходит на двух уровнях: концептуальном и математическом. Вначале эксперт, исходя из своих знаний и представлений о предметной области, формирует ее понятийную модель в виде набора понятий и причинно-следственных связей между ними (концептуальный уровень), затем эта модель представляется в виде когнитивной карты, обработка которой ведется на уровне математического моделирования. Полученные результаты должны быть проинтерпретированы в терминах предметной области (осуществляется возврат на концептуальный уровень) [6].

Когнитивная модель основана на формализации причинно-следственных связей, которые имеют место между факторами, характеризующими исследуемую систему. Результатом формализации является представление системы в виде причинно-следственной сети, называемой когнитивной картой и имеющей вид:  $G = \langle E, W \rangle$ , где  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  – множество факторов (называемых также концептами),  $W$  – бинарное отношение на множестве  $E$ , которое задает набор связей между его элементами. Данная причинно-следственная сеть называется когнитивной картой моделируемой системы.

Элементы  $e_i$  и  $e_j$  считаются связанными отношением  $W$ , если изменение значения концепта  $e_i$  (причины) приводит к изменению значения концепта  $e_j$  (следствия). В соответствии с терминологией когнитивного моделирования, в этом случае говорят, что концепт  $e_i$  оказывает влияние на концепт  $e_j$ . При этом если увеличение значения концепта-причины приводит к увеличению значения концепта-следствия, то влияние считается положительным («усиление»), если же значение уменьшается – отрицательным («торможение»). Сами концепты при этом могут задавать как относительные (качественные) показатели, так и абсолютные, измеримые величины.

Когнитивное моделирование позволяет на качественном уровне:

- 1) оценить ситуацию и провести анализ взаимовлияния действующих факторов, определяющих возможные сценарии развития ситуации;
- 2) выявить тенденции развития ситуаций и реальные намерения их участников;
- 3) определить возможные механизмы взаимодействия участников ситуации для достижения ее целенаправленного развития;
- 4) выработать и обосновать направления управления ситуацией;

5) определить возможные варианты развития ситуации с учетом последствий принятия важнейших решений и сравнить их.

Таким образом, при исследовании слабоструктурированных систем и ситуаций применяется *когнитивное моделирование* [4, 5, 6].

*Когнитивное моделирование* – исследование функционирования и развития слабоструктурированных систем и ситуаций посредством построения модели на основе когнитивной карты.

*Когнитивная карта* – субъективные представления экспертов (индивидуальные и коллективные) исследуемой проблемы, ситуации связанной с функционированием и развитием слабоструктурированных системы процессов.

Как правило, когнитивную карту строят системный аналитик (или лицо принимающее решение (ЛПР) и эксперт в области исследуемой проблемы или эксперт-аналитик в одном лице).

### **Разработка демонстрационного прототипа системы принятия решений в среде Matlab, для оценки технологичности СПП**

Прототипом интеллектуальных систем поддержки принятия решений является усеченная версия таких систем, спроектированной для проверки правильности стратегий рассуждения ЛПР (эксперта, когнитолога, пользователя). Он также дает возможность инженеру по знаниям (когнитологу) привлечь эксперта к активному участию в процессе разработки интеллектуальных систем поддержки принятия решений (СППР) [5]. При разработке прототипа большую роль играют такие критерии, как квалификация специалистов, численность группы разработчиков и т.д., временные рамки (ограничения по времени разработки), постановка задачи (требования, предъявляемые к будущей системе). В настоящее время создано достаточное количество СППР на основе нечётких множеств, таких как MapleConnectFuzzySets, Matlab, КАНВА и др. (таблица 1).

Таблица 1. Обзор программных средств для работы с нечеткими множествами

Программы	Описание	Достоинства	Недостатки
Fuzzyclips	Расширение CLIPS, оболочки экспертной системы от NASA. Предоставляет возможности для работы с нечёткими множествами	Может иметь дело с чёткими, нечёткими (или неточными), и комбинированными аргументациями. Это позволяет свободно смешивать нечёткие и нормальные условия, в правилах и фактах экспертной системы	Непереносима на различные платформы. Требуется значительных усилий для поддержания надстройки.
Fuzzy calc	Электронная таблица. Предназначена для хранения данных и их обработки, а также для выполнения простых расчетов и оценок	Работа с размытыми, неопределёнными финансовыми данными	Результаты рассчитаны на прямолинейное использование простым пользователем.
Matlab fuzzy set	Пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете	Простой продуманный интерфейс, легкое проектирование и диагностирование нечетких моделей. Обеспечивается поддержка современных методов нечеткой кластеризации	Высокая стоимость
КАНВА	Пакет прикладных программ для решения задач принятия решений в социосферах и экономике	Может иметь дело с чёткими, нечёткими (или неточными), и комбинированными факторами и их взаимных влияний на принятии решений в социосферах и экономике	Применяется в основном в социосферах и экономике

В результате анализа существующих СППР был сделан выбор в пользу Matlab, который имеет пакет Fuzzylogic для работы с нечеткой логикой [8]. Все действия над нечеткими числами задаются минимальным набором функций и происходят внутри программы. Таким образом, пользователю необязательно изучать все тонкости теории нечетких множеств, достаточно только определить все входные и выходные переменные и задать множество нечетких

правил вывода (нечеткая база знаний), а всю оставшуюся рутинную операцию по нечеткому выводу и получению выходных результатов с последующей дефазификацией, сделает Matlab.

### Существующий процесс принятия решений в среде Matlab.

В целом весь процесс нечеткого управления выводом в Matlab можно разбить на несколько стадий:

- постановки задачи,
- фазификации (переход к нечеткости);
- построения системы нечёткого вывода;
- дефазификации (переход к численным значениям);
- формулировки вывода.

### Постановка задачи

Существующий процесс принятия решения в Matlab представляет собой процесс взаимодействия когнитолога и эксперта. В результате диалога между ними нарабатывается необходимые данные и знания, на основе которых можно предположить приблизительные исходы интересующих значений и факторов. Процесс взаимодействия когнитолога и эксперта осуществляются в неявно заданном виде на основе методик, теорий, моделей (рис. 1), опираясь на их опыт, умения и навыки, только затем полученные данные обрабатываются средствами Matlab, при этом данные для обработки нужно привести к определенному виду (в виде функций принадлежности и правил нечеткого вывода).

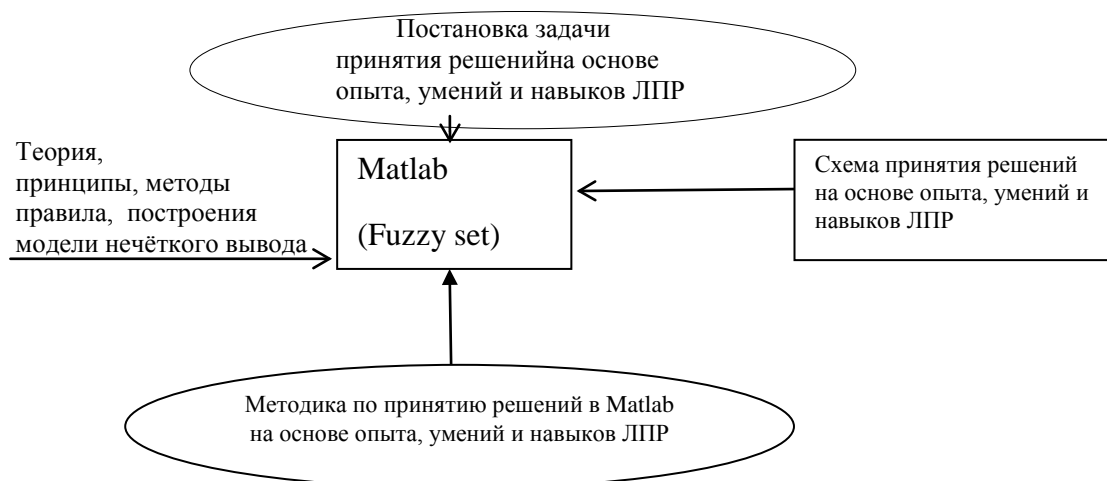


Рис. 1. Существующие принципы и подходы к принятию решений в среде Matlab на основе опыта, умений и навыков ЛПП

### Фазификация (переход к нечеткости).

На данной стадии точные значения входных переменных преобразуются в значения лингвистических переменных посредством применения некоторых положений теории нечетких множеств, а именно - при помощи определенных функций принадлежности.

### Построение системы нечёткого вывода

Нечеткая база знаний может трактоваться как некоторое разбиение пространства влияющих факторов на подобласти с размытыми границами, в каждой из которых функция отклика принимает значение, заданное соответствующим нечетким множеством. Правило в базе знаний представляет собой «информационный сгусток», отражающий одну из особенностей зависимости «входы–выход». Такие «сгустки насыщенной информации» или «гранулы знаний» могут рассматриваться как аналог вербального кодирования, которое, как установили психологи, происходит в человеческом мозге при обучении. Видимо поэтому формирование нечеткой базы знаний в конкретной предметной области, как правило, не составляет трудностей для эксперта.

В составе Matlab присутствуют пять основных средств графического интерфейса пользователя. Такими средствами являются: редактор системы нечеткого вывода (СНВ), редактор функций принадлежности (ФП), редактор правил вывода (РПВ), средство просмотра правил вывода (СППрВ), средство просмотра поверхности вывода (СППовВ) [8]. Процесс нечеткого вывода в Matlab включает в себя шесть этапов (шагов), в том числе:

**Шаг первый.**

Вызывается редактор вновь создаваемой СНВ, с помощью которого добавляется:

- один или несколько входов для механизма нечеткого вывода по Мамдани;
- один выход или несколько выходов.

**Шаг второй.**

Далее необходимо поставить в соответствие каждой входной и выходной переменной набор ФП. Такая процедура реализуется в редакторе ФП.

**Шаг третий.**

Заключительным этапом построения СНВ является определения набора правил, которые осуществляют связь входных переменных с выходными.

**Шаг четвёртый.**

Применяются средства просмотра правил вывода. Данное средство позволяет отобразить процесс нечеткого вывода и получить результат. Основное окно просмотра правил вывода содержит несколько графических окон, располагаемых по строкам и столбцам. Количество строк соответствует количеству правил нечеткого вывода, а количество столбцов - количеству входных и выходных переменных, заданных в разрабатываемой СНВ.

**Дефазификации (переход к численным значениям)**

**Шаг пятый.**

Применение дополнительного графического окна служащего для отображения результата нечеткого вывода и результата операции дефазификации. В каждом графическом окне отображается соответствующая ФП, уровень ее среза (для входных переменных) и вклад отдельной ФП в общий результат (для выходных переменных).

**Шаг шестой.**

Применяются средства просмотра поверхности вывода. Данное средство позволяет строить трехмерную поверхность, представляющую собой зависимость одной из выходных переменных от любых двух входных переменных. Выбор входных и выходных переменных осуществляется посредством выпадающих меню в главном окне рассматриваемого средства.

**Предлагаемый подход процесса принятия решений в среде Matlab на основе когнитивного моделирования (СППРМ)**

В отличие от существующей методики принятия решений ЛПР, где решения принимаются на основе опыта, умений и навыков ЛПР, предлагается методика когнитивного моделирования, суть которой заключается в том, что в целом весь процесс нечеткого управления выводом в Matlab осуществляется на основе когнитивной карты и методики построения системы нечеткого вывода на её основе (см. рис. 2) а также классической схемы принятия решений для ЛПР.

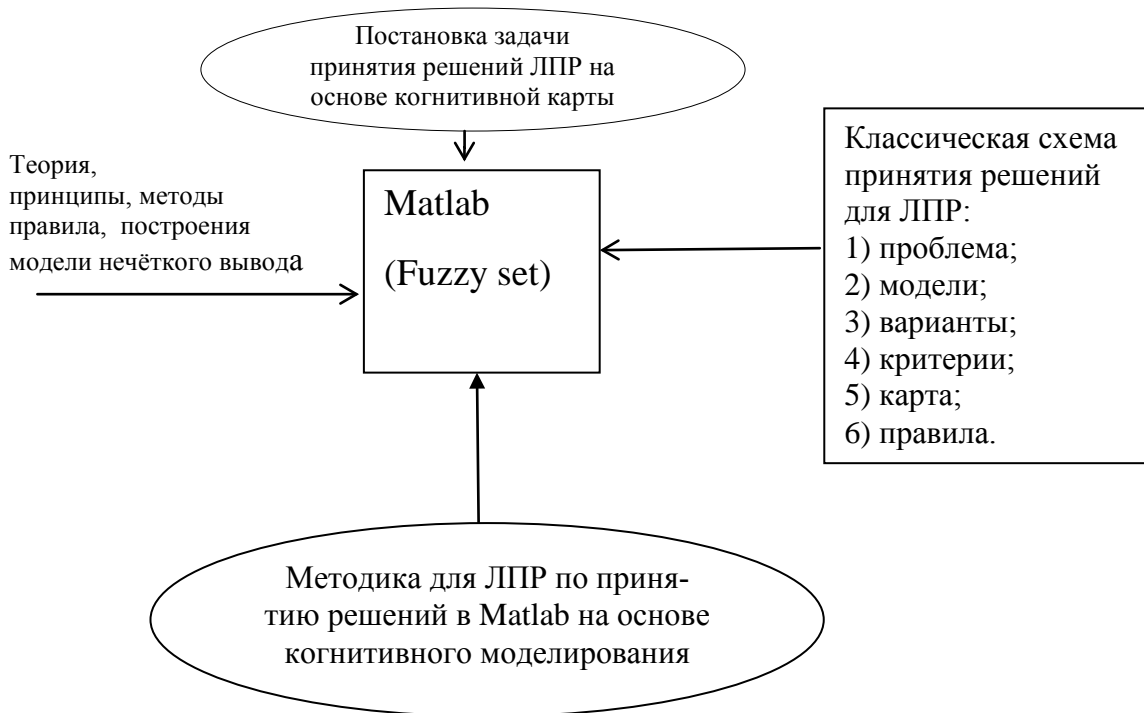


Рис. 2. Принципы и подходы к принятию решений в среде Matlab на основе когнитивного моделирования и классической схемы принятия решений карты

### Экспериментальное исследование оценки технологичности ПП в среде Matlab Разработка когнитивной карты по оценке технологичности ПП

Основными элементами когнитивной карты являются базисные факторы (или просто факторы) и причинно-следственные связи между ними. Для реализации оценки технологичности ПП посредством когнитивной карты, выделим в качестве базисных факторов метрики оценки качества ПП. В рассматриваемой в данной статье ситуации, из достаточно большого количества существующих метрик выделяются те, которые напрямую связаны с проектированием, реализацией программного продукта, в том числе:

- надежность (reliability);
- функциональность (functionality);
- применимость (applicability);
- стоимость (cost);
- размер программного кода (size);
- сложность ПП (complexity);
- стиль программирования (style).

Для установления причинно-следственных связей между факторами, присвоим каждому из факторов свой порядковый номер:

- 1) надежность;
- 2) функциональность;
- 3) применимость;
- 4) стоимость;
- 5) размер;
- 6) сложность;
- 7) стиль;
- 8) технологичность.

Тогда когнитивную карту оценки технологичности ПП можно представить в виде графа, представленного на рис. 3.



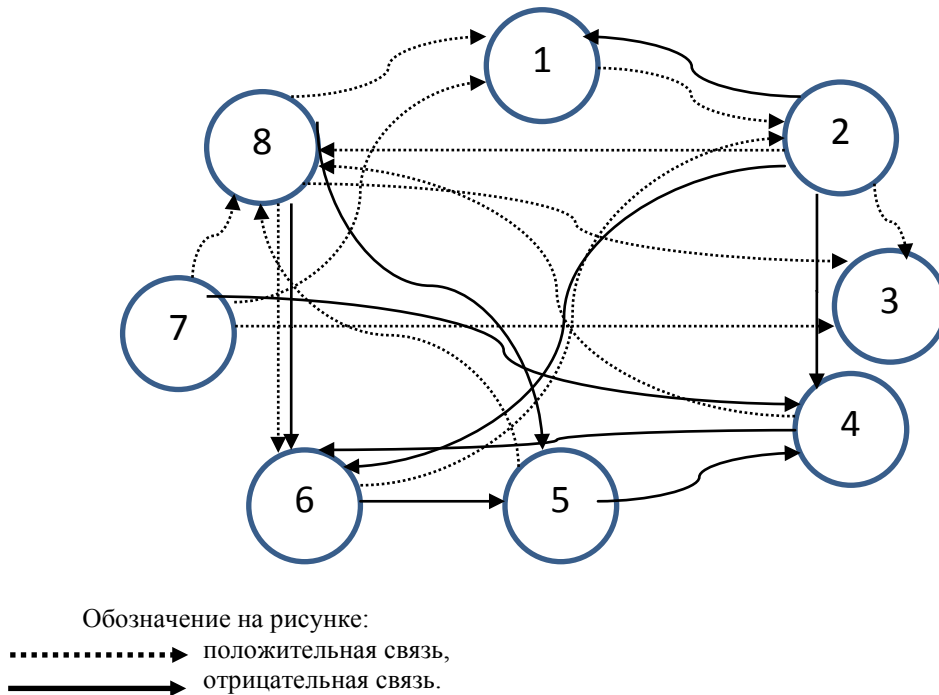


Рис. 3. Когнитивная карта оценки технологичности ПП

Для снижения сложности принятия решения по оценке технологичности ПП, осуществим кластеризацию факторов [7].

Характеристиками *кластера* имеющих общее свойство в рассматриваемом случае, можно назвать два признака:

- внутренняя однородность;
- внешняя изолированность.

Исходя из этого, при анализе получившейся когнитивной карты можно выделить 2 кластера.

В первый кластер, выделенный на основе первого из названных признаков, будут включены факторы:

- Стиль.
- Надежность.
- Размер.

Соответственно, второй кластер, выделенный из названных признаков, будет включать в себя:

- Сложность.
- Стоимость.
- Функциональность.
- Применимость.

#### **Разработка системы нечётких правил для оценки технологичности ПП**

На основе методологии когнитивного моделирования [4, 5, 6] и основы теории нечётких и гибридных систем [8] проведём анализ причинно-следственных связей на основе текстологических (выявленных из различных источников, в том числе [2]) экспертных данных, создадим продукционные правила типа «ЕСЛИ ..... ТО ...». Таких правил для каждого из кластеров будет 8.

Для 1 кластера:

1. Если стиль высокий и надежность высокая и размер высокий то технологичность высокая.

2. Если стиль средний и надежность средняя и размер средний то технологичность средняя.
3. Если стиль низкий и надежность низкая и размер низкий то технологичность низкая.
4. Если стиль высокий и надежность средняя и размер высокий то технологичность высокая.
5. Если стиль низкий и надежность низкая и размер средний то технологичность низкая.
6. Если стиль средний и надежность высокая и размер низкий то технологичность средняя.
7. Если стиль высокий и надежность низкая и размер высокий то технологичность высокая.
8. Если стиль низкий и надежность средняя и размер средний то технологичность низкая.

Для 2 кластера:

1. Если сложность высокая и стоимость высокая и функциональность высокая и применимость высокая то технологичность низкая.
2. Если сложность средняя и стоимость средняя и функциональность средняя и применимость средняя то технологичность средняя.
3. Если сложность низкая и стоимость низкая и функциональность низкая и применимость низкая то технологичность высокая.
4. Если сложность низкая и стоимость средняя и функциональность высокая и применимость высокая то технологичность высокая.
5. Если сложность средняя и стоимость низкая и функциональность низкая и применимость высокая то технологичность высокая.
6. Если сложность высокая и стоимость высокая и функциональность средняя и применимость средняя то технологичность низкая.
7. Если сложность средняя и стоимость средняя и функциональность высокая и применимость высокая то технологичность средняя.
8. Если сложность высокая и стоимость средняя и функциональность низкая и применимость средняя то технологичность высокая.

На основе производственных правил для первого кластера, которые являются одной из особенностей описания нечеткой системы наряду с нечеткой спецификацией параметров и нечетким (в виде лингвистических переменных) описанием входных и выходных переменных, построим на основе инструментов Matlab наглядное представление взаимосвязи технологичности программного продукта и факторов, влияющих на нее (рис. 4).

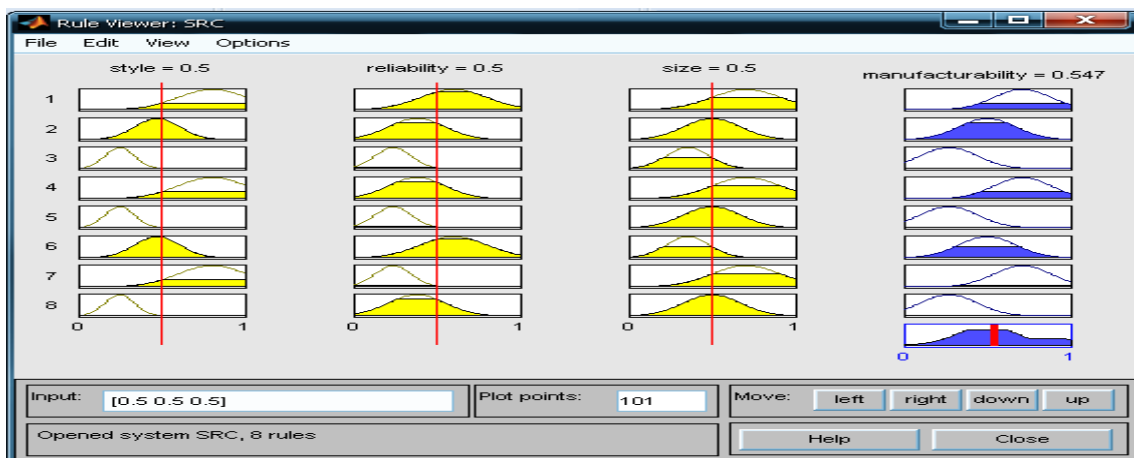


Рис. 4. Наглядное представление взаимосвязи технологичности программного продукта и факторов (метрик ПП) для первого кластера

**Дефазификация (переход к четкости).**

Дефазификация, осуществлённая в проведённом эксперименте, осуществлялась в три этапа:

Первый этап – эксперимент с первым кластером.

Второй этап - эксперимент со вторым кластером.

Третий этап – заключительный эксперимент с результатами первого и второго этапов.

Проведённые этапно эксперименты является необходимым элементом идентификации нелинейных зависимостей посредством изменений входных параметров («захватом» и смещением красной линии для поиска рациональных решений) для нечеткой базы знаний. Простейшим способом выполнения этой операции является поиск четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Значения входных параметров и результатов экспериментов по первому кластеру представлено в табл. 2.

Таблица 2. Значения входных параметров и результатов экспериментов по изменению их значений для первого кластера

Факторы № эксперимента	Style	Reliability	Size	Manufacturability1
1	0.102	0.175	0.199	0.336
2	0.524	0.512	0.488	0.557
3	0.946	0.861	0.801	0.685

Максимуму функции принадлежности Manufacturability1 достигается при параметрах Style=0.946, Reliability=0.861, Size=0.801.

Формулировка вывода для первого кластера демонстрируется на рис. 5.

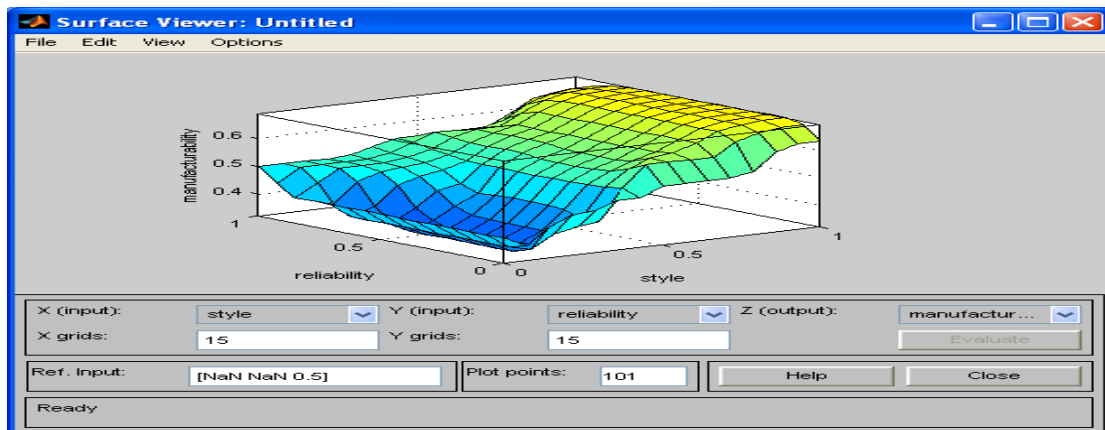


Рис. 5. Трёхмерное изображение результатов эксперимента для первого кластера

Результаты проведённого эксперимента для второго кластера приведено соответственно в табл. 3 и рис. 6, 7.

Таблица 3. Значения входных параметров и результатов экспериментов по изменению их значений для второго кластера

Факторы № экспер.	Complexity	Cost	Functionality	Maintainability	Manufacturability2
1	0.144	0.269	0.22	0.269	0.526
2	0.553	0.438	0.492	0.546	0.427
3	0.78	0.7	0.765	0.838	0.418

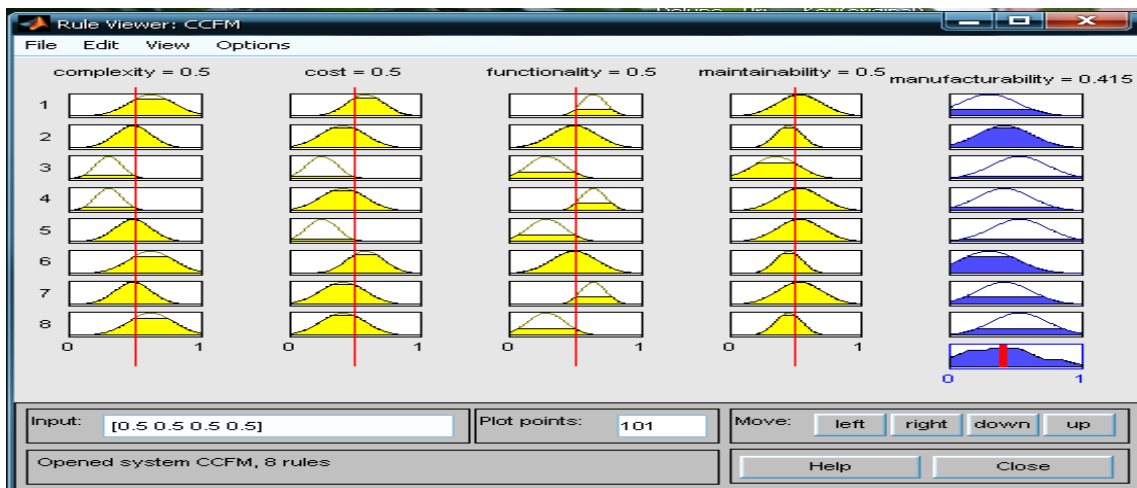


Рис. 6. Наглядное представление взаимосвязи технологичности программного продукта и факторов (метрик ПП) для второго кластера

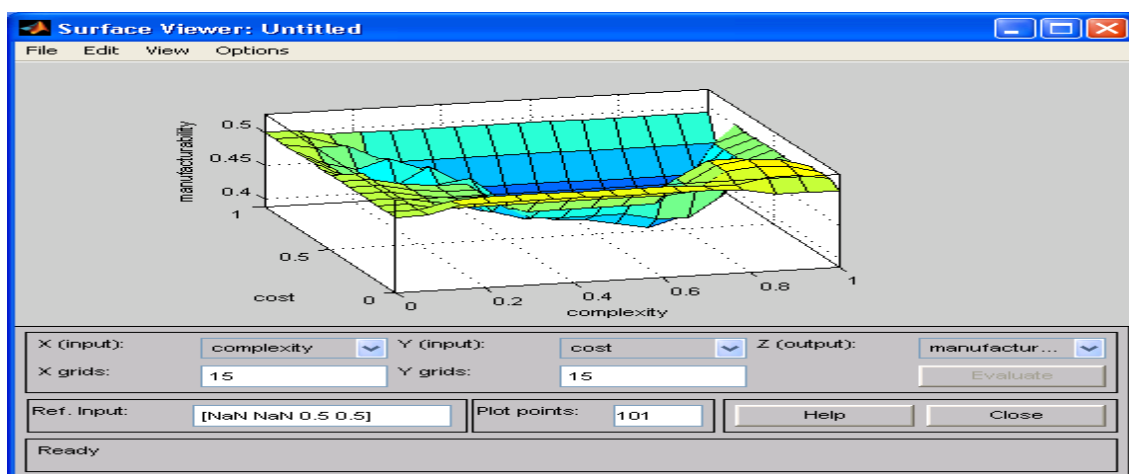


Рис. 7. Трёхмерное изображение результатов эксперимента для второго кластера

Для эксперимента по третьему этапу(использующие входные параметры первого и второго этапов соответственно) нечёткая база знаний по выходной ФП Manufacturability-union представлена ниже:

1. Если Manufacturability1 низкий и Manufacturability2 высокий, то Manufacturability-union низкий;
2. Если Manufacturability1 средний и Manufacturability2 средний, то Manufacturability-union средний;
3. Если Manufacturability1 высокий и Manufacturability2 низкий, то Manufacturability-union высокий;
4. Если Manufacturability1 высокий и Manufacturability2 высокий, то Manufacturability-union средний;
5. Если Manufacturability1 низкий и Manufacturability2 низкий, то Manufacturability-union средний;
6. Если Manufacturability1 высокий и Manufacturability2 средний, то Manufacturability-union высокий;
7. Если Manufacturability1 низкий и Manufacturability2 средний, то Manufacturability-union низкий;
8. Если Manufacturability1 средний и Manufacturability2 низкий, то Manufacturability-union средний;

Результаты проведённого эксперимента для заключительного этапа приведены в табл. 4 и рис. 8, 9.

Таблица 4. Значения входных параметров и результатов для заключительного этапа эксперимента

Факторы № эксперимента	Manufacturability1	Manufacturability2	Manufacturability-union
1	0.188	0.268	0.454
2	0.509	0.541	0.456
3	0.839	0.786	0.509

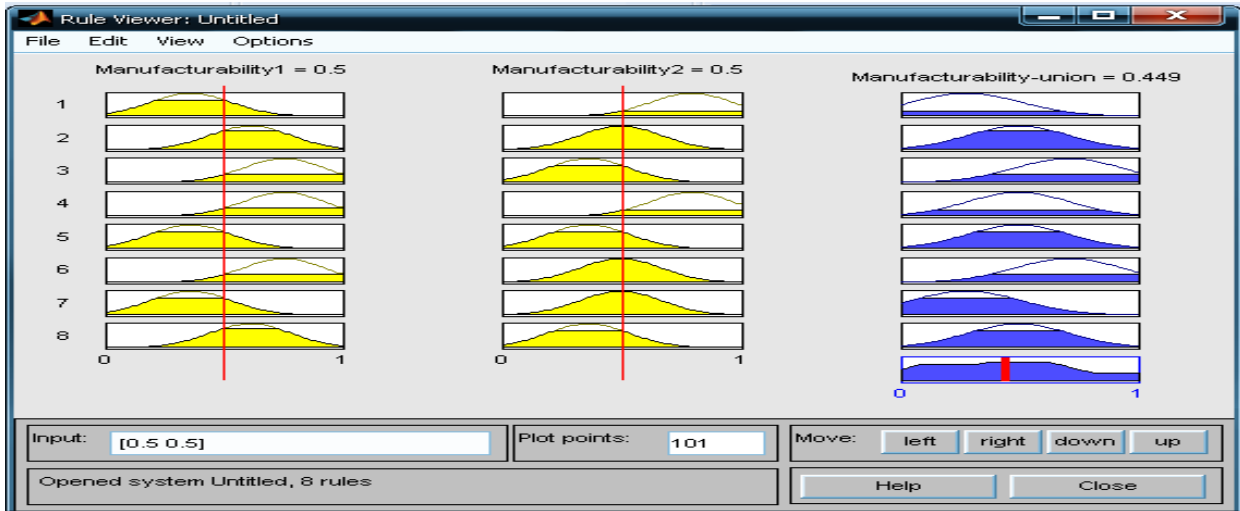


Рис. 8. Наглядное представление взаимосвязи технологичности программного продукта и факторов (метрик ПП) для заключительного этапа эксперимента

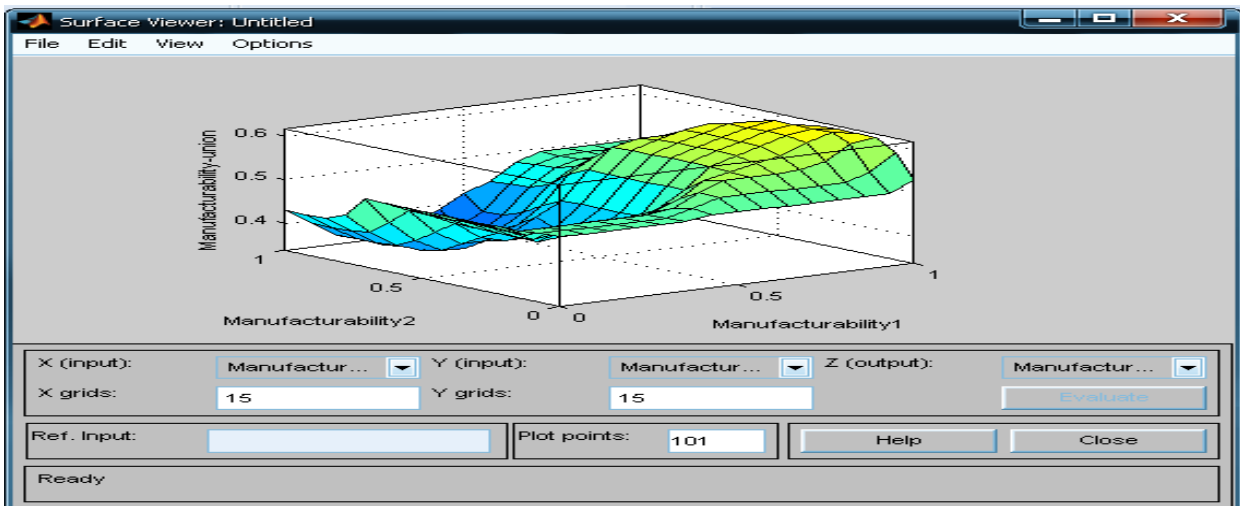


Рис. 9. Трёхмерное изображение результатов эксперимента для заключительного эксперимента

Максимуму функции принадлежности *Manufacturability-union* для заключительного эксперимента достигается при параметрах *Manufacturability1* =0.839, *Manufacturability2* =0.786 и равно 0.509.

Демонстрация вывода для первого кластера демонстрируется на рис. 9.

Когнитивный анализ и моделирование являются принципиально новыми элементами в структуре систем поддержки принятия решений. Технология когнитивного моделирования позволяет исследовать проблемы с нечеткими факторами и взаимосвязями, учитывать изменения внешней среды, использовать объективно сложившиеся тенденции развития ситуации в интересах лиц принимающих решение. Проведённый эксперимент по созданию демонстрационного прототипа системы поддержки принятия решений на основе когнитивной моде-

ли оценки технологичности программного продукта в среде Matlab, показал и подтвердил возможности применения такого подхода в программной инженерии. Учитывая сложность и неопределённость взаимосвязей между многочисленными метриками программных продуктов и собственно его технологичностью, дальнейшее исследование в этом направлении должно дать ощутимые результаты по обеспечению качества создаваемых программных продуктов.

### **Литература**

1. Смагин А.А., Куприянов А.А., Мельниченко А.С. Технологическая зрелость и технологическая готовность в программной инженерии // Автоматизация процессов управления. 2008. № 4(14). С. 62-70.
2. Технологии разработки программного обеспечения: учеб. / С. Орлов. СПб.: Питер, 2002. 464 с.: ил.
3. ISO/IEC 9126, Information Technology – Software quality characteristics and metrics (Part 1-4)
4. Кулинич А.А. Когнитивная система поддержки принятия решений «Канва» // Программные продукты и системы. 2002. № 3. С. 25-28.
5. Кулинич А.А. Субъектно-ориентированная система концептуального моделирования «Канва». Материалы 1-й Международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». Москва, октябрь, 2001 г.
6. Кулинич А.А. Методология когнитивного моделирования сложных плохо определенных ситуаций. Вторая международная конференция по проблемам управления (Москва, Институт проблем управления, 17-19 июня 2003 г.). Избранные труды. 219-227.
7. DataMining: учеб. пособие / И.А. Чубукова. 2-е изд., испр. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 382с.: ил., табл. (Серия «Основы информационных технологий»)
8. Ярушкина Н.Г. Основы нечётких и гибридных систем: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2004. 320 с.

## СЛУЧАЙНО-ВОЗМУЩЕННЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

*В.М. Журавлев, П.П. Миронов*

*Ульяновский государственный университет*

В работе рассматривается задача построения замкнутого описания усредненной динамики случайно-возмущенных конечномерных динамических систем. Задача замыкания усредненной системы уравнений, содержащей моменты случайных флуктуаций координат системы (система уравнений Рейнольдса), решается с помощью метода максимальной энтропии. Представлен вывод самой замкнутой системы уравнений для моментов случайных величин для динамических систем общего вида. Вычислена форма распределения флуктуаций, реализующегося при условии максимума энтропии.

### 1. Введение

Широко используемыми приемами анализа динамики случайно-возмущенных механических систем, описываемых уравнениями Гамильтона, являются различные методы усреднения. Одним из таких методов усреднения является метод усреднения по ансамблю траекторий механической системы, который связан с именем Осборна Рейнольдса (см. [1, 2, 3, 4]), который первым применил его для описания турбулентности. Метод Рейнольдса связан с представлением о турбулентном течении, как о случайном процессе. Введение случайных процессов в теорию означает, что мы отказываемся описывать процесс детально и предполагаем получить замкнутое описание динамики в среднем, т.е. только для средних параметров и моментов случайных величин. Поэтому в методе Рейнольдса исходная задача сводится к исследованию моментов распределений соответствующих случайных параметров среды (компонент скорости, давления, плотности и т.д.). Такой же подход применяется и для описания конечномерных динамических систем и, в частности, к задачам статистического описания сложной динамики механических систем.

Хотя методы описания систем на основе усреднения по ансамблю их состояний вблизи некоторых их “средних” состояний хорошо изучены и имеют широкий круг применения, однако основной трудностью описания систем по методу Рейнольдса является отсутствие универсальных рецептов замыкания системы уравнений для цепочки моментов случайных полей в системах. Эту проблему, возникающую в нелинейных системах, обычно называют проблемой замыкания моментов. Для решения проблемы замыкания цепочки уравнений Рейнольдса предлагался целый ряд идей и методов (см. например, [1, 2, 3, 5] и библиографию там), однако общепринятого решения этой проблемы до сих пор не найдено.

Одним из общих подходов к выводу уравнений для усредненных параметров нелинейных систем с хаосом является метод максимальной энтропии (ММЭ), заимствованный из концепций термодинамики и статистической физики [4]. Этот подход представляется наиболее точным и корректным, поскольку указывает естественный путь к отысканию состояний, вблизи которых в основном и происходит эволюция систем, что является основным признаком их наблюдаемости в экспериментах. Максимум энтропии обеспечивает условие того, что система находится вблизи такого своего макросостояния, которое реализуется на микроуровне максимальным числом способов. Поэтому она должна проводить основное время своего существования на множестве этих микросостояний (наблюдаемость). Однако общая формулировка такого подхода в ранее существовавших подходах [4], не была конкретизирована точной и универсальной формулировкой представления вариационного принципа максимума энтропии для исследуемых динамических систем. Такой подход был предложен в [6, 7, 8]. Основная идея его состоит в явном вычислении энтропии нелинейной гидродинамической системы в предположении ее локального равновесия и в последующем отыскании максимума этой найденной энтропии по усредненным параметрам сис-

темы. Такой подход можно назвать принципом вторичного максимума энтропии. Возможность повторно вычислять максимум энтропии системы связана с тем, что в случае достижения локального равновесия в системе каждая точка среды приходит к равновесию, вообще говоря, отличающемуся от равновесия соседних точек. В силу непрерывности среды параметры равновесия меняются непрерывно, что и отражается в изменчивости средних полей и моментов флуктуаций. Такое состояние можно назвать слабо неравновесным. Глобальное распределение усредненных полей и моментов при этом и будет определять величину энтропии различных типов локального равновесия. Естественно, что среди таких глобальных распределений должны существовать такие, которые обеспечивают максимум энтропии системы в целом среди всех возможных состояний с локальным равновесием. Основой предлагаемого подхода как раз и является метод отыскания таких состояний со вторичным максимумом энтропии.

Такой подход широко используется в задачах теории передачи информации по линиям связи [9], а так же в задачах обработки данных, в частности в теории спектрального оценивания временных рядов [10, 11, 12]. Основой применения ММЭ в этих областях как раз и является возможность вычислять максимум энтропии системы по усредненной информации о ее состоянии.

## 2. Многомерный метод максимальной энтропии с высшими моментами

Для  $N$ -мерной вещественной непрерывной случайной величины  $S = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$ , принимающей значения  $x = \{x_1, \dots, x_N\} \in R^N$ , рассмотрим задачу отыскания совместного распределения  $\rho_S(x) = \rho_{\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)}(x_1, \dots, x_N)$  имеющего максимальную энтропию (по Шеннону) при заданных моментах случайной величины  $S$  вплоть до фиксированного порядка  $Q_i$  по каждой координате  $x_i$ :

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N} = \frac{1}{Z} \int_{R^N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N} \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad 0 \leq k_1 \leq Q_1, \dots, 0 \leq k_N \leq Q_N, \quad (1)$$

где  $Z$  - статистическая сумма, вычисляемая из условия нормировки:

$$\int_{R^N} \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1. \quad (2)$$

Заметим, что четность порядков необходима для обеспечения сходимости интегралов в (1). Введем понятие мультииндексов  $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$  как совокупность индексов  $k_1, k_2, \dots, k_N$ . Определим для мультииндекса операцию модуля по формуле:  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_N$ . Тогда имеют смысл следующие сокращенные обозначения:  $\Lambda_k = \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}$ ,  $M_k = M_{k_1, k_2, \dots, k_N}$  полезные для дальнейшего. Поставленная задача сводится к вариационной задаче, которую мы в дальнейшем будем называть первой вариационной задачей. Первая вариационная задача сводится к отысканию максимума функционала:

$$H = - \int_{R^N} \rho_S(x) \ln \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (3)$$

при условии, что заданы числовые значения  $M^{(0)}$  всех моментов  $M = (M_{k_1, k_2, \dots, k_N})$  (1):

$M = M^{(0)}$ . С помощью метода множителей Лагранжа переходим от задачи на условный максимум к задаче на абсолютный максимум для функционала:

$$\tilde{H} = - \int_{R^N} \rho_S(x) \ln \rho_S(x) dx_1 dx_2 \dots dx_N + \sum_{|k|=0}^{|Q|} \Lambda_k (M_k - M_k^{(0)}). \quad (4)$$

Здесь  $Q = \{Q_1, \dots, Q_N\}$  - мультииндекс порядков моментов по каждой координате:  $|Q| = Q_1 + \dots + Q_N$ .

Искать решение этой вариационной задачи будем среди распределений следующего общего вида:



$$\rho_S(x) = \frac{1}{Z(L)} \exp \left\{ - \sum_{|k|>0}^{|Q|} \Lambda_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N} \right\}, \quad (5)$$

где  $Z(L)$  - соответствующая статистическая сумма:

$$Z(L) = \int_{R^N} \exp \left\{ - \sum_{|k|>0}^{|Q|} \Lambda_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N} \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_N = 1. \quad (6)$$

Здесь введено обозначение  $L = (\Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N})$ . Исходя из этого определения, связь между множителями Лагранжа  $L$  первой вариационной задачи и моментами  $M$  может быть представлена в виде следующей формулы:

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}}. \quad (7)$$

Не трудно теперь видеть, что решение вариационной задачи  $\delta \tilde{H} = 0$ , дается выражением (5) при условии, что совокупность множителей Лагранжа  $L$  вычисляется из соотношений:

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_N}^{(0)} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, k_2, \dots, k_N}}. \quad (8)$$

Соответствующее максимальное значение функционала энтропии (3) можно записать в следующем общем виде:

$$H_{max} = \ln Z(L) - \sum_{|k|>0}^{|Q|} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k}. \quad (9)$$

Это соотношение позволит нам перейти к решению второй вариационной задачи, связанной с динамикой гамильтоновских систем, к формулировке которой мы теперь переходим.

### 3. Метод Рейнольдса для конечномерных динамических систем

Метод Рейнольдса в применении к конечномерным динамическим системам [1, 6, 8] сводится к вычислению усредненных уравнений относительно средних значений динамических переменных и их моментов из самих исходных уравнений динамической системы. При этом предполагается, что исходные уравнения в первоначальном виде могут содержать аддитивные случайные добавки, которые исчезают после усреднения по ансамблю. Системы с такими внешними случайными добавками в дальнейшем мы будем называть случайно-возмущенными динамическими системами. Скрытое внешнее воздействие внешних случайных сил на изменения средних значений динамических переменных случайно-возмущенных систем в этом случае проявляется в зависимости со временем моментов случайных динамических переменных. Поскольку после усреднения в уравнениях для средних значений динамических переменных системы случайные аддитивные добавки исчезают, то отличить эти системы с первоначальным присутствием внешних сил или их отсутствием оказывается не возможным. Это может служить основанием для предположения, что усредненные динамики таких систем неотличимы и объединить их для общего анализа.

Рассмотрим  $N$ -мерную динамическую систему  $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ , координаты которой описываются системой дифференциальных уравнений общего вида:

$$\dot{x}_\alpha = f_\alpha(x, t) + \varepsilon_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (10)$$

где предполагается, что случайные внешние возмущения  $\varepsilon_\alpha$  обладают тем свойством, что при усреднении по ансамблю всех возможных реализаций этих случайных процессов их математические ожидания равны нулю:

$$\langle \varepsilon_\alpha^{(x)} \rangle = 0.$$

При этом все детерминированные составляющие обобщенных силовых функций, действующих на систему, должны быть учтены в записи силовых функций  $f_\alpha(x, t)$ .

Вывод уравнений Рейнольдса производится следующим образом. Случайные внешние возмущения системы приводят к возникновению случайных возмущений ее динамических параметров, которые можно представить в следующем виде:

$$x = X + x', \quad \dot{x} = \dot{X} + \dot{x}',$$

где  $X = \langle x \rangle$  - средние по ансамблю динамические переменные системы, а  $x'$  - случайные их возмущения с нулевыми математическими ожиданиями:  $\langle x' \rangle = \langle \dot{x}' \rangle = 0$ . Следуя методу Рейнольдса [1], уравнения для усредненных параметров системы (10) будут иметь следующий вид:

$$\dot{X}_\alpha = \langle f_\alpha(x, t) \rangle = F_\alpha(X, M, t), \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Здесь  $F(X, t) = \langle f(x, t) \rangle$  - усредненные силовые функции, а  $M$  - совокупность тензоров всех моментов случайных флуктуаций с компонентами  $M_k(t) = M_{k_1 \dots k_N} = \langle x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} \rangle$  и введен мультииндекс  $k = (k_1, \dots, k_N)$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_N$ . Представляя силовые функции  $f(x, t)$  в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $x = X$ , результат вычисления усредненной силовой функции  $F$  можно записать в следующем виде:

$$F_\alpha(X, M, t) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C(k) \frac{\partial^{|k|} f_\alpha(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=X} \langle x'^k \rangle = \sum_{|k|=0}^{\infty} C(k) \frac{\partial^{|k|} f_\alpha(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=X} M_k(t), \quad (12)$$

где  $C(k) = (k_1! \dots k_N!)^{-1}$ . По определению:  $\langle x'_\alpha \rangle = M_{1_\alpha 0} = 0$ , где мультииндексы  $1_\alpha$  и  $0$  имеют следующие компоненты:

$$1_\alpha = \{q_1, q_2, \dots, q_N\} : q_\beta = \begin{cases} 0, & \beta \neq \alpha, \\ 1, & \beta = \alpha, \end{cases} \quad 0 = \{0, 0, \dots, 0\}.$$

Для дальнейшего наиболее важным обстоятельством является то, что усредненные силовые функции являются линейными функциями моментов  $M$ .

#### 4. Метод максимальной энтропии

Система уравнений Рейнольдса (11) содержат кроме средних значений координат  $X$  еще и моменты этих величин  $M_k$ , для которых уравнения отсутствуют. Поэтому для замыкания этой системы уравнений воспользуемся методом максимальной энтропии в форме, предложенной в [6, 7, 8]. Идея использования метода максимальной энтропии для замыкания системы уравнений Рейнольдса состоит в том, что распределения, имеющие максимум энтропии, описывают макросостояния систем, которые реализуются наибольшим числом микросостояний. Последнее означает, что такие состояния системы должны наблюдаться гораздо чаще, чем любые другие возможные состояния системы.

Рассмотрим непрерывное вероятностное распределение  $\rho_{\{x\}[t_1, t_N]}$ , являющееся распределением непрерывного случайного процесса  $S$  с  $N$  переменными  $x'(t) = \{x'_1(t), \dots, x'_N(t)\}$ , заданного на интервале времени  $[t_1, t_2]$ . Следуя идеологии метода максимальной энтропии, для решения задачи замыкания уравнений Рейнольдса необходимо максимизировать функционал энтропии непрерывного распределения  $\rho_{\{x\}[t_1, t_N]}$  при условии, что на моменты этого распределения накладываются дополнительные условия, которые сводятся к совокупности из  $N$  усредненных уравнений Рейнольдса (11), выполняющихся в каждый момент времени  $t \in [t_1, t_2]$ . Формально, эта задача сводится к непрерывному аналогу задачи о максимуме энтропии, рассмотренной в разделе 2 данной статьи. Выражение для энтропии системы с распределением  $\rho_{\{x\}[t_1, t_2]}$  можно условно записать в виде непрерывного интеграла:

$$S = - \int \rho_{\{x\}[t_1, t_2]} \ln \rho_{\{x\}[t_1, t_2]} D\{x'\}[t_1, t_2].$$

Однако в реальности исследование такого рода выражений является чрезвычайно сложным. Поэтому возникает необходимость использовать некоторые упрощающие ситуацию свойства исследуемых уравнений. Одним из таких важных свойств уравнений Рей-

нольдса (11) является их локальность. Поскольку уравнения (11) выполняются в каждый момент времени независимо, то континуальное распределение  $\rho_{\{x\}[t_1, t_2]}$ , доставляющее максимум энтропии  $S$ , должно обладать свойством независимости случайных величин  $x'(t)$  и  $x'(t')$  для любых двух моментов времени  $t \in [t_1, t_2]$  и  $t' \in [t_1, t_2]$ . Такой вывод нетрудно сделать, анализируя аналогичную задачу с дискретным временем и, затем, переходя к пределу с непрерывным временем [9].

Энтропия совместных распределений независимых случайных величин обладает свойством аддитивности (см., например, [9]). Независимость векторов  $x'(t)$  в различные моменты времени означает, что  $\rho_{\{x\}[t_1, t_2]}$  можно представить в виде континуального произведения удельных распределений  $\rho_{x'}(x|t)$ . Мы будем полагать, что выполнены все необходимые и достаточные условия для того, что бы можно было бы записать следующее выражение:

$$\ln \rho_{\{x\}[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \ln \rho_{x'}(x|t) dt,$$

являющееся следствием требования указанной попарной независимости  $x'(t)$  и  $x'(t')$  для  $t \neq t'$ . В силу этого выражение для энтропии для континуального распределения  $\rho_{\{x\}[t_1, t_2]}$  можно записать в следующем общем виде:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) dt, \quad (13)$$

где  $\sigma(t)$  - удельная энтропия распределения  $\rho_{x'}(x|t)$ :

$$\sigma(t) = - \int \rho_{x'}(x|t) \ln \rho_{x'}(x|t) dx'_1 \cdots dx'_N.$$

Уравнения (11) можно рассматривать как уравнения на моменты случайной величины  $x'(t)$ . В силу этого, задача о максимуме энтропии сводится к задаче, рассмотренной в первом разделе. В этом случае вид удельного распределения вероятностей  $\rho_{x'}(x|t)$  будем искать в виде, аналогичном (5):

$$\rho_{x'}(x|t) = \frac{1}{Z(L)} \exp \left\{ - \sum_{|\mathbf{k}|>0} \Lambda_{\mathbf{k}} x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N} \right\}, \quad (14)$$

где статистическая сумма определяется по аналогии с (6) следующим образом:

$$Z(\Lambda) = \int_{R^N} \exp \left\{ - \sum_{|\mathbf{k}|>0} \Lambda_{\mathbf{k}} x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N} \right\} dx'_1 \cdots dx'_N. \quad (15)$$

При этом в этих соотношениях  $\Lambda_{kl} = \Lambda_{k_1, \dots, k_N}$  - множители Лагранжа в первой вариационной задаче, а в качестве удельной энтропии  $\sigma(t)$  мы можем взять выражение (9) для максимального значения энтропии конечномерного (удельного) распределения в момент времени  $t$ :

$$\sigma = \ln Z(L) - \sum_{|\mathbf{k}|} \Lambda_{\mathbf{k}} \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{\mathbf{k}}}. \quad (16)$$

Предполагается, что в соотношениях (14) и (15) сумма по каждой компоненте мультииндекса  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  берется до своего максимального порядка, содержащегося в мультииндексе  $Q$ . В дальнейшем мы будем полагать, что максимальный порядок может быть равным бесконечности:  $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n = \infty$ . Такая ситуация возникает всякий раз, когда силовые функции зависят от координат динамической системы не полиномиальным образом и могут быть представлены в виде бесконечных рядов Тейлора. Поэтому верхний предел в суммах мы будем опускать, полагая, что величина этого предела будет определяться конкретной задачей.

Исходя из этих рассуждений, решение задачи о максимуме энтропии континуального распределения рассматриваемой задачи сводится к отысканию условного максимума функционала:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \ln Z(L) - \sum_{|k|} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k} \right) dt, \quad (17)$$

Поскольку функционал (17) содержит только множители Лагранжа  $\Lambda_k$ , а уравнения (11) - моменты  $M_k$ , то к уравнениям следует добавить еще и общие соотношения, связывающие  $\Lambda_k$  и  $M_k$ :

$$M_{k_1, \dots, k_N} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, \dots, k_N}}. \quad (18)$$

В результате этих построений задача о замыкании уравнений Рейнольдса (11) на основе метода максимальной энтропии сводится к отысканию максимума функционала (17) при условии выполнения уравнений (11). Эту задачу мы будем называть второй вариационной задачей. С помощью метода множителей Лагранжа эта условная вариационная задача сводится к отысканию безусловного максимума следующего функционала

$$\begin{aligned} \bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \ln Z(L) - \sum_{|k|>0} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k} \right) dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha [\dot{X}_\alpha - F_\alpha] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{|k|>0} G_k \left[ M_k + \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k} \right] dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь функции  $A_\alpha(t)$  и  $G_k(t)$  - множители Лагранжа второй вариационной задачи на максимум функционала (19). Вариации всех функций  $X_\alpha(t)$ ,  $M_k(t)$  и множителей Лагранжа первой  $\Lambda_k(t)$  и второй задач  $A_\alpha(t)$  и  $G_k(t)$  считаются независимыми.

### 5. Полная система уравнений для моментов

Полная система уравнений, соответствующая максимуму функционала (19), теперь может быть записана в следующем виде:

$$\dot{X}_\alpha = F_\alpha, \quad \dot{A}_\alpha + \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial F_\beta}{\partial X_\alpha} A_\beta = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N.; \quad (20)$$

$$G_k = \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial F_\beta}{\partial M_k} A_\beta = C(\mathbf{k}) \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f_\beta(X, t)}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_N^{k_N}} A_\beta, \quad (21)$$

$$M_{k_1, \dots, k_N} = - \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1, \dots, k_N}}, \quad \sum_{|k|>0} (\Lambda_k - G_k) \frac{\partial^2 \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k \partial \Lambda_m} = 0. \quad (22)$$

Соотношения (22) являются системой линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $(\Lambda_k - G_k)$  с матрицей вторых производных функции  $\ln Z(L)$ . Если эта матрица не вырождена, то эта система имеет единственное решение:

$$G_k = \Lambda_k. \quad (23)$$

Из этого соотношения и (21) следует, что коэффициенты  $\Lambda_k$  не зависят явно от моментов  $M$ . Это свойство является следствием линейной зависимости усредненных силовых функций от моментов.

Пользуясь этим принципом и тем, что явно связь между  $\ln Z(L)$  и  $M_k$  не используется при выводе уравнений, функционал (19) и его модификации можно записывать в сокращенном виде:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \ln Z(L) - \sum_{|k|>0} \Lambda_k M_k \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha [\dot{X}_\alpha - F_\alpha] dt.$$

В этом случае множитель Лагранжа  $G_k$  явно не возникают, а соотношения (22) при необходимости считаются выполняющимися по определению.

Как и в классической механике, из (20) вытекает существование закона сохранения, аналогичного закону сохранения полной энергии, который далее мы будем называть законом сохранения удельной энтропии. Это закон имеет следующий вид:

$$\Xi = \sum_{\alpha=1}^N [A_\alpha \dot{X}_\alpha] - \sigma(L) \equiv \sum_{\alpha=1}^N [A_\alpha F_\alpha(X, M, t)] - \sigma(L) = const,$$

и выполняется в случае явной независимости функций  $F(X, M)$  от времени. Здесь

$$\sigma = \ln Z(L) - \sum_{|k|>0} \Lambda_k \frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_k}.$$

Рассматривая  $\Xi$  как функцию параметров системы, уравнения (20) - (22) можно записать в форме гамильтоновских уравнений со связями:

$$\begin{aligned} \dot{X}_\alpha &= \frac{\partial \Xi}{\partial A_\alpha}, \quad \dot{A}_\alpha = -\frac{\partial \Xi}{\partial X_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N; \\ \Lambda_k &= \frac{\partial \Xi}{\partial M_k}, \quad M_{k_1 \dots k_N} = -\frac{\partial \ln Z(L)}{\partial \Lambda_{k_1 \dots k_N}}. \end{aligned} \quad (24)$$

### 6. Удельная плотность вероятности

Для анализа полученной системы уравнений введем производящую функцию, пользуясь следующим общим правилом:

$$L(z, X, A, t) = \sum_{|k|>0} \Lambda_k z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}. \quad (25)$$

В этом соотношении учитываются и условия  $\langle x'_\alpha \rangle = 0$ . Используя связь между производными функции  $F$  (21), находим:

$$L(z, X, A, t) = \left[ \sum_{|k|>0} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N} C(k) \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial^{|k|} f_\beta(X, t)}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_N^{k_N}} A_\beta \right]. \quad (26)$$

Сворачивая ряд Тейлора (26), получаем:

$$L(z, X, A, t) = h(z + X, A, t) - h(X, A, t) = \sum_{\beta=1}^N [f_\beta(z + X, t) - f_\beta(X, t)] A_\beta. \quad (27)$$

В результате удельное распределение и его статистическая сумма имеют вид:

$$\rho_{x'}(z | t) = \frac{1}{Z(X, M, A, t)} e^{-L(z, X, M, A, t)}, \quad Z(X, M, A, t) = \int_{R^N} e^{-L(z, X, A, t)} dz^N. \quad (28)$$

Используя это компактное представление для удельного распределения, усредненные силовые функции можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} F_\alpha(X, t) &= \langle f_\alpha(X + x', t) \rangle = f_\alpha(X, t) + \sum_{|k|>0} C(k) M_k \frac{\partial^{|k|} f_\alpha(X, t)}{\partial X^k} = \\ &= f_\alpha(X, t) + \frac{1}{Z(X, M, A, t)} \sum_{|k|>0} \int_{R^N} \frac{z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}}{k_1! \dots k_N!} \frac{\partial^{|k|} f_\alpha(X, t)}{\partial X^k} e^{-L(z, X, A, t)} dz^N = \\ &= f_\alpha(X, t) + \frac{1}{Z(X, M, A, t)} \int_{R^N} [f_\alpha(z + X, t) - f_\alpha(X, t)] e^{-L(z, X, A, t)} dz^N = \\ &= f_\alpha(X, t) - \frac{\partial \ln Z(X, M, A, t)}{\partial A_\alpha} \end{aligned}$$

В результате уравнения усредненной динамики (24) можно переписать следующим образом:

$$\dot{X}_\alpha = f_\alpha(X, t) - \frac{\partial \ln Z(X, M, A, t)}{\partial A_\alpha}, \quad \dot{A}_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{\partial f_\beta(X, t)}{\partial X_\alpha} - \frac{\partial^2 \ln Z(X, M, A, t)}{\partial A_\beta \partial X_\alpha} \right) A_\beta, \\ \alpha = 1, \dots, N.$$

Анализ полученных уравнений сводится теперь к анализу статистической суммы удельного распределения, которые определяются свойствами производящей функции или, в конечном итоге, свойствами силовых функций  $f_\alpha(x, t)$ .

### 7. Системы с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим встречающиеся часто на практике в задачах механики, динамики кластеризации и химической кинетики системы с квадратичной нелинейностью, для которых:

$$f_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^N K_{\alpha\beta} x_\beta + \sum_{\beta, \gamma=1}^N C_{\alpha\beta\gamma} x_\beta x_\gamma. \quad (29)$$

Коэффициенты  $C_{\alpha\beta\gamma}$  являются постоянными. В этом случае без труда находим:

$$L = \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha (f_\alpha(z + X) - f_\alpha(X)) = \sum_{\beta=1}^N A_\alpha K_{\alpha\beta} z_\beta + \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^N A_\alpha [C_{\alpha\beta\gamma} z_\beta z_\gamma + 2C_{\alpha\beta\gamma} z_\beta X_\gamma].$$

Статистическая сумма удельного распределения в этом случае должна иметь следующий вид:

$$Z(X, A, t) = \int_{R^N} \exp\left\{-\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha z_\alpha - \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^N A_\alpha C_{\alpha\beta\gamma} z_\beta z_\gamma\right\} dz^N. \quad (30)$$

Здесь  $\lambda_\gamma = \sum_{\beta=1}^N A_\alpha K_{\alpha\gamma} + 2 \sum_{\alpha, \beta}^N C_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha X_\beta$ . Свойства этого интеграла и определяют условия существования и свойства усредненной динамической системы.

Интеграл справа в соотношении (30) существует при интегрировании по всему вещественному пространству  $R^N$ , тогда и только тогда, когда квадратичная форма в показателе экспоненты подинтегрального выражения положительно определена:

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^N A_\alpha(t) C_{\alpha\beta\gamma} z_\beta z_\gamma \geq 0.$$

Если это условие не выполняется, то полученное решение вариационной задачи является фиктивным, поскольку интеграл справа в (30) не существует при интегрировании по всему  $R^N$ . В этом случае полученное решение может существовать лишь при определенных дополнительных ограничениях. Аналогичные требования, связанные с существованием статистической суммы относятся и к общему случаю. Если статистическая сумма не существует, то это означает, что в исходной постановке задачи при заданных силовых функциях  $f_\alpha(x, t)$  не существует решения задачи на максимум энтропии. Это означает не существование решения с независимыми флуктуациями  $x'(t)$  в различные моменты времени, что предполагалось при выводе функционала первой вариационной задачи. Однако при некоторых дополнительных ограничениях такое решение может существовать. Такие ограничивающие условия будем в дальнейшем называть стабилизирующими условиями.

Примером может служить система Вольтерра-Лотки [13]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy + \varepsilon_1, \quad \dot{y} = -\mu y - \nu xy + \varepsilon_2, \quad (31)$$

Для этой системы находим:

$$L = (A_1\alpha + (A_2\nu - A_1\beta)Y)z_1 + ((A_2\nu - A_1\beta)X - A_2\mu)z_2 + (A_2\nu - A_1\beta)z_1z_2.$$

Эта функция не является положительно определенной на всем вещественном пространстве. Статистическая сумма для распределения с такой функцией  $L$  не может существовать без дополнительных условий. Таким условием может быть, например, требование

$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ . Если же в задаче допускаются флуктуации на всем вещественном пространстве, то в задачу приходится вносить дополнительные условия на дисперсии флуктуаций. Например, задача регуляризируется, если считать дисперсии известными функциями времени:

$$\langle x'^2 \rangle = \sigma_1^2(t), \quad \langle y'^2 \rangle = \sigma_2^2(t). \quad (32)$$

В этом случае функция  $L$  примет вид:

$$L = (A_1\alpha + (A_2\nu - A_1\beta)Y)z_1 + ((A_2\nu - A_1\beta)X - A_2\mu)z_2 + (A_2\nu - A_1\beta)z_1z_2 + A_3z_1^2 + A_4z_2^2,$$

где  $A_3$  и  $A_4$  - множители Лагранжа, соответствующие условиям (32). В результате распределение становится нормируемым. Решение такой задачи исследовалось в работе [13]. Другие примеры такого рода приведены в работе [14].

### 8. Заключение

В работе построен метод замыкания систем усредненных уравнений Рейнольдса для случайно-возмущенных конечномерных динамических систем с помощью метода максимальной энтропии. Результатом применения метода к таким динамическим системам является совокупность уравнений, имеющих форму уравнений Гамильтона со связями, для которой роль функции Гамильтона выполняет удельная энтропия системы. В частности, на траекториях системы удельная энтропия сохраняется. В работе представлен общий вывод функции распределения для флуктуаций в системе и силовых функций, которые выражаются через производные от статистического веса распределения. Это позволяет исследовать поведение различных систем под действием внешних или внутренних флуктуаций.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 11-01-00747-а, а так же при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ.

### Литература

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, (1967), 639 С; Ч.2 (1969), 720 с.
2. Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, (1998), 343 с.
3. Фрик П.Г. Турбулентность: Модели и подходы. Ч.1 Пермь, (1998), 107 С.; Ч.2 Пермь, (1999), 138 с.
4. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: «Янус-К», (2002), 284 с.
5. Николаевский В.Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности. В сб. Вихри и волны. Серия Новое в зарубежной науке N 33. Механика / Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 266 (1984).
6. Журавлев В.М., Шляпин В.А. Нелинейный мир, 2008, Т.6, N7, с. 352-363.
7. Журавлев В.М. ЖТФ, 2009, N1, с. 16-27.
8. Журавлев В.М., Шляпин В.А. В сб. Прикладная математика и механика, 2009, УлГТУ, Ульяновск, с. 72-88.
9. Стратанович Р.Л. Теория информации. М.: Со. радио (1975), 424 с.
10. Фриден Б.Р. Оценки, энтропия, правдоподобие. ТИИЭР, 73, N 12, 78 (1985).
11. Burg J.P. In proc / 37-th Meet. Society of Exploration Geophysicists. Oklahoma city, Oct. 31, 1967.
12. Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе. Преп. МГИ АН УССР, 1986. Ч. 1, 2.
13. Журавлев В.М., Миронов П.П. Динамика случайно-возмущенной системы Вольterra-Лотки и метод максимальной энтропии. Нелинейный мир, Т.9, N 4, 2011. С. 201-212.
14. Журавлев В.М., Миронов П.П. Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2013. N1. С. 1-9.

УДК 681.324

## АНАЛИЗ ДОСТИЖИМОСТИ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ СИНХРОННОГО RS-ТРИГГЕРА

*В.В. Кожевников, К.В. Вислов, Н.П. Никонов, А.В. Шурмакин*

### Введение

Анализ достижимости устойчивых состояний синхронного RS-триггера выполняется на основе метода математического моделирования логических схем цифровых автоматов, приведенного в работе [1]. В настоящей работе рассматриваются процедуры анализа достижимости синхронного RS-триггера. Процедуры анализа асинхронного RS-триггера рассмотрены в работе [2].

Отличительная особенность синхронного RS-триггера заключается в наличии схемы синхронизации. Изменение состояния синхронного RS-триггера со статическим входом синхронизации происходит только в момент подачи положительного уровня тактового импульса (синхросигнала). В работе анализ достижимости выполняется как для положительного тактового импульса, так и для отрицательного.

### 1. Процедура построения математической модели синхронного RS-триггера

Структурная схема синхронного RS-триггера может быть представлена в виде маркированного графа (рис. 1).

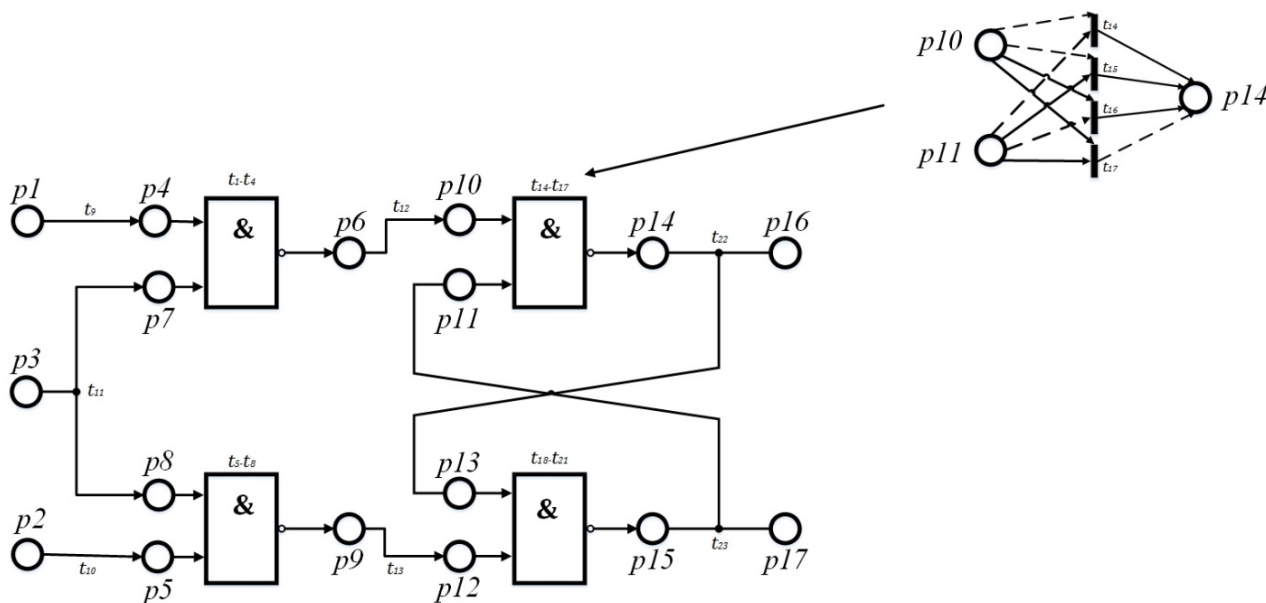


Рис. 1. Маркированный граф схемы синхронного RS-триггера

Маркированный граф схемы синхронного RS-триггера в свою очередь может быть представлен в виде матрицы инцидентности  $A = A^+ - A^-$ , где  $A^-$  - матрица, задающая множество отношений между входными позициями и переходами,  $A^+$  - матрица, задающая множество отношений между переходами и выходными позициями переходов. Таблицы истинности компонентов схемы, где единичные значения входных переменных берутся со знаком минус, а выходные со знаком плюс, представляют собой матрицы инцидентности компонентов.

Матрица инцидентности могут быть представлена в следующем виде:









Разложение вектора  $\Delta\mu_2$  на вектор начальной  $\mu_{20}$  и конечной разметки  $\mu_{2f}$  на множестве позиций разрыва обратных связей  $P^q$  выполняется следующим образом:

$$\mu_{20}(P^q) = A^-(P^q, T)\tau_2$$

$$\mu_{20}(P^q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{20} = [11100000001000000]$$

$$\mu_{2f}(P^q) = A^+(P^q, T)\tau_2$$

$$\mu_{2f}(P^q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{2f} = [00000000001010011]$$

На множестве всех решений можно построить диаграмму переходов и состояний (диаграмму Мура) RS-триггера (рис. 2):

Решения  $\tau_{33}$  и  $\tau_{34}$ ,  $\tau_{35}$  и  $\tau_{36}$  являются альтернативными для одной и той же начальной разметки и позволяют преодолевать неустойчивое состояние RS-триггера {11}.

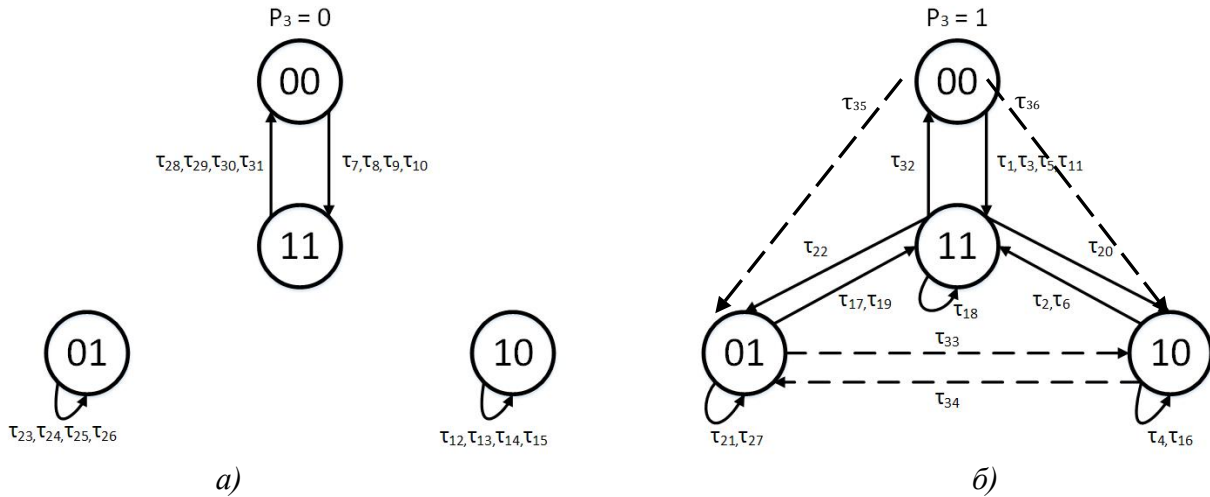


Рис. 2. Диаграмма Мура синхронного RS-триггера.  
 а) при нулевом значении синхросигнала; б) при единичном значении синхросигнала

#### 4. Процедура построения протоколов достижимости устойчивых состояний синхронного RS-триггера.

Задача построения протоколов достижимости устойчивых состояний сводится к вычислению последовательности векторов запуска переходов и текущей разметки сети для каждого вектора  $\tau$  начиная с вектора  $\mu_0$  и до тех пор, пока не будет достигнута разметка  $\mu_f$ .

Последовательность векторов запуска переходов и векторов текущей разметки может быть получена путём итеративного решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mu_k = \mu_{k-1} + A \cdot u_k, \quad (2)$$

где  $\mu_k$  – вектор текущей разметки сети,  $u_k$  – вектор запуска переходов в сети, для которого на каждом шаге итерации  $k = 1..n$  выполняется условие:

$$\mu_{k-1} + A \cdot u_k \geq 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) определяет правило смены разметки сетей Петри, условие (3) - правило запуска переходов сетей Петри соответственно. Каждый переход, входящий в состав вектора  $\tau$ , проверяется на выполнение условия (3). Все переходы, удовлетворяющие условию (3), составляют вектор  $u_k$ . На каждом шаге итерации  $\tau = \tilde{\tau} - u_k$ .

Для решения  $\{\tau_2, \mu_2\}$  процедура построения протоколов начинается с начальной разметки  $\mu_{20} = [111100000001000000]$

В итоге для  $\tau_2$  получаем следующую последовательность векторов запуска переходов и текущих разметок:

$\tau_2 = [000100011111000100100011]$	$\mu_{20} = [111100000001000000]$
$u_{21} = [000000001110001001000000]$	$\mu_{21} = [00011011000001100]$
$u_{22} = [00010001000000000000011]$	$\mu_{22} = [00000000001010011]$
	$\mu_{2f} = [00000000001010011]$

Аналогичным образом могут быть получены протоколы достижимости для всего множества решений уравнения состояний синхронного RS-триггера. В результате проведенного эксперимента установлено, что для решений уравнения  $\tau_4, \tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22}$  не выполняется условие безопасности протоколов достижимости. Причина заключается в некорректном выборе точек разрыва обратной связи. Приняв в качестве точек разрыва обратных связей вершины  $p_{14}$  и  $p_{15}$ , получим корректные протоколы.

#### 5. Процедура построения протоколов функционирования синхронного RS-триггера.

В настоящем разделе рассматривается процедура построения протоколов достижимости синхронного RS-триггера с учетом реальной длительности сигналов и задержек компонентов схемы (временных диаграмм).

В сетевой модели задача построения протоколов достижимости возможных состояний, в том числе и неустойчивых, сводится вычислению последовательности векторов запуска переходов и текущей разметки сети (дерева достижимости), начиная с заданной разметки сети  $\mu_0$  и до тех пор, пока сеть не перейдет в устойчивое состояние.

Соответствующая последовательность векторов запуска переходов и векторов текущей разметки может быть получена путём итеративного решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mu_k = \mu_0 + A^{+1} * u_k, \quad (4)$$

где для каждого вектора запуска переходов  $u_k$  выполняется следующее условие:

$$\mu_{k-1}(P^-) - A^{-1} * u_k = 0 \quad (5)$$

где  $P^-$  - множество входных позиций переходов.

Исходное состояние RS-триггера является «неопределенным» и задаётся как нулевое неустойчивое состояние. Вектору текущей разметки присваивается значение вектора начальной разметки синхронного RS-триггера. В случае подачи на вход RS-триггера сигнала Reset при единичном синхросигнале получим следующий протокол:

$u_{11} = [100010000110010001000000]$	$\mu_{10} = [011000000000000000]$
$u_{12} = [010000010111110001000111]$	$\mu_{11} = [01101111100001100]$
$u_{13} = [01000001011100001000111]$	$\mu_{12} = [011011110111111111]$
$u_{14} = [01000001011100001001000]$	$\mu_{13} = [01101111011010011]$
$u_{15} = [01000001011100010100001]$	$\mu_{14} = [01101111010000100]$
$u_{16} = [01000001011100001100011]$	$\mu_{15} = [01101111011001101]$
$u_{17} = [01000001011100001001001]$	$\mu_{16} = [01101111011010111]$
	$\mu_{17} = [01101111011000101]$
	$\mu_{1f} = [01101111011000101]$

При изменении входных сигналов получаем следующий протокол:

$u_{21} = [01000001011100001100001]$	$\mu_{20} = [111000000000000000]$
$u_{22} = [01000001111100001100001]$	$\mu_{21} = [11101111011001101]$
$u_{23} = [00010001111100001100001]$	$\mu_{22} = [11111111011001101]$
$u_{24} = [00010001111000001100001]$	$\mu_{23} = [11111011011000001]$
$u_{25} = [00010001111000100100011]$	$\mu_{24} = [11111011001000101]$
$u_{26} = [00010001111000100100011]$	$\mu_{25} = [11111011001001101]$
	$\mu_{26} = [11111011001011111]$
	$\mu_{2f} = [11111011001011111]$

Из приведенных примеров видно, что при построении протоколов по методу «дерево достижимости» с учетом длительности входных сигналов достигаются те же устойчивые состояния RS триггера, что и для альтернативных решений,  $\tau_2$  и  $\tau_{36}$ , полученных матричным методом, для одной и той же начальной разметки. Проблем с преодолением неустойчивого состояния RS-триггера {11} не возникает. Однако метод «дерево достижимости» предполагает вычисление всех неустойчивых состояний прежде, чем будет поучено устойчивое состояние RS-триггера.

### Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что задача анализа достижимости устойчивых состояний синхронного RS-триггера разрешима. Используемый в работе метод обеспечивает решение задачи. Проблема неоднозначности решений при переключении RS-триггера из одного устойчивого состояния в другое обусловлена необходимостью преодоления неустойчивого состояния RS-триггера {11}, которое при запрещенной входной комбинации сигналов теоретически является устойчивым. Другими словами проблема вызвана несовершенством конструкции самого RS-триггера, допускающей возможность нахождения RS-триггера в неопределенном состоянии. Теоретически решение проблемы может быть достигнуто путем исключения возможности нахождения модели RS-триггера в неопре-

деленном неустойчивом состоянии. Практически проблема решается путем введения механизма синхронизации и исключения возможности переключения RS-триггера во время нахождения его в неопределенном неустойчивом состоянии.

### Литература

1. Кожевников В.В. Методы математического моделирования логических схем // Ученые записки УлГУ, серия: Математика и информационные технологии, 2011. Выпуск 1 (3), С. 153–159.
2. Кожевников В.В., Смагин А.А. Процедуры анализа достижимости устойчивых состояний цифровых автоматов // Ученые записки УлГУ, серия: Математика и информационные технологии, 2012. Выпуск 1 (4), С. 175–189.
3. Питерсон Д. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984. 264 с.
4. Мурата Т. Сети Петри. Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР. 1989. № 44. С. 41–85.



УДК 519.6

## МЕТОД АНАЛИЗА ДОСТИЖИМОСТИ СЕТЕЙ ПЕТРИ

*В.В. Кожевников*

*Ульяновский государственный университет*

В работе приводятся результаты исследований по решению задачи анализа достижимости сетей Петри. Основу метода составляет свойство ортогональности сети. Метод обеспечивает возможность анализа как обычных, так и ингибиторных сетей Петри.

### **Введение**

Сети Петри (СП) [1] представляют собой двудольный ориентированный граф, содержащий два типа вершин - позиции и переходы, соединенные между собой ориентированными дугами. При этом граф позволяет задать структуру сети статически. Динамику в структуре сети вносит движение фишек, регулируемое правилами запуска переходов и смены разметки (маркировки) сети. Собственно, правила запуска (разрешения) переходов и смены разметки сети, предложенные К.Петри (правило срабатываний переходов сети), и определяют двудольный ориентированный граф, как СП или сеть с заданной (жесткой) логикой функционирования. Единство статического и динамического аспектов достигается в результате представления сети в виде уравнения состояний СП из класса уравнений Мурата [2] или системы линейных алгебраических уравнений.

Множество достижимых разметок сети определяет пространство состояний или мощность моделирования сети, которая для СП ограничена правилами Петри. Мощность разрешения сети зависит от возможностей ее анализа. Как правило, попытки повышения мощности моделирования сети приводят к снижению мощности разрешения (ингибиторные СП) и наоборот (маркированные графы и автоматные СП).

Ингибиторные СП [3] или СП со сдерживающими дугами [1] отличаются от СП правилами запуска переходов и, соответственно, логикой функционирования сети. При этом все другие предложенные расширения СП либо на самом деле не являются расширениями, либо эквивалентны СП со сдерживающими дугами.

Проблема заключается в том, что ингибиторные сети и их расширения утрачивают базовые свойства СП и не могут быть представлены в виде матрицы инцидентности. Представление ингибиторных сетей в виде матрицы инцидентности с неявно заданными ингибиторными дугами и соответственно с неявно заданной логикой обеспечивает решение проблемы и возможность представления ингибиторных СП в виде уравнений состояний СП. Сохранение свойств ингибиторных СП и возможность анализа достигается за счет применения методов исчисления инвариантов, которые могут быть использованы для анализа, как обычных СП, так и ингибиторных СП. При этом ингибиторные СП в данном случае отличаются от обычных только неявно заданной логикой (правилами) запуска переходов. Логика запуска переходов задается (определяется), в данном случае, в процессе генерации покрытия сети.

В результате полученная сеть с неявно заданной логикой по своей моделирующей мощности эквивалентна ингибиторной СП. В то же время возможность применения методов исчисления инвариантов обеспечивает мощность разрешения маркированных графов и автоматных СП.

Задача анализа достижимости состояний (разметок) сводится к решению уравнения состояний СП. При этом критерий достижимости формируется в процессе решения уравнения состояний СП. Особое место занимает проблема анализа достижимости СП, обусловленная наличием в сети обратных связей и, как следствие, возможностью получения так называемых недействительных решений [1].

В работе приводятся результаты исследований по решению задачи анализа и построения протоколов достижимости для ординарных и безопасных СП, которые обычно исполь-



зуются для моделирования логики [5]. Но данное ограничение не исключает возможности использования метода и в более общем случае.

### 1. Определение математического аппарата СП

В общем случае уравнение состояний СП представляется в следующем виде:

$$\Delta \mu = A \cdot x, \quad (1.1)$$

где  $\Delta \mu = \mu - \mu_0$ ;  $\mu_0$  - вектор начальной разметки сети;  $\mu$  - вектор конечной разметки сети;  $x$  - вектор покрытия переходов сети,  $x(t_j) = \{0, 1\}$ ;  $x \in S$ , где  $S$  - покрытие переходов сети;  $A$  - матрица инцидентности сети, где  $A = A^+ - A^-$ ,  $a_{ij} = \{0, 1, -1\}$  для ординарных сетей и  $a_{ij} = \{0, 1, -1, \alpha\}$  для ординарных ингибиторных сетей.

Для ингибиторных СП уравнение (1.1) не выполняется и может быть выполнено только случае неявного определения логики запуска переходов. Каждая ингибиторная дуга в матрице инцидентности определяется неявно как:

$$a^-_{ij} = \alpha \Rightarrow a^-_{ij} = 0,$$

где  $\alpha$  – условное обозначение ингибиторных дуг в матрице инцидентности.

Все множество позиций сети разбивается на множество входных, внутренних и выходных позиций  $P = \{P^-, P^0, P^+\}$ . Аналогичным образом все множество переходов сети разбивается на множество входных, внутренних и выходных переходов  $T = \{T^-, T^0, T^+\}$ . Множество размеченных позиций сети выводится из состава внутренних.

Особенность ингибиторных СП в случае неявного определения логики запуска переходов заключается в том, что позиции, связанные с переходом неявно заданными ингибиторными дугами являются внутренними, равно как и переходы. Данная особенность обеспечивает возможность применения известных методов для анализа достижимости ингибиторных СП.

### 2. Анализ достижимости СП

Задача анализа достижимости сводится к решению уравнения (1.1). Для решения уравнения (1.1) могут быть использованы методы исчисления инвариантов СП. Как известно [2], уравнение (1.1) имеет решение  $x$  тогда и только тогда, когда вектор  $\Delta \mu$  ортогонален любому решению  $y$  соответствующего однородного уравнения:

$$A^T \cdot y = 0, \quad (2.1)$$

где  $A^T$  - транспонированная матрица инцидентности сети;  $y \in R$  - вектор покрытия позиций сети,  $R$  - покрытие позиций сети для заданного вектора  $\Delta \mu$ .

Следует отметить, что система уравнений (2.1) справедлива только для подкласса однородных СП. Поэтому матрица  $A^T$  в общем случае определяется только на множестве переходов, входящих в состав каждого вектора  $x$ , а матрица  $A$  в уравнении (1.1) определяется только на множестве позиций, входящих в состав каждого покрытия  $R$ .

Свойство ортогональности СП составляет основу метода анализа достижимости СП и позволяет определить каждый вектор  $\Delta \mu$  в системе уравнений (1.1) равным нулю на множестве неразмеченных внутренних позиций сети  $P_y^0$ , входящих в состав соответствующего покрытия  $R$  и уравнение (2.1) равным нулю на множестве внутренних переходов  $T_x^0$ , входящих в состав соответствующего вектора покрытия  $x$ :

$$A(P_y^0, T) \cdot x(T) = 0 \quad (2.2)$$

и

$$A^T(P, T_x^0) \cdot y(P) = 0, \quad (2.3)$$

где  $x(T)$  – S-инвариант сети;  $y(P)$  – R-инвариант сети.

Вектор  $x$  является решением уравнения (1.1), если для него выполняется условие

$$\Delta \mu \cdot R = 0 \quad (2.4)$$

Условие (2.4) является необходимым при решении системы уравнений (1.1) с неявно определяемой логикой и служит в качестве критерия достижимости. При этом каждый век-

тор покрытия сети  $x \in S$ , в данном случае, определяет не только состав, но и логику запуска соответствующих переходов сети, а покрытие  $S$  - логику функционирования сети.

Для решения уравнений (1.1) и (2.1) или (2.2) и (2.3) в случае, если разметка сети не определена, может быть использован метод направленного перебора комбинаций столбцов и строк матрицы  $A$  [4]. Метод позволяет избежать полного перебора комбинаций столбцов и строк матрицы  $A$ .

Процедура генерации вектора покрытия  $x$  начинается с генерации вектора минимальной длины и до тех пор, пока не будет получено первое решение для заданного вектора  $\Delta\mu$ . Процедура генерации вектора покрытия позиций  $y$  для каждого вектора  $x$  также начинается с генерации вектора минимальной длины и до тех пор пока не будет получено покрытие  $R$ , удовлетворяющее условию (2.4).

В случае, если вектор  $\Delta\mu$  изначально не определен или определен частично задача анализа достижимости сводится к решению уравнений (2.2) и (2.3). Доопределение вектора  $\Delta\mu$ , для каждого полученного вектора, выполняется путем простого умножения вектора  $x$  на матрицу инцидентности  $A$ . Вычисление вектора начальной разметки сети  $\mu_0$  и вектора конечной разметки сети  $\mu$  на множестве позиций, входящих в состав обратных связей, выполняется в результате решения уравнений:  $\mu_0(P^q) = A^-(P^q, T) x$  и  $\mu(P^q) = A^+(P^q, T) x$ , где  $P^q$  – множество внутренних позиций сети, входящих в состав обратных связей (точки разрыва) и определяющих устойчивое состояние сети. Состояние сети  $\mu(P^q)$  определяется как достижимое, если для него существует решение, удовлетворяющее условию:  $\Delta\mu(P^q) \neq 0$ , и как устойчивое, если для него существует решение, удовлетворяющее условию:  $\Delta\mu(P^q) = 0$ .

Возможность вычисления вектора начальной разметки сети  $\mu_0$  и вектора конечной разметки сети  $\mu$  на множестве позиций, входящих в состав обратных связей, обеспечивает решение проблемы недействительных решений матричного анализа СП. Каждый полученный вектор покрытия переходов  $x$ , вектор начальной разметки сети  $\mu_0$  и вектор конечной разметки сети  $\mu$  служат в качестве исходной информации для построения протоколов достижимости СП.

### 3. Построение протоколов достижимости СП

В общем случае процедура построения протоколов достижимости сводится к вычислению последовательности векторов запуска переходов и текущих разметок сети для каждого вектора  $x$ , начиная с вектора начальной разметки  $\mu_0$  и до тех пор, пока не будет достигнута разметка  $\mu$ .

Последовательность векторов запуска переходов и векторов текущей разметки может быть получена путём итеративного решения уравнения:

$$\mu_k = \mu_{k-1} + A \cdot u_k, \quad (3.1)$$

где  $\mu_k$  – вектор текущей разметки сети,  $u_k$  – вектор запуска переходов в сети, для которого на каждом шаге итерации  $k = 1, n$  выполняется условие:

$$\mu_{k-1} + A \cdot u_k \geq 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) определяет правило смены разметки СП, условие (3.2) - правило запуска переходов СП соответственно. Каждый переход, входящий в состав вектора  $x$ , проверяется на выполнение условия (3). Все переходы, удовлетворяющие условию (3), составляют вектор  $u_k$ . На каждом шаге итерации  $x = x - u_k$ . При этом каждый вектор покрытия переходов  $x$  однозначно определяет не только последовательность векторов запуска переходов  $u_k$ , но и логику запуска переходов, входящих в состав каждого вектора запуска переходов  $u_k$ .

#### Заключение

Существенным ограничением метода является проблема размерности СП. Практическая реализация метода возможна только для сетей ограниченного размера и ограниченной кратности вхождения переходов в вектор покрытия переходов сети.

Тем не менее, метод значительно расширяет возможности матричного подхода к анализу СП [2] и может быть использован для решения задачи достижимости СП с заданной (же-

стой) логикой функционирования в случае частичного определения вектора конечной разметки сети и отсутствия критерия достижимости. Формирование критерия достижимости, в данном случае, выполняется в процессе решения задачи.

Таким образом, метод обеспечивает увеличение не только мощности моделирования, но и мощности разрешения СП. Для обычных СП достигается мощность разрешения автоматных СП и маркированных графов, хотя это и приводит к увеличению сложности вычислений. Кроме того, логика функционирования СП соответствует обычной математической логике.

### **Литература**

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984.
2. Мурата Т. Сети Петри. Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР, 1989, т.77, №4.
3. Котов В.Е. Сети Петри. М.: Наука, 1984.
4. Хан А.А., Хура Г.С., Сингх Х., Нанда Н.К. О нахождении решения уравнения состояний сетей Петри из класса уравнений Мураты // ТИИЭР, 1981, т.69, № 4.
5. Кожевников В.В. Методы математического моделирования логических схем // Ученые записки УлГУ, серия: Математика и информационные технологии, 2011, выпуск 1 (3).

## РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ МНОГОЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

*В.П. Смолеха, В.А. Лукьянов*

*Ульяновский государственный университет*

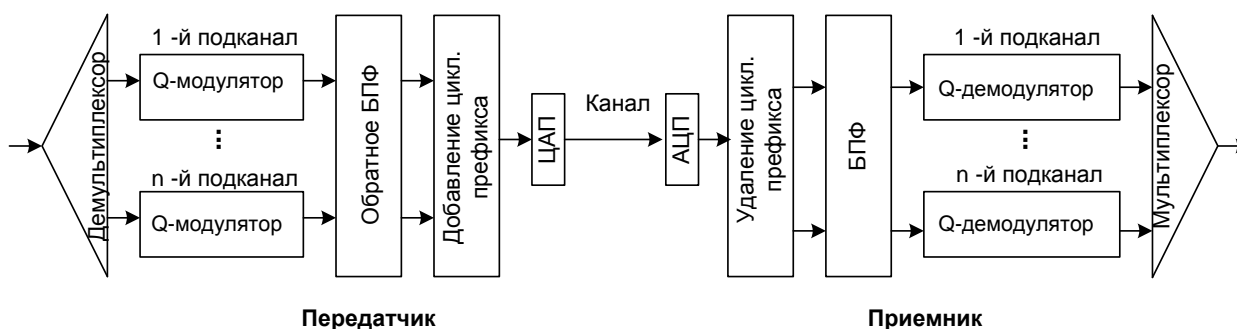
В общей теории связи достаточно много внимания уделяется рассмотрению передающей аппаратуры реализованной на способах частотной модуляции с одной несущей. Цифровая модуляция с несколькими несущими относится к методам перехода от последовательной передачи к параллельной. Такой подход несколько усложняет процесс передачи сигналов, но позволяет упростить требования к передающей аппаратуре и повысить качество передачи сигналов. Кроме того алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов в основном рассматриваются для проектирования систем цифровой обработки сигналов (ЦОС), однако мало внимания уделяется системам цифровой связи, где также используются процессоры ЦОС.

Многочастотная модуляция наиболее широко применяется в системах цифровой связи и особенно радиосвязи. На ней основана высокоскоростная цифровая передача данных в системах, работающих по технологии xDSL, в беспроводных сетях на стандарте IEEE 802.11. Она также используется в системах цифрового телевизионного (DVB – Digital Video Broadcasting) и звукового (DAB – Digital Audio Broadcasting) вещания.

Метод модуляции, основанный на технологии многочастотной модуляции, называют ОЧРК - ортогональное частотное разделение каналов (OFDM, Orthogonal Frequency Division Multiplexing – ортогональное частотное мультиплексирование). Также используется обозначение COFDM (Code Orthogonal Frequency Division Multiplexing) где сочетается ортогональное частотное мультиплексирование и кодирование того или иного вида.

Технология многочастотной модуляции предполагает использование последовательных процессоров и интегральных микросхем, реализующих алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). К микросхемам, выполняющим алгоритмы БПФ, относят процессоры ЦОС.

При ортогональном частотном мультиплексировании весь частотный диапазон делится на множество отдельных участков, то есть разбивается на поддиапазоны образуя тем самым узкие каналы (подканалы частотного поддиапазона). Каждый подканал передачи модулируется методом квадратурной амплитудной модуляции и работает на своей несущей. Модуляция с несколькими несущими представлена на рис. 1 [1].



**Рис. 1.** Структурная схема многочастотной модуляции с несколькими несущими

Основные требования при выборе несущих:

- количество несущих должно обеспечить необходимое увеличение длительности элемента сигнала;
- несущие должны быть близки по частоте друг к другу;
- номиналы частот должны быть такими, чтобы не создавать взаимных помех.

Два последних требования указывают на необходимость передачи ортогональных сигналов. Сущность требования ортогональности в спектральной области заключается в том, что спектр каждой модулированной несущей должен иметь «нули» на частотах, на которых расположены остальные несущие.

Ортогональность частотного сигнала множества обеспечивается, если любая пара несущих имеет частотный разнос, кратный

$$1/T_0 = V,$$

где  $T_0$  – длительность элементов сигнала,  $V$  – скорость передачи.

Величина  $1/T_0 = V$  определяет минимальный частотный разнос при некогерентной демодуляции. При когерентной демодуляции ортогональность обеспечивается, если частотный разнос кратен  $1/2T_0 = V/2$ .

К одной из проблем передачи сигналов относится борьба с межсимвольной интерференцией, обусловленной многолучевостью распространения радиоволн и большой скоростью передачи данных. Влияние межсимвольной интерференции составляет небольшую часть длительности элемента сигнала  $T_0$  на одной несущей. Если разделить  $T_0$  на две части – защитный интервал  $T_{\text{защ}}$  и интервал ортогональности  $T_{\text{орт}}$ , то получим  $T_0 = T_{\text{защ}} + T_{\text{орт}}$ . Такое разделение длительности элемента сигнала позволяет существенно уменьшить межсимвольную интерференцию. Интервал ортогональности это длительность полезной информационной части элемента сигнала. Защитный интервал представляет собой промежуток времени, в течение которого могут проявляться помехи многолучевости. Обычно защитный интервал заполняется фрагментами, взятыми из конца периода. Такой набор отсчетов называется циклическим префиксом. Его применение сильно упрощает процедуру синхронизации многоканального сигнала в приемнике, особенно если поднесущие приходят в приемник с различными задержками.

Обозначим частоту первой несущей  $\omega$ , тогда вторая несущая будет иметь частоту  $2\omega$  и т.д., для  $n$ -го канала эта частота будет равна  $n\omega$ . Применив квадратурную модуляцию (Q-модулятор) для каждого подканала получим  $n$  квадратурных (ортогональных) функций типа  $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$ .

$$s(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} [a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t],$$

где  $\omega = 2\pi/T$  – круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала, равному  $T$ .

Модель сигнала  $s(t)$  имеет вид общей формулы модулированных сигналов

$$s(t) = x_I(t) \cos 2\pi f_c(t) - x_Q(t) \sin 2\pi f_c(t),$$

где  $x_I(t)$  и  $x_Q(t)$  представляют собой сигналы, модулирующие косинусоидальную (синфазную) синусоидальную (квадратурную) составляющие сигнала  $f_c$ .

Просуммировав функции всех подканалов, получим функцию  $S_\Sigma(t)$ , аналогичную функции ряда Фурье, включающую  $N$  несущих  $f_k = f_0 + k\Delta f$

$$s_\Sigma(t) = \sum_{k=0}^{N-1} [a_k p(t) \cos 2\pi(f_0 + k\Delta f) - b_k p(t) \sin 2\pi(f_0 + k\Delta f)],$$

где  $p(t)$  описывает форму элементарного модулирующего импульса, коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  – информационные символы, модулирующие соответственно синфазную и квадратурную составляющие  $k$ -й несущей.

Полученная в результате модуляции сумма функций подвергается обратному преобразованию Фурье в одну функцию  $S_\Sigma(t)$ , которая преобразуется в цифровую форму и передается в линию. Применение аппарата Фурье связано с тем, что каждая несущая “ответственна” за определенную часть общего спектра на выходе модулятора. В данном случае используется известный способ синтеза сложного сигнала из отдельных гармонических составляющих на основе обратного преобразования Фурье.

На приеме принятая функция преобразуется из цифровой формы в аналоговую, происходит прямое преобразование Фурье, квадратурные функции каждого подканала демодулируются (Q-демодулятор) и объединяются в одну последовательность.

Исходя из уровня помех в частотном диапазоне, для каждого канала выбираются OFDM сигналы с различными видами дискретной модуляции на каждой частоте (PSK-M, QPSK, QAM-M и др.). На каналах с малым уровнем шумов могут использоваться алгоритмы с большими значениями M, например, (QAM-64), а на более зашумленных участках могут быть использованы более простые алгоритмы модуляции, например, QPSK [2].

Технология многочастотной модуляции направлена на борьбу с межсимвольной интерференцией. Данная технология применяется на КВ-линиях связи при передаче высокоскоростных цифровых потоков, высокоскоростных технологиях DSL, беспроводных системах связи (применение многочастотных сверхширокополосных (СШП) систем связи, обеспечивающих высокую скорость передачи и рациональное использование радиочастотного спектра).

### **Литература**

1. <http://www.intuit.ru/studies/courses/2289/589/lecture/7587?page=1>
2. <http://www.protocols.ru/files/Technologies/xDSL.pdf>
3. [http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/99999999\\_West\\_2007\\_5/8.pdf](http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/99999999_West_2007_5/8.pdf)