ISSN 2313-2140

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный университет»

Факультет математики, информационных и авиационных технологий

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
Ульяновского государственного университета

Серия
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Выпуск 1(8)

Под ред. доц. О. А. Перегудовой

Ульяновск, 2016

ББК 32.97
У91

Печатается по решению Ученого совета
факультета математики, информационных и авиационных технологий
Ульяновского государственного университета (протокол № 7/16 от 18 октября 2016 г.)

Редакционная коллегия:
д.ф.-м.н., профессор *А. С. Андреев*
д.ф.-м.н., профессор *А. А. Бутов*
д.т.н., профессор *К. В. Кумунжиев*
д.ф.-м.н. профессор *В. Л. Леонтьев*
д.т.н., профессор *А. А. Смагин*

У91 Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Математика и информационные технологии. Вып. 1(8) / под ред. доц. О. А. Перегудовой. – Ульяновск : УлГУ, 2016. – 130 с.

ISSN 2313-2140

ББК 32.97

ISSN 2313-2140 **© Ульяновский государственный университет, 2016**

Содержание

Математическое моделирование **5**
Алексеев Д.С.
ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СМО
С ФИКСИРОВАННЫМ И СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ РАБОТЫ ВТОРОГО КАНАЛА 5

Андреев А.С., Макаров Д.С.
О СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ
УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. 10

Андреев А.С., Раков С.Ю., Дороговцева Е.В.
ОБ УПРАВЛЕНИИ ТРЕХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ-РОБОТОМ
НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА. 15

Борисов С.В., Шепелев Г.А.
МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
В ВИДЕ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. 18

Бутов А.А., Замашкина О.М.
МЕТОД НАТУРАЛЬНОЙ ШКАЛЫ В ПОСТРОЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
ПРИ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ. 31

Кудашова Е.А., Кудашкина И.В., Федорова Л.В.
НОВЫЕ МЕТОДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА 33

Кудашова Е.А., Филаткина Е.В.
МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ
ТРЕХКОЛЕСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА: ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА. 43

Кудашова Е.А., Хасанова Р.И.
ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ
ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. 49

Леонтьев В.Л., Ефременков И.В.
КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ
В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. 56

Макаров Д.С.
ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА
С ЗАДАНИЕМ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ. 61

Макаров Д.С., Перегудова О.А.
О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ПОЗИЦИЙ
ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. 64

Тахтенкова Л.С., Салихова Г.Ф.
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА. 72

Тямаева Л.Х.
ОПТИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ
ОБОБЩЕННЫХ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ. 75

Юрьева О.Д., Порватова А.А.
О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА». 80

Информационные технологии **89**
Абулгазина А.П., Ефременков И.В.
ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ
ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В САПР ТП ТЕМП 89

Кулаков В.Л.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ,
ИМЕЮЩИХ РАЗЛИЧНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ,
В РЕЛЯЦИОННЫХ БАЗАХ ДАННЫХ 93

Михеева Е.А., Карева П.В., Сайфутдинова А.Р., Табакова Е.Д., Шевалдов И.А.
ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ. 104

Криптографические методы 107
Котков А.В.
ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КОДАХ АУТЕНТИФИКАЦИИ
С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КЛЮЧОМ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТАБЛИЦ..... 107

Полетаев В.С.
АНАЛИЗ СООБЩЕНИЙ ХАКЕРСКИХ ФОРУМОВ
КАК ИНСТРУМЕНТ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НОВЫХ УГРОЗ
ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ 111

Шлыков Д.И.
ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЛОЧНОГО ШИФРА AES 118

Телекоммуникационные технологии 125
Украинцев Ю.Д., Козловский В.А., Гончаров А.В.
ОЦЕНКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРОГА РЕШАЮЩЕЙ СХЕМЫ
РАДИОПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА, ОСНОВАННОГО
НА «НАИВНОМ» БАЙЕСОВСКОМ ПОДХОДЕ 125

УДК 519.872

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СМО С ФИКСИРОВАННЫМ И СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ РАБОТЫ ВТОРОГО КАНАЛА

Алексеев Д.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В настоящей работе рассматривается модель двухканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью, где время работы второго канала может быть фиксировано или случайно.Было проведено исследование интенсивностей обслуживания заявок каждым каналом, на основе которого построены их оценки.

Ключевые слова. Системы массового обслуживания, интенсивность обслуживания, оценка параметров.

1. Моделирование двухканальной СМО.

Рассмотрим двухканальную систему массового обслуживания (см. рис. 1):

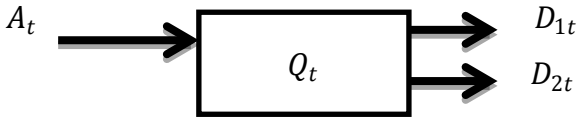


Рис. 1. Схема двухканальной СМО

где Q_t – очередь заявок, ожидающих обслуживания, определяется по формуле:

$$Q_t = Q_0 + A_t - D_{1t} - D_{2t}, \quad (1)$$

$A = (A_t)_{t\geq 0}$– пуассоновский процесс с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda} > 0$ и компенсатором $\tilde{A}_t = \boldsymbol{\lambda} t$, считающий число заявок, поступивших в СМО за время t.

Процессы D_{1t} и D_{2t} – точечные процессы с индикатором $I(Q_s \geq 1)$, которые представляют собой число заявок, обслуженных в системе, определяются выражением:

$$D_t = \int_0^\infty I(Q_s \geq 1) dBs, \quad (2)$$

где $\tilde{B}_t = \mu t;\ B = (B_t)_{t\geq 0}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\boldsymbol{\mu} > 0$.

Время включения и выключения второго канала может быть фиксированное или случайное, задается экспоненциальным распределением.

В первом случае время работы второго канала фиксировано и задается с клавиатуры. На рис. 2 второй канал включается в момент времени 5.

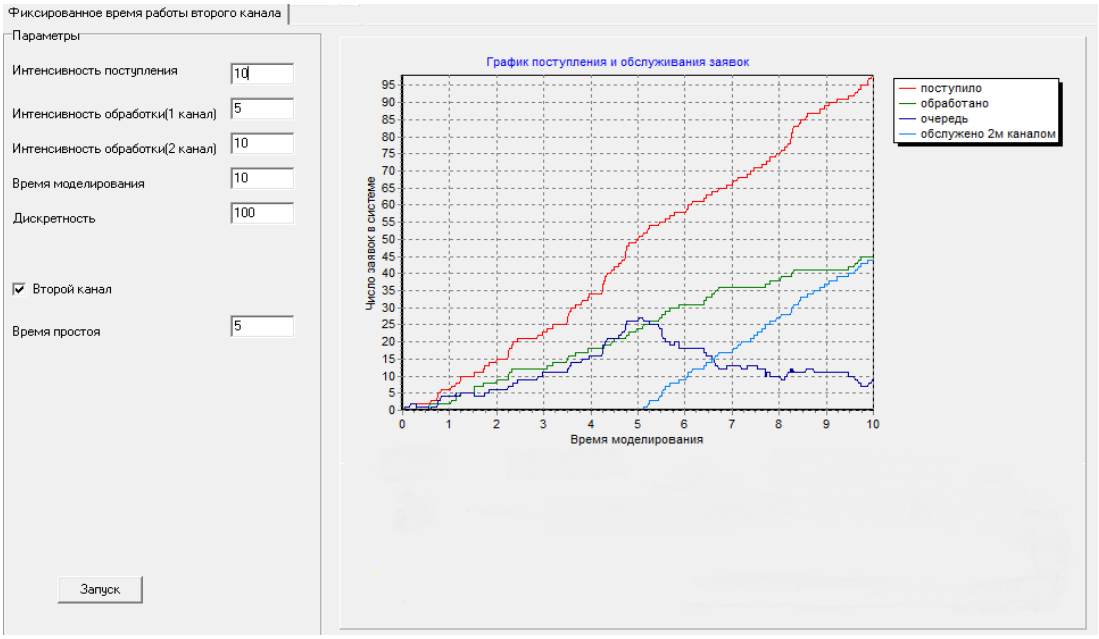


Рис. 2. Фиксированное время работы второго канала

Во втором случае время включения и выключения второго канала случайно и определяется по формуле:

$$\xi_t = -\frac{1}{\lambda} * Ln(\eta), \text{где } \eta \sim R[0;1]\,. \qquad (3)$$

На рис. 3 представлена работа второго канала. Включение и выключение определяется экспоненциальным распределением (интенсивность задается вручную и равна 5).

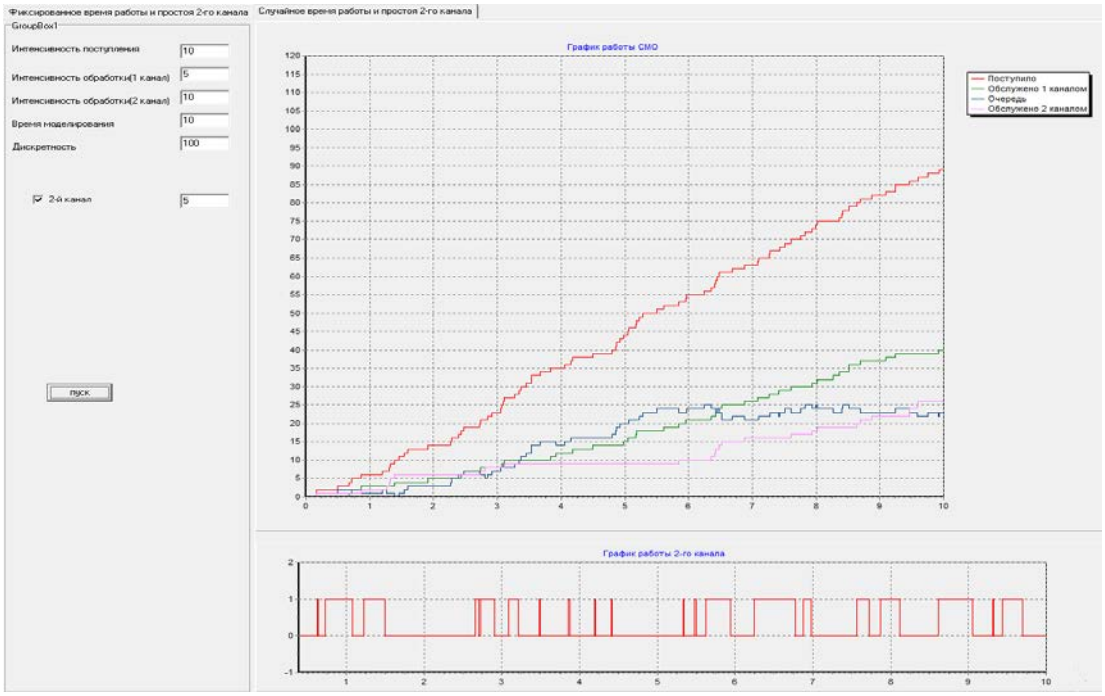


Рис. 3. Случайное время работы второго канала

2. Оценка интенсивностей обслуживания.

В данной работе проведено моделирование двухканальной СМО с целью оценивания параметров:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{1t} = \frac{D_{1t}}{t}, \tag{4}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{2t} = \frac{D_{2t}}{t}, \tag{5}$$

Представленные параметры являются, как следует из теоремы Гирсанова, оценками максимума правдоподобия. При этом оценки $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{2t}$ и $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{2t}$ хорошо изучены. Они являются несмещенными, состоятельными и эффективными.

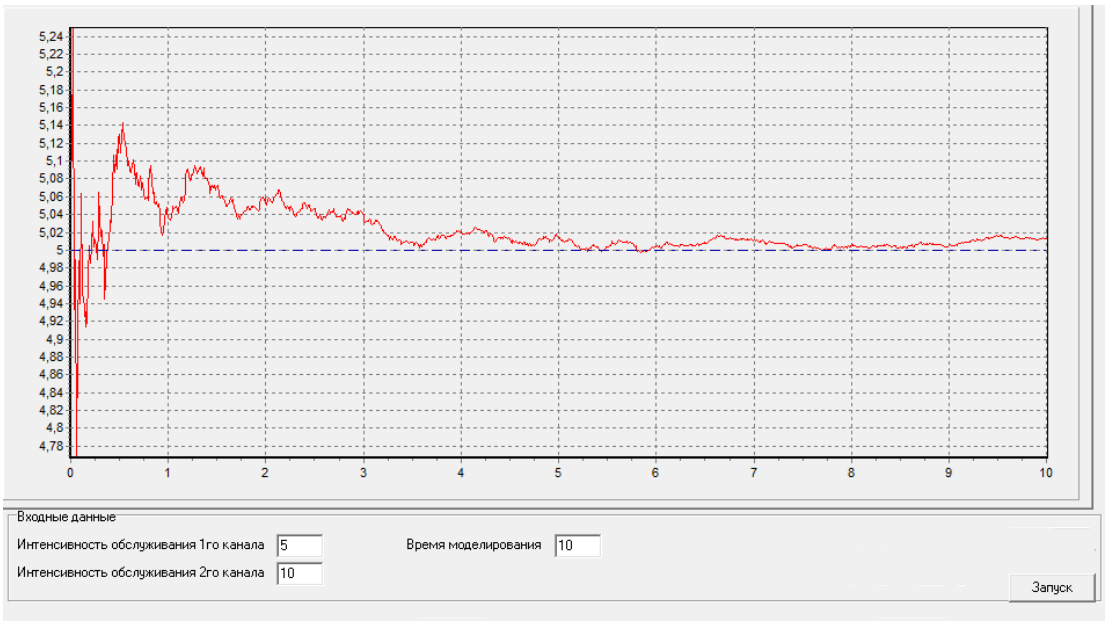


Рис. 4. Траектория значений $\hat{\lambda}_{1t}$

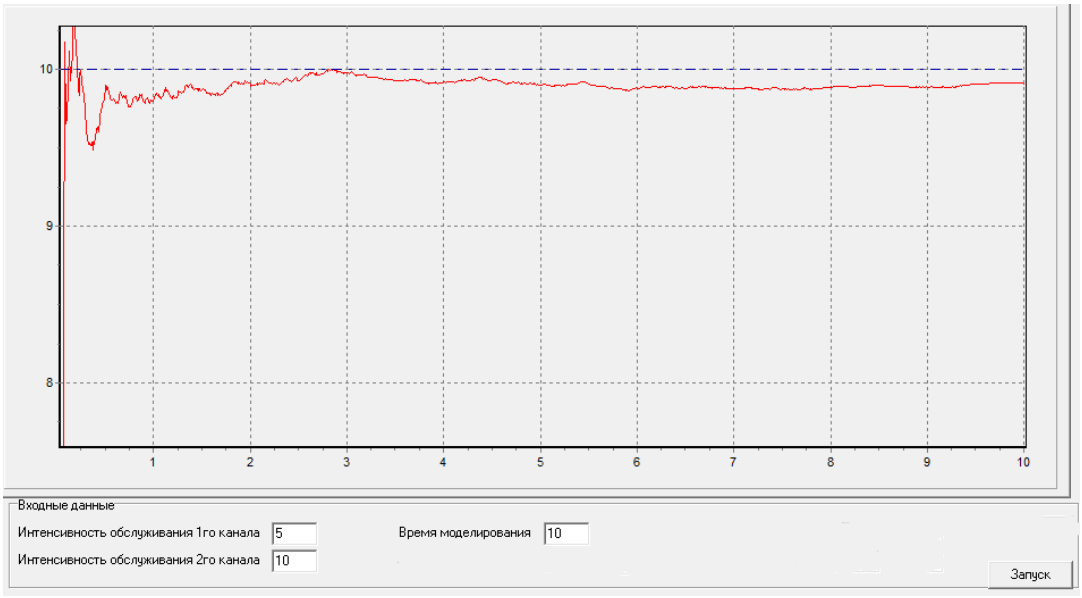


Рис. 5. Траектория значений $\hat{\lambda}_{2t}$

На представленных графиках (рис. 4, 5) можно заметить, что параметры $\hat{\lambda}_{1t}$ и $\hat{\lambda}_{2t}$ сходятся к искомым значениям λ_1 и λ_2, вводимым с клавиатуры.

Чтобы построить графики оценок параметров нашей модели, необходимо воспользоваться формулами:

1) для оценки параметра $\hat{\lambda}_{1t}$:

$$x_t = (\lambda_1 - \hat{\lambda}_{1t})\sqrt{t} \to N(0,1), \quad (6)$$

2) для оценки параметра $\hat{\lambda}_{2t}$:

$$y_t = (\lambda_2 - \hat{\lambda}_{2t})\sqrt{t} \to N(0,1), \quad (7)$$

после чего необходимо построить выборки из N элементов, каждый элемент выборок рассчитывается по формуле:

$$\text{для } x^i = (\hat{\lambda}_{1T}^i - \lambda_1)\sqrt{T},\ i=1\ldots N, \quad (8)$$

$$\text{для } y^i = (\hat{\lambda}_{2T}^i - \lambda_2)\sqrt{T},\ i=1\ldots N, \quad (9)$$

где N – число генерируемых процессов, а T – время моделирования.

Для построения графиков функций распределения необходимо воспользоваться формулами:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} * I\{x^i \le x\}, \quad (10)$$

$$F(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} * I\{y^i \le y\}. \quad (11)$$

В результате получены графики эмпирических функций распределения оценок параметров СМО (для большей наглядности эксперимента число взято несколько значений N: 5, 50, 500), которые с увеличением числа генерируемых траекторий сходятся к траектории гауссовского распределения.

Список литературы

1. Бутов А.А., Раводин К.О. Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 62 с.
2. Архангельский А.Я. Программирование в Delphi 7. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2003. – 1152 с., ил.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 2-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.
4. Бутов А.А. Савинов Ю.Г. Теория массового обслуживания: учебно-методическое пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2007.
5. Шпак Ю.А. Delphi 7 на примерах / Под ред. Ю.С. Ковтанюка. – К.: Изд-во Юниор, 2003. – 384 с., ил.
6. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 408с.
7. Архангельский А.Я. Delphi 7. Справочное пособие – М.: ООО «Бином-Пресс», 2004. – 1124 с., ил.

PARAMETER ESTIMATION FOR THE TWO-CHANNEL QS WITH FIXED AND RANDOM TIME OF THE SECOND CHANNEL

Alekseev D.S.

Ulyanovsk State University

Abstract. In this paper, we consider a model of dual-channel queuing system with unlimited queue, where the time of the second channel can be fixed or random. A study was conducted of service rate application by each channel, on which evaluationswere constructed.

Keywords: Queuing systems, the intensity of service, parameter estimation.

УДК 62-50

О СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Андреев А.С., Макаров Д.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе исследуется задача о стабилизации программных движений голономной механической системы с циклическими координатами. Решение задачи с измерением только позиционных координат достигается управлением типа нелинейного интегрального регулятора.

Ключевые слова: механическая система, циклические координаты, программное движение, интегральный регулятор.

Введение

Задача о математическом моделировании структуры управления движением голономной механической системы без измерения скоростей является в настоящее время весьма актуальной в связи с широким применением робототехники[1-7].

Данная работа является продолжением результатов из [8] с применением методов исследования устойчивости систем с последействием, полученных в работах [9, 10].

1. Постановка задачи

Рассмотрим голономную управляемую механическую систему со стационарынми связями, имеющую n обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_n$. Движение такой системы может быть описано с помощью уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U. \qquad (1)$$

Положим также, что кинетическая энергия системы (1) не зависит от последних $(n-m)$ координат $q_{m+1}, ..., q_n (0 < m < n, n > 1)$, и, таким образом, первые m координат $q_1, q_2, ..., q_m$ являются периодическими, остальные – циклическими [11, 12].

Переобозначим координаты следующим образом

$$z = (z_1, z_2, ...z_m)' = (q_1, q_2, ..., q_m)' \; s' = (s_1, s_2, ..., s_{n-m}) = (q_{m+1}, ..., q_n)'.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$2T = \dot{z}' A_{11}(z)\dot{z} + \dot{z}' A_{12}(z)\dot{s} + \dot{s}' A_{21}(z)\dot{z} + \dot{s}' A_{22}(z)\dot{s},$$

где составляющие матрицу A подматрицы $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_0 |z|^2 \le z' A_{11} z \le \alpha_1 |z|^2,$$
$$\alpha_0 |s|^2 \le s' A_{22} s \le \alpha_1 |s|^2,$$
$$\alpha_0 |s|^2 \le s' B s \le \alpha_1 |s|^2,$$
$$B = A_{12} A_{22} A_{21}, \quad \alpha_0, \alpha_1 = const > 0,$$
$$A_{21} = A_{12}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08482, № 15-01-08599).

Будем полагать, что обобщенные силы и управление по циклическим координатам отсутствуют, т.е.

$$Q^{'} = (Q_z^{'}, \quad Q_s^{'}), \quad U = (U_z^{'}, U_s^{'}), \quad Q_s = 0, \quad U_s = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение циклические импульсы

$$v = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = A_{21}(z)\dot{z} + A_{22}(z)\dot{s}. \tag{3}$$

Из последних $n-m$ уравнений (1) и предположений (2) получаем

$$\frac{dv}{dt} = 0, \tag{4}$$

т.е. циклические импульсы для движения системы (14) являются постоянными.

Следуя [11, 12], введем функцию Рауса. Для этого из (3) находим

$$\dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z)\dot{z}). \tag{5}$$

Функция Рауса примет вид [11, 12]

$$\begin{gathered} 2R = 2T - 2\dot{s}^{'}v = \\ = \dot{z}^{'}A_{11}\dot{z} + \dot{z}^{'}A_{12}A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) + (v - A_{21}\dot{z})^{'}A_{21}\dot{z} + \\ +(v - A_2 1\dot{z})^{'}A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) - 2(v - A_{21}\dot{z})^{'}A_{22}^{-1}P = \\ = 2R_2 + 2R_1 + 2R_0, 2R_2 = \dot{z}^{'}B(z)\dot{z}, R_1 = vA_{22}^{-1}A_{21}\dot{z}, 2R_0 = -v^{'}A_{22}^{-1}v. \end{gathered} \tag{6}$$

При этом матрица $B(z)$ является опредленно-положительной.

Уравнения движения системы (1) также могут быть записаны в виде равенств (4) и (5) и уравнений

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{z}}) - \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z + U_z \tag{7}$$

Подставив выражение для функции R, получим следующие уравнения движения

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{z}}) - \frac{\partial R_2}{\partial z} = \frac{\partial R_0}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - G\dot{z} + U_z + Q_z, \\ dv/dt = 0, \\ \dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z)\dot{z}), \end{gathered} \tag{8}$$

где $G = G(z,v) = (\frac{\partial g}{\partial z}) - (\frac{\partial g}{\partial z})^{'}, g(z,v) = A_{12}A_{22}^{-1}v$ есть кососимметрическая матрица, $G^{'} = -G$.

Пусть, при некоторых $z = z_0$ и $v = v_0$ управление U_z выбрано так, что выполняется условие

$$U_z^0(t) = -\frac{\partial R_0}{\partial z}(v_0, z_0) + \frac{\partial \Pi(t, z_0)}{\partial z}. \tag{9}$$

Тогда система (6) будет иметь программное движение

$$\dot{z} = 0, \quad z = z_0, \quad v = v_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0. \tag{10}$$

2. Построение управления

Рассмотрим задачу о стабилизации программного движения (10) управлением вида

$$U_z = U_z^0(t) - \frac{\partial \Pi_U(t, v, z)}{\partial z} - \int_{t-h}^{t} P_z(t, \tau)(z(t) - z(\tau))d\tau, \tag{11}$$

где $\Pi_U = \Pi_U(t,v,z)-$ некоторые непрерывно-дифференцируемая (по z дважды) ограниченная вместе со своими производными $\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t,v,z_0)0, P_z(t,z)$ есть матрица размерности $m \times m$ выражения вида $P_z = \left| p_{jk}(t,\tau) \right|, p_{jk}(t,\tau) = p_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau - t)}, p_{jk}^0, s_{jk}^0 - const$, удовлетворяющая условиям

$$\dot{z}P(t,\tau)z \geq 0, z^{'}P_t(t,\tau)z \leq -\beta_0 |z|^2, \beta_0 > 0,$$
$$P_t(t,\tau) = \frac{\partial P_z(t,\tau)}{\partial t} = -\left| p_{jk}^0 s_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau - t)} \right|, \qquad (12)$$
$$|z|^2 = z_1^2 + ... + z_m^2.$$

Запишем уравнения (7) с управлением (11), (12) в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = r(t),$$
$$\frac{dr(t)}{dt} = B^{-1}(z(t))(E(z(t),r(t))r(t) - G(z(t),v(t))r(t) + Q_z(t,z(t),r(t)) - \qquad (13)$$
$$- \frac{\partial S(t,v(t),z(t))}{\partial z}) - \int_{t-h}^{t} P_z(t,\tau)(z(t) - z(\tau))d\tau,$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = 0, \quad \frac{ds(t)}{dt} = A_{22}^{-1}(z(t)(v(t) - A_{21})(z(t))r(t)),$$

где $E = (e_{kj})$ – матрица, определяемая равенством

$$e_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial b_{ik}}{\partial z_j} - \frac{\partial b_{kj}}{\partial z_i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial z_k})r_k,$$

функция $S(t,v,z) = \Pi(t,z) - R_0(v,z) - \frac{\partial \Pi(t,z_0)}{\partial z} z + \frac{\partial R_0(v,z_0)}{\partial z} z + \Pi_U(t,v,z).$

В силу выбора U_z имеем $\frac{\partial S(t,v_0,z_0)}{\partial z} = 0$, так что система (13) имеет решение

$$z(t) = z_0, \quad r(t) = 0, \quad v = v_0, \quad \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0,$$

отвечающее программному движению (10).

Полагаем, что функции $Q_z(t,z,r)$, $S(t,v,z)$, $\frac{\partial S}{\partial t}(t,v,z)$, $\frac{\partial S(t,v,z)}{\partial z}$ являются ограниченными, равномерно непрерывными на множествах вида $R \times K, K \in R^n$ – компакт, при этом

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,v,z) \leq 0, \quad S(t,v_0,z_0) = 0. \qquad (14)$$

Уравнения (13) имеют аналогичный им вид с функциями $Q_z^*(t,z,r)$ и $S = S^*(v,z)$, предельными к Q_z и S

$$S^*(v,z) = \lim_{t \to +\infty} S(t,v,z).$$

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2} r^{'}(t) B(z(t)) r(t) + S(t, v_0, z) + \frac{1}{2} v(t) - v_0^{\,2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t-h}^{t} (z(t) - z(\tau))^{'} P_z(t, \tau)(z(t) - z(\tau)) d\tau.$$

Его производная в силу уравнений (13) в соответствии с соотношениями (12) и (14) будет иметь следующую оценку

$$\dot{V} = -z^{'}(t) G(z(t), v(t)) r(t) + z^{'}(t) Q_z(t, z(t), r(t)) + \frac{\partial S(t, v_0, t)}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t-h}^{t} (z(t) - z(\tau))^{'} P_t(t, \tau)(z(t) - z(\tau)) d\tau \le -W(z_t) = \qquad (15)$$

$$= -\frac{\beta_0}{2} \int_{t-h}^{t} (z(t) - z(\tau))^{'} P_t(t, \tau)(z(t) - z(\tau)) d\tau.$$

Соответственно имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) функция $S = S(t, v_0, z)$ является определенно-положительной по z;

2) функция $S^*(v_0, z)$ имеет изолированный минимум в точке

$$\left| \frac{\partial S^*(v_0, z)}{\partial z} \right| \ne 0 \quad \forall z \in \{0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

Тогда под действием управления (11) программное стационарное движение (10) устойчиво, асимптотически устойчиво относительно движений, отвечающих значению $v = v_0$, а каждое иное возмущенное движение неограниченно приближается при $t \to +\infty$ к движению

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{z} = z_1 = const, \quad v = v_1 = const, \quad \dot{s} = \dot{s}_1 = A_{22}^{-1}(z_1) v_1.$$

Доказательство: Из условия 1) теоремы и условий относительно функций, входящих в функционал V, следует, что он является определенно положительным, допускающим бесконечно малый высший предел по переменным $r, z, v - v_0$.

В силу (15) имеем устойчивость движения (10).

Множество $\{W(z_t) = 0\}$ может содержать только те предельные решения, для которых $z(t) = z_1 = const$. Но такими решениями могут быть решения для которых одновременно

$$r(t) = 0, \quad v(t) = v_1 = const, \quad \frac{\partial S^*(v_1, z_1)}{\partial z} = 0.$$

Тем самым, в силу теорем [9, 10] имеем искомое доказательство.

Список литературы

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
2. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
3. Кулаков Ф.М. Супервизорное управление манипуляционными роботами. – М.: Наука, 1989. – 448 с.

4. Вербюк В.Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 187 с.
5. Градецкий В.Г., Князьков М.М., Фомин Л.Ф., Чащухин В.Г. Механика миниатюрных роботов. – М.: Наука, 2010. – 271 с.
6. Градецкий В.Г., Вешников В.Б.. Камниченко С.В., Кравчук Л.Н. Управляемое движение мобильных роботов по произвольно ориентированным в пространстве поверхностям. – М.: Наука, 2001. – 356 с.
7. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. Теоретические основы робототехники: в 2 кн. Кн. 2. – М.: Наука, 2006. – 383 с.
8. Макаров Д.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей // Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. – 2016. – Вып. 1(8).
9. Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: моногр. – Ульяновск: УлГУ, 2005. – 328 с.
10. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 9. – С. 4-55.
11. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. – 1966. – Т. 30. – Вып. 8. – С. 922-933.
12. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. – М.: УРСС, 1998.

ON THE STABILIZATION OF STATIONARY PROGRAM MOTIONS OF A CONTROLLED MECHANICAL SYSTEM

Andreev A.S., Makarov D.S.

Ulyanovsk State University

Abstract. We study the problem on stabilization of program motions of holonomic mechanical systems with cyclic coordinates. Solution of the problem with the measurement of only the position coordinates is achieved by use of the controller of the type of nonlinear integral regulator.

Keywords: mechanical system, cyclic coordinates, program motion, integral controller.

УДК 62-50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ТРЕХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ-РОБОТОМ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА[1]

Андреев А.С., Раков С.Ю., Дороговцева Е.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается вопрос применения ПИ-регулятора для асимптотической стабилизации программного движения манипулятора с тремя степенями свободы. Проведены работы по численному моделированию системы, устанавливающие корректность такого (указанного) подхода построения управления.
Ключевые слова: манипулятор, привод, стабилизация.

Рассмотрим стоящую на горизонтальной плоскости механическую систему, состоящую из основания 1,зафиксированной на нем стойки 2 , и трех связующих манипулятора: вертикально ориентированного вала 3, жестко связанной(скрепленной) с ним направляющей 4 и руки 5 со схватом.

На рис. 1 представлена кинематическая схема манипулятора. Во всех узлах трение и зазоры отсутствуют, части системы-манипулятора являют суть абсолютно твердое тело.Перемещение руки осуществляется поступательным образом вдоль горизонтальной направляющей. Движение центра инерции руки происходит вдоль направляющей 4 , перпендикулярно оси вала. Воздействие на робот совершается посредством системы независимых приводов и возникающими в них силами: P , направленной вертикально и приложенной к валу, горизонтальной F , приложенной к руке, и моментом M относительно вала.

Рассмотрим совокупность двух прямоугольных правых систем координат: $O'X'Y'Z'$, заданной на плоскости основания и $OXYZ$, ориентированной вдоль направляющей. Начала координат расположенына оси вращения вала. Оси $O'Z'$ и OZ направлены вертикально, ось OX направлена вдоль руки. Введем связанные с ними следующие обозначения. x – координата центра масс руки относительно оси OX . z – разница между началами координат(вертикальное смещение руки). φ угол поворота оси OX относительно $O'X'$. Соответствующиеинерционные параметры системы: m_1 – масса вала и направляющей, m_2 – масса руки, I_1 – суммарный момент инерции вала и направляющей относительно оси $O'Z'$, I_2 – момент инерции руки относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс руки.

Движение такой системы робота-манипулятора описывается уравнениями Лагранжа следующего вида [1]

$$(m_1 + m_2)\ddot{z} = P(t),$$
$$(I_1 + I_2 + m_2 x^2)\ddot{\varphi} + 2m_2 x\dot{x}\dot{\varphi} = M(t),$$
$$m_2\ddot{x} - m_2 x\dot{\varphi}^2 = F(t).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

Задача стабилизации решается по принципуобратной связи на основе пропорционально-интегрального закона управлениясогласно [2, 3]

$$P(t) = -(m_1 + m_2)g + gk_{11}z(t) + k_{12}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}z(s)ds,$$

$$M(t) = k_{21}\varphi(t) + k_{22}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\varphi(s)ds,$$

$$F(t) = k_{31}x(t) + k_{32}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}x(s)ds.$$

Ниже представлены результаты численного моделирования процесса стабилизации при следующих численных параметрах системы $m_1 = 5,\ m_2 = 5,\ I_1 = 5,\ I_2 = 5$ и для случая нулевого положения равновесия системы $z = \dot{z} = \varphi = \dot{\varphi} = x = \dot{x} = 0$ с начальными условиями $z(0) = 2, \dot{z}(0) = 2, \varphi(0) = 0.5, \dot{\varphi}(0) = 0.5, x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = -0.6$. Соответствующим выбором коэффициентов $k_{i1} = 3, k_{i2} = -15, \alpha = 2$ удается добиться достаточно быстрой асимптотической сходимости.

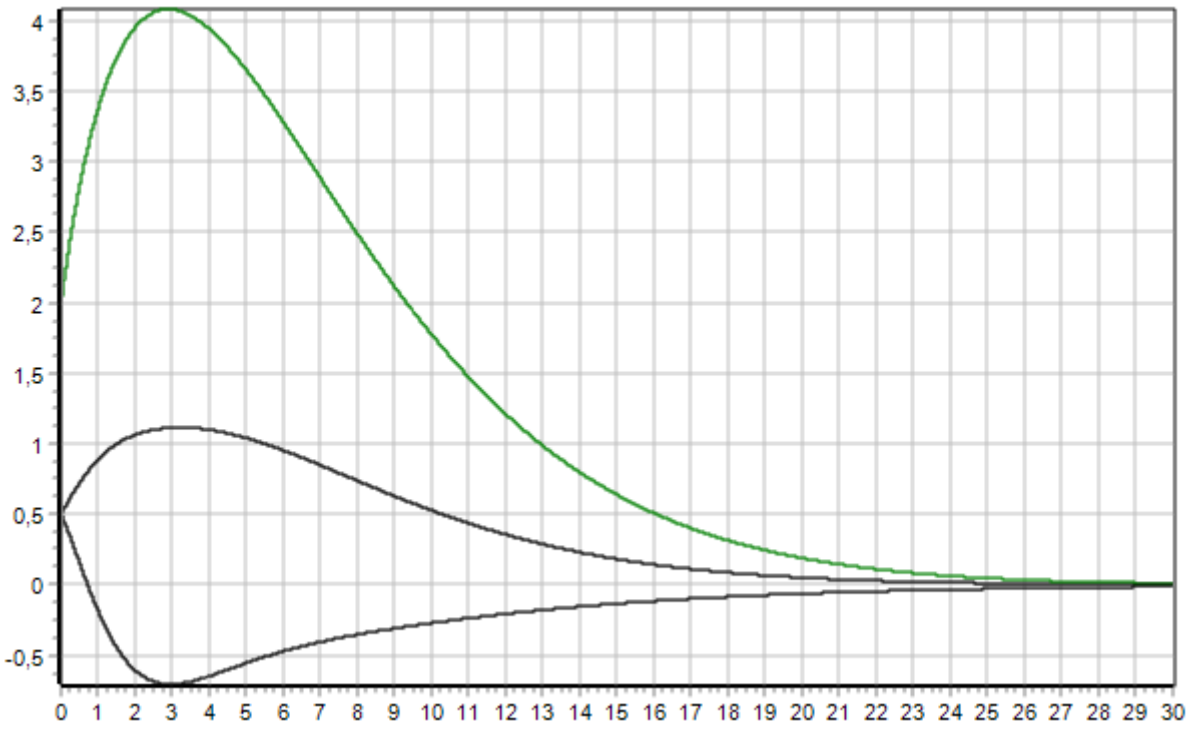


Рис. 1. Графики зависимости от времени координат манипулятора

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 326 с.
2. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 9. – С. 4-55.
3. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // ПММ. – 1998. –Т. 62. – Вып. 6. – С. 923-933.

ON CONTROL OF THREE-LINK ROBOTIC MANIPULATOR ON THE BASE OF NONLINEAR INTEGRAL CONTROLLER

Andreev A.S., Rakov S.Yu., Dorogovtseva E.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. In the paper the use of the PI-controller for the asymptotic stabilization of program motion of manipulator with three degrees of freedom is considered. Numerical modeling of the system has beeb carried out, which establishes the correctness of the (specified) approach of control constructing.

Keywords: manipulator, actuator, stabilization.

УДК 531.36; 62-50

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ[1]

Борисов С.В., Шепелев Г.А.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе представлена новая структура управления пространственным движением многозвенного манипулятора, моделируемого в виде системы связанных твердых тел, с допущением относительного смещения отдельных тел и использованием углов Крылова-Брайнта для описания относительного вращательного движения.

Ключевые слова: управление, механическая система, система связанных твердых тел, вектор-функция Ляпунова.

В качестве модели многозвенного манипулятора примем систему связанных твердых тел, определяемую следующим образом. Два тела системы называются смежными тогда и только тогда, когда они непосредственно оказывают силовое воздействие друг на друга. Соединение между двумя смежными телами называется шарниром. В шарнире объединяются все силы взаимодействия между двумя смежными телами, так что каждая пара смежных тел имеет только один шарнир, при этом для каждого шарнира существует только одна пара смежных тел.

Будем считать, что кинематические связи, реализуемые в шарнирах, являются идеальными, голономными и стационарными. Система связанных твердых тел имеет структуру дерева и является свободной, т. е. не связана с внешним телом, совершающим заданное движение.

Пусть существует некоторое основание с базисом $\overline{e}_0$, движение которого относительно инерциального пространства задается некоторой функцией времени (например, $\overline{e}_0$ движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета), причем это основание связано с одним из тел системы.

Пусть n – число тел в системе. Тогда количество шарниров всегда будет равно n, если учитывать шарнир между основанием и одним из тел, которому присваивается номер 1. Остальные тела и шарниры нумеруются произвольно. Структура взаимосвязей тел описывается ориентированным графом системы.

В [1] выведены уравнения движения системы твердых тел, соединенных шаровыми шарнирами, в обобщенных координатах. Уравнения в естественных переменных – угловых абсолютных или относительных перемещениях – более удобны для представления. Покажем вывод таких уравнений.

Движение системы n твердых тел согласно принципу Даламбера описывается уравнениями [1, 2]:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\delta\overline{r}_i\left(\overline{F}_i+\overline{U}_i-m_i\ddot{\overline{r}}_i\right)+\delta\overline{\pi}_i\left(\overline{M}_i+\overline{M}_i^{u}-\dot{\overline{L}}_i\right)\right]+\delta W=0, \qquad (1)$$

$$\dot{\overline{L}}_i=\overline{I}_i\dot{\overline{\omega}}_i+\overline{\omega}_i\times\overline{I}_i\overline{\omega}_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

где m_i, $\overline{r}_i$, $\overline{L}_i$, $\overline{\omega}_i$, $\overline{F}_i$, $\overline{M}_i$, $\overline{U}_i$, $\overline{M}_i^{u}$ – обозначают соответственно массу тела i; радиус-вектор его центра масс относительно полюса, фиксированного в инерциальном пространстве; момент количества абсолютного движения относительно этого центра масс; центральный тензор инерции; абсолютную угловую скорость; главный вектор и главный момент внешних и управляющих сил, действующих на тело i. Линия действия $\overline{F}_i$ проходит через центр масс тела i. Вектор $\delta\overline{r}_i$ представляет собой вариацию $\overline{r}_i$ и $\delta\overline{\pi}_i$ – произведение произвольного единичного вектора на бесконечно малый угол.

Точки над $\ddot{\overline{r}}_i$ и $\dot{\overline{\omega}}_i$ обозначают дифференцирование по времени в инерциальной системе отсчета, вариации $\delta\overline{r}_i$ и $\delta\overline{\pi}_i$ описывают вариации положения и ориентации тела i по отношению к этой инерциальной системе отсчета. Слагаемое δW представляет собой полную возможную работу, совершаемую в шарнирах системы. Силы реакции не вносят вклада в нее, т.к. они предполагаются идеальными. Возможная работа совершается в шарнирах пружинами, демпферами и другими подобными элементами.

В матричной форме уравнение (1) может быть записано в виде:

$$\delta\overline{r}^{'}\cdot\left(\overline{F}+\overline{U}-m\ddot{\overline{r}}\right)+\delta\overline{\pi}^{'}\cdot\left(\overline{M}+\overline{M}^{U}-\overline{I}\,\dot{\overline{\omega}}-\overline{V}\right)+\delta W=0 \qquad (2)$$

со следующими матрицами

$$\ddot{\overline{r}}=\left(\ddot{\overline{r}}_1,\ddot{\overline{r}}_2,\ldots,\ddot{\overline{r}}_n\right)^{'},\quad \delta\overline{\pi}=\left(\delta\overline{\pi}_1,\delta\overline{\pi}_2,\ldots,\delta\overline{\pi}_n\right)^{'},$$

$$\delta\overline{r}=\left(\delta\overline{r}_1,\delta\overline{r}_2,\ldots,\delta\overline{r}_n\right)^{'},\quad \overline{F}=\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2,\ldots,\overline{F}_n\right)^{'},$$

$$\overline{U}=\left(\overline{U}_1,\overline{U}_2,\ldots,\overline{U}_n\right)^{'},\quad \overline{M}^{U}=\left(\overline{M}_1^{U},\overline{M}_2^{U},\ldots,\overline{M}_n^{U}\right)^{'},$$

$$\overline{M}=\left(\overline{M}_1,\overline{M}_2,\ldots,\overline{M}_n\right)^{'},\quad \dot{\overline{\omega}}=\left(\dot{\overline{\omega}}_1,\dot{\overline{\omega}}_2,\ldots,\dot{\overline{\omega}}_n\right)^{'},$$

$$\overline{V}=\left(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,\overline{V}_n\right)^{'},\quad \overline{V}_i=\left(\overline{\omega}_i\times\overline{I}_i\overline{\omega}_i\right),$$

$$\overline{I}=\begin{pmatrix}\overline{I}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \overline{I}_2 & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \overline{I}_n\end{pmatrix},\quad m=\begin{pmatrix}m_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & m_n\end{pmatrix},$$

где соответственно $\overline{r}$, $\delta\overline{\pi}$, $\delta\overline{r}$, $\overline{F}$, $\overline{M}$, $\overline{\omega}$, $\overline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{M}^{U}$ есть матрицы-столбцы, элементами которых являются векторы; $a^{'}\cdot b, a^{'}\times b$ – скалярное и векторное произведение векторных столбцов и векторных матриц; $\overline{I}$ – матрица с квазидиагональными матрицами тензоров инерции тел; m – диагональная скалярная матрица с элементами $m_{ij}=\delta_{ij}m_i$; $(\ )^{'}$ – операция транспонирования.

Выделим из системы пару смежных тел $i^{+(a)}$ и $i^{-(a)}$, связанных шарниром a $a=(1,\ldots,n)$, где индексы "+ , –" означают, что тело $i^{+(a)}$ предшествует телу $i^{-(a)}$. С фиктивным телом 0, соединенного с системой твердых тел шарниром H_1, свяжем базис $\overline{e}_0$, с телами $i^{+(a)}$ и $i^{-(a)}$ соответственно неизменные векторные базисы $\overline{e}^{i^{-(a)}}$ и $\overline{e}^{i^{+(a)}}$.

Считаем, что для всех тел $i=1,\ldots,n$ начало базиса $\overline{e}^{i}$ фиксировано в центре масс тела C_i. Ориентация базисов в телах произвольна.

Будем рассматривать положение и движения тела $i^{-(a)}$ по отношению к телу $i^{+(a)}$. Положение тела $i^{-(a)}$ относительно $i^{+(a)}$ можно задать радиус-вектором какой-либо точки тела $i^{-(a)}$ в базисе $\overline{e}^{i^{+(a)}}$ и матрицей перехода от базиса $\overline{e}^{i^{+(a)}}$ к $\overline{e}^{i^{-(a)}}$.

$$\overline{e}^{i^{-(a)}} = G_a \overline{e}^{i^{+(a)}},$$

где матрица G_a – матрица перехода.

Точка, фиксированная в теле $i^{-(a)}$, называется *шарнирной*. Удобным по методике Виттенбурга [1] является следующее задание положения шарнирной точки a. В теле $i^{-(a)}$ она определяется фиксированным в теле вектором $\overline{c}_{i^{-(a)}a}$, который начинается в центре масс $C_{i^{-(a)}}$. В базисе $\overline{e}^{i^{+(a)}}$ переменный радиус-вектор точки a задается фиксированным в теле $i^{+(a)}$ вектором $\overline{c}_{i^{+(a)}a}$ и шарнирным вектором $\overline{Z}_a$.

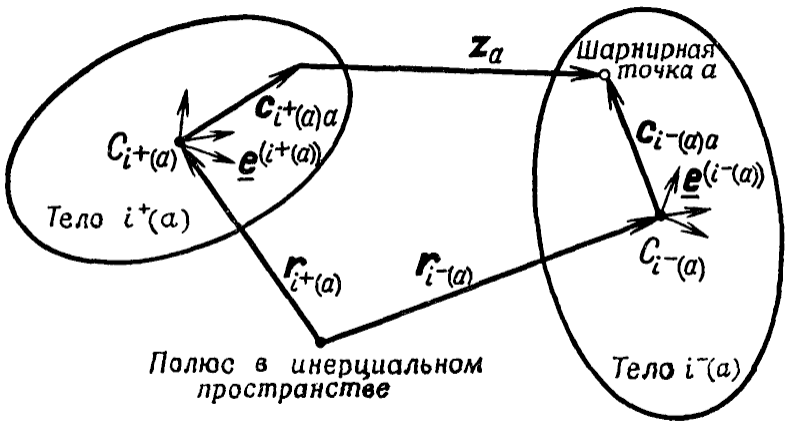


Рис. 1. Векторы, описывающие положение смежных тел относительно инерциального пространства и относительно друг друга

Пусть $\overline{\omega}_i \ (i=1,2,\ldots,n)$ – абсолютные угловые скорости. Связь $\overline{\omega}_i$ сотносительными угловыми скоростями $\overline{\Omega}_a$ определяется

$$\overline{\Omega}_a = \overline{\omega}_{i^-(a)} - \overline{\omega}_{i^+(a)} \quad a=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Что можно переписать, используя матрицу взаимосвязей S [1], в форме

$$\bar{\Omega}_a = -\sum_{i=1}^{n} S_{ia}\bar{\omega}_i \quad a = 1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

где $\bar{\omega}_0$ – угловая скорость тела системы, совершающего заданное движение, или в матричной форме

$$\bar{\Omega} = -S'\bar{\omega} - \omega_0 S_0.$$

Умножение слева на T' дает

$$\bar{\omega} = T'\bar{\Omega} + \omega_0 1_n, \quad 1_n' = (1,1,\ldots,1).$$

Отсюда получаем формулу для абсолютной угловой скорости тела

$$\bar{\omega}_i = -\sum_{a=1}^{n} T_{ai}\bar{\Omega}_a + \bar{\omega}_0 \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Дифференцируя, получаем значение для абсолютного углового ускорения

$$\dot{\bar{\omega}}_i = -\sum_{a=1}^{n} T_{ai}\left(\bar{\Omega}_a' + \bar{W}_a^*\right) + \dot{\omega}_0,$$

где $\bar{W}_a^* = \bar{\omega}_{i^-(a)} \times \bar{\Omega}_a, a = 1,\ldots,n$.

Эти n уравнений объединим снова в одно матричное уравнение

$$\dot{\bar{\omega}} = -T'\left(\bar{\Omega}' + \bar{W}^*\right) + \dot{\omega}_0 1_n \tag{6}$$

с матрицами-столбцами $\bar{\Omega}' = [\bar{\Omega}_1',\ldots,\bar{\Omega}_n']'$ и $\bar{W}' = [\bar{W}_1',\ldots,\bar{W}_n']'$

Для определения угловой ориентации тела i в инерциальном пространстве используем преобразования

$$\bar{e}_0 = A_i\bar{e}^{(i)} \Rightarrow A_{i^-(a)} = A_{i^+(a)}G_a', \quad A_{i^+(a)} = A_{i^-(a)}G_a.$$

Для вычисления значений $\ddot{\bar{r}}$ и $\delta\bar{r}$, входящих в (2) проведем следующие вычисления:

$$\bar{Z}_a = \left(\bar{r}_{i^-(a)} + \bar{c}_{i^-(a)a}\right) - \left(\bar{r}_{i^+(a)} + \bar{c}_{i^+(a)a}\right),$$

которые можно переписать в виде

$$\bar{Z}_a = -\sum_{i=0}^{n} S_{ia}\left(\bar{r}_i + \bar{c}_{ia}\right) \quad a = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Если ввести векторы

$$\bar{C}_{ia} = S_{ia}\bar{c}_{ia}, \quad i = 0,\ldots,n, \quad a = 1,\ldots,n,$$

где $\bar{r}_0$ фиктивного начального шарнира [1]. Тогда равенство (7) перепишется в виде

$$\bar{Z}_a = -S_{0a}\bar{r}_0 - \bar{C}_{0n} - \sum_{i=1}^{n}\left(S_{ia}\bar{r}_i + \bar{C}_{ia}\right) \tag{8}$$

или в виде матричного уравнения

$$\bar{Z} = -\bar{r}S_0' - \bar{C}_0' - S'\bar{r} - \bar{C}'1_n$$

с матрицами-столбцами $\bar{r} = (r_1,\ldots,r_n)^{'}, \bar{z} = (z_1,\ldots,z_n)^{'}$, матрицей-строкой $\bar{C}_0 = [C_{01},\ldots,C_{0n}]$ и $(n\times n)$-матрицей

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножим это равенство слева на $T^{'}$ и учтем, что $T^{'}S_0^{'} = -1_n$, $TS = ST = E$, получим явное выражение для $\bar{r}$:

$$\bar{r} = -\left(\bar{C}T\right)^{'}1_n - T^{'}\bar{Z} + \bar{r}_0 1_n - \left(\bar{C}_0 T\right)^{'}. \tag{9}$$

Из этого соотношения можно вывести теперь выражения для $\ddot{\bar{r}}$ и $\delta\bar{r}$. Вторая производная по времени выражается в виде

$$\ddot{\bar{r}} = -\left(\ddot{\bar{C}}T\right)^{'}1_n - T^{'}\ddot{\bar{z}} + \ddot{\bar{r}}_0 1_n - \left(\ddot{\bar{C}}_0 T\right)^{'}. \tag{10}$$

Элементами матрицы $\bar{C}T$ являются векторы $d_{ij}\,(i,j=1,\ldots,n)$. Каждый вектор d_{ij} фиксирован в теле, номер которого совпадает с первым индексом i. Дополним их векторами

$$d_{0j} = \left(\bar{C}_0 T\right)_j = \sum_{a=1}^{n} T_{aj} S_{0a} c_{0a}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{11}$$

Произведение $T_{aj}S_{0a}$ отлично от нуля (и равно –1) только для шарниров на теле 0, т.е. только для шарнира 1, откуда следует

$$d_{0j} = -c_{01}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{12}$$

Вторая производная по времени от d_{ij} равна

$$\ddot{d}_{ij} = -d_{ij}\times\dot{\omega}_i + \omega_i\times\left(\omega_i\times d_{ij}\right), \quad i = 0,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Вклад первого члена $-d_{ij}\times\dot{\omega}_i$ в матрицу-столбец $\left(\ddot{\bar{C}}T\right)^{'}1_n$, водящую в выражение (10), равен

$$-\begin{bmatrix} d_{11}\times\dot{\omega}_1 & \cdots & d_{n1}\times\dot{\omega}_n \\ \vdots & & \\ d_{1n}\times\dot{\omega}_1 & & d_{nn}\times\dot{\omega}_n \end{bmatrix}1_n = -\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{n1} \\ \vdots & & \\ d_{1n} & & d_{nn} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n \end{bmatrix} = -\left(\bar{C}T\right)^{'}\times\dot{\omega}. \tag{13}$$

Вклад второго члена $\omega_i\times\left(\omega_i\times d_{ij}\right)$ в $\left(\ddot{\bar{C}}T\right)^{'}1_n$ равен матрице-столбцу $\bar{g} = (g_1,\ldots,g_n)^{'}$ с элементами

$$g_i = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\times\left(\omega_j\times d_{ji}\right), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{14}$$

Аналогично, последний член в (10) равен матрице-столбцу

$$\left(\ddot{\bar{C}}_0 T\right)' = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_0 \times d_{01} + \omega_0 \times \left(\omega_0 \times d_{01}\right) \\ \vdots \\ \dot{\omega}_0 \times d_{0n} + \omega_0 \times \left(\omega_0 \times d_{0n}\right) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

или с учетом тождества (11)

$$\left(\ddot{\bar{C}}_0 T\right)' = -\left[\dot{\omega}_0 \times c_{01} + \omega_0 \times \left(\omega_0 \times c_{01}\right)\right] 1_n. \tag{16}$$

Выражение для $\ddot{\bar{r}}$ теперь принимает вид

$$\ddot{\bar{r}} = \left(\bar{C} T\right)' \times \dot{\omega} - T' \ddot{\bar{z}} - \bar{g} + \ddot{r}_0 1_n - \left(\ddot{\bar{C}}_0 T\right)'. \tag{17}$$

Вычислим далее матрицу-столбец $\ddot{\bar{z}}$. Ее элементы равны

$$\ddot{z}_a = z_a'' + \dot{\omega}_{i^+(a)} \times z_a + 2\omega_{i^+(a)} \times z_a' + \omega_{i^+(a)} \times \left(\omega_{i^+(a)} \times z_a\right), \tag{18}$$

$a = 1, \ldots, n$, z_a' – относительная производная.

Чтобы придать удобную форму элементам, включающим $\dot{\omega}_{i^+(a)}$ и $\omega_{i^+(a)}$, введем новые безразмерные скалярные величины $S_{ia}^+ \left(i = 0, \ldots, n, a = 1, \ldots, n\right)$, которые удовлетворяют тождествам

$$\dot{\omega}_{i^+(a)} = \sum_{j=0}^{n} S_{ja}^+ \dot{\omega}_j, \quad a = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Отсюда следует определение для S_{ia}^+:

$$S_{ia}^+ = \begin{cases} +1, \text{ если } i = i^+(a); \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n, \; a = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Эти скалярные величины используются для построения матрицы-строки

$$\bar{S}_0^+ = \left[S_{01}^+, \ldots, S_{0n}^+\right]$$

и $(n \times n)$-матрицы

$$\bar{S}^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^+ & \cdots & S_{1n}^+ \\ \vdots & & \\ S_{n1}^+ & & S_{nn}^+ \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Матрицы $\bar{S}_0^+$ и $\bar{S}^+$ получаются из $\bar{S}_0$ и $\bar{S}$ соответственно, если в этих последних матрицах каждый элемент –1 заменить нулем. С помощью выражения (19) для $\dot{\omega}_{i^+(a)}$ соотношение (18) можно переписать в виде

$$\ddot{z}_a = z_a'' + \sum_{j=1}^{n} [-S_{ja}^+ z_a \times \dot{\omega}_j + 2\omega_j \times S_{ja}^+ z_a' + \omega_j \times (\omega_j \times S_{ja}^+ z_a)] +$$

$$+ \dot{\omega}_0 \times S_{0a}^+ z_a + 2\omega_0 \times S_{0a}^+ z_a' + \omega_0 \times (\omega_0 \times S_{0a}^+ z_a).$$

После этого объединим снова все n выражений $\ddot{z}_1, \ldots, \ddot{z}_n$ в матрицу-столбец $\ddot{\bar{z}}$:

$$\ddot{\bar{z}} = z'' - \bar{Z}' \times \dot{\bar{\omega}} + 2\bar{h} + \bar{g}^* + \bar{\theta}. \tag{22}$$

Элементы матрицы $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \vdots & & \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

имеют вид

$$\bar{Z}_{ia} = S_{ia}^{+} \bar{z}_a, \quad i,a = 1,\dots,n. \tag{23}$$

Наконец, $\bar{h}$, $\bar{g}^*$ и $\bar{\theta}$ – матрицы-столбцы с элементами

$$\bar{h}_a = \begin{cases} \bar{\omega}_{i^+(a)} \times \bar{z}_a' & \text{для } i^+(a) \neq 0, \\ 0, & \text{для } i^+(a) = 0, \end{cases} \quad a = 1,\dots,n,$$

$$\bar{g}^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{\omega}_j \times \left(\bar{\omega}_j \times \bar{Z}_{ja} \right), \quad a = 1,\dots,n, \tag{24}$$

$$\bar{\theta}_a = \dot{\bar{\omega}}_0 \times \bar{Z}_{0a} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{Z}'_{0a} + \bar{\omega}_0 \times \left(\bar{\omega}_0 \times \bar{Z}_{0a} \right), \quad a = 1,\dots,n, \tag{25}$$

соответственно. Вектор $\bar{Z}_{0a} = \bar{S}_{0a}^{+} \bar{z}_a$ в $\bar{\theta}_a$ равен нулю для $a = 2,\dots,n$, так как на теле 0 расположен только один шарнир 1. Следовательно, $\bar{\theta}_a$ можно упростить:

$$\bar{\theta}_a = \left[\dot{\bar{\omega}}_0 \times \bar{z}_1 + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{z}_1' + \bar{\omega}_0 \times \left(\bar{\omega}_0 \times \bar{z}_1 \right) \right] \bar{S}_{0a}^{+}, \quad a = 1,\dots,n,$$

и тогда матрица-столбец $\bar{\theta}$ примет вид

$$\bar{\theta} = \left[\dot{\bar{\omega}}_0 \times \bar{z}_1 + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{z}_1' + \bar{\omega}_0 \times \left(\bar{\omega}_0 \times \bar{z}_1 \right) \right] \bar{S}_0^{+\prime}. \tag{26}$$

Выражение для $\ddot{\bar{z}}$ подставим теперь в формулу (17) для $\ddot{\bar{r}}$, тогда

$$\ddot{\bar{r}} = \left[\left(\bar{C} + \bar{Z} \right) T \right]' \times \dot{\bar{\omega}} - T' \left(z'' + 2\bar{h} + \bar{g}^* \right) - \bar{g} + \ddot{r}_0 1_n - \left(\ddot{\bar{C}}_0 T \right)' - T' \bar{\theta}$$

или

$$\ddot{\bar{r}} = -\left(\bar{C} + \bar{Z} \right) T' \times \dot{\bar{\omega}} + T' \bar{z}'' + \bar{\Delta}, \tag{27}$$

где $\bar{\Delta}$ – сумма всех членов, которые не зависят от вторых производных по времени. Она равна

$$\bar{\Delta} = -T' \left(2\bar{h} + \bar{g}^* \right) - \bar{g} + \ddot{r}_0 1_n - \left(\ddot{\bar{C}}_0 T \right)' - T' \bar{\theta}. \tag{28}$$

Упростим далее выражение для $\bar{\Delta}$ в (28). Перепишем сначала элементы матрицы-столбца $T' \bar{g}^* + \bar{g}$ с помощью (24) и (14) в форме

$$\left(T' \bar{g}^* + \bar{g} \right)_i = \sum_{a=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{aj} \omega_j \times \left(\omega_j \times S_{ja}^{+} z_a \right) + \sum_{j=1}^{n} \omega_j \times \left(\omega_j \times d_{ji} \right)$$

или, используя значения из [1] для d_{ij},

$$\left(T'\overline{g}^{*}+\overline{g}\right)_i=\sum_{a=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j\times\left[\omega_j\times T_{aj}\left(S_{ja}c_{ja}+S_{ja}^{+}z_a\right)\right].$$

Из определения S_{ja}^{+} следует тождество $S_{ja}^{+}=S_{ja}S_{ja}^{+}\ (j,a=1,\ldots,n)$. Следовательно,

$$\left(T'\overline{g}^{*}+\overline{g}\right)_i=\sum_{a=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j\times\left[\omega_j\times T_{aj}S_{ja}\left(c_{ja}+S_{ja}^{+}z_a\right)\right]. \tag{29}$$

Векторы

$$c_{ia}^{*}=c_{ia}+S_{ia}^{+}z_a=c_{ia}+Z_{ia},\quad i=0,\ldots,n,\ a=1,\ldots,n, \tag{30}$$

в этом выражении имеют простую физическую интерпретацию. Очевидно,

$$c_{ia}^{*}=\begin{cases}c_{ia}+z_a & \text{для } i=i^{+}(a),\\ c_{ia} & \text{для } i=i^{-}(a),\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad i=0,\ldots,n,\ a=1,\ldots,n.$$

На рис. 2 на двух телах показаны векторы $c_{i^{+}(a)a}^{*}$ и $c_{i^{-}(a)a}^{*}$. Они соединяют центры масс тел с шарнирной точкой точно так же, как векторы $c_{i^{+}(a)a}$ и $c_{i^{-}(a)a}$ в отсутствие шарнирного вектора z_a.

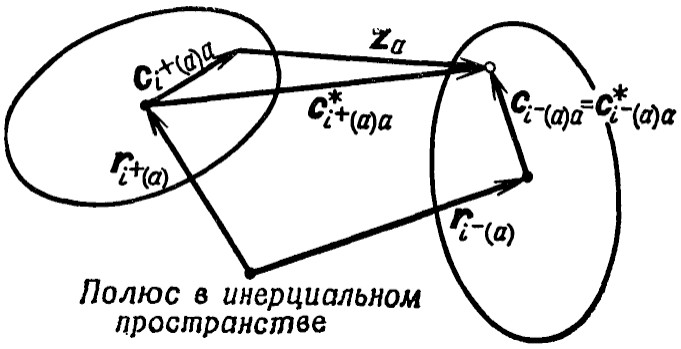


Рис. 2. Векторы c_{ia}^{*}

Удобно ввести векторы

$$d_{ji}^{*}=\sum_{a=1}^{n}T_{ai}S_{ja}c_{ja}^{*},\quad j=0,\ldots,n,\quad i=1,\ldots,n, \tag{31}$$

как обобщение векторов

$$d_{ja}=\sum_{a=1}^{n}T_{ai}S_{ja}c_{ja},\quad j=0,\ldots,n,\quad i=1,\ldots,n.$$

Для систем с шарнирными векторами рисунок для a_{ji}^{*} принимает обобщенную форму, из которого следует

$$r_i=r_0-\sum_{j=0}^{n}d_{ji}^{*},\quad i=1,\ldots,n.$$

В обозначениях d_{ji}^{*} соотношение (29) перепишется в виде

$$\overline{g}^0 = (T^T \overline{g}^* + \overline{g})_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji}^*), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Векторы d_{ij}^* играют важную роль в выражении (28) также потому, что они являются элементами матрицы $(\overline{C} + \overline{Z})T$:

$$[(\overline{C} + \overline{Z})T]_{ij} = d_{ij}^*, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{32}$$

Эта формула представляет собой обобщение соотношения $(\overline{C}\overline{T})_{ij} = d_{ij}$, с помощью которого были введены векторы d_{ij}.

Рассмотрим теперь последний член $T^T\overline{\theta}$ в выражении (28). В формуле (26) для $\overline{\theta}$ первый элемент S_{01}^+ в матрице-столбце $\overline{S}_0^{+T}$ равен либо нулю, либо +1, а все другие элементы равны нулю. Следовательно, $T^T\overline{S}_0^{+T}$ тождественно совпадает с $-S_{01}^+ 1_n$. Учитывая это обстоятельство, а также соотношения (16) и (30), последние три члена из $\overline{\theta}$ можно объединить:

$$\ddot{r}_0 1_n - (\ddot{\overline{C}}_0 T)^T - T^T\overline{\theta} = [\ddot{r}_0 + \dot{\omega}_0 \times c_{01}^* + 2S_{01}^+ \omega_0 \times z_1' + \omega_0 \times (\omega_0 \times c_{01}^*)]1_n. \tag{33}$$

Выражение в квадратных скобках представляет абсолютное ускорение шарнирной точки номер 1 минус относительное ускорение $S_{01}^+ z_1''$.

Последним членом, который нужно раскрыть в уравнении принципа Даламбера, является $\delta\overline{r}$. Подобно $\ddot{\overline{r}}$, он выводится из выражения (9) для $\overline{r}$. Вариация заданных функций времени равна нулю, так что

$$\delta\overline{r} = -T^T(\delta\overline{C}^T 1_n + \delta\overline{z}).$$

Рассмотрим сначала произведение $\delta C^T 1_n$. Элемент матрицы *C* есть вектор C_{ia}, который либо фиксирован в теле *i*, либо равен нулю. Следовательно, его вариация равна $\delta C_{ia} = -C_{ia} \times \delta\pi_i$. В силу этого произведение $\delta C^T 1_n$ имеет вид

$$-\begin{bmatrix} C_{11} \times \delta\pi_1 & \ldots & C_{n1} \times \delta\pi_1 \\ \vdots & & \\ C_{1n} \times \delta\pi_1 & & C_{nn} \times \delta\pi_n \end{bmatrix} 1_n = -\begin{bmatrix} C_{11} & \ldots & C_{n1} \\ \vdots & & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta\pi_1 \\ \vdots \\ \delta\pi_n \end{bmatrix} = -\overline{C}^T \times \delta\overline{\pi} \tag{34}$$

Элемент δz_a матрицы-столбца $\delta\overline{z}$ равен

$$\delta z_a = \delta z_a' + \delta\pi_{i^+(a)} \times z_a, \quad a = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Это следует из того, что δz_a представляет собой вариацию вектора z_a в базисе $e^{(i+(a))}$. Если члены $\delta z_1, \ldots, \delta z_n$ объединить опять в матрицу-столбец, то каждый из двух членов в правой части также образует матрицу-столбец.

Во втором члене формулы (35) перепишем $\delta\pi_{i+(a)}$ как $\sum_{j=0}^{n} S_{ja}^+ \delta\pi_j$. Вариация положения тела 0 равна нулю. Следовательно, суммирование распространяется только на $j = 1, \ldots, n$. Это дает

$$\delta\pi_{i^+(a)} \times z_a = -\sum_{j=1}^{n} S_{ja}^+ z_a \times \delta\pi_j = -\sum_{j=1}^{n} Z_{ja} \times \delta\pi_j.$$

В силу этого соотношения, а также (35), матрица-столбец $\delta z = \delta z' - z^T \delta\pi$.Подставляя это выражение, а также (34) в уравнение для $\delta\bar{r}$, получим

$$\delta\bar{r} = T^T[(\bar{C}+\bar{Z})^T \times \delta\bar{\pi} - \delta z']. \tag{36}$$

Пусть δW_a – возможная работа, совершаемая в отдельном шарнире a $(a = 1,\ldots,n)$. Она может быть выражена через величины $z_a, z_a', \delta z_a, G_a, \Omega_a$ и $\delta\chi_a$ для этого шарнира a и через физические параметры, такие, как жесткость пружины, например. Выражение для δW_a всегда будет линейным по δz_a и $\delta\chi_a$, так что оно может быть записано в форме

$$\delta W_a = -\delta z_a \cdot X_a - \delta\chi_a \cdot Y_a, \quad a = 1,\ldots,n. \tag{37}$$

Этим соотношением определяются сила $-X_a$ и момент $-Y_a$, которые производят совместно такую же возможную работу, как реально существующие шарнирные силы. Член $-\delta z_a \cdot X_a$ показывает, что линия действия силы $-X_a$ проходит через шарнирную точку a. Обе величины, $-X_a$ и $-Y_a$, приложены к телу, положение которого подвергается варьированию, т.е. к телу $i^-(a)$. Отсюда следует, что силы $+X_a$ и $+Y_a$ действуют на тело $i^+(a)$.

В результате для выражения возможной работы имеем:

$$\delta W = \sum_{a=1}^{n} \delta W_i = -\delta\bar{z}^T \bar{X} + \delta\bar{\pi}^T S \cdot \bar{Y}. \tag{38}$$

В соответствии с выражениями (27), (32), (33), (36) и (37) уравнения (2) принимают вид:

$$\left(\delta\bar{\pi}^T \times (\bar{C}+\bar{Z})T - \delta\bar{z}^T T\right)\left(\bar{F} + \bar{U} - mT^T(\bar{C}+\bar{Z})^T \times \dot{\bar{\omega}} + mT^T\bar{z}'' - m\bar{\Delta}\right) +$$
$$+ \delta\bar{\pi}^T(\bar{M} + \bar{M}^u - \bar{I}\dot{\bar{\omega}} - \bar{V}) - \delta\bar{z}^T\bar{X} + \delta\bar{\pi}^T S \cdot \bar{Y} = 0$$

или

$$\delta\pi^T(\bar{C}+\bar{Z})T \times \left(\bar{F} + \bar{U} - mT^T(\bar{C}+\bar{Z})^T \times \dot{\bar{\omega}} + mT^T\bar{z}'' - m\bar{\Delta}\right) +$$
$$+ \delta\pi^T(\bar{M} + \bar{M}^u - \bar{I}\dot{\bar{\omega}} - \bar{V}) - \delta\bar{z}^T\bar{X} + \delta\bar{\pi}^T S\bar{Y} = 0. \tag{39}$$

Для манипуляторов вариации $\delta\bar{\pi}$ и $\delta\bar{z}$ являются, как правило, независимыми. Соответственно получаем следующие уравнения:

$$\delta\pi^T\Big((\bar{C}+\bar{Z})T \times (\bar{F} + \bar{U} - mT^T(\bar{C}+\bar{Z})^T \times \dot{\bar{\omega}} +$$
$$+ mT^T\bar{z}'' - m\bar{\Delta}) + \bar{M} + \bar{M}^u - \bar{I}\dot{\bar{\omega}} - \bar{V} + S \cdot \bar{Y}\Big) = 0$$
$$\delta\bar{z}^T\left(T(\bar{F} + \bar{U} - mT^T(\bar{C}+\bar{Z}) \times \dot{\bar{\omega}} + mT^T\bar{z}'' - m\bar{\Delta}) + \bar{X}\right) = 0 \tag{40}$$

В случае шаровых шарниров, вариации $\delta\bar{\pi}$ также независимы, и из (40) имеем следующую совокупность уравнений:

$$\left(\bar{C}+\bar{Z}\right)T \times m\left(\bar{C}+\bar{Z}\right)' \cdot T'\dot{\bar{\omega}} - \bar{I}\dot{\bar{\omega}} + \left(C+Z\right)T \times m\left(C+Z\right)'T'\bar{z}'' -$$
$$-\left(\bar{C}+\bar{Z}\right)T \times \bar{F} - \left(\bar{C}+\bar{Z}\right)T \times \bar{U} + \left(\bar{C}+\bar{Z}\right)T \times \bar{\delta} - \bar{M} - \bar{M}^U + \bar{V} - S \cdot \bar{Y} = 0, \tag{41}$$

в которых матрица при $\dot{\bar{\omega}}$ является невырожденной.

Будем полагать, что относительные перемещения системы могут быть различного характера, соответственно выражаются через некоторые параметры:

- $\overline{s}_a = (s_{a1}, s_{a2}, s_{a3})$ в случае свободного перемещения;
- $\overline{s}_a = (s_{a1}, s_{a2})$ в случае, когда шарнир позволяет перемещения вдоль плоскости;
- $\overline{s}_a = s_{a1} \cdot \overline{e}_a$, когда возможно прямолинейное перемещение.

Таким образом, можем считать в общем виде

$$\overline{Z}_a = \overline{Z}_a(\overline{s}_a).$$

Отсюда имеем следующие выражения для $\overline{Z}_a{}', \overline{Z}_a{}'', \delta Z_a$:

$$\overline{Z}_a{}' = \left(\frac{\partial \overline{Z}_a}{\partial \overline{s}_a}\right)' \dot{\overline{s}}_a,$$

$$\overline{Z}_a{}'' = \left(\frac{\partial \overline{Z}_a}{\partial \overline{s}_a}\right)' \ddot{\overline{s}}_a + \dot{\overline{s}}_a' \left(\frac{\partial^2 \overline{Z}_a{}'}{\partial \overline{s}_a \partial \overline{s}_a}\right) \overline{s}_a, \tag{42}$$

$$\delta Z_a = \left(\frac{\partial \overline{Z}_a}{\partial \overline{s}_a}\right)' \delta \overline{s}_a.$$

Подставляя эти выражения в (40) и (41), получаем следующие уравнения моделируемой системы

$$\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{s}}\right) T \left(mT' \left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{s}}\right)' \ddot{\overline{s}} - mT' \left(\overline{C} + \overline{Z}\right) \times \dot{\overline{\omega}} \cdot \right.$$
$$\left. mT' \left(\dot{\overline{s}}' \left(\frac{\partial^2 \overline{Z}}{\partial \overline{s} \partial \overline{s}'} \right) \right) - m\overline{\Delta} + F + U \right) + \left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{s}}\right) \overline{X} = 0. \tag{43}$$

$$\left(\overline{C} + \overline{Z}\right) T \times m\left(\overline{C} + \overline{Z}\right)' \cdot T' \dot{\overline{\omega}} - \overline{I}\,\dot{\overline{\omega}} + \left(C + Z\right) T \times m\left(C + Z\right)' T' \cdot$$
$$\left(\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{s}}\right)' \ddot{\overline{s}} + \dot{\overline{s}}' \left(\frac{\partial^2 \overline{Z}'}{\partial \overline{s} \partial \overline{s}} \right) \overline{s} \right) - \left(\overline{C} + \overline{Z}\right) T \times \overline{F} - \left(\overline{C} + \overline{Z}\right) T \times \overline{U} + \left(\overline{C} + \overline{Z}\right) T \times \overline{\delta} - \tag{44}$$
$$- \overline{M} - \overline{M}^U + \overline{V} - S \cdot \overline{Y} = 0.$$

К полученным уравнениям следует добавить кинематические уравнения вращательного движения в углах Эйлера или Крылова, в параметрах Родрига-Гамильтона.

Построим алгоритм управления движением манипулятора в виде системы твердых тел, связанных между собой и с ведущим телом шаровыми шарнирами с использованием углов Крылова-Брайнта [1].

В этих углах угловая ориентация связанного с телом базиса $\overline{e}^{(k)}$ представляется в виде последовательности трех поворотов, в начале которых этот базис совпадает с базисом $\overline{e}^{(k-1)}$ предыдущего по отсчету тела. Первый поворот на угол $\varphi_1^{(k)}$ выполняется вокруг оси $\overline{e}^{(k_1)}$. Он приводит к вспомогательному базису $\overline{e}^{(k_0)}$. Второй поворот на угол

$\varphi_2^{(k)}$ вокруг оси $\overline{e}_2^{(k_0)}$ приводит к базису $\overline{e}^{(k_1)}$. Третий поворот на угол $\varphi_3^{(k)}$ вокруг оси $\overline{e}_3^{(k_1)}$ сообщает связанному с k-ым телом базису его окончательную ориентацию $\overline{e}^{(k)}$.

Матрица направляющих косинусов, связывающая $\overline{e}^{(k-1)}$ и $\overline{e}^{(k)}$, имеет следующий вид [1]

$$\Phi^{(k-1),k} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2^{(k)}\cos\varphi_3^{(k)} & \cos\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_2^{(k)} + \sin\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_2^{(k)}\cos\varphi_3^{(k)} & \sin\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_3^{(k)} - \cos\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_2^{(k)}\cos\varphi_3^{(k)} \\ -\cos\varphi_2^{(k)}\sin\varphi_3^{(k)} & \cos\varphi_1^{(k)}\cos\varphi_2^{(k)} - \sin\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_2^{(k)}\sin\varphi_3^{(k)} & \sin\varphi_1^{(k)}\cos\varphi_3^{(k)} + \cos\varphi_1^{(k)}\sin\varphi_2^{(k)}\sin\varphi_3^{(k)} \\ \sin\varphi_2^{(k)} & -\sin\varphi_1^{(k)}\cos\varphi_2^{(k)} & \cos\varphi_1^{(k)}\cos\varphi_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Для условий скорости $\overline{\Omega}^{(k)}$ k-го тела соответственно будут иметь место выражения

$$\overline{\Omega}^{(k)} = \dot{\varphi}_1^{(k)}\overline{e}_1^{(k-1)} + \dot{\varphi}_2^{(k)}\overline{e}_2^{(k_1)} + \dot{\varphi}_3^{(k)}\overline{e}_3^{(k)}$$

или

$$\overline{\Omega}_k = \Phi_k\dot{\varphi}^{(k)}, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2^{(k)}\cos\varphi_3^{(k)} & \sin\varphi_3^{(k)} & 0 \\ -\cos\varphi_2^{(k)}\sin\varphi_3^{(k)} & \cos\varphi_3^{(k)} & 0 \\ \sin\varphi_2^{(k)} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разрешая их относительно $\dot{\varphi}_1^{(k)}, \dot{\varphi}_2^{(k)}, \dot{\varphi}_3^{(k)}$, находим соответствующие кинематические уравнения

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1^{(k)} = \dfrac{\cos\varphi_3^{(k)}}{\cos\varphi_2^{(k)}}\Omega_{kx} - \dfrac{\sin\varphi_3^{(k)}}{\cos\varphi_2^{(k)}}\Omega_{ky} \\ \dot{\varphi}_2^{(k)} = \sin\varphi_3^{(k)}\Omega_{kx} + \cos\varphi_3^{(k)}\Omega_{ky} \\ \dot{\varphi}_3^{(k)} = -\cos\varphi_3^{(k)}\,\mathrm{tg}\,\varphi_2^{(k)}\Omega_{kx} + \sin\varphi_3^{(k)}\,\mathrm{g}\,\varphi_2^{(k)}\Omega_{ky} + \Omega_{kz} \end{cases} \tag{45}$$

Совокупность уравнений (43), (44), (4), (45) представляет собой полную совокупность уравнений, описывающих управление движением манипулятора, связанного с телом, совершающим заданное движение.

Покажем такое построение для программного движения системы, задаваемого в относительных переменных равенствами

$$\overline{s} = 0, \quad \dot{\overline{s}} = 0, \quad \overline{\Omega} = 0, \quad \overline{\varphi} = 0. \tag{46}$$

В абсолютной системе координат система движется как единая с ведущим телом по закону

$$\overline{\omega} = \omega_0, \quad \overline{r} = -\left(\overline{C}T\right)'1_n + \overline{r}_0 1_n - \left(C_0 T\right)'. \tag{47}$$

Положим

$$\overline{\Omega}_k^* = -\Phi_k\overline{\sin}\varphi^{(k)}, \quad \left(\overline{\sin}\overline{\varphi}^{(k)}\right)' = \left(\sin\dot{\varphi}_1^{(k)}, \sin\dot{\varphi}_2^{(k)}, \sin\dot{\varphi}_3^{(k)}\right).$$

В соответствии с (4) найдем выражения абсолютных угловых скоростей

$$\overline{\omega}^* = T'\overline{\Omega}^* + \overline{\omega}_0 1_n, \quad \left(\overline{\Omega}^*\right)' = \left(\overline{\Omega}_1^*, \ldots, \overline{\Omega}_n^*\right).$$

Положим в (43) и (44)

$$\bar{U} = -\bar{B}_1 \Delta\left(\dot{\bar{s}} + \bar{F}\bar{s}\right), \quad M_U = -\bar{B}_2 \Delta\left(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*\right), \tag{48}$$

где $\bar{F} = \mathrm{diag}\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n\right)$ и $\bar{F}_k$ положительно определены.

Для производной функции

$$V = \frac{1}{2}\left(\dot{\bar{Z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{s}}T\right)' m\left(\dot{\bar{Z}}\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{s}}T\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*\right)'\left(\bar{I}\left(\bar{C} + \bar{Z}\right)T \times m\left(\bar{C} + \bar{Z}\right)' T'\right)\left(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*\right)$$

при соответствующем выборе матриц $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ имеем оценку

$$\dot{V} \le -\nu_1 \left\|\bar{\omega} - \bar{\omega}^*\right\| - \nu_2 \left\|\dot{s} + \bar{F}\bar{s}\right\| \le 0.$$

Применяя теоремы из [3, 4], находим, что релейное управление (48) решает задачу о стабилизации движений (46)–(47).

На основе полученных теоретических результатов разработан соответствующий программный комплекс.

Список литературы

1. Wittenburg J. Dynamics of systems rigid bodies. – Stuttgart: B.G. Tubner, 1977. (Перевод: Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. – М.: Наука, 1980. – 262 с.)
2. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. – М.: Наука, 1993. – 272 с.
3. Перегудова О.А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. – Ульяновск: УлГУ, 2009. –253 с.
4. Андреев А.С., Дмитриева О.Г., Петровичева Ю.В. Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 1. – С. 15–21.

THE MODEL OF CONTROL OF THE MECHANICAL SYSTEM AS A SYSTEM OF INTERCONNECTED RIGID BODIES

Borisov S.V., Shepelev G.A.

Ulyanovsk State University

Abstract. The paper presents a new control structure for the spatial motion of a multilink manipulator, modeled as a system of interconnected rigid bodies, with the assumption of the relative displacement of individual bodies and using Krylov-Bryant angles to describe the relative rotational motion.

Keywords: control, mechanical system, the system of interconnected rigid bodies, Lyapunov vector function.

УДК 519.2

МЕТОД НАТУРАЛЬНОЙ ШКАЛЫ В ПОСТРОЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Бутов А. А., Замашкина О. М.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. Настоящая работа посвящена математическому описанию метода натуральной шкалы в построении распределений при имитационном компьютерном моделировании симметричных случайных блужданий.

Ключевые слова: симметричное случайное блуждание, натуральная шкала, эмпирическая функция распределения.

Настоящая работа посвящена методам (их разработке и применению), позволяющим исследовать аналитически и имитационно случайные блуждания в случайных средах (см. [2] и [3,4]).

Пусть $X_t = A_t - B_t$ – процесс симметричного случайного блуждания, где A_t– число скачков «вверх», а B_t– число скачков «вниз» (см. [1]):

$$\widetilde{A_t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^t I\{x_s = i\} \cdot \lambda_i ds = \int_0^t \lambda_{x_s} ds \quad (1)$$

$$\widetilde{B_t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^t I\{x_s = i\} \cdot \mu_i ds = \int_0^t \mu_{x_s} ds \quad (2)$$

1) $\lambda_i = \mu_i = \varepsilon > 0$, где$\varepsilon$=const.

2) $\lambda_i = |i| + 1$.

3) $\lambda_i = \varepsilon_i$, $\{\varepsilon_{-N}, \dots, \varepsilon_N\}$ – независимо одинаково распределенная случайная величина на отрезке $[a, b]$, где 0<a<b

$$Y_t = \begin{cases} \sum_{i=0}^{X_t - 1} \xi_i, & X_t \geq 1, \\ 0, & X_t = 0, \\ \sum_{i=X_t}^{-1} \xi_i, & X_t \leq -1 \end{cases} \quad (3)$$

где $\xi_i = \frac{1}{\varepsilon_i}$.

Натуральная шкала (см. [4]):

$$\Phi(N) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i, & N \geq 1 \\ 0, & X_t = 0 \\ \sum_{i=N}^{-1} \xi_i, & N \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

$Y_t = \Phi(X_t)$; $X = \Phi^{-1}(Y)$;$\frac{1}{N}\Phi([N \cdot x]) \to (E\xi) \cdot x$.

График, иллюстрирующий процесс имитационного моделирования, приведён на рис. 1.

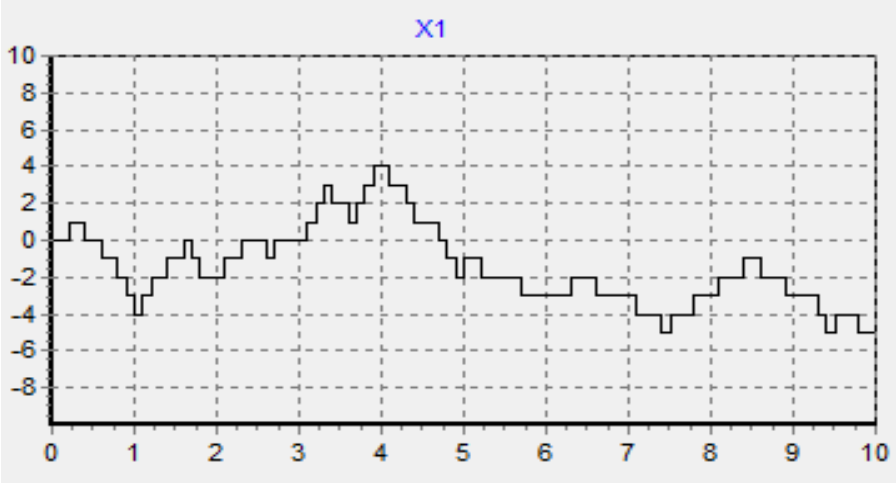


Рис. 1. Процесс симметричного случайного блуждания при значениях: $\lambda_i = \mu_i = 3$

Эмпирическая функция распределения процессов X_t иY_t :

$$F_{X_t}^{\text{эмп}}(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I\{X_t^k \le x\} \quad (5)$$

$$F_{Y_t}^{\text{эмп}}(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I\{Y_t^k \le x\}, \quad (6)$$

где $-A \le x \le A$, $A > 0$; $x_{i+1} - x_i = \Delta$.

Проводилось сопоставление в равномерной метрике

$$\|F_X, F_Y\| = sup_{x_i}|F_X(x_i) - F_Y(x_i)|, \quad (7)$$

показавшее достаточную адекватность процесса имитационного моделирования.

Список литературы

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: Физмалит, 2005.
2. Бутов А.А. Мартингальные методы изучения случайных блужданий в одномерной случайной среде // ТВП. – 1994. – С. 681-698.
3. Бутов А.А. Случайные блуждания в случайных средах общего вида (мартингальные методы): дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1993.
4. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теория вероятности и марковские процессы, 1966.

THE METHOD OF THE NATURAL SCALE OF THE ANALYSIS OF EMPIRICALDISTRIBUTIONS OF RANDOM WALKS IN SIMULATIONS

Butov A. A., Zamashkina O.M.

Ulyanovsk State University

Abstract. The article is devoted to the mathematical description of the method of natural scale for the problems of the analysis of distributions of random walks for the simulations.

Keywords: symmetric random walk, natural scale, empirical distribution function.

УДК 51-76

НОВЫЕ МЕТОДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА[1]

Кудашова Е.А., Кудашкина И.В, Федорова Л.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости дискретной модели типа Вольтерра. С помощью метода сравнения для разностных систем найдены достаточные условия асимптотической устойчивости.

Ключевые слова: дискретная модель, Уравнения Вольтерра динамики популяций, метод сравнения, устойчивость.

Распространенной моделью ряда нелинейных систем и процессов являются дифференциальные, функционально-дифференциальные уравнения, предложенные к рассмотрению в работах В. Вольтерра [1]. Соответствующими разностными уравнениями могут быть описаны модели в медицине, экономике и других естественных, а так же технических науках [2-7]. За основу исследования примем эпидемиологическую модель из монографии [8].

Рассмотрим две различные популяции, где инфицированные члены одной популяции могут заражать здоровых членов другой популяции. Простая дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{12}(n)x_2(n)(1-x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = a_{21}(n)x_1(n)(1-x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n), \end{cases} \quad (1)$$

где $n \in Z^+$, x_1 и x_2 – относительные инфицированные члены популяции, $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1$, $a_{jk}, j,k = 1,2,-$ коэффициенты, характеризующие процесс заражения для которых могут быть приняты следующие условия $0 < \varepsilon \le a_{jk}(n) \le 1-\varepsilon$.

Множество $\Gamma = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$ для системы (1) является инвариантным для любых значений $x(n_0) = x_0, (n_0, x_0) \in Z^+ \times \Gamma$, соответствующих решений $x(n, n_0, x_0) \in \Gamma$ для всех $n \ge n_0$.

Уравнения (1) предкомпактны, соответствующие предельные уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a^*_{12}(n)x_2(n)(1-x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = a^*_{21}(n)x_1(n)(1-x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n). \end{cases} \quad (2)$$

В качестве векторной функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = (V_1, V_2)^T, V_1 = x_1, V_2 = x_2.$$

Здесь $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (1) и (2), а система сравнения имеет вид

$$\begin{cases} w_1(n+1) = a_{11}(n)w_1 + a_{12}(n)w_2 - Q_1, \\ w_2(n+1) = a_{21}(n)w_1 + a_{22}(n)w_2 - Q_2. \end{cases} \tag{3}$$

При этом, в принятых обозначениях, $Q_1 = a_{12}(n)x_1x_2$, $Q_2 = a_{21}(n)x_1x_2$, откуда получаем, что предельные функции Q_1^* и Q_2^* соответственно задаются равенствами

$$\begin{gathered} Q_1^* = a_{12}^*(n)x_1(n)x_2(n), Q_2^* = a_{21}^*(n)x_1(n)x_2(n), \\ a_{jk}^*(n) = \lim_{m\to\infty} a_{jk}(m+n). \end{gathered} \tag{4}$$

Положим $A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}$. Решение $w_1 = w_2 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ будет равномерно устойчивым, если для любого $k_0 \in Z^+$ и $k \geq k_0$

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \leq M = const, \tag{5}$$

где $\| B \| = max(| b_{jk} |)$.

Множество $\{Q_1^* = Q_2^* = 0\} = \{x_1(n) = 0$ или $x_2(n) = 0\}$ не содержит решений (2), кроме $x_1 = x_2 = 0$. Условие (5) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (1).

Иное достаточное условие асимптотической устойчивости можно вывести на основе функции Ляпунова.

$$V(x_1, x_2) = \alpha | x_1 | + \beta | x_2 | = \alpha x_1 + \beta x_2, \ \alpha > 0, \beta > 0.$$

Находим

$$\begin{gathered} V(n+1) = \alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1) = (\alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n) + \\ +(\alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n))x_2(n) - (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n)x_2(n) = \mu(n)V(n) - Q, \\ Q = (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1x_2. \end{gathered}$$

Пусть

$$\begin{cases} \alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n) \leq \alpha\mu(n), \\ \alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n) \leq \beta\mu(n), \end{cases} \tag{6}$$

где полагаем, что $\mu(n) > 0$ есть некоторая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\prod_{j=n_0}^{n} \mu(j) \leq m_0 = const, \forall\ n > n_0, n_0 \in Z^+. \tag{7}$$

Находим, что при условиях (6) и (7) решение $w = 0$ соответствующего уравнения сравнения

$$w(n+1) = \mu(n)w(n)$$

равномерно устойчиво, а множество $Q^* = (\alpha a_{12}^*(n) + \beta a_{21}^*(n))x_1x_2$ не содержит решений (2), кроме $x_1 = x_2 = 0$. И, таким образом, условия (6) и (7) достаточны для глобальной равномерной асимптотической устойчивости $x_1 = x_2 = 0$ системы (1).

Представим неравенства (6) в виде

$$\begin{cases} a_{11}(n)+\dfrac{\beta}{\alpha}a_{21}(n)\le \mu(n), \\ \dfrac{\alpha}{\beta}a_{12}(n)+a_{22}(n)\le \mu(n). \end{cases} \tag{8}$$

Обозначив $\dfrac{\beta}{\alpha}=\gamma,\ \ \gamma\in(0,\infty)$ и разрешив полученную систему относительно γ, получим, что эти условия выполняются, если функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mu(n)\ge a_{11}(n)+\gamma a_{21}(n),\ \mu(n)\ge a_{22}(n)+\frac{1}{\gamma}a_{12}(n).$$

Соответственно условия (7) обращаются в условие: существует такое число $\gamma>0$, при котором

$$\prod_{j=n_0}^{n}\max\{a_{11}(j)+\gamma a_{21}(j),a_{22}(j)+\frac{1}{\gamma}a_{12}(j)\}\le m_0=const\quad \forall\ n>n_0,n_0\in Z^+. \tag{9}$$

Замечание 1. *Для постоянной матрицы* $A(n)=A_0=const$ *условия (5) или (9) обращаются в условия* $\lambda_{max}(A_0)\le 1$, *здесь* $\lambda_{max}(A_0)$ *- наибольшее собственное значение матрицы* A_0. *Что соответственно совпадает с необходимым и достаточным условием для автономной системы (1) из [8], записанного в виде*

$$1-(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ge 0. \tag{10}$$

Если вместо условия (5) матрица $A(n)$ удовлетворяет условию вида:

$$\left\|\prod_{j=km}^{(k+1)m}A(j)\right\|\ge 1+\varepsilon,$$

для некоторых $m\in Z^+$ и $\varepsilon>0$ и $\forall k\in Z^+$, тогда несложно найти, что состояние $x_1=x_2=0$ системы (1) неустойчиво.

При постоянных $a_{jk}=const,\ j,k=1,2$ и нарушении условий (10) система (1) имеет ненулевое стационарное решение

$$x_1=x_1^0=1-\frac{(a_{21}-a_{22}+1)(1-a_{12})}{(a_{12}-a_{11}+1)a_{21}},$$
$$x_2=x_2^0=1-\frac{(a_{11}-a_{12}+1)(1-a_{22})}{(a_{21}-a_{22}+1)a_{11}}.$$

В общем случае системы (1) это решение существует, если коэффициенты $a_{jk}(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$1-\frac{(a_{21}(n)-a_{22}(n)+1)(1-a_{12}(n))}{(a_{11}(n)-a_{12}(n)+1)a_{21}(n)}=b_{11}^0=const<1,$$

$$1-\frac{(a_{11}(n)-a_{12}(n)+1)(1-a_{22}(n))}{(a_{21}(n)-a_{22}(n)+1)a_{11}(n)}=b_{22}^0=const<1.$$

Исследуем вопрос об устойчивости, как этого возможного стационарного состояния, так и любого другого решения системы (1)

$$x_1=x_{10}^*(n),\quad x_2=x_{20}^*(n). \tag{11}$$

Вводимвозмущения

$$\tilde{x}_1(n) = x_1 - x_{10}^*(n), \quad \tilde{x}_2(n) = x_2 - x_{20}^*(n).$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь следующий вид

$$\tilde{x}_1(n+1) = a_{12}(n)(1-x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) + (a_{11}(n) - a_{12}(n)x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) - a_{12}(n)\tilde{x}_2(n)\tilde{x}_1(n),$$

$$\tilde{x}_2(n+1) = a_{21}(n)(1-x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) + (a_{22}(n) - a_{21}(n)x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) - a_{21}(n)\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n). \quad (12)$$

Уравнения линейного приближения соответственно будут

$$\tilde{x}(n+1) = \tilde{A}(n)\tilde{x}(n). \quad (13)$$

Матрица $\tilde{\mathrm{A}}$ системы (12) имеет вид:

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}x_{20}^* & a_{12}(1-x_{10}^*) \\ a_{21}(1-x_{20}^*) & a_{22} - a_{21}x_{10}^* \end{pmatrix}.$$

Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (12) может быть определена в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 1. [8], [9]. *Рассмотрим систему* $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n))$, *где* $f(n,0) \equiv 0, \| f(n,x) \| \le \gamma \| x \|$. *Если нулевое решение линейной системы первого приближения* $x(n+1) = A(n)x(n)$ *равномерно асимптотически устойчиво (а значит, экспоненциально устойчиво) и если* γ *достаточно мало, то нулевое решение нелинейной системы также экспоненциально устойчиво.*

Непосредственными вычислениями находим условия равномерной асимптотической устойчивости системы (13): для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $n_0 \in Z^+$ и любых $n \ge N$

$$\left\| \prod_{j=n_0}^{n_0+N} \tilde{A}(j) \right\| \le \varepsilon. \quad (15)$$

Согласно теореме 1 это условие достаточно и для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ системы (12).

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости решения (12) на основе функции Ляпунова вида:

$$\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \alpha |\tilde{x}_1| + \beta |\tilde{x}_2|, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$\tilde{V}(n+1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \le (\alpha \left| a_{11} - a_{12}x_{20}^* \right| + \beta a_{21}(1-x_{20}^*)) |\tilde{x}_1(n)| +$$

$$+ (\alpha a_{12}(1-x_{10}^*) + \beta \left| a_{22} - a_{21}x_{10}^* \right|) |\tilde{x}_2(n)| - (\alpha a_{12} + \beta a_{21}) |\tilde{x}_1(n)| |\tilde{x}_2(n)| \le \mu_1(n)\tilde{V}(n) + \mu_2(n)\tilde{V}^2(n),$$

если

$$\begin{cases} \alpha \left| a_{11} - a_{12}x_{20}^* \right| + \beta a_{21}(1-x_{20}^*) \le \alpha\mu_1(n), \\ \alpha a_{12}(1-x_{10}^*) + \beta \left| a_{22} - a_{21}x_{10}^* \right| \le \beta\mu_1(n), \\ 4\dfrac{\alpha a_{12} + \beta a_{21}}{\alpha\beta} \le \mu_2(n). \end{cases} \quad (16)$$

Соответственно, имеем следующее уравнение сравнения

$$w(n+1) = \mu_1(n)w(n) + \mu_2(n)w^2(n). \qquad (17)$$

Глобальная равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения этого уравнения достаточна для глобальной равномерной асимптотической устойчивости решения (12).

Решение $w = 0$ будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если для $\mu_1(n)$ имеет место соотношение

$$\prod_{j=k_0}^{k_0+k} \mu_1(j) \le \varepsilon, \forall\, k \ge k_0 + N = N(\varepsilon) > 0, k_0 \in Z^+. \qquad (18)$$

Таким образом, согласно теореме 1 первые два неравенства (16) и соотношение (18) достаточны для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x} = 0$ системы (12).

Перепишем указанные условия из (16) в виде

$$\left|a_{11} - a_{12}x_{20}^*\right| + \frac{\beta}{\alpha}a_{21} - \frac{\beta}{\alpha}a_{21}x_{20}^* \le \mu_1(n),$$

$$\left|a_{22} - a_{21}x_{10}^*\right| + \frac{\alpha}{\beta}a_{12} - \frac{\alpha}{\beta}a_{12}x_{10}^* \le \mu_1(n),$$

Полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, находим, что эти условия будут выполнены, если функция $\mu_1(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &\mu_1(n) \ge \mu_1^*(n) \equiv \left|a_{11} - a_{12}x_{20}^*\right| + \gamma a_{21}(1 - x_{20}^*), \\ &\mu_1(n) \ge \mu_1^{**}(n) \equiv \left|a_{22} - a_{21}x_{10}^*\right| + \frac{1}{\gamma}a_{12}(1 - x_{10}^*). \end{aligned} \qquad (19)$$

Учитывая требования (18), получаем, что решение (12) будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если найдется число $\gamma > 0$, такое что

$$\prod_{j=k_0}^{n} \max\{\mu_1^*(j), \mu_1^{**}(j)\} \le \varepsilon \quad \forall\, k > k_0 + N, N = N(\varepsilon), k_0 \in Z^+.$$

При постоянных значениях a_{jk}, полагая $\mu = 1$, отсюда имеем условия асимптотической устойчивости стационарного режима, совпадающие с соответствующим результатом из [8].

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть x_i – инфицированная часть популяции $P_i, i = 1,2,3.$ Тогда $(1 - x_i)$ – здоровая часть, которая воспринимает инфекцию.

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_{34}(n)x_3(n) + a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + a_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \quad (20)$$

где $\varepsilon \le a_{ij} \le 1 - \varepsilon, i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4.$ Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \le x_i \le 1, i = 1,2,3\}, \forall n \ge n_0, x(n_0) \in \Gamma$

$$\begin{cases} a_{12}(n) + a_{13}(n) \le 1, \\ a_{21}(n) + a_{23}(n) \le 1, \\ a_{31}(n) + a_{32}(n) + a_{34}(n) \le 1. \end{cases} \quad (21)$$

Уравнения, предельные к (20), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a^*_{12}(n)x_2(n) + a^*_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a^*_{21}(n)x_1(n) + a^*_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a^*_{34}(n)x_3(n) + a^*_{31}(n)x_1(n) + a^*_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + a^*_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \quad (22)$$

где функции $a^*_{ij}(n)$ являются предельными для a_{ij} соответственно для некоторой последовательности $n_k \to +\infty$:

$$a^*_{ij}(n) = \lim_{n_k \to +\infty} a_{ij}(n + n_k).$$

Введем вектор-функцию $V = (V_1 = x_1, V_2 = x_2, V_3 = x_3)$.

Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (20) и (22), а система сравнения имеет вид

$$w(n+1) = A(n)w(n) - Q,$$

где в принятых обозначениях

$$A(n) = \left\| a_{jk}(n) \right\|,$$
$$Q_1 = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))x_1(n),$$
$$Q_2 = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))x_2(n),$$
$$Q_3 = (a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n) + a_{34}(n)x_3(n))x_3(n).$$

Функции Q^*, предельные к Q, являются аналогичными.

Решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ равномерно устойчиво, если выполнено условие

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \le M = const, \forall\ k_0 \in Z^+, k \ge k_0. \quad (23)$$

Множество $Q^* = 0$ не содержит решений (22), кроме нулевого, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В соответствии с теоремой 1, условия (23) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (20).

Введем функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$, где $f > 0, g > 0, h > 0$. Аналогично случаю системы (1) условия

$$\begin{cases} fa_{11}(n)+ga_{21}(n)+ha_{31}(n)\le f\mu(n), \\ fa_{12}(n)+ga_{22}(n)+ha_{32}(n)\le g\mu(n), \\ fa_{13}(n)+ga_{23}(n)+ha_{33}(n)+ha_{34}(n)\le h\mu(n), \end{cases} \tag{24}$$

где функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношению (7), являются достаточными для равномерной устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

При этом единственным квазиинвариантным относительно (22) подмножеством множества $\{Q_1^* = 0, Q_3^* = 0, Q_3^* = 0\}$ оказывается точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому существованияпостоянных f, g, h и функции $\mu(n)$, удовлетворяющих условиям (24) и (7), достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (20).

Проведем анализ (24), введя параметры $u = \dfrac{f}{g} > 0$ и $v = \dfrac{h}{g} > 0$. Система неравенств (24) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \mu(n) > a_{11}(n), \\ \mu(n) > a_{22}(n), \\ \mu(n) > a_{33}(n)+a_{34}(n), \\ v \le \dfrac{\mu(n)-a_{11}(n)}{a_{31}(n)}u - \dfrac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}, \\ v \le \dfrac{\mu(n)-a_{22}(n)}{a_{32}(n)} - \dfrac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)}u, \\ v \le -\dfrac{a_{13}(n)}{a_{33}(n)+a_{34}(n)-\mu(n)}u - \dfrac{a_{23}(n)}{a_{33}(n)+a_{34}(n)-\mu(n)}. \end{cases} \tag{25}$$

На плоскости (u, v) последние три неравенства определяют область, изображенную на рис. 1.

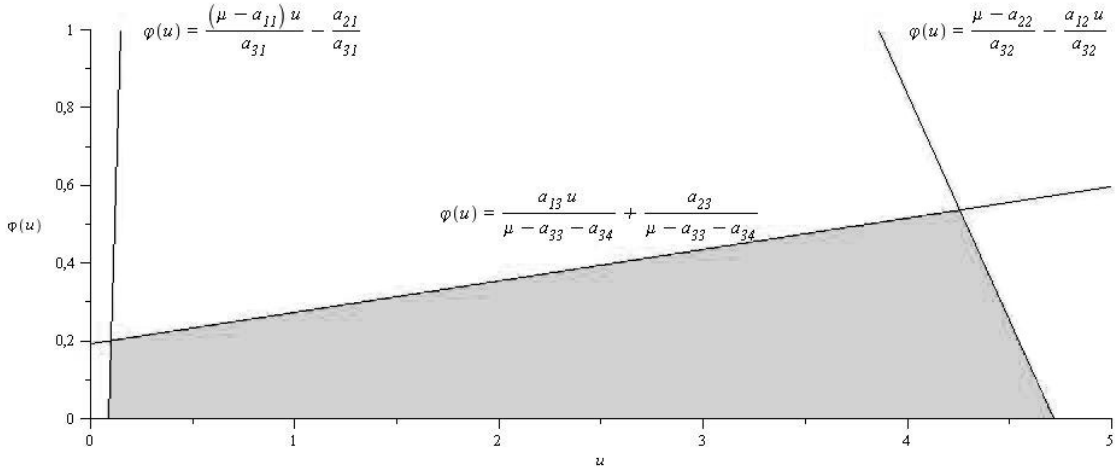


Рис. 1. Графическая интерпретация условий (25)

Укажем явно точки пересечения полуплоскостей.

1. Минимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной четвертым соотношением из системы (25), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n)-a_{11}(n)}{a_{31}(n)}u=\frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)},$$

2. Полуплоскости, заданные четвертым и шестым соотношениями из системы (25), имеют точку пересечения их границ при

$$u_1^*(n)=\frac{a_{23}a_{31}+a_{21}(\mu-a_{34}-a_{33})}{(\mu-a_{34}-a_{33})(\mu-a_{11})-a_{13}a_{31}},$$

если выполнено условие

$$(\mu-a_{11})(\mu-a_{34}-a_{33})>a_{13}a_{31}. \qquad (26)$$

3. Полуплоскости, заданные пятым и шестым соотношениями из системы (25), имеют точку пересечения их границ

$$u_2^*(n)=\frac{\mu^2-(a_{34}+a_{33}+a_{22})\mu+a_{22}a_{34}-a_{23}a_{32}+a_{22}a_{33}}{a_{13}a_{32}+a_{12}(\mu-a_{34}-a_{32})}. \qquad (27)$$

4. Максимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной пятым соотношением из системы (25), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n)-a_{22}(n)}{a_{32}(n)}=\frac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)}u,$$

Интервал определения области будет содержать точку (α^*,β^*), $\alpha^*>0,\beta^*>0$, независимую от n при условиях

$$0<\gamma^*\le\frac{a_{21}(n)}{\mu(n)-a_{11}(n)}\le\alpha^*\le\frac{\mu(n)-a_{22}(n)}{a_{12}(n)},$$

$$\frac{(\mu(n)-a_{11}(n))\alpha^*}{a_{31}(n)}-\frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}\ge\beta^*,$$

$$\frac{a_{13}(n)\alpha^*+a_{23}(n)}{\mu(n)-a_{33}(n)-a_{34}(n)}\ge\beta^*,$$

$$\frac{\mu(n)-a_{22}(n)-a_{12}(n)\alpha^*}{a_{32}(n)\ge\beta^*},$$

выполняемых для всех $n\in Z^+$.

Таким образом, для функции $\mu(n)$, кроме (18) имеем следующую совокупность оценок

$$\mu(n) \geq a_{22}(n) + \alpha^* a_{12}(n),$$

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*} a_{21}(n),$$

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n)),$$

$$\mu(n) \geq a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n),$$

$$\mu(n) \leq a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)},$$

$$\mu(n) \leq a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n)).$$

Совместимость этих оценок выражается следующим образом:

Пусть существуют постоянные значения $\alpha^* > 0, \beta^* > 0, \gamma^* > 0$ такие, что для функции $\mu = \mu^*(n)$, определяемой равенством

$$\mu^*(n) = \max\left\{a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n)), a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)\right\},$$

одновременно с условием (7) выполняется соотношение

$$\mu^*(n) \leq \min\left\{a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}, a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))\right\}.$$

Тогда состояние $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ процесса (20) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Список литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
2. Богданов А.Ю. Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 262 с.
3. Родионов А.М. Притяжение для дискретных уравнений, приложение к динамике популяций // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 2. – С. 76-85.
4. Родионов А.М. О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 12. – С. 122-129.
5. RondoniL. Autocatalyticreactionsasdynamicalsystemsontheinterval // J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34. –No. 11. – Pp. 5238-5251.
6. Sedaghat H. A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. – 1997. – Vol. 29. –No. 5. – Pp. 593-603.
7. Simonovits A. Chaotic dynamics of economic systems // Szigma.– 1985. – Vol. 18. – Pp. 267-277.

8. LaSalle J.P. Stability of difference equations. In a Study in Ordinary Differential Equations (edited by J. K. Hale), Studies in Mathematical Series, Mathematical Association of America, 1977.
9. LaSalle J.P. The stability and control of discrete processes. (Applied mathematical sciences; vol. 62), Springer-Verlag, 1986. – 147 p.

NEW METHODS OF STABILITY OF DISCRETE VOLTERRA MODEL

Kudashova E.A., Kudashkina I.V, Fedorova L.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. The present paper is devoted to studying the stability of a discrete Volterra mode. By using the comparison method the sufficient conditions for asymptotic stability are found for difference systems.
Keywords: discrete model, Volterra equations, population dynamics, comparison method, stability.

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ТРЕХКОЛЕСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА: ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА[1]

Кудашова Е.А., Филаткина Е.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе для реализации новых методов дискретного управления робототехническими системами представлено описание программы, реализующей процесс моделирования выхода омни-робота на желаемое движение, путем построения траекторий на плоскости. Данная программа представляет собой самостоятельное кроссплатформенное приложение, спроектированное на языке JavaSE 7u75.
Ключевые слова: стабилизация, механическая система, дискретное управление, метод сравнения, вектор-функция Ляпунова.

Для качественной визуализации процесса управления трехколесным мобильным роботом [1, 2] и упрощения работы пользователя с программным продуктом, непосредственно для данного мобильного приложения был разработан [3] собственный математический пакет и модуль ввода математических формул. А также векторный движок, благодаря которому интерфейс программы адаптируется под различные разрешения экрана, не теряя в качестве отображения графических элементов и не умаляя удобства взаимодействия с приложением. Реализована возможность программного сглаживания готового изображения, что позволяет рисовать дробную часть пикселя и в конечном итоге позволяет получить наилучшее отображение графиков и текста.

Кроме того, в данном приложении реализована идея «живого приложения» – все необходимые перепостроения и перерасчеты происходят без нажатия пользователя на дополнительные кнопки. Например, в основном разделе моделирования не используется не единой кнопки, а благодаря многопоточной оптимизации внутренних расчетов производительность интерфейса практически не снижается.

Приложение предназначено для моделирования управляемого движения трехколесного робота, анализа качества управления, скорости выхода робота на желаемую траекторию движения и подробного анализа результатов математического моделирования.

Моделирование начинается с запуска приложения trowth.exe для Windows и trowh.jar– для Linux, в основном меню программы пользователю предоставляется возможность ознакомиться с теоретической частью, лежащей в основе математического моделирования управляемого движения колесного робота, ознакомиться с информацией об авторах проекта или перейти к демонстрации работы заложенного закона управления.

Разделы программного продукта

В *теоретическую часть* входит схематическое изображения управляемогообъекта, система дифференциальных уравнений, описывающая движение робота и описание характеристик, использующихся в построении управления.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

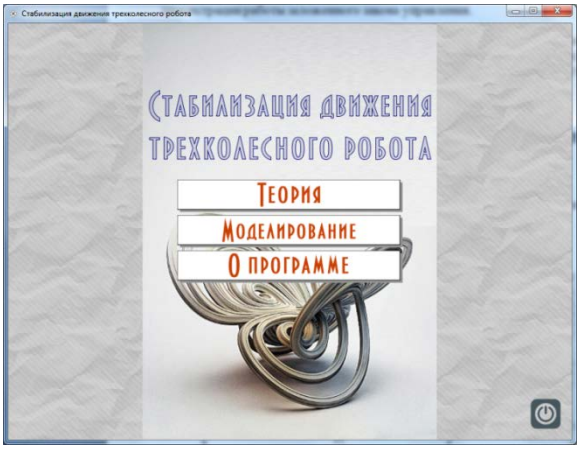


Рис. 1. Внешний вид главного меню

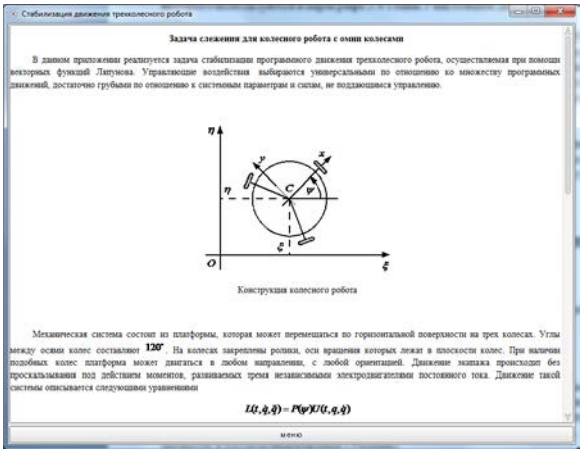


Рис. 2. Внешний вид теоретического раздела

При переходе непосредственно к разделу «*математическое моделирование*», пользователю предлагается задать параметры системы, параметры управления, а также начальные точки положения робота, либо согласиться с предложенными по умолчанию. О значении каждого из параметров пользователь может прочесть в разделе приложения «Теория» на рис. 2.

Следующим этапом работы с программой является задание движения робота одним из следующих способов:

1. Аналитический ввод функций, описывающих движение робота;
2. Задание траектории движения графически;
3. Загрузка файлов с массивами данных.

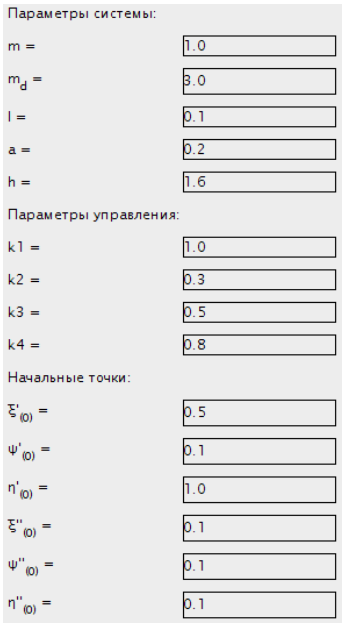


Рис. 3. Параметры для расчетов

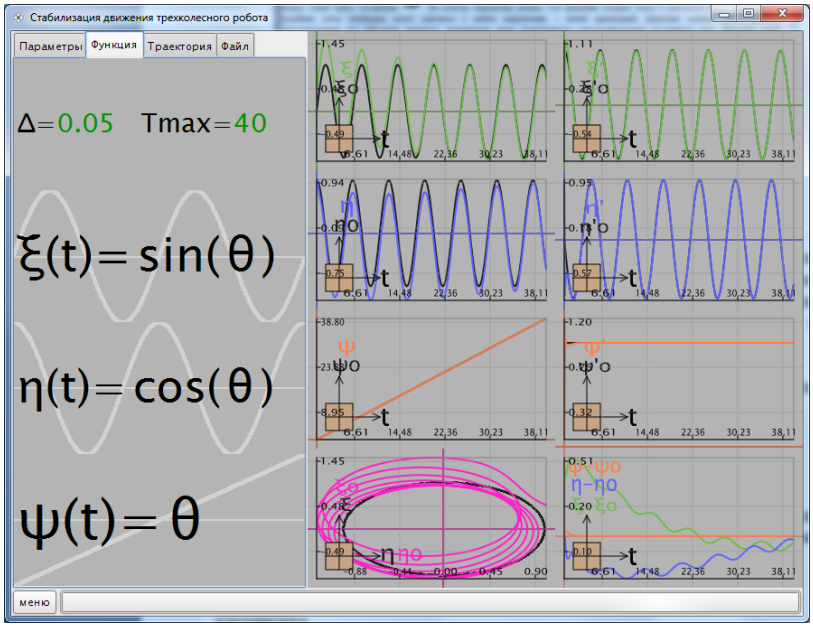


Рис. 4. Внешний вид раздела «моделирование»

В случае возникновения ошибки на одном из этапов ввода данных, пользователь незамедлительно увидит предупреждение о некорректном вводе и возможных методах исправления ошибки.

Задание закона движения робота аналитически.

Ввод формул, описывающих желаемое движение мобильного робота данным методом, задействует математический пакет, самостоятельно разработанный автором.

На первом этапе пользователю предлагается ввести функции $\xi_0(t), \eta_0(t), \psi_0(t)$, описывающие движение робота, а так же шаг дискретизации Δ и время моделирования $T_{\max}$. По мере введения каждой функции под ней рисуется миниатюра графика, что позволяет ориентироваться и подбирать коэффициенты в сложных формулах. По окончанию ввода последней формулы незамедлительно происходит моделирование управляемого движения робота.

Использование векторной графики позволило сделать ввод формулы интерактивным, формула во время ввода автоматически занимает все доступное для нее место, в правой части стоит приглашение к вводу в виде знака "[?]". При клике мыши на этот значок выпадает список с вариантами возможных операций. Процесс создания формулы ведется путем собирания формулы из отдельных функциональных блоков. После ввода формулы происходит её компиляция в оперативную память и при каждом следующем обращении процессор практически не участвует в вычислении, за счет этого достигается высокая скорость производительности пакета.

Стоит отметить, что тестирование скорости обработки формул математическим пакетом, выявило его преимущество перед такими известными инструментами, как *MathCad 14* и *Maple 12*. Несомненно, преимущество в скорости обусловлено относительно скромным набором функций, входящих в пакет разработанного продукта, однако, библиотека формул является более чем достаточной для проведения моделирования дискретных динамических систем и может быть расширена при необходимости.

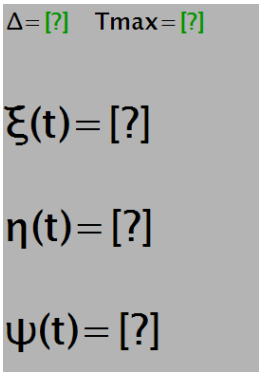


Рис. 5. Система ожидает ввода управления с помощью формул

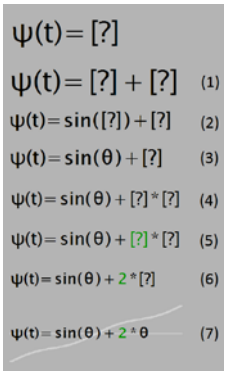


*Рис. 6. Типичный ввод формулы по этапам функции sin(t)+2*t*

При наборе формулы поддерживаются следующие действия, обрабатывающиеся функционалом математического пакета:

- все математические операции (умножение, деление, сложение, вычитание, возведение в степень);

- ввод без ограничения по длине формулы;
- ввод без ограничений по количеству вложенных скобок;
- добавление делегированных тригонометрических и алгебраических функций ($\sin(t), \cos(t), tg(t), ctg(t), \exp(t), \ln(t)$);
- ввод делегированных констант, например, π ;
- ввод переменной t .

Приоритеты операций в редакторе являются общепринятыми в математике, так, например, в выражении *x+y*z* сначала будет выполнено умножение, а потом сложение.

Кроме того, редактор дает возможность менять приоритеты по умолчанию, указывая их в явном виде с помощью символов парных скобок. При этом глубина вложенности прямо пропорциональна величине приоритета, то есть более внутренние скобки указывают на больший приоритет, чем внешние, обрамляющие их. В предыдущем примере с суммой и произведением порядок вычисления можно поменять, используя скобки, записав всё выражение так: *(x+y)*z.*

Если все действия проделаны правильно, на заднем плане отрисуется график функции рис. 6 п.7.

Метод ввода траектории движения робота графически.

Если пользователь выбирает графический способ ввода траектории, перед ним открывается поле для поточечного ввода произвольной траектории.

Изначально поле представляется чистым листом, на который можно нанести неограниченное количество точек. Каждая из точек имеет три характеристики (координаты на плоскости и угол поворота).

- удалить траекторию;
- добавление точки по клику в любой части рабочей области;
- вставить точку в произвольную часть ломаной;
- переместить точку без разрыва траектории;
- удалить узловую точку без разрыва траектории;
- замкнуть траекторию путем соединения.

Графический редактор является авторской разработкой и предоставляет возможность поточечного ввода траектории. Модуль позволяет вводить любые значения от *-1.7e+308* до *1.7e+308* с точность до *1e-12*.

Ввод данных организован при помощи двух совокупных плоскостей $\xi O\psi$, $\eta O\psi$, переключение между которыми производится нажатием на перекрестие в левом нижнем углу графического редактора. *Скорость движения робота в этом случае принимается постоянной на каждом отрезке ломаной.*

При редактировании траектории мгновенно происходит расчет управления и управляемого движения и отображается результат математического моделирования движения мобильного робота по заданной траектории.

Благодаря векторной графике, лежащей в основе проектирования приложения, в данном модуле поддерживается масштабирование ломаной в широких пределах, что позволяет пользователю редактировать степень излома траектории. В случае, если траектория скрывается из рабочей области, на границах плоскости появляются ключевые точки, предоставляющие информацию о положении ломаной за пределами рабочей области.

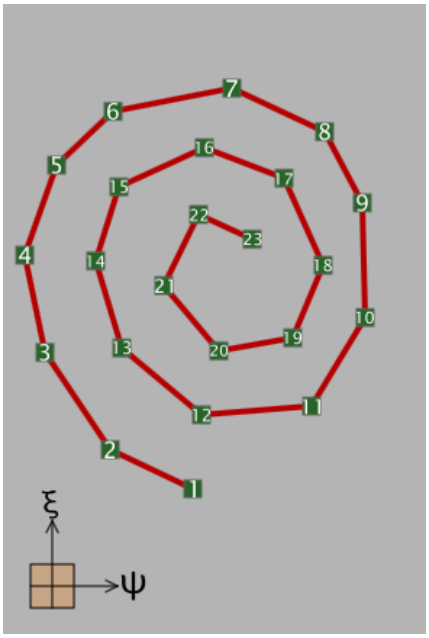


Рис. 7. Внешний вид модуля ввода траектории

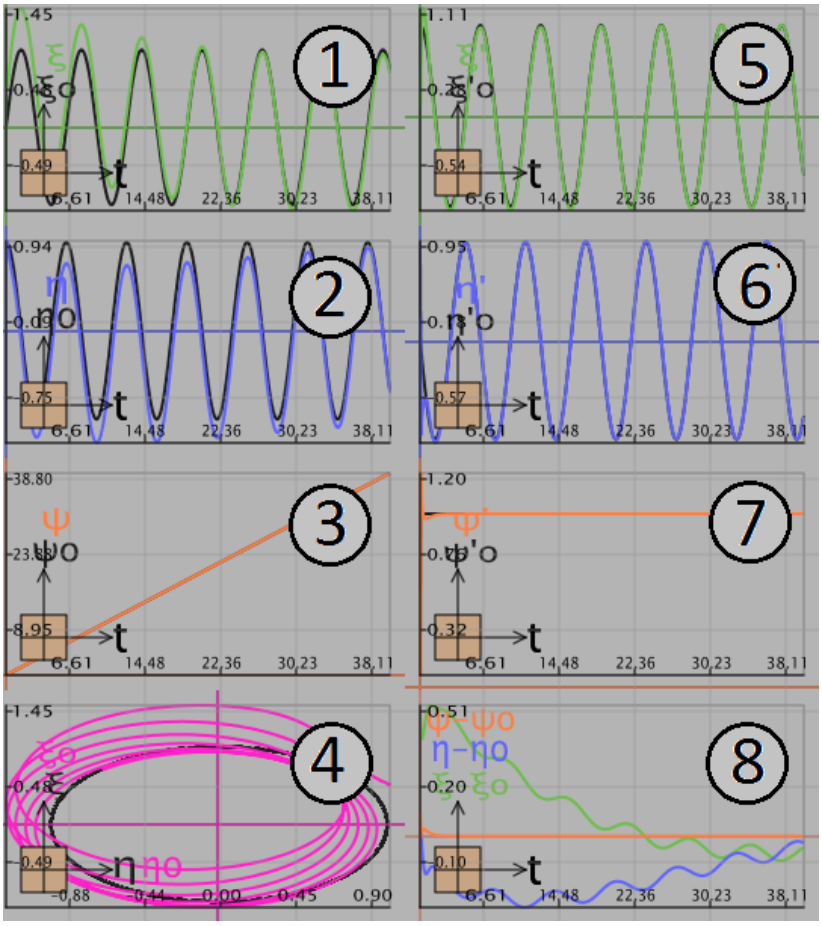


Рис. 8. Внешний вид расчетной части

Файловый метод задания программного движения робота

При выборе этого метода ввода, пользователю необходимо загрузить в программу файл с уже сформированными координатами движения объекта управления. Данные полученные из многомерного массива итерационно подставляются в дискретизированные формулы, описывающее движение робота. Данный программный продукт позволяет провести импорт из *Microsoft Excell*. На данный момент приложением поддерживается два расширения: *cvs; msr* – внутреннее расширение. Для импорта данных из других продуктов можно воспользоваться внутренним форматом данных с открытым протоколом.

После задания траектории движения робота одним из описанных способов, в правой части приложения выводятся следующие графики рис. 8.

1) графики $\xi(t), \xi_0(t)$ траектории центра масс платформы;
2) графики $\eta(t), \eta_0(t)$ координаты центра масс платформы;
3) графики $\psi(t), \psi_0(t)$ угла поворота платформы;
4) графики $\dot{\xi}(t), \dot{\xi}_0(t)$ скорости центра масс платформы;
5) графики $\dot{\eta}(t), \dot{\eta}_0(t)$ скорости координат центра масс платформы;
6) графики $\dot{\psi}(t), \dot{\psi}_0(t)$ угла поворота платформы;

7) графики траектории платформы на фазовой плоскости $\xi(\eta(t)), \xi_0(\eta(t))$ угла поворота платформы;

8) графики разностей $\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_0(t), \dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_0(t), \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0(t)$.

По графикам можно судить, что рассматриваемая система двигается вдоль отслеживаемой траектории на расстоянии, не превышающем погрешности слежения.

Список литературы

1. АндреевА.С., ПерегудоваО.А., Кудашова Е.А. О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и процессы управления», 15-20 сентября 2014г., Екатеринбург. – 2014.– С. 35-37.
2. Андреев А.С., Перегудова О.А. Об управлении движением колесного мобильного робота // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т.79. – Вып.4. – С.451-462.
3. Кудашова Е.А. Стабилизация движения трехколесного робота / Патент РФ на программу для ЭВМ № 2015615314. М., Роспатент, 2015.

SIMULATION OF CONTROLLED MOTION OF THE THREE-WHEELED MOBILE ROBOT: DESCRIPTION OF THE PROGRAM PRODUCT

Kudashova E.A., Filatkina E.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. In the paper for implementation of new methods of discrete control robotic systems is a description of the program created by the authors of implementing exit simulation omni-robot to the desired movement by building the trajectories on the plane. This program is a standalone cross-platform application designed to JavaSE 7u75 language.

Keywords: stabilization, mechanical system, discrete control, comparison method, Lyapunov vector function.

УДК 62-52; 62-8

ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Кудашова Е.А., Хасанова Р.И.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача о стабилизации программных движений механических систем дискретным управляющим воздействием. В качестве модельной системы рассмотрена механическая система с одной степенью свободы. Методика решения основывается на методе векторных функций Ляпунова и систем сравнения. Последовательно выводятся результаты о стабилизации программного движения непрерывным воздействием, затем дискретным. Обосновывается использование дискретной схемы моделирования.

Ключевые слова: стабилизация, механическая система, дискретное управление, метод сравнения, вектор-функция Ляпунова.

Задача о стабилизации программного движения механической системы с одной степенью свободы приводится к исследованию уравнений вида[1]:

$$\ddot{x} = d(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(t,x,\dot{x})x + u, \tag{1}$$

где $d(t,x,\dot{x})$ и $f(t,x,\dot{x})$ определены в области $R^+ \times G_1 \times G_2$, $G_1 = \{x \in R : |x| < H_1, 0 < H_1 \le +\infty\}$, $G_2 = \{\dot{x} \in R : |\dot{x}| < H_2, 0 < H_2 \le +\infty\}$, $u-$ управляющее воздействие.

Для исследования этой задачи и построения алгоритма её решения цифровым управлением вначале рассмотрим вспомогательную задачу о построении векторной функции Ляпунова в задаче об устойчивости решения $\dot{x} = x = 0$ уравнения

$$\ddot{x} = -\gamma(t,x,\dot{x})\dot{x} - q(t,x,\dot{x})x. \tag{2}$$

Будем полагать, что коэффициенты $\gamma(t,x,\dot{x})$ и $q(t,x,\dot{x})$ ограничены при $(t,x,\dot{x}) \in R^+ \times G_{10} \times G_{20}$ так, что

$$0 < \gamma_0 \le \gamma(t,x,\dot{x}) \le \gamma_1, \quad 0 < q_0 \le q(t,x,\dot{x}) \le q_1, \tag{3}$$

где $G_{10} = \{x \in R : |x| \le H_{10} < H_1\}$, $G_{20} = \{\dot{x} \in R : |\dot{x}| \le H_{20} < H_2\}$.

Введем вектор-функцию Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \quad V_1 = |x|, \; V_2 = |\dot{x} + \mu x|, \quad \mu = const > 0.$$

Для производных функций V_1 и V_2 имеем следующие оценки

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

$$\dot{V}_1 = sgn(x)\dot{x} = sgnx(\dot{x} + \mu x - \mu x) \le V_2 - \mu V_1$$
$$\dot{V}_2 = sgn(\dot{x} + \mu x)(\ddot{x} + \mu\dot{x}) = sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)\dot{x} - qx) =$$
$$= sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)(\dot{x} + \mu x) -$$
$$-(\mu - \gamma)\mu x - qx)) \le (\mu - \gamma)V_2 + |\mu(\mu - \gamma) + q|V_1.$$

Если учесть возможность изменения γ и q при всех ограничениях (3), тогда для производной $\dot{V}_2$ имеем следующую оценку, независимую от $(t, x, \dot{x})$

$$\dot{V}_2 \le -(\gamma_0 - \mu)V_2 + \nu V_1, \quad \mu < \gamma_0,$$
$$\nu = max\{(|\mu(\mu - \gamma) + q|), t \in R^+, (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}\}.$$

Таким образом, устойчивость положения $\dot{x} = x = 0$ уравнения (2) может быть найдена из условий устойчивости стационарной системы

$$\dot{u}_1 = -\mu u_1 + u_2, \quad \dot{u}_2 = \nu u_1 - (\gamma_0 - \mu)u_2, \tag{4}$$

Для нее имеем следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 1 \\ \nu & -(\gamma_0 - \mu) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + \gamma_0\lambda + \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu = 0.$$

Отсюда получаем, что условия асимптотической устойчивости $\dot{x} = x = 0$, причем экспоненциальной, сводятся к неравенствам

$$\mu < \gamma_0, \quad \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu > 0. \tag{5}$$

Последнее неравенство будет выполняться для всевозможных законов изменения $\gamma = \gamma(t, x, \dot{x})$ и $q = q(t, x, \dot{x})$, удовлетворяющих (3), если выполнены неравенства

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \nu < \mu(\gamma_0 - \mu),$$

или

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \mu(\mu - \gamma_1) + q_0 \le \mu(\mu - \gamma_0) + q_1 < \mu(\gamma_0 - \mu).$$

Последние соотношения сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} (\gamma_1 - \gamma_0)\mu < q_0, \\ 2\mu^2 - 2\mu\gamma_0 + q_1 < 0. \end{cases}$$

Число $0 < \mu < \gamma_0$, удовлетворяющее этой системе неравенств, существует, если выполнены условия

$$\gamma_0^2 > 2q_1, \quad 2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1}). \tag{6}$$

Эти условия можно рассматривать как условия относительно выбора параметров γ_0 и γ_1 в соотношениях (3) при заданных q_0 и q_1.

Перейдем к задаче о стабилизации положения равновесия системы (1) при помощи ступенчатого импульсного управляющего воздействия с обратной связью вида

$$u = -k_1(t)\dot{x}(T_n) - k_2(t)x(T_n), \quad T_n = nT, n \in Z^+, T > 0. \tag{7}$$

Таким образом, $T_n = nT$, T – период дискретизации.

Модель (1) принимает вид

$$\ddot{x} = d(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(t,x,\dot{x})x - k_1(t)\dot{x}(T_n) - k_2(t)x(T_n), \tag{8}$$

где полагается, что коэффициенты усиления k_1 и k_2 непрерывны на каждом отрезке $[T_n, T_{n+1})$.

Модель

$$\begin{gathered}\ddot{x} = -\gamma(t,x,\dot{x})\dot{x} - q(t,x,\dot{x})x, \\ \gamma(t,x,\dot{x}) = k_1(t) - d(t,x,\dot{x}), q(t,x,\dot{x}) = k_2(t) - f(t,x,\dot{x})\end{gathered} \tag{9}$$

примем за базовую. В этой модели считаем, что измерения $\dot{x}(t)$ и $x(t)$ являются непрерывными, управляющее воздействие имеет вид

$$u(t,x(t),\dot{x}(t)) = -k_1(t)\dot{x}(t) - k_2(t)x(t). \tag{10}$$

Согласно (3) и (6) имеем следующие условия асимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$

$$\begin{gathered}0 < \gamma_0 \le k_1(t) - d(t,x,\dot{x}) \le \gamma_1, \\ 0 < q_0 \le k_2(t) - f(t,x,\dot{x}) \le q_1,\end{gathered}$$

где постоянные $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ удовлетворяют соотношению (6). Отсюда следует, что для базовой модели (9) управляющее воздействие типа (10) решает поставленную задачу, если коэффициенты усиления $k_1(t), k_2(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}0 < \gamma_0 + d^*(t) \le k_1(t) \le \gamma_1 + d_*(t), \\ 0 < q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le q_1 + f_*(t), \\ d^*(t) = max(d(t,x,\dot{x}),(x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}), \quad d_*(t) = min(d(t,x,\dot{x}),(x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}), \\ f^*(t) = max(f(t,x,\dot{x}),(x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}), \quad f_*(t) = min(f(t,x,\dot{x}),(x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}).\end{gathered} \tag{11}$$

В представлении (8) с точностью до T^2 при $T_n \le t < T_{n+1}$ можно разложить

$$\dot{x}(T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), \quad x(T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n). \tag{12}$$

Тем самым, с точностью до T^2 модель (8) принимает вид базовой модели, на каждом отрезке $T_n \le t < T_{n+1}$

$$\ddot{x}(t) = -\gamma^{(1)}[t]\dot{x}(t) - q^{(1)}[t]x(t),$$

$$\gamma^{(1)}(T_n,t,x,\dot{x}) = \frac{k_1(t) - d(t,x,\dot{x}) - k_2(t)(t - T_n)}{1 - k_1(t)(t - T_n)}, \tag{13}$$

$$q^{(1)}(T_n,t,x,\dot{x}) = \frac{k_2(t) - f(t,x,\dot{x})}{1 - k_1(t)(t - T_n)}.$$

Несмотря на то, что полученная модель представляет собой систему с разрывной правой частью, для нее применимы предыдущие рассуждения. И, соответственно, выводим следующие достаточные условия стабилизируемости

$$0 < \gamma_0 \le \frac{k_1(t) - d(t,x,\dot{x}) - k_2(t)(t-T_n)}{1-k_1(t)(t-T_n)} \le \gamma_1,$$

$$0 < q_0 \le \frac{k_2(t) - f(t,x,\dot{x})}{1-k_1(t)(t-T_n)} \le q_1,$$

где, как ранее, для $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$, полагается существование соотношений (6). Отсюда для коэффициентов усиления $k_1(t), k_2(t)$ получим следующие условия

$$\begin{gathered} \gamma_0 + d^*(t) \le k_1(t) \le (d_*(t) + k_2(t)(\mathrm{t}-T_n)\gamma_1)/(1+\gamma_1(\mathrm{t}-T_n)), \\ q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le f_*(t) + (1-k_1(t)(\mathrm{t}-T_n))q_1, \end{gathered} \tag{14}$$

Может быть применен следующий алгоритм построения управления (7)

- Из условий (11) находятся допустимые коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Эти условия достаточно широкие для выбора $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Они позволяют подобрать эти коэффициенты из дополнительных условий, например, с учетом оптимизации энергетических затрат.

- Из условий (14) или их усилением находится возможный период дискретизации T .

Контроль за импульсным управлением возможен путем дискретизации уравнений (1) с воздействием (7).

Для этого сделаем замену

$$y_1 = x \quad y_2 = \dot{x}.$$

В новых переменных уравнение (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= d(t,y_1,y_2)y_2 + f(t,y_1,y_2)y_1 + u. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя соотношения

$$\dot{y}_1 = \frac{y_1(T_{n+1}) - y_1(T_n)}{T} = \frac{y_1[n+1] - y_1[n]}{T},$$

$$\dot{y}_2 = \frac{y_2(T_{n+1}) - y_2(T_n)}{T} = \frac{y_2[n+1] - y_2[n]}{T},$$

получаем модель вида

$$\begin{cases} y_1[n+1] = y_1[n] + Ty_2[n], \\ y_2[n+1] = y_2[n] - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n]), \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_1[n] = k_1(n) - d[n], \quad q_1[n] = k_2(n) - f[n], \\ &d[n] = d(T_n, y_1[n], y_2[n]), \quad f[n] = f(T_n, y_1[n], y_2[n]), \end{aligned}$$

Устойчивость состояния $y_1 = y_2 = 0$ системы (16) определим на основе векторной функции Ляпунова

$$V_1 = |y_1|, \quad V_2 = |y_2 + \mu y_1|, \quad \mu > 0.$$

Находим, учитывая малость $T > 0$

$$V_1[n+1] = |y_1[n+1]| = |y_1[n] + Ty_2[n]| \le |1 - \mu T| V_1[n] + TV_2[n],$$

$$V_2[n+1] = |y_2[n+1] + \mu y_1[n+1]| =$$
$$= |y_2[n] + \mu(y_1[n] + Ty_2[n]) - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n])| \le$$
$$\le \nu_0 TV_1[n] + |1 + \mu T - \gamma_0 T| V_2[n],$$

$$\nu_0 = max(|\mu(\mu - \gamma_1[n]) + q_1[n]|, n \in Z^+), \quad \gamma_0 = min(\gamma_1[n], n \in Z^+).$$

Для вектор-функции $(V_1[n], V_2[n])$ получаем следующую систему уравнений сравнения

$$\begin{cases} u_1[n+1] = [1 - \mu T]u_1[n] + Tu_2[n], \\ u_2[n+1] = \nu_0 Tu_1[n] + (1 + \mu T - \gamma_0 T)u_2[n]. \end{cases} \tag{17}$$

Условия её устойчивости сводятся к исследованию характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu T - \eta & T \\ \nu_0 T & 1 + \mu T - \gamma_0 T - \eta \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\eta^2 - (2 + \gamma_0 T)\eta + (1 + \mu(\gamma_0 - \mu)T^2 - \nu_0 T^2) = 0.$$

Асимптотическая устойчивость будет иметь место, если корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $|\eta| < 1$. Соответствующее число $\mu > 0$ должно удовлетворять неравенствам вида (5). Аналогично предыдущему, оно существует, если имеет место соотношение (6), независящее от T.

Таким образом, условия асимптотической устойчивости системы (13) достаточны и для асимптотической устойчивости системы (15).

Соответственно, система (15) может служить для описания, анализа и дискретного моделирования нулевого состояния системы (1) с управляющим воздействием (7).

Обоснованность представления (1) с (7) в виде (13) с точностью до T^2 зависит от свойств функций $d(t, x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x})$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

Рассмотрим этот вопрос подробно, полагая $d \equiv 0$, $f \equiv 0$, $k_1(t) = k_1^0(t) = const > 0$, $k_2(t) = k_2^0(t) = const > 0$.

В этом случае, в силу того, что $\ddot{x} = const$ $[T_n \le t < T)$ имеем

$$\dot{x}(T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n),$$

$$x(T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n) - \frac{1}{2}\ddot{x}(t)(t - T_n)^2.$$

Соответственно, система (1) с управляющим воздействием (7), принимающим вид

$$u(t,x,\dot{x}) = -k_1^0 \dot{x}(T_n) - k_2^0 x(T_n), \tag{18}$$

может быть стабилизируема, если коэффициенты усиления k_1^0 и k_2^0 согласно (14) удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_0 + k_1^0 T \le k_1^0 \le \gamma_1/(1+T\gamma_1),$$
$$q_0 \le k_2^0 \le (1+k_1^0 T)q_1.$$

Конкретный подбор коэффициентов k_1^0 и k_2^0 зависит от допустимых значений T_n и выбора чисел $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ второй совокупности соотношений (6).

Список литературы

1. Андреев А.С., Кудашова Е.А., Перегудова О.А. О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 6. – С. 113-115.
2. Иванников П.А., Перегудова О.А. Об асимптотической устойчивости неавтономных разностных систем // Всероссийский Семинар «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением»: материалы докладов. Ульяновск, 09-12 июня 2011 года, Ульяновск: УлГУ, 2011. – С. 88-93.
3. Андреев А.С., Перегудова О.А. Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движений управляемых систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 1. – С. 32-44.
4. Кудашова Е.А. Синтез стабилизирующего управления в дискретных системах без выходов // Журнал Средневолжского математического общества. –2014. – Т. 16, № 3. – С. 72-76.
5. Андреев А.С., Перегудова О.А., Кудашова Е.А. О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и процессы управления», 15-20 сентября 2014г., Екатеринбург. – С. 35-37.
6. Перегудова О.А., Кудашова Е.А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 1. – С.118-120.
7. Кудашова Е.А. О стабилизации механической системы с одной степенью свободы и с цифровым управлением // Международная конференция по математической теории управления и механике: тезисы докладов, 3-7 июля 2015 года, г. Суздаль. – С. 80-81.
8. Andreev A.S., Kudashova E.A. On Stability and Stabilization Problems for Nonlinear Control Systems Modeled by Discrete Equations // Abstracts of the Scientific Conference “Mathematical Physics and Related Problems of the Modern Analysis”, 26-27 November 2015. – Bukhara State University. 2015. – P. 300-301.
9. Peregudova O. Method of Lyapunov Vector Functions in the Investigation of the Problems on the Stabilization of Nonlinear Systems Motions with Digital Control // 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 10-14 August 2015, Bejing, China. – P. 227.

PULSE CONTROL OF PROGRAM MOTION OF A HOLONOMIC MECHANICAL SYSTEM

Kudashova E.A., Hasanova R.I.

Ulyanovsk State University

Abstract. In this paper, we consider the problem on stabilization of program motions of mechanical systems by use a discrete control action. As a model system of the considered mechanical system we investigate the one with one degree of freedom. The method of the problem solution is based on the use of the Lyapunov vector functions and comparison systems. The results of the program motion stabilization are obtained at first for the continuous control action, then for the discrete one. The use of discrete modeling scheme is substantiated.

Keywords: Stabilization, mechanical system, discrete control, comparison method, Lyapunov vector function.

УДК 539.3

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Леонтьев В.Л., Ефременков И.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена формированию конечного элемента на основе ортогональных финитных функций (ОФФ), предназначенного для решения плоских задач теории упругости. Алгоритм построения локальной матрицы жесткостиопределяется применением ОФФ. Использование ОФФ создает возможность исключения значительной части сеточных неизвестных до начала решения системы сеточных уравнений и делает данный смешанный численный метод сравнимым по количеству арифметических операций, выполняемых при получении решения, с численным методом, основанным на вариационном принципе Лагранжа. Внедрение конечного элемента в комплекс программ ANSYS осуществляется в виде динамической библиотеки, написанной на языке Fortran.

Ключевые слова: ANSYS Mechanical APDL, конечный элемент, ортогональные финитные функции, плоские задачи, теория упругости.

Введение

При проектировании конструкций применяются комплексы программ конечно-элементного анализа. Подготовка моделей к расчётам в таких системах включает в себя создание сетки конечных элементов. Комплекс программ ANSYS позволяет модифицировать алгоритм используемого численного метода и включить новый конечный элементов библиотеку конечных элементов. В статье рассмотрена структура ортогональных финитных функций, их применение при создании нового конечного элемента и при решении тестовой задачи. Использование ортогональных финитных функций позволяет увеличить точность получаемых результатов, а также увеличить эффективность метода конечных элементов в решении плоских задач теории упругости.

Конечный элемент

Для плоских задач теории упругости аппроксимирующие функции компонент вектора перемещений записываются в виде:

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{k} N_i(x,y)u_i$$

$$v(x,y)=\sum_{i=1}^{k} N_i(x,y)v_i$$

Аппроксимирующие функции $N_i(x,y)$ (функции формы) зависят от типа и формы конечного элемента.

Система уравнений для плоских задач теории упругости записывается относительно перемещений$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_x}, \boldsymbol{U_y})^{\boldsymbol{T}}$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon_{yy}}, \boldsymbol{\varepsilon_{xy}})^{\boldsymbol{T}}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma_{xx}}, \boldsymbol{\sigma_{yy}}, \boldsymbol{\sigma_{xy}})^{\boldsymbol{T}}$и состоит из кинематических уравнений, уравнений состояния и уравнений равновесия:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{xx}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{yy}} \\ \boldsymbol{2\varepsilon_{xy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} \\ \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_x} \\ \boldsymbol{U_y} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} \\ \boldsymbol{\sigma_{yy}} \\ \boldsymbol{\sigma_{xy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d_{11}} & \boldsymbol{d_{12}} & \boldsymbol{d_{13}} \\ \boldsymbol{d_{21}} & \boldsymbol{d_{22}} & \boldsymbol{d_{23}} \\ \boldsymbol{d_{31}} & \boldsymbol{d_{32}} & \boldsymbol{d_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{xx}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{yy}} \\ \boldsymbol{2\varepsilon_{xy}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} \\ \boldsymbol{\sigma_{yy}} \\ \boldsymbol{\sigma_{xy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_x} \\ \boldsymbol{f_y} \end{pmatrix},$$

где$\boldsymbol{\varepsilon_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon_{yy}}, \boldsymbol{\varepsilon_{xy}}$– компоненты тензора деформаций;$\boldsymbol{\sigma_{xx}}, \boldsymbol{\sigma_{yy}}, \boldsymbol{\sigma_{xy}}$ – компоненты тензора напряжений; $\boldsymbol{d_{ij}}$ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$ – модули упругости;$\boldsymbol{U_x}, \boldsymbol{U_y}$– компоненты вектора перемещений; $\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f_y}$– компоненты вектора внешних объемных сил.

В матричном виде эта система уравнений имеет вид:

$$\varepsilon = Bu, \qquad \sigma = D\varepsilon, \qquad B^T\sigma = f.$$

В теории упругости рассматриваются задачи о плоском напряженном состоянии и задачи о плоской деформации. Постановки этих задач отличаются матрицами упругих модулей:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\frac{E}{1-v^2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(1-v)/2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{v/(1-v)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v/(1-v)} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(1-2v)/(2(1-v))} \end{pmatrix},$$

где *E*– модуль упругости,$\boldsymbol{v}$– коэффициент Пуассона.

Локальная матрица жесткости и локальный вектор нагрузок для плоской задачи с единичной толщиной конечного элемента имеют вид:

$$\boldsymbol{B_N} = \boldsymbol{BN^T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} \\ \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}} & \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{N_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_4} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{k^e} = \int_{\boldsymbol{S^e}} \boldsymbol{B_N^T D B_N dS};\ \boldsymbol{f^e} = \int_{\boldsymbol{S^e}} (\boldsymbol{N^e})^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_x} \\ \boldsymbol{f_y} \end{pmatrix} \boldsymbol{dS} + \int_{\boldsymbol{l^e}} (\boldsymbol{N^e})^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{p_y} \end{pmatrix} \boldsymbol{dl},$$

где $\boldsymbol{k^e}$ – элементная матрицажесткости; $\boldsymbol{B_N}$ – матрица производных от функции формы; $\boldsymbol{p_x}, \boldsymbol{p_y}$ – компоненты вектора силы границе области; $\mathbf{S^e}$–площадь элемента; $\boldsymbol{l^e}$ – граница элемента, на которой задана нагрузка. Данные формулы отражены в стандартном конечном элементе, который имеет имя Plane 182 и находится в библиотеке конечных элементов ANSYS.

Здесь используются тензорные произведения одномерных базисных ОФФ [1-3]:

$$N_i = \varphi_i(t)\varphi_i(s), \quad i = \overline{1,4}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x_{i-1}-x)}{h}, & x \in \left[x_{i-1}, x_{i-1}+\dfrac{h}{2}\right] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x-x_i)}{h}+1, & x \in \left[x_{i-1}+\dfrac{h}{2}, x_i\right] \\ \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x-x_i)}{h}+1, & x \in \left[x_i, x_i+\dfrac{h}{2}\right] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x_{i+1}-x)}{h}, & x \in [x_i + h/2, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

	$\varphi_i(t)$	$\varphi_i(s)$
N_1	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x+1)}{2}+1, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(1-x)}{2}, & x \in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x+1)}{2}+1, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(1-x)}{2}, & x \in [0,1] \end{cases}$
N_2	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(-1-x)}{2}, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x-1)}{2}+1, & x \in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x+1)}{2}+1, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(1-x)}{2}, & x \in [0,1] \end{cases}$
N_3	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(-1-x)}{2}, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x-1)}{2}+1, & x \in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(-1-x)}{2}, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x-1)}{2}+1, & x \in [0,1] \end{cases}$
N_4	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(x+1)}{2}+1, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(1-x)}{2}, & x \in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{2}-1)(-1-x)}{2}, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{(\sqrt{2}+1)(x-1)}{2}+1, & x \in [0,1] \end{cases}$

Результаты расчета

Для проведения сравнительного анализа результатов была решена тестовая плоская задача теории упругости. Исследуемый объект представлял из себя двухмерную пластину в форме квадрата со стороной 1 м. Пластина состоит из упругого изотропного материала со следующими свойствами. Модуль Юнга = 200 гпа, коэффициент Пуассона = 0.28. На одной из сторон было установлено условие жесткого закрепления, на противоположенной стороне по всей длине задавалась сила, направленная по нормали к ребру квадрата в сторону от пластины, две остальные стороны пластины свободны от связей и нагрузок.

Расчет проводился с увеличением числа конечных элементов от 10 до 100 на сторонах квадрата. Были получены результаты расчетов. Графики на рис. 1 отражают зависимость максимальной разницы приближенных решений для в напряжений и перемеще-

ний, полученные в расчетах с использованием предлагаемого в статье конечного элемента и конечного элемента Plane182 ANSYS.

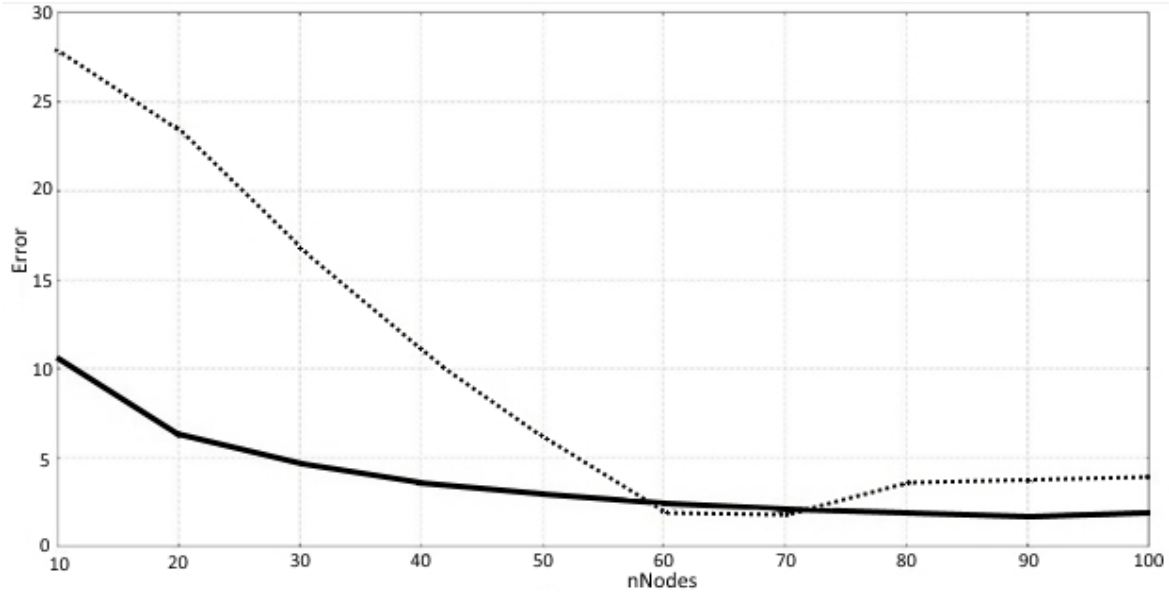


Рис. 1. Относительная разница приближенных решений для в напряжений и перемещений: сплошная линия – по перемещениям, пунктирная линия – по напряжениям

Результаты расчетов показывают сближение результатов расчетов при сгущении сетки, как по перемещениям, так и по напряжениям. Таким образом, предлагаемый конечный элемент является основой эффективного смешанного численного метода

Список литературы

1. Леонтьев В.Л. Сеточные базисы ортогональных финитных функций //Леонтьев В.Л., Лукашанец Н.Ч. Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т. 39, № 7. – С. 1158.
2. Леонтьев В.Л. Ортогональные сплайны и вариационно-сеточный метод // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 3. – С. 117.
3. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск: УлГУ, 2003. – 178 с.

FINITE ELEMENT BASED ON ORTHOGONAL COMPACTLY SUPPORTED FUNCTIONS IN THE PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY

Leontiev V.L., Efremenkov I.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. The article is devoted to the formation of a finite element based on orthogonal finite functions (OFF), intended for solving plane elasticity problems. An algorithm for constructing the local stiffness matrix is determined using OFF. Use OFF makes it possible to exclude a large part of the grid before the start of the unknown solution of a system of difference equations and makes this a mixed numerical method is comparable in the number of arithmetic operations performed in the preparation of solutions, with a numerical method based on the variational Lagrange principle. Introduction to ANSYS finite element software complex is carried out as a dynamic library, written in Fortran.
Keywords: ANSYS Mechanical APDL, finite element, finite orthogonal functions, plane problems, the theory of elasticity.

УДК 004.942

ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ЗАДАНИЕМ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ[1]

Макаров Д.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе дано описание программы, созданной автором, для моделирования движения трехзвенного пространственного манипулятора с заданием закона управления в аналитическом виде.
Ключевые слова: трехзвенный манипулятор, программа, моделирование движения.

Патент РФ на программу для ЭВМ №2016616365. Москва, Роспатент, заявка №2016613909. Дата поступления 15.04.2016. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 09.06.2016 [1].

Данная программа является отдельным кроссплатформенным приложением, имеющим графический интерфейс. Приложение написано на языке высокого уровня Java. Для построения графического интерфейса был использован фреймворк JavaFX.

Особенности приложения состоят в возможности ввода пользователем собственного закона управления для манипулятора в аналитическом виде. Причем, при вводе допускаются как использование элементарных функций, так и интегралов, в том числе, приводящих к уравнениям с запаздыванием (пределы интегрирования зависят от времени)

Приложение служит для моделирования движения управляемого трехзвенного манипулятора, анализа управления, времени стабилизации движения манипулятора относительно заданного положения или траектории.

Для запуска приложения вне зависимости от операционной системы, на которой оно исполняется, необходимо запустить файл manipulator.jar.

На главном экране (рис. 1) пользователю предлагается задать параметры системы, такие как геометрические характеристики манипулятора (длины звеньев, расстояния до их центров масс), массы звеньев, начальные положения звеньев, а также законы управления в аналитическом виде. Также присутствует возможность автоматического заполнения заранее подобранными значениями по умолчанию для демонстрации работы программы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

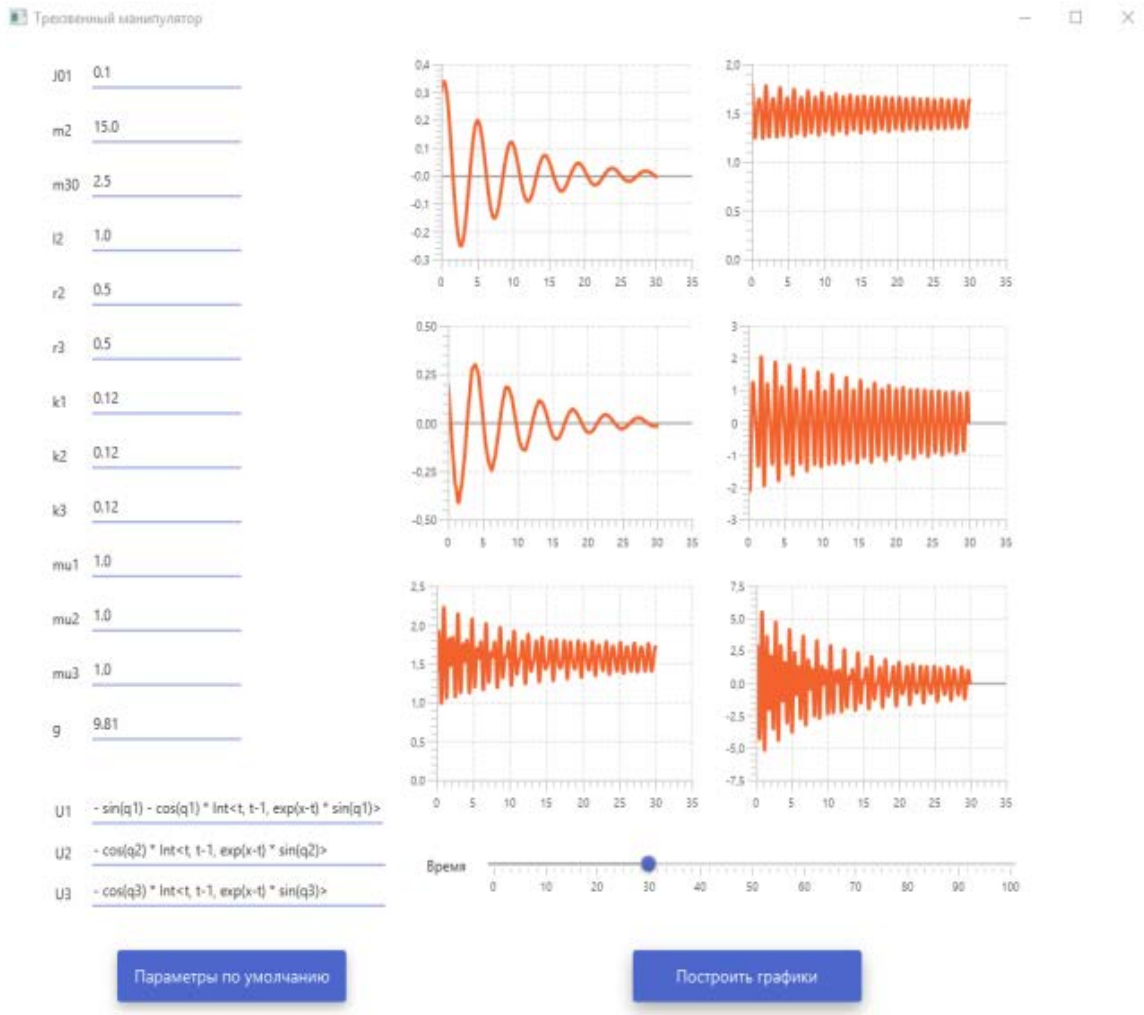


Рис. 1. Графический интерфейс приложения

В случае возникновения ошибки, программа сообщает о ней, выделяет незаполненные поля в случае недостаточных данных.

Задание аналитическихзаконов управления манипулятором

Для обработки введенных формул используется открытая сторонняя библиотека, позволяющая пользователю вводить элементарные функции. Также библиотека была доработана для того, чтобы иметь возможность распознавать определенные интегралы с переменным верхним или нижним пределом.

Формулы вводятся в поля ввода в качестве строк текста. В формулах допускается использование констант, основных математических операций и параметров системы, таких, например, как массы звеньев, заданные в виде переменных. При обработке формул происходит преобразование текста в объекты языка Java и сохранение в оперативной памяти. Дальнейшие вычисления проводятся с помощью присвоения соответствующим переменным значений, необходимых для работы на текущем шаге. Таким образом, обработка формулы производится только на первых шагах, что положительно сказывается на скорости работы программы. При необходимости библиотека работы с формулами может быть расширена.

После ввода уравнений управления и параметров системы пользователь нажимает на кнопку построения графиков, после чего программа производит моделирование движения манипулятора и отображает результаты в виде графиков, показывающих соответствующее изменение координат каждого из звеньев, а также изменения скоростей звеньев с течением времени, ограничиваясь максимальным временем, заданным пользователем.

При наборе формулы поддерживаются следующие действия:

- основные математические операции (сложение, вычитание, умножения, деление, возведение в степень);
- ввод формул без ограничения на длину;
- ввод без ограничений по количеству вложенных скобок;
- добавление делегированных тригонометрических и алгебраических функций (sin(t), cos(t), tg(t), ctg(t), exp(t), ln(t));
- ввод определенных интегралов, в том числе, с подынтегральной функцией и пределов интегрирования в зависимости от времени t;
- ввод независимой переменной t

.

Список литературы

1. Макаров Д.С. Программа численного моделирования динамики трехзвенного манипулятора с заданием закона управления в аналитическом виде. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616365. Москва. Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 2016.

DYNAMICS SIMULATION PROGRAM OF THE THREE-LINK MANIPULATOR WITH THE SETTING OF THE CONTROL LAW

Makarov D.S.

Ulyanovsk State University

Abstract. In the paper, a description of the program, created by the author, to simulate a three-link spatial manipulator motion with the setting of the control law in analytic form is given.

Keywords: Three-link manipulator, program, motion simulation.

УДК 62-50

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ПОЗИЦИЙ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТЕЙ[1]

Макаров Д.С., Перегудова О.А.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе исследуется задача о стабилизации программных движений голономной механической системы с циклическими координатами. Решение задачи с измерением только позиционных координат достигается управлением типа нелинейного интегрального регулятора.

Ключевые слова: механическая система, циклические координаты, программное движение, интегральный регулятор.

Введение

В начале 90-х годов в связи с развитием роботехники начались интенсивные исследования по математическому моделированию структуры управления движениями механических систем без измерения скоростей.

Исследованию этой задачи посвящен целый ряд работ, из которых выделяются работы [1-14]. В настоящей работе задача о стабилизации программных позиций голономной механической системы решается построением управления типа нелинейного интегрального регулятора с использованием методов исследования устойчивости систем с последействием [15, 16].

1. Постановка задачи

Рассмотрим голономную управляемую механическую систему со стационарынми связями, имеющую n обобщенных координат $q_1, q_2, ...q_n$. Движение такой системы может быть описано с помощью уравнений Лагранжп

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U. \qquad (1)$$

В уравнениях (1) введена векторно-матричная запись: $q \in R^n, q = (q_1, q_2, ...q_n)^{'}$ – вектор обобщенных координат, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_n)^{'}$ – вектор обобщенных скоростей. $T = \frac{1}{2}(\dot{q})^{'} A(q)\dot{q}$ – кинетическая энергия с инерционной матрицей $A(q), A \in R^{n\times n}; Q = Q(t, q, \dot{q})$ – вектор обобщенных сил, U – обобщенная управляющая сила; через $()^{'}$ обозначена операция транспонирования.

Через $\|q\|$ обозначим норму вектора q, $\|q\|^2 = {q_1}^2 + {q_2}^2 + \cdots + {q_n}^2$.

Матрица А является в общем случае определнно положительной при всех допустимых значениях координат. Положим, что система (1) определена для всех $q \in R^n$, а

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08482, № 15-01-08599).

соответствующая квадратичная форма $(\dot{q})^{'} A(q)\dot{q}$ при этом ограниченна и определенно-оложительна для любых $q \in R^n$, вследствие чего имеем оценку

$$2\alpha_0 \|\dot{q}\|^2 \le \dot{q}^{'} A(q)\dot{q} \le 2\alpha_1 \|\dot{q}\|^2, \alpha_0 > 0. \quad (2)$$

Полагаем при этом, что A(q) также является непрерывно-дифференцируемой. При моделировании манипуляторов важным является учет потенциальных, гироскопических и диссипативных сил. Соответственно будем полагать, что обобщенные силы непрерывны по $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times R^n \times R^n$, и при этом представимы в виде

$$Q(t, q, \dot{q}) = -\frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q} + Q_g(t, q, \dot{q}), \quad (3)$$

где $\Pi = \Pi(t, q) -$ потенциальная энергия, $Q_g(t, q, \dot{q}) -$ совокупность диссипативных и гироскопических сил. По их определению для Q_g будут иметь место следующие соотношения

$$Q_g \equiv 0, \quad \dot{q}^{'} Q_g(t, q, \dot{q}) \le 0 \quad \forall \dot{q} \in R^n. \quad (4)$$

Таким образом, задача стабилизации программного положения системы (1) состоит в отыскании управления U, которое обеспечивает стабилизацию положения системы

$$\dot{q} = 0, \quad q = q_0 = const. \quad (5)$$

2. Решение задачи стабилизации положения манипулятора

Существуют различные методы решения задачи, поставленной выше. В частности, могут быть использованы традиционные методы исследования асимптотической устойчивости под действием структуры сил и их развитие. Использование этих методов предполагает наличие диссипативных сил с полной, а иногда и с частичной диссипацией. Таким образом для построения управляющих сил требуется измерение всех (и лишь иногда части) обобщенных скоростей.

Использование определенных теорем об устойчивости фунционально-дифференциальных уравнений, представленых в [15, 16], позволяет решить поставленную задачу с помощью измерения одних лишь обобщенных координат.

Перепишем уравнения движения (1), учитывая обобщенные силы (3).

$$A(q)\ddot{q} = C(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q} + Q_g(t, q, \dot{q}) + U, \quad (6)$$

где матрица $C = (c_{j,k})$ инерционных сил определяется равенством

$$c_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i.$$

Возьмем (5) – некоторую выбранную программную позицию и введем возмущения

$$x = q - q_0, \quad y = \dot{x} = \dot{q}. \quad (7)$$

Тогда уравнения движения (6) примут следующий вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = A_1^{-1}(x)(C_1(x, y)y - \frac{\partial \Pi_1(t, x)}{\partial x} + Q_1(t, x, y) + U), \quad (8)$$

где индексом "$_1$" обозначены функции, получаемые из соответствующих зависимостей (6) в результате замены (7).

Рассмотрим матрицы $P = P(t,\tau), P \in R^{n\times n}$, учитывающие предыдущее состояние системы в виде зависимостей $P = \left|p_{jk}(t,\tau)\right|, p_{jk} = p_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}$ с постоянными $p_{jk}^0 = const, s_{jk}^0 = const, p_{jk}^0 = p_{kj}^0; s_{jk}^0 = s_{kj}^0$ такими, что выполнены условия

$$x^{'}P(t,\tau)x \geq 0; x^{'}P_t(t,\tau)x \leq -\beta_0\left|x\right|^2, \beta > 0,$$
$$P_t(t,\tau) = \frac{\partial P(t,\tau)}{\partial t} = -\left|p_{jk}^0 s_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}\right|. \tag{9}$$

Покажем, что поставленная задача может быть решена управлением вида

$$U = -\frac{\partial \Pi_2(t,x(t))}{\partial x} - \int_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau. \tag{10}$$

При управлении (10) уравнения (8) примут следующий вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t)) + Q_1(t,x(t),y(t)) -$$
$$-\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x} - \int_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau), \tag{11}$$
$$\Pi_0(t,x) = \Pi_1(t,x) + \Pi_2(t,x), \quad \Pi_0(t,0) \equiv 0.$$

Уравнения (11) представляет собой совокупность функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с конечным запаздыванием.

Областью определения этого уравнения можно принять область вида $R\times C_1 \times C_2$, где C_1- пространство непрерывных функций $\varphi:[-h,0]\to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(\|\varphi\|, -h \leq s \leq 0)$, C_2- пространство непрерывных функций $\psi:[-h,0]\to R^n$ с аналогичной нормой.

Для движения $(q(t),\dot{q}(t))$ системы (14) с начальным состоянием $(q(t_0),\dot{q}(t_0))$ за начальную функцию системы уравнений (24) можно принять функцию $\varphi(s) = x(t_0) = q(t_0) - q_0, \psi(s) = y(t_0) = \dot{q}(t_0), -h \leq s \leq 0.$

Функции $A_1^{-1}(x(t))$ и $C_1(x(t),y(t))$ являются равномерно непрерывными функциями по отношению к непрерывной совокупности $(x(t),y(t),\|x(t)\| + \|y(t)\| \leq H, H = const > 0)$ на некотором конечном отрезке $[t_0, t_0+T]$.

Предположим, что $Q = Q(t,x,y)$, $\Pi_0(t,x)$, $\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x}-$ функции, ограниченные и равномерно непрерывные по (t,x,y) на каждом множестве вида $R\times\{\|x\| + \|y\| \leq H\}$ при любом $H > 0$.

Таким образом, согласно [15, 16]семейства предельных функций $\{Q^*(t,x,y)\}$ и $\{\Pi_0^*(t,x)\}$ будут определяться равенствами

$$Q^*(t,x,y) = \lim_{t_k\to\infty} Q(t_k+t,x,y),$$

$$\Pi_0^*(t,x) = \lim_{t_k\to\infty} \Pi_0(t_k+t,x),$$

$$\frac{\partial \Pi_0^*}{\partial x}(t,x) = \lim_{t_k\to\infty} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}(t_k+t,x).$$

В частности в дальнейшем будем предполагать, что функция $\Pi_0(t,x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial t} \le 0. \tag{12}$$

Таким образом, будет существовать единственная функция $\Pi_0^*(x)$.

При условии принятых предположений,уравнения (11) предкомпактны и для них можно определить семейство предельных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t))y(t) - \frac{\partial \Pi_0^*(x(t))}{\partial x}) - \tag{13}$$

$$-\int_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau.$$

Действительно, в предельном переходе при $t_k \to +\infty$ находим

$$\lim_{t_k\to+\infty} A_1^{-1}x(t_k+t)(C_1(x(t_k+t),y(t_k+t)) - \frac{\partial \Pi_0(t_k+t,x(t_k+t))}{\partial x}) +$$

$$+\int_{t_k+t-h}^{t_k+t} P(t_k+t,\tau)(x(t_k+t)-x(\tau)d\tau) =$$

$$= A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t),y^*(t))y^*(t) - \lim_{t_k\to+\infty} \frac{\partial \Pi_0(t_k+t,x(t_k+t))}{\partial x} +$$

$$\lim_{t_k\to+\infty} \int_{t-h}^{t} P(t_k+t,t_k+s)(x(t_k+t)-x(t_k+s))ds) =$$

$$= A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t),y^*(t))y^*(t) - \frac{\partial \Pi_0^*(x)}{\partial x} + \int_{t-h}^{t} P(t,s)(x^*(t)-x^*(s))ds,$$

так как $P(t_k+t,t_k+s) = P(t,s).$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть управление (10) выбрано так, что выполнены условия (11) относительно* $P(t,\tau)$*, а также*

1) $\Pi_0(t,x)$ *– определенно-положительная функция (*$\Pi(t,x) \ge a_1(|x|)$*);*

2) для некоторого $\mu > 0$ *и любого малого* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$*, найдется число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *при котором выполнено неравенство*

$$\left\| \frac{\partial \Pi_0}{\partial x} \right\| \ge \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \{\varepsilon \le |x| \le \mu\}.$$

Тогда это управление решает задачу о стабилизации положения (7).

Доказательство:

Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$V(t,x_t,y_t)=\frac{1}{2}y^{'}(t)A_1(x(t))y(t)+\Pi_0(t,x(t))+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t-h}^{t}(x(t)-x(\tau))^{'}P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau. \qquad (14)$$

В силу условий (2), (6), (12) наложенных на $A(q),P(t,\tau),\Pi_0(t,x)$ и условий теоремы для этого функционала получаем следующую оценку

$$V(t,x_t,y_t)\geq\alpha_0\left|y(t)\right|^2+a_1(\left|x(t)\right|),$$
$$V(t,x_t,y_t)\leq\alpha_1\left|y(t)\right|^2+\Pi_0(0,x(t))+\left|P\right|h\max(\left|x(t)-x(s)\right|^2,\ t-h\leq s\leq t),$$

$\left|P\right|$ – норма матрицы в $R^{n\times n}$.

Для производной функционала V в силу (12) получаем следующее соотношение

$$\dot{V}=y^{'}(t)A_1(x(t))\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y^{'}(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t)+$$
$$+\frac{\partial\Pi^0(t,x(t))}{\partial t}+(\dot{x}(t))^{'}\frac{\partial\Pi^0(t,x(t))}{\partial t}=$$
$$=y^{'}(t)A_1(x(t))(A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t))y(t)+Q_1(t,x(t),y(t))-\frac{\partial\Pi_0(t,x)}{\partial x}-$$
$$-\int_{t-h}^{t}P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau)+\frac{1}{2}(x(t)-x(t))^{'}P(t,t)(x(t)-x(t))-$$
$$-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))^{'}P(t,t-h)(x(t)-x(t-h))+$$
$$+\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{'}(t)P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}y^{'}(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t)+\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial t}+y^{'}(t)\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial x}=$$
$$=y^{'}(t)Q_1(t,x(t),y(t))+\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial t}-$$
$$-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))^{'}P(t,t-h)(x(t)-x(t-h)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t-h}^{t}(x(t)-x(\tau))^{'}\frac{\partial P(t,\tau)}{\partial t}(x(t)-x(\tau))d\tau\leq$$
$$\leq-\frac{\beta_0}{2}\int_{t-h}^{t}\square x(t)-x(\tau)\square^2d\tau\leq 0.$$

Для производно $\dot{V}(t,x_t)$, таким образом, имеем оценку

$$\dot{V}(t,x_t)\leq -W(x_t)\leq 0, W(x_t)=\frac{\beta_0}{2}\int_{t-h}^{t}\mathrm{P}x(t)-x(\tau)\mathrm{P}^2d\tau. \qquad (15)$$

Множество $\{W(x_t)=0\}$ – множество таких функций, для которых $x(\tau)\equiv x(t)$ для всех $\tau\in[t-h,t]$, при всех $t\in R$ и значит

$$x(t)\equiv x(0)=x_0=const. \qquad (16)$$

Подставляя $x^*(t)=x_0$ в любое предельное уравнение (14) получим, что указанное решение должно удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial\Pi^*(x^*(t))}{\partial x}\equiv 0. \qquad (17)$$

Но это в силу условиия 2) теоремы возможно, если только $x^*(t) \equiv 0,$ а значит и $y^*(t) \equiv 0.$

Согласно теореме 3.5 из [15] имеем искомое доказательство.

Используя оценку производной (15) функционала (14) на основании теоремы 2.1 [15] получим следующий результат

Теорема 2. *Пусть для управления (10) при условии (9) функция* $\Pi_0(t,x) \geq 0$. *Тогда любое движение системы (11), ограниченное для всех* $t \geq t_0$ *движение системы (11)* $(\dot{x}(t), x(t))$ *неограниченно приближается к множеству* $\{\dot{x} = 0, \frac{\partial \Pi_0^*(x)}{\partial x}\} = 0$ *при* $t \to +\infty.$

Доказательство:

Согласно оценке (15) максимально инвариантным относительно можества $\{W(x_t) \equiv 0\}$ будет подмножество, состоящее из решений (14), для которых выполнено условие $x^*(t) \equiv x_0, \dot{x}^*(t) \equiv 0$ и равенство (17). В соответствии с указанной теоремой имеем требуемое доказательство.

Теоремы (4) и (1.5) позволяют вывести применимость управления (10) в задаче о стабилизации программной позиции (16) по отношению к скоростям и части координат.

Теорема 3. *Пусть управление (10) выбрано таким образом, что выполнены условия (11) относительно матрицы* $P(t,\tau)$, *а также:*

1) движения системы (11) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ *под действием управления (10) ограничены по переменным* $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$;

2) функция $\Pi_0(t,x)$ *определенно-положительна по* $x_1, x_2, ...x_m$,

$$\Pi_0(t,x) \geq a_1(|x|_m), \ |x|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2;$$

3) вне множества $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$ *нет положений равновесия (11), так что для некоторого* $\mu > 0$ *и любого малого числа* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\left|\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{dx}\right| \geq \delta(\varepsilon) \forall x \in \{\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m x_k^2 \leq \mu\}.$

Тогда программная позиция (5) или положение $\dot{x} = x = 0$ *системы (10) асимптотически устойчиво по* $\dot{x}, x_1, x_2, .., x_m.$

Доказательство:

Вновь возьмем функционал Ляпунова в виде (15). В силу уравнения 2) имеем оценку

$$V(t, x_t, y_t) \geq \alpha_0 |y|^2 + a_1(|x(t)|_m).$$

Для производной этого функционала по прежнему имеем оценку (28) и, таким образом, имеет место устойчивость по $y, x_1, ...x_m.$

В силу условия 3) теоремы множество

не содержит решений предельной системы. В соответствие с теоремой 5.4 из [15] для каждого ограниченного движения $y(t), x(t)$ имеем

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0; \quad \lim_{t \to +\infty} x_k(t) = 0, k = 1..m$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть управление (10) выбрано таким образом, что выполнены условия (9) относительно матрицы* $P(t,\tau)$, *а также:*

1) движения системы (11) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ *равномерно ограничены по переменным* $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_n$

2) функция $\Pi_0(t,x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$a_1(|x|_m) \le \Pi_0(t,x) \le \Pi^*(x)$$

3) множество $\{\Pi^*(x) > 0\}$ *не содержит положений равновесия системы (14),*

$$\left|\frac{\partial \Pi_0^*(\dot{x})}{\partial x}\right| \ge \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \{\Pi^*(x) \ge \varepsilon\}$$

Тогда программная позиция (5) или положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ *системы (10) равномерно асимптотически устойчиво по* $\dot{x}, x_1, x_2, ...x_m$.

Доказательство:

Вновь используем функционал Ляпунова (14), для которого, согласно условию теоремы, имеем оценку

$$a_1(|x(t)|) + \alpha_0 |y(t)|^2 \le V(t, x_t, y_t) \le$$
$$\le V_1(x_t, y_t) = \alpha_1 |y(t)|^2 + \Pi^*(x(t)) + \frac{1}{2}|P|h|x(t) - x(\tau)|^2$$

Согласно соотношению (28) для производной этого функционала находим, что множество

$$\{W(x_t) = 0\} \cap \{V_1(x_t, y_t) > 0\} =$$
$$= \{x(\tau) = x(t), t - h \le t \le t\} \cap$$
$$\cap \{\alpha_1 |y(t)|^2 + \Pi^*(x(t)) + \frac{1}{2}|P|h|x(t) - x(\tau)|^2 > 0\} \equiv \{\Pi^*(x(t)) > 0\}$$

не может в соответствии с условием 3) теоремы содержать решение предельной системы. Согласно указанной теореме имеем требуемое доказательство.

Список литературы

1. *Berghuis H., Nijmeijer H.* Global regulation of robots using only position measurements // Systems and Contr. Letters. 1993. V. 21. P. 289-293.
2. *Berghuis H., Nijmeijer H.* A passivity approach to controller-observer design for robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1993. V. 9. N. 6. P. 740-754.
3. *Бурков И.В.* Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // ПММ. 1998. Т.62.Вып. 6. С. 923-933.
4. *Belanger P.R.* Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements // Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Nice, France. 1992. P. 585-592.
5. *Canudas de Wit C., Fixot N.* Robot control via robust estimated state feedback // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. N. 36. P. 1497-1501.
6. *Siciliano B., Villlani L.* A Force position regulator for robot manipulators without velocity measurements // Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation Minneapolis, Minnesota. 1996. P. 2567-2572.
7. *Burkov I.V.* Stabilization of mechanical systems via bounded control and without velocity measurement // 2nd Russian-Swedish Control Conf. St. Petersburg: St. Petersburg Technical Univ. 1995. P. 37-41.

8. *Kelly R.* A tuning procedure of PID control for robot manipulators // Robotica. 1995. V. 13. P.141-148.
9. *Ortega R., Loría A., Kelly R.* A semiglobally stable output feedback PI2D regulator for robot manipulators // IEEE Trans. on Automat. Contr.1995. V. 40. N. 8. P. 1432-1436.
10. *Loria A., Lefeber E., Nijmeijer H.* Global asymptotic stability of robot manipulators with linear PID and PI2D control // Stability and Control: Theory and Applications. 2000. V. 3. N. 2. P. 138-149.
11. *Burkov I.V.* Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements // 3-rd IEEE Multi-conference on Systems and Control. St. Petersburg. 2009. P. 400-405.
12. *Eduardo V. L. Nunes, Hsu L., Lizarralde F.* Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems // American Control Conference Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA. 2008. P. 377-382.
13. *Andreev A.S., Peregudova O.A., Makarov D.S.* Motion control of multilink manipulators without velocity measurement // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2016.
14. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. № 4(18). С.46-51.
15. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.
16. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4-55.

ON THE STABILIZATION OF THE PROGRAM POSITIONS OF HOLONOMIC MECHANICAL SYSTEM WITHOUT VELOCITY MEASUREMENT

Makarov D.S., Peregudova O.A.

Ulyanovsk State University

Abstract. We study the problem on stabilization of program motions of holonomic mechanical systems with cyclic coordinates. Solution of the problem with the measurement of only the position coordinates is achieved by using of the non-linear integral regulator.
Keywords: mechanical system, cyclic coordinates, program motion, integral regulator.

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Тахтенкова Л.С., Салихова Г.Ф.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: В статье представлены новые результаты решения задачи о достаточных условиях асимптотической устойчивости положения равновесия обыкновенного дифференциального и стохастического дифференциального уравнений нелинейного вида.

Ключевые слова: функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость, случайные возмущения, нелинейное уравнение.

Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка вида:

$$\ddot{x} + k(t)\dot{x} + f(t)\varphi(x) = 0, \tag{1}$$

где $k(t) \in C(R^+)$, $f(t) \in C(R^+)$ и удовлетворяют условиям

$$k_{\min} \le k(t) \le k_{\max},$$

$$f_{\min} \le f(t) \le f_{\max}$$

и $\varphi(x) \in C^1(R)$ такая, что $\dot{\varphi}_{\min} \le \dot{\varphi}(x) \le \dot{\varphi}_{\max}$.

Исследуется задача поиска достаточных условий асимптотической устойчивости положения равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что существует такая постоянная μ, что выполняются условия*

$$0 < \mu \le \frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}},$$

$$\frac{\sqrt{f_{\max}}}{\sqrt{\dot{\varphi}_{\min}}} - \frac{\sqrt{f_{\min}}}{\sqrt{\dot{\varphi}_{\max}}} \le 2\sqrt{(\frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \mu)\mu},$$

$$\sqrt{(\frac{k_{\max}}{\dot{\varphi}_{\min}} - \mu)\mu} - \sqrt{(\frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \mu)\mu} \le 2\sqrt{\frac{f_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}}}, \tag{2}$$

тогда положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство:

Функция Ляпунова выбрана в виде:

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \mu\varphi(x))^2 + \frac{1}{2}g\varphi(x).$$

Очевидно, что функция V определенно положительна.

Производная функции Ляпунова $\dot{V}$ имеет вид:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

$$\dot{V} = (\mu\dot{\varphi}(x) - k(t))\dot{x}^2 + (g\dot{\varphi}(x) + \mu(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) - f(t))\varphi(x)\dot{x} - \mu f(t)\varphi^2(x)$$

Условие определенной отрицательности функции $\dot{V}$ соблюдается, если выполняются следующие соотношения:

$$\mu\dot{\varphi}(x) - k(t) \le 0,$$

$$\mu f(t) \ge 0,$$

$$(g\dot{\varphi}(t) + \mu(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) - f(t))^2 \le -4\mu f(t)(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) \qquad (3)$$

Несложно показать, что соотношения (3) выполняются, если выполняются условия (2). При этом множество $\{\dot{V} = 0\} = \{\dot{x} = 0\}$. Согласно теореме из [1] положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим уравнение при случайных возмущениях:

$$\ddot{x} + k(t)\dot{x} + f(t)\varphi(x) = \sigma(t)\dot{\xi}(t)\varphi(x), \qquad (4)$$

где $\sigma(t) \in C(R^+)$ и $\sigma(t) \le \sigma_{\max}^2$, $\xi(t)$ - стандартный винеровский процесс, $k(t)$, $f(t)$ и $\varphi(x)$ определены выше.

Исследуется задача поиска достаточных условий асимптотической устойчивости по вероятности положения равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (4).

Теорема 2. *Предположим, что существует такая постоянная μ, что выполняются условия*

$$\frac{\sigma_{\max}^2}{2f_{\min}} < \mu \le \frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}},$$

$$\sqrt{\frac{f_{\max}}{\dot{\varphi}_{\min}} - \frac{\sigma_{\max}^2}{2\mu\dot{\varphi}_{\max}}} - \sqrt{\frac{f_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \frac{\sigma_{\max}^2}{2\mu\dot{\varphi}_{\min}}} \le 2\sqrt{(\frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \mu)\mu},$$

$$\sqrt{(\frac{k_{\max}}{\dot{\varphi}_{\min}} - \mu)\mu} - \sqrt{(\frac{k_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \mu)\mu} \le 2\sqrt{\frac{f_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max}} - \frac{\sigma_{\max}^2}{2\mu\dot{\varphi}_{\min}}}, \qquad (5)$$

тогда положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво по вероятности.

Доказательство:

Функция Ляпунова выбрана в виде:

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \mu\varphi(x))^2 + \frac{1}{2}g\varphi(x).$$

Очевидно, что V определенно положительна.

Оператор LV имеет вид [2]:

$$LV = (\mu\dot{\varphi}(x) - k(t))\dot{x}^2 + (g\dot{\varphi}(x) + \mu(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) - f(t))\varphi(x)\dot{x} + (\tfrac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu f(t))\varphi^2(x)$$

По теореме [3] необходимо, чтобы $LV \le 0$. Таким образом, требуется, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\mu\dot{\varphi}(x) - k(t) \le 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu f(t) \le 0,$$

$$(g\dot{\varphi}(t) + \mu(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) - f(t))^2 \le 4(\tfrac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu f(t))(\mu\dot{\varphi}(x) - k(t)) \qquad (6)$$

Несложно показать, что соотношения (6) выполняются, если выполняются условия (5). По аналогии с предыдущей теоремой можно также показать, что этого достаточно для асимптотической устойчивости по вероятности.

Полученные теоремы являются обобщением решения известной задачи из [4] об устойчивости системы, жесткость и демпфирование которой нелинейны и зависят явно от времени.

Список литературы

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225-232.
2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003. 408 с.
3. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения, М.: Наука, 1987. 304 с.

ON STABILITY OF THE SECOND-ORDER NONLINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Takhtenkova L. S., Salihova G.F.

Ulyanovsk State University

Abstract: The article received new results of solving of the task about sufficient conditions for asymptotic stability of an equilibrium position for nonlinear ordinary differential and stochastic differential equations.

Keywords: Lyapunov function, asymptotic stability, stochastic perturbation, nonlinear equation.

УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ ОБОБЩЕННЫХ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Тямаева Л.Х.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена систематическому математическому моделированию. В работе строятся и исследуются авторегрессионные модели биржевых индексов, а так же проводится анализ динамики моделей, в том числе с точки зрения вопросов теории устойчивости дискретных систем.

Ключевые слова: авторегрессионная модель, биржевые индексы, анализ устойчивости, спектральный анализ.

Введение

Целью математического моделирования экономических систем является использование методов математики для наиболее эффективного (аналитического и/или численного) решения задач, возникающих в сфере экономики.

В настоящей статье представлен алгоритм построения АР-модели и ее компьютерная реализация.

Основная часть

Предполагается, что у нас есть массив значений биржевого индекса $x[1], x[2], ..., x[N], ...$ Количество значений N в массиве, содержащем сигнал, равно $512=2^9$.

Текущее значение x_N зависит от нескольких предыдущих значений x_{N-1}, x_{N-2} (например, от трех):

$$x_n = a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + a_3 x_{N-3},$$

где a_1, a_2, a_3 пока неизвестны.

Мы можем выписать следующие уравнения:

$$\begin{cases} a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1 = x_4 \\ a_1 x_4 + a_2 x_3 + a_3 x_2 = x_5 \\ \quad \cdots \\ a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + a_3 x_{N-3} = x_N \end{cases}. \qquad (1)$$

Всего $N-3$ уравнений от трех неизвестных $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Эту переопределенную систему линейных уравнений будем решать методом наименьших квадратов.

В векторно-матричной форме система (1) имеет вид:

$$A \cdot a = b,$$

где $A = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \\ x_5 & x_4 & x_3 \\ .. & .. & .. \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} \end{pmatrix}_{(N-3)\times 3}$, $b = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}_{(N-3)\times 1}$ – вектор столбец.

Умножив данную систему на A^T слева, получаем

$$A^T \cdot A \cdot a = A^T \cdot b \qquad (2)$$

Обозначим матрицу $A_{new} = A^T \cdot A$, A_{new} имеет размерность 3x3.

Пусть вектор-столбец $b_{new} = A^T \cdot b = \begin{pmatrix} b_{new}^{(1)} \\ b_{new}^{(2)} \\ b_{new}^{(3)} \end{pmatrix}_{3\times 1}$.

Тогда новая система линейных уравнений примет вид $A_{new} \cdot a = b_{new}$. Это система из трёх уравнений относительно трёх неизвестных $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, причем ее решение будет совпадать с МНК-решением исходной переопределенной системы (1).

Решаем систему (3x3) по формулам Крамера [2].

Система (2.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1 - x_4 = \varepsilon_1 \\ a_1 x_4 + a_2 x_3 + a_3 x_2 - x_5 = \varepsilon_2 \\ \ldots \\ a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + a_3 x_{N-3} - x_N = \varepsilon_{N-3} \end{cases}.$$

Мы нашли (a_1, a_2, a_3) так, что $\sum_{i=1}^{N-3} (\varepsilon_i)^2 = \min$ (согласно принципу метода наименьших квадратов).

Теперь можно построить общее уравнение авторегрессии 3-го порядка:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + \xi_n \text{ , } n=4,5,6\ldots \qquad (3)$$

где ξ_n – нормально распределённые случайные величины с нулевым средним и дисперсией, равной выборочной дисперсии $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N-3}$.

При компьютерной реализации случайных величин будем использовать на основании центральной предельной теоремы. Поэтому $\xi_i = \sigma(\sum_{k=1}^{12} \eta_i - 6)$.

Подобным образом можно рассчитать параметры авторегрессионной модели произвольного порядка p.

В результате математического моделирования разработана программа в среде Delphi 7.0, где так же вычисляются первые два момента шума (математическое ожидание и

среднеквадратическое отклонение), по которым можно предварительно судить об оптимальности порядка авторегрессии для сигнала, из которого удален линейный тренд [3].

Результаты представлены на рисунках 1, 2.

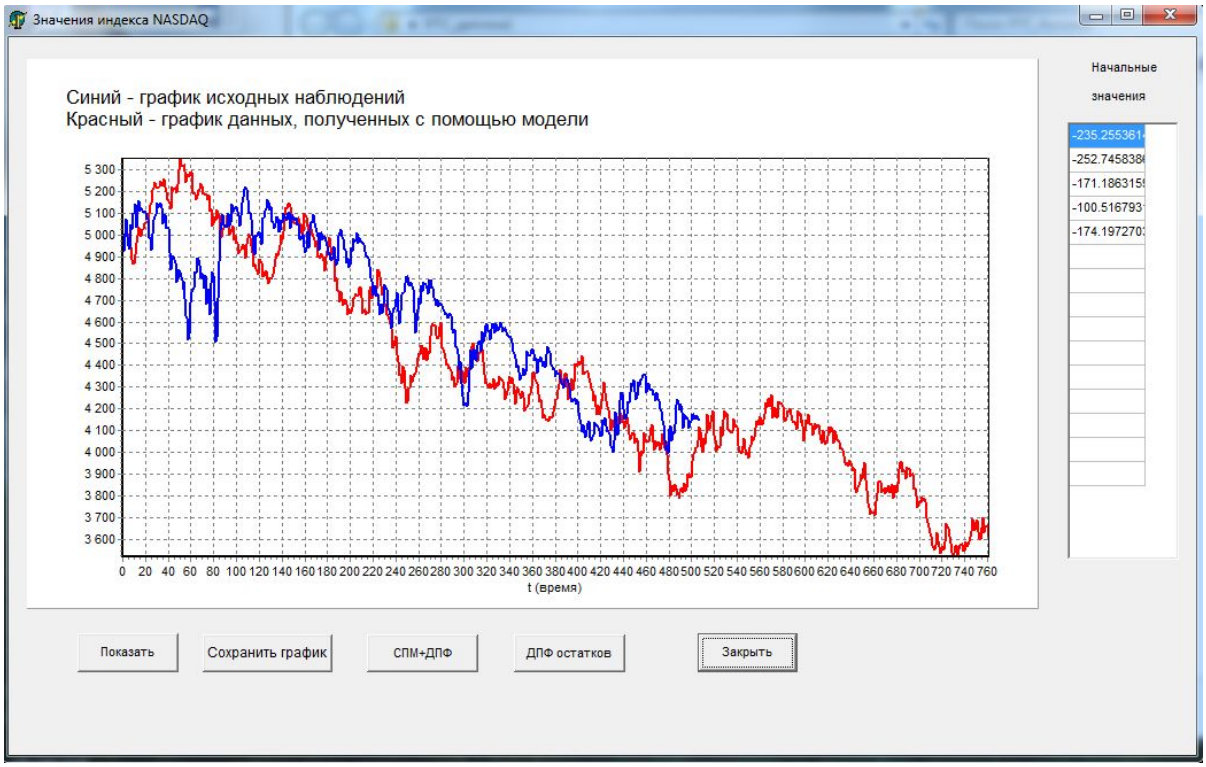


Рис. 1. Графики исходных и полученных данных индекса NASDAQ. Порядок регрессии 5

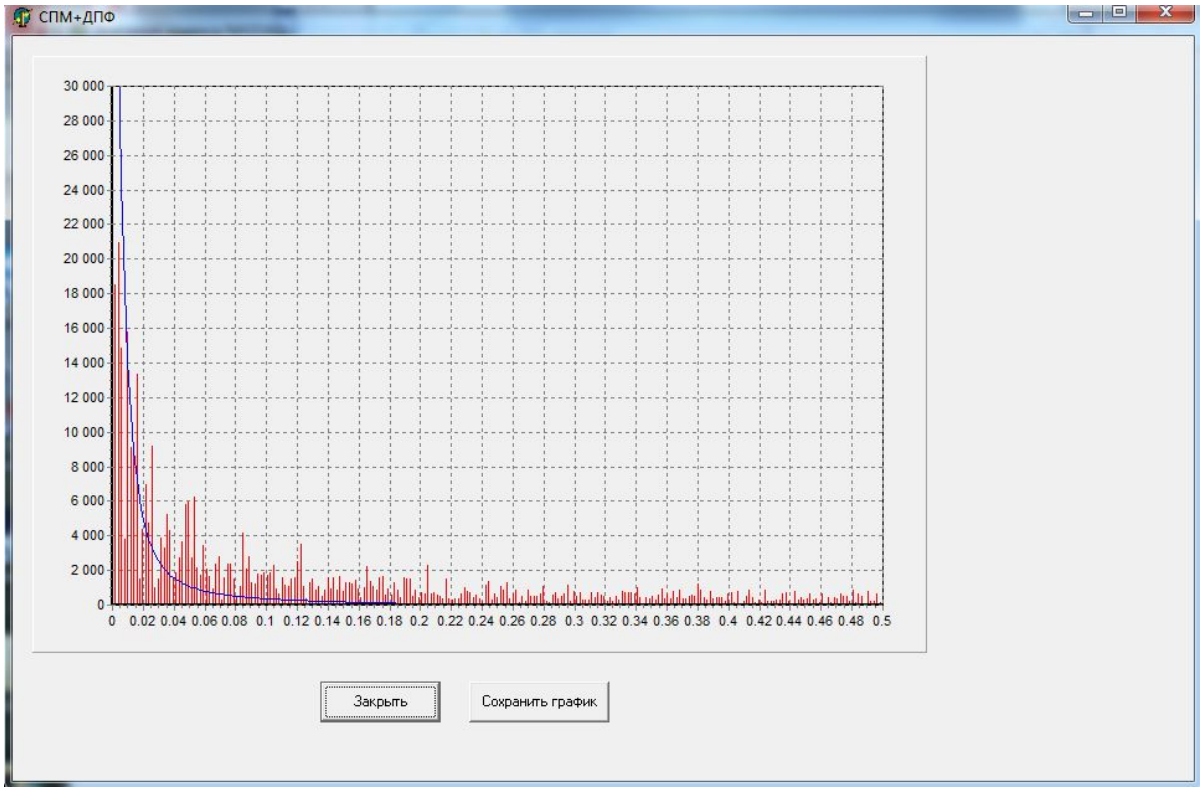


Рис. 2. Спектральная плотность мощности и дискретное преобразование Фурье для индекса NASDAQ. Порядок регрессии 5

По итогам проведенных исследований было выяснено, что оптимальным порядком АР-моделей для всех биржевых индексов является пятый.

На основе вычисленных корней характеристических многочленов АР-моделей был проведен сравнительный анализ устойчивости моделей исходя из отношения максимальных по модулю собственных значений внутри единичного круга.

Коэффициент относительной устойчивости на основе линейной геометрической вероятности вычислен по формуле: $\frac{1-|\lambda_i|^{(1)}_{\max}}{1-|\lambda_i|^{(2)}_{\max}}$ [1].

Таблица 1

Сравнение устойчивости на основе линейной геометрической вероятности (строка / столбец)

	РТС	NASDAQ	ММВБ	DowJones	DAX
РТС	1	1,1068	1,1875	1,4710	2,1014
NASDAQ	0,904	1	1,0729	1,3290	1,8986
ММВБ	0,8421	0,9320	1	1,2387	1,7696
Dow Jones	0,6798	0,7524	0,8073	1	1,4286
DAX	0,4759	0,5267	0,5651	0,7	1

Проведены соответствующие вычисления на основе геометрической вероятности на плоскости, при которой сравнивались относительные площади колец.

Коэффициент относительной устойчивости на основе геометрической вероятности на плоскости вычислен по формуле $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi(1-(\lambda^*_{(1)})^2)}{\pi(1-(\lambda^*_{(2)})^2)}$ [1].

Таблица 2

Сравнение устойчивости на основе геометрической вероятности на плоскости (столбец / строка)

	РТС	NASDAQ	ММВБ	DowJones	DAX
РТС	1	1,1043	1,1831	1,4600	2,076
NASDAQ	0,9055	1	1,0714	1,3221	1,8799
ММВБ	0,8452	0,9334	1	1,2341	1,7546
Dow Jones	0,6849	0,7563	0,8103	1	1,4219
DAX	0,4817	0,5319	0,5699	0,7033	1

Заключение

Общий вывод на основе анализа АР-моделей: индексы ведут себя в соответствии с законами рынка, демонстрируют хорошую устойчивость и предсказуемость в своей динамике.

Список литературы

1. Богданов А.Ю. Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2008. – 262 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
3. Тараскин.А.Ф. Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего: Учеб. пособие\ Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Самара, 1995 – 63 с.

OPTIMAL AUTOREGRESSIVE MODEL OF GENERALIZED FINANCIAL AND ECONOMIC INDICATORS

Tyamaeva L.H.

Ulyanovsk State University

Abstract. The article is devoted to systematic mathematical modeling. In this work we construct and investigate autoregression model of the stock indices, as well as an analysis of the dynamics of the models, including in terms of sustainability questions in the theory of discrete systems.

Keywords: Autoregression model, stock indexes, stability analysis, spectral analysis.

УДК 51-76

О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА»

Юрьева О.Д., Порватова А.А.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается динамическая модель типа «Хищник – Жертва» с логистической функцией роста жертв и учетом запаздывания между поимкой жертвы и её переходом в биомассу хищников. Для описания системы вводится показатель $e^{-\delta\tau}$, учитывающий взаимодействие тех хищников с жертвами, которые умерли, но прежде дали потомство или выросли за время τ. Показано, что в моделях «Хищник – Жертва» запаздывающее время может быть причиной перехода устойчивого положения равновесия в неустойчивое, а также может порождать бифуркации..

Ключевые слова: система «Хищник – Жертва», запаздывание, устойчивость, бифуркация.

Рассмотрим модель типа «Хищник – Жертва» с логистической функцией роста жертв [4]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \beta x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta e^{-\delta\tau} x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t), \end{cases} \quad (1)$$

где *x(t)*– плотность популяции жертв, а *y(t)* – плотность популяции хищников, *r* – показатель роста популяции жертв, β– показатель роста численности хищников, d – показатель смертности популяции хищников, *K* - ёмкость окружающей среды (максимальное воздействие, которое она может выдержать), $e^{-\delta\tau}$ учитывает то, что хищники взаимодействуют с жертвами, но умирают, прежде успев дать потомство или вырасти за время τ, δ – показатель смертности хищников, выживших в период зрелости.

Модель (1) имеет три положения равновесия: $\overline{E_1} = (0,0)$ и $\overline{E_2} = (K, 0)$, не представляющие биологический интерес, и $\overline{E_3} = \left(\frac{de^{\delta\tau}}{\beta}, \frac{r}{\beta}\left(1 - \frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)\right)$, имеющее биологический смысл при $\frac{r}{\beta}\left(1 - \frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right) > 0$, то есть при $\tau < \frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\beta K}{d}\right)$. Так как подлогарифмическое выражение не может быть меньше 1, то для существования этого положения равновесия необходимо предположить$\frac{\beta K}{d} > 1$.

Будем исследовать только третье положение равновесия, представляющее биологический интерес.

Линеаризованная система (1) в окрестности положения равновесия имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_1 \\ \dot{\bar{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2\bar{x}}{K}\right) - \beta\bar{y} & -\beta\bar{x} \\ 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta e^{-\delta\tau}\bar{y} & \beta e^{-\delta\tau}\bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t-\tau) \\ \bar{u}_2(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$det\begin{bmatrix} r\left(1-\frac{2\bar{x}}{K}\right)-\beta\bar{y}-\lambda & -\beta\bar{x} \\ \beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{y} & -d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}-\lambda \end{bmatrix}=0.$$

$$\Rightarrow\left(r-\frac{2\bar{x}r}{K}-\beta\bar{y}-\lambda\right)\left(-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}-\lambda\right)+\beta^2\bar{x}\bar{y}e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}=0.$$

$$\Rightarrow\lambda^2-\left(r-\frac{2\bar{x}r}{K}-\beta\bar{y}-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}\right)\lambda+\beta^2\bar{x}\bar{y}e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}+(r-\frac{2\bar{x}r}{K}-$$

$$-\beta\bar{y})\left(-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}\right)=0.$$

$$\bar{F}(\lambda)=\lambda^2-\left(r-\frac{2\bar{x}r}{K}-\beta\bar{y}-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}\right)\lambda+\beta^2\bar{x}\bar{y}e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}+$$

$$+\left(r-\frac{2\bar{x}r}{K}-\beta\bar{y}\right)\left(-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\bar{x}\right)=0. \quad (3)$$

В точке равновесия $\overline{E_3}=\left(\frac{de^{\delta\tau}}{\beta},\frac{r}{\beta}\left(1-\frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)\right)$ (3) имеет вид:

$$\bar{F}(\lambda)=\lambda^2-\left(r-\frac{2rd}{K\beta}e^{\delta\tau}-\beta\frac{r}{\beta}\left(1-\frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)-d+\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\frac{de^{\delta\tau}}{\beta}\right)+$$

$$+\beta^2\frac{de^{\delta\tau}}{\beta}\frac{r}{\beta}\left(1-\frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}+\left(r-\frac{2rd}{K\beta}e^{\delta\tau}-\beta\frac{r}{\beta}\left(1-\frac{d}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)\right)\times$$

$$\times\left(-d++\beta e^{-\delta\tau}e^{-\lambda\tau}\frac{de^{\delta\tau}}{\beta}\right)=0.$$

$$\Rightarrow\lambda^2\text{—}d+de^{-\lambda\tau}-\frac{rd}{K\beta}e^{\delta\tau}\lambda+rde^{-\lambda r}-\frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau}e^{-\lambda r}\pm\frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau}-$$

$$-\frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau}e^{-\lambda r}=0.$$

$$\bar{F}(\lambda)=\lambda^2-\left(de^{-\lambda\tau}-d-\frac{rd}{K\beta}e^{\delta\tau}\right)\lambda+\frac{rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}+\left(rd-\frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)e^{-\lambda\tau}=0. \quad (4)$$

Если $\tau=0$, то (4) принимает вид:

$$\lambda^2-\left(-\frac{rd}{\beta K}\right)\lambda+\frac{rd^2}{\beta K}+\left(rd-\frac{2rd^2}{\beta K}\right)=0.$$

$$\lambda^2+\frac{rd}{\beta K}\lambda+rd-\frac{rd^2}{\beta K}=0.$$

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}\frac{rd}{\beta K}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{rd}{\beta K}\right)^2-4rd\left(1-\frac{d}{\beta K}\right)}.$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}\frac{rd}{\beta K}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{rd}{\beta K}\right)^2-4rd\left(1-\frac{d}{\beta K}\right)}.$$

Действительная часть собственного значения λ_1 всегда отрицательна, поэтому устойчивость положения равновесия зависит от другого собственного значения λ_2. Если $\tau=0$, тогда $\overline{E_3}$ локально асимптотически устойчиво при$d<\beta K$ и неустойчиво при $d>\beta K$.

В случае положительного запаздывания $\tau>0$, характеристическое уравнение для линеаризованного уравнения в окрестности положения равновесия принимает вид:

$$\bar{P}(\lambda)+\bar{Q}(\lambda)e^{-\lambda\tau}=0, \quad (5)$$

где

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^2 + p_{1\lambda} + p_2,$$
$$\bar{Q}(\lambda) = q_1\lambda + q_2,$$

здесь

$$p_1 = d + \frac{rd}{K\beta}e^{\delta\tau} > 0,$$
$$p_2 = \frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau} > 0,$$
$$q_1 = -d < 0,$$
$$q_2 = rd - \frac{rd^2}{K\beta}.$$

Положим $\lambda = i\omega$ – чисто мнимый корень уравнения (5), где $\omega > 0$. Заменим $\lambda = i\omega$ в (5):

$$\bar{F}(i\omega) = (i\omega)^2 - i\omega\left(de^{-i\omega r} - d - \frac{rd}{K\beta}e^{\delta\tau}\right) + \frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau} + \left(rd - \frac{2rd^2}{K\beta}\right)\times$$
$$\times e^{\delta\tau}e^{-i\omega r} = 0.$$
$$\Rightarrow -\omega^2 - i\omega d(cos\,\omega\tau - i\,sin\,\omega\tau) + i\omega d + \frac{i\omega rd}{\beta K}e^{\delta\tau} + \frac{rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau} +$$
$$+\left(rd - \frac{2rd^2}{K\beta}\right)e^{\delta\tau}(cos\,\omega\tau - i\,sin\,\omega\tau) = 0.$$
$$\Rightarrow \left(-\omega^2 - \omega d\,sin\,\omega\tau + \frac{rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau} + rd\,cos\,\omega\tau - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\,cos\,\omega\tau\right) +$$
$$i\left(-\omega d\,cos\,\omega\tau + \omega d + \frac{\omega rd}{K\beta}e^{\delta\tau} - rd\,sin\,\omega\tau + \frac{2rd^2}{K\beta}e^{\delta\tau}\,sin\,\omega\tau\right) = 0.$$

Разделив мнимую и действительную части, получим систему уравнений:

$$\left(rd - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)cos\,\omega\tau - \omega d\,sin\,\omega\tau = \omega^2 - \frac{rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau} \quad (6)$$
$$\left(rd - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)sin\,\omega\tau + \omega d\,cos\,\omega\tau = \omega d + \frac{\omega rd}{\beta K}e^{\delta\tau}. \quad (7)$$

Возведя в квадрат и сложив (6) и (7), получим:

$$\left(rd - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2 + \omega^2 d^2 = \left(\omega^2 - \frac{rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2 + \left(\omega d + \frac{\omega rd}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2.$$
$$\left(rd - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2 + \omega^2 d^2 = \omega^4 - \frac{2\omega^2 rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau} + \frac{r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} +$$
$$+\omega^2\left(d + \frac{rd}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2.$$
$$\omega^4 - \left(\frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\left(-d + \frac{rd}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2 + d^2\right)\omega^2 + \frac{r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} - \left(rd - \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}\right)^2 = 0.$$
$$\omega^4 - \left(\frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau} - d^2 + \frac{2rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau} - \frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} + d^2\right)\omega^2 + \frac{r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} - r^2d^2 -$$
$$-\frac{r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - \frac{4r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} = 0.$$

$$\Rightarrow \omega^4 + \frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\omega^2 + \frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - r^2d^2 - \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} = 0.$$

$$\omega^2 = -\frac{1r^2d^2}{2\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - r^2d^2 - \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)}.$$

$$-\frac{1r^2d^2}{2\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - r^2d^2 - \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)} > 0.$$

$$\left(\frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)^2 < \left(\frac{r^2d^2}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - r^2d^2 - \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right).$$

$$0 < -\left(\frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} - r^2d^2 - \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}\right).$$

$$\frac{2r^2d^3}{\beta K}e^{\delta\tau} < r^2d^2 + \frac{3r^2d^4}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau}.$$

$$\frac{3d^3}{\beta^2K^2}e^{2\delta\tau} - \frac{2d}{\beta K}e^{\delta\tau} + 1 > 0.$$

$$e^{2\delta\tau}\frac{2\beta K}{3d}e^{\delta\tau} - \frac{\beta^2K^2}{3d^2} > 0.$$

$$\left(e^{\delta\tau} - \frac{\beta K}{3d}e^{\delta\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\beta K}{3d}\right)^2 > 0. \quad (8)$$

Выражение (8) всегда верно при положительных параметрах, то есть, имеем положительное $\omega = \omega_0 > 0$ такое, что уравнение (5) имеет чисто мнимый корень. Мы также можем найти τ_0, соответствующее ω_0.

Покажем, что выполняется следующее условие трансверсальности:

$$\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0} > 0.$$

Это означает, что существует, по крайней мере, одно собственное значение с положительной действительной частью для $\tau > \tau_0$.

При увеличении $\tau > 0$, корни (5) могут пересекать мнимую ось только при паре ненулевых чисто мнимых корней. Если собственное значение пересекает мнимую ось слева направо, то устойчивое положение равновесия переходит в бифуркации Хопфа [3], то есть в локальные бифуркации, при которых особая точка-фокус теряет устойчивость при переходе через мнимую ось пары её комплексно-сопряжённых собственных значений, что соответствует условию выше, иначе бифуркаций Хопфа не происходит.

Рассмотрим уравнение (5), где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ не имеют общего мнимого нуля.
2) $P(-i\omega) = P(i\omega)$ *и* $Q(-i\omega) = Q(i\omega)$.
3) $P(0) + Q(0) \neq 0$.
4) В правой полуплоскости есть не более чем конечное число корней уравнения (2.5) при $\tau = \tau_0$.
5) $F(\omega) = |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2$.

При этих условиях верны следующие утверждения [6]:

1. Предположим, что $F(\omega) = 0$ не имеет положительных корней. Тогда, если положение равновесия уравнения (5) устойчиво при $\tau = 0$, то устойчивость сохраняется при всех $\tau \geq 0$, а если неустойчиво при $\tau = 0$, то неустойчивость сохраняется для всех$\tau \geq 0$.

2. Предположим, что уравнение $F(\omega) = 0$имеет по крайней мере один положительный корень. При увеличении τ может происходить переключении устойчивости, то есть существует положительное значение τ_0 такое, что уравнение (5) неустойчиво при всех $\tau > \tau_0$. При изменении τ от *0* до τ_0 может происходить не более чем конечное число переключений устойчивости.

Таким образом, уравнение (5) принимает вид:

$$|P(i\omega_0)| = |Q(i\omega_0)|.$$

Определим направление движения λ при различных τ. Положим:

$$\theta = sign\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}\right]_{\lambda=\lambda_0} = sign\left[Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right]_{\lambda=i\omega_0}.$$

Продифференцировав (5) поτ, получим:

$$\left[(2\lambda + p_1) + e^{-\lambda\tau}q_1 - \tau e^{-\lambda\tau}(q_1\lambda + q_2)\right]\frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}} + \frac{q_1 e^{-\lambda\tau}}{\lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda} = \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)} +$$

$$+ \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

$$\theta = sign\left[Re\left(\frac{2\lambda + p_1}{\lambda(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda}\right)\right]_{\lambda=i\omega_0} =$$

$$= sign\left[Re\left(\frac{2i\omega_0 + p_1}{-i\omega_0(i^2\omega_0^2 + p_1 i\omega_0 + p_2)} + \frac{q_1}{i\omega_0(q_1 i\omega_0 + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= sign\left[Re\left(\frac{(2i\omega_0 + p_1)(p_1\omega_0^2 - i\omega_0^3 - ip_2\omega_0)}{(p_1\omega_0^2) + (\omega_0^3 - p_2\omega_0)^2} + \frac{q_1(-q_1\omega_0^2 - q_2 i\omega_0)}{q_1^2\omega_0^4 + q_2^2\omega_0^2} + \frac{i\tau}{\omega_0}\right)\right]$$

$$= sign\left[\frac{2\omega_0(\omega_0^3 - p_2\omega_0) + p_1^2\omega_0^2}{p_1^2\omega_0^4 + (\omega_0^3 - p_2\omega_0)^2} - \frac{q_1^2\omega_0^2}{q_1^2\omega_0^4 + q_2^2\omega_0^2}\right] =$$

$$= sign\left[\frac{(q_1^2\omega_0^6 + 2q_2^2\omega_0^2(\omega_0^2 - p_2) + \omega_0^2(p_1^2q_2^2 - p_2^2q_1^2)}{(\omega_0^4p_1^2 + (\omega_0^3 - p_2\omega_0)^2)(q_1^2\omega_0^4 + q_2^2\omega_0^2)}\right].$$

Таким образом, собственные значения всегда пересекают мнимую ось при следующих условиях:

$$\omega_0^2 > \frac{rd^2}{\beta K}e^{\delta\tau}ur^2\left(1 - \frac{2d}{\beta K}\right)^2 > d^2.$$

То есть, при $\tau<\tau_0$ наблюдается локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия, при $\tau = \tau_0$ происходит потеря устойчивости, и имеют место бифуркации Хопфа.

Численное исследование влияния запаздывания в модели с логистической функцией роста жертв

Проведем численное исследование системы (1) при следующих параметрах: *r = 20,* $\beta = 3$, $\delta = 1$, *d = 15, K = 25,* которые были подобраны, опираясь на качественное исследование выше так, чтобы положение равновесия в модели без запаздывания было устойчивым.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 20x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{25}\right) - 3x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 3e^{-\delta\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - 15y(t). \end{cases}$$

Модель (1) имеет три положения равновесия: $\overline{E_1} = (0,0)$ – тривиальное решение, $\overline{E_2} = (25,0)$ и $\overline{E_3} = \left(\frac{15e^{\tau}}{3}, \frac{20}{3}\left(1 - \frac{15}{3*25}e^{\tau}\right)\right) = (5e^{\tau}, 6.67(1 - 0.2e^{\tau}))$, имеющее биологический смысл при $\frac{20}{3}\left(1 - \frac{15}{3*25}e^{\tau}\right) > 0$, то есть при $\tau < ln(5) \approx 1{,}6$.

Линеаризованная система (1) в окрестности положения равновесия $\overline{E_3}$имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_1 \\ \dot{\bar{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^{\tau} & -15e^{\tau} \\ 0 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 + 20e^{-\tau} & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1(t-\tau) \\ \bar{u}_2(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$det\begin{bmatrix} -4e^{\tau} - \lambda & -15e^{\tau} \\ (-4 + 20e^{-\tau})e^{-\lambda\tau} & -15 + 15e^{-\lambda r} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$$\bar{F}(\lambda) = \lambda^2 - (15e^{-\lambda\tau} - 15 - 4e^{\tau})\lambda + 60e^{\tau} + (300 - 120e^{\tau})e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (10)$$

Если $\tau = 0$, то (10) принимает вид:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 240 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 2i\sqrt{59}.$$

Действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, следовательно, положение равновесия локально асимптотически устойчиво. Ниже представлены результаты численного моделирования системы (1) при выбранных параметрах в пакете программ Matlab 7.

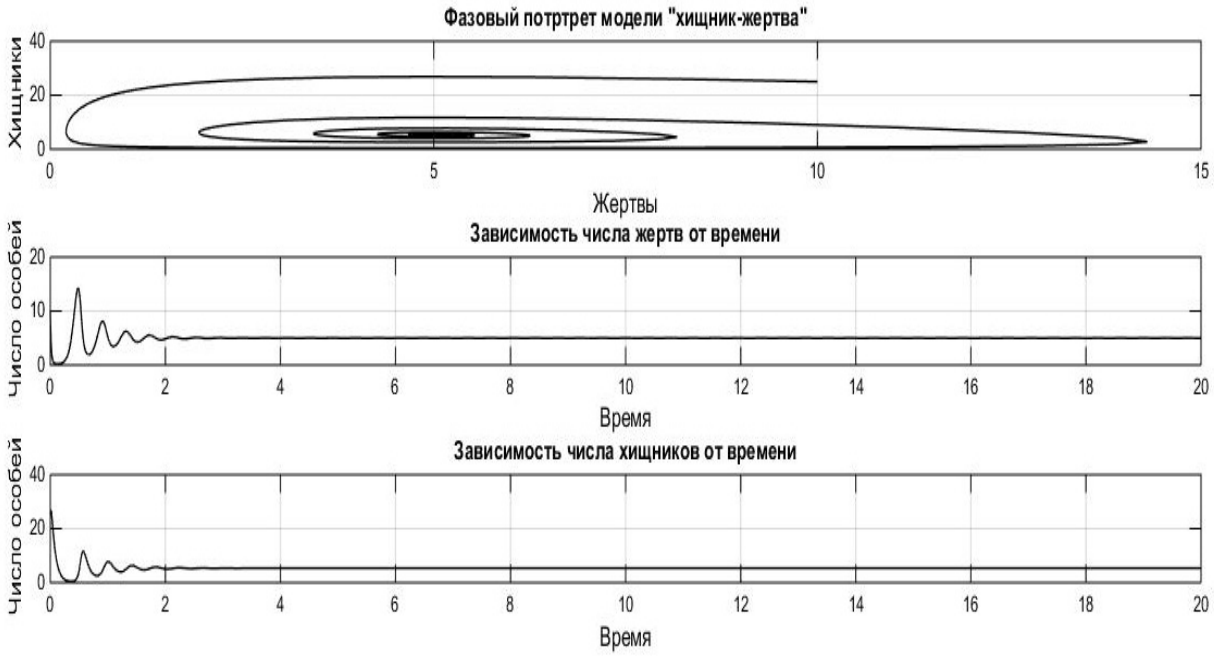


Рис. 1. Графики для модели без запаздывания

В случае положительного запаздывания $\tau > 0$, характеристическое уравнение для линеаризованного уравнения в окрестности положения равновесия принимает вид:

$$\bar{P}(\lambda) + \bar{Q}(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (11)$$

где $\bar{P}(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2, \bar{Q}(\lambda) = q_1\lambda + q_2, p_1 = 15 + 4e^{\tau}, p_2 = 60e^{\tau}, q_1 = -15, q_2 = 180.$

Положим $\lambda = i\omega$ – чисто мнимый корень уравнения (11), где $\omega > 0$. Заменим $\lambda = i\omega$ в (11):

$$\bar{F}(i\omega) = (i\omega)^2 - (15e^{-i\omega\tau} - 15 - 4e^{\tau})i\omega + 60e^{\tau} + (300 - 120e^{\tau})e^{-i\omega\tau}.$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - 15\omega\, sin\,\omega\tau + 60e^{\tau} + 300\, cos\,\omega\tau - 120e^{\tau}\, cos\,\omega\tau) +$$

$$i(-15\omega\, cos\,\omega\tau + 15\omega + 4\omega e^{\tau} - 300\, sin\,\omega\tau + 120e^{\tau}\, sin\,\omega\tau) = 0.$$

Разделив мнимую и действительную части, получим систему уравнений:

$$(300 - 120e^{\tau})\, cos\,\omega\tau - 15\omega\, sin\,\omega\tau = \omega^2 - 60e^{\tau} \qquad (12)$$

$$(300 - 120e^{\tau})\, sin\,\omega\tau + 15\omega\, cos\,\omega\tau = 15\omega + 4\omega e^{\tau}. \qquad (13)$$

Возведя в квадрат и сложив (12) и (13), мы получим:

$$\omega^4 + 16e^{2\tau}\omega^2 + 72000e^{\tau} - 90000 - 10800e^{2\tau} = 0.$$

$$\omega^2 = -8e^{2\tau} \mp \frac{1}{2}\sqrt{256e^{4\tau} - 4(72000e^{\tau} - 90000 - 10800e^{2\tau})}.$$

Мы имеем положительное $\omega = \omega_0$такое, что уравнение (11) имеет чисто мнимый корень. Мы также можем с помощью численного моделирования найти τ_0 соответствующее ω_0, так как качественно это сделать не представляется возможным. Для нашего примера $\omega_0 = 156.017$, а $\tau_0 = 0.035$.

Теперь покажем, что

$$\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0} > 0.$$

$$\theta = sign\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}\right]_{\lambda=\lambda_0} = sign\left[Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right]_{\lambda=i\omega_0}.$$

$$\theta = sign\left[\frac{(225\omega_0^6 + 64800\omega_0^2(\omega_0^2 - 60e^{\tau}) + \omega_0^2(32400(4e^{\tau} + 15)^2 - 810000e^{2\tau})}{(\omega_0^4(4e^{\tau} + 15)^2 + (\omega_0^3 - 60e^{\tau}\omega_0)^2)(225\omega_0^4 + 32400\omega_0^2)}\right].$$

При наших параметрах и $\tau < 0.55$ получаем, что $\theta > 0$, то есть собственное значение пересекает мнимую ось слева направо и бифуркации Хопфа выполняются. При $\tau<\tau_0$ наблюдается локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия, при $\tau = \tau_0$ происходит потеря устойчивости, и происходят бифуркации Хопфа. Построим графики при различных τ и начальных условиях *(10; 25).*

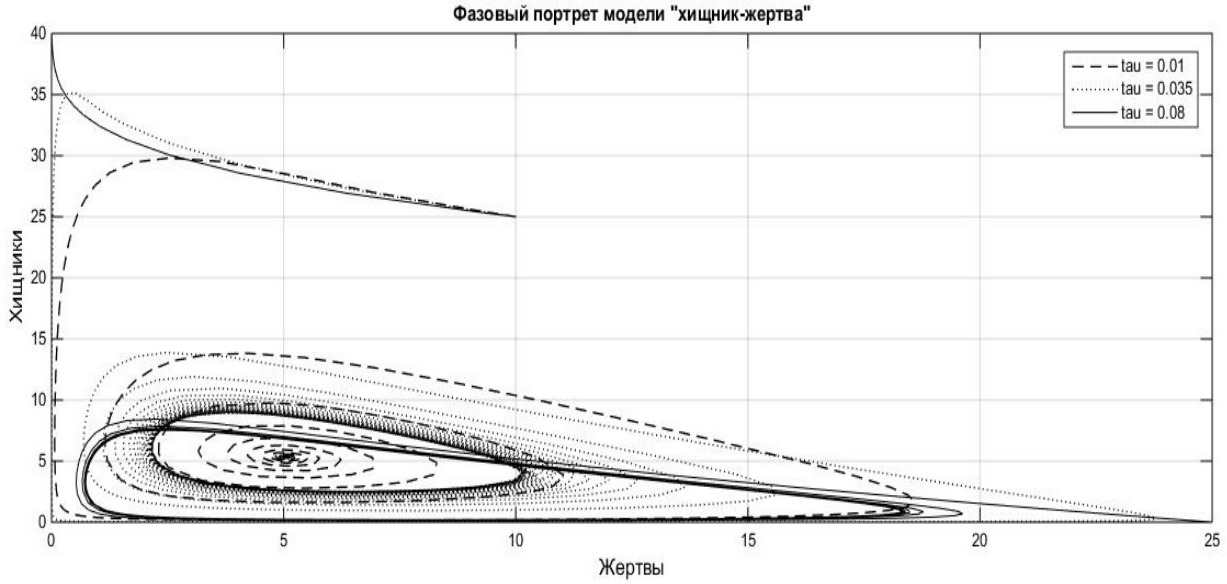


Рис. 2. Фазовые портреты модели при различных значениях запаздывания τ

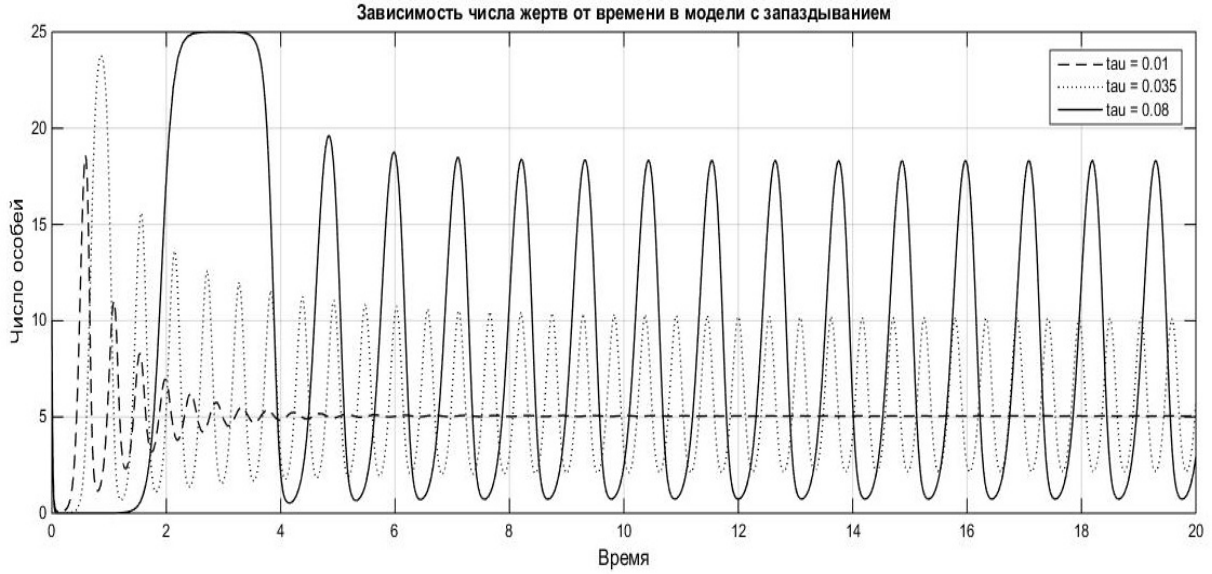


Рис. 3. Зависимость числа жертв от времени при различных значениях запаздывания τ

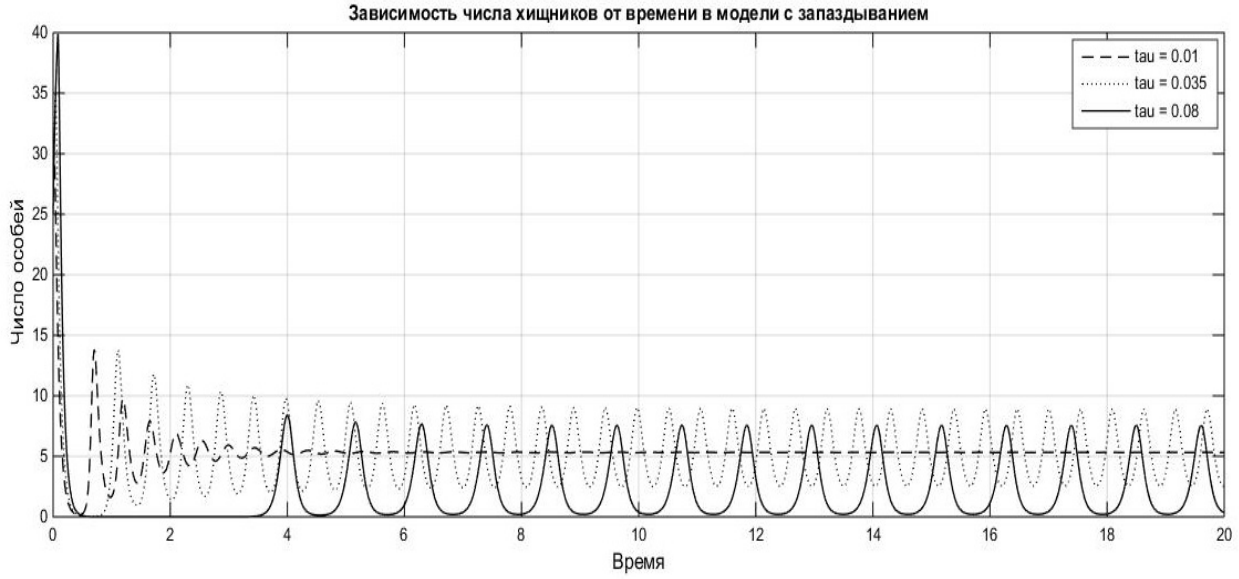


Рис. 4. Зависимость числа хищников от времени при различных значениях запаздывания τ

Список литературы

1. Колесов Ю.С. Свойства решений одного класса уравнений с запаздыванием, описывающих динамику изменения численности вида с учетом возрастной структуры // Математический сборник, 1982, том 117, №1. С. 86-94.
2. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: пер. с англ. М.: Мир, 1983. 399 с.
3. Cushing J. M. Predator-prey interactions with time delays // Journal of Mathematical Biology, 1976, №3. P. 369-380. (9)
4. Haque. M.A. A predator- prey model with discrete time delay considering different growth function of prey// Advances in Applied Mathematical Biosciences, 2011, vol. 2, №1, p. 1-16. (10)
5. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer, 1997. 335 p.
6. Wangersky P.J., Cunningham W.J. Time lag in prey-predator population models // Ecology, 1957, №38. P. 136-139.

THE EFFECT OF THE DELAY ON THE STABILITY OF THE "PREDATOR – PREY" DYNAMIC MODEL

Yurieva O.D., Porvatova A.A.

Ulyanovsk State University

Abstract. The dynamic model of the "Predator – Prey" with the logistic growth function of the victims and delay between the capture of the victim and its transition into the predators' biomass is considered in the paper. Index $e^{-\delta\tau}$ is introduced to describe the system, taking into account the interaction of predators with the victims who died, but first gave offspring or grew upover the τ time period. It is shown that thedelayed time can be the cause of the transition from a stable equilibrium position to unstable one and may give rise to a bifurcation.

Keywords: "Predator – Prey" system, delay, bifurcation.

УДК 62-4

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В САПР ТП ТЕМП

Абулгазина А.П., Ефременков И.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена формированию структуры данных для производства композиционных материалов в САПР ТП ТеМП. Рассмотрены особенности технологических процессов (ТП) в производстве композиционного материала (ПКМ). Проведен обзор и анализ систем для проектирования ТП. Проанализированы структуры и типы хранения данных, используемые в САПР ТП ТеМП для производства КМ. Рассмотрены процесс ПКМ на предприятии АО «Авиастар-СП», виды и структура электронного ТП.

Ключевые слова: САПР ТП ТеМП, производство композиционных материалов, технологический процесс, формирование структуры данных.

Введение

Система автоматизированного проектирования – автоматизированная система, реализующая информационную технологию выполнения функций проектирования, представляет собой организационно-техническую систему, предназначенную для автоматизации процесса проектирования, состоящую из персонала и комплекса технических, программных и других средств автоматизации его деятельности. Также для обозначения подобных систем широко используется аббревиатура САПР.

В рамках жизненного цикла промышленных изделий САПР решает задачи автоматизации работ на стадиях проектирования и подготовки производства.

Основная цель создания САПР – повышение эффективности труда инженеров, включая:

- сокращения трудоёмкости проектирования и планирования;
- сокращения сроков проектирования;
- сокращения себестоимости проектирования и изготовления, уменьшение затрат на эксплуатацию;
- повышения качества и технико-экономического уровня результатов проектирования;
- сокращения затрат на натурное моделирование и испытания.

Достижение этих целей обеспечивается путём:

- автоматизации оформления документации;
- информационной поддержки и автоматизации процесса принятия решений;

- использования технологий параллельного проектирования;
- унификации проектных решений и процессов проектирования;
- повторного использования проектных решений, данных и наработок;
- стратегического проектирования;
- замены натурных испытаний и макетирования математическим моделированием;
- повышения качества управления проектированием;
- применения методов вариантного проектирования и оптимизации.

Этих целей можно достичь с помощью программно-методического комплекса ТЕМП. Идеология системы имеет опыт 20-летнего внедрения на десятках предприятий России в качестве системы автоматизированного технологического проектирования. Система ТЕМП позволяет в высокой степени автоматизации проектировать комплект технологической документации и параллельно готовить любой подробности и любого формата данные для смежных (подготовка программ с ЧПУ) и внешних систем: MES-системы, системы управления предприятием и т.д.

Система построена на основе принципов универсальности и открытости и в короткие сроки адаптируется к различным специализациям технологического проектирования: механообработка, штамповка, сборка-сварка, нанесение лакокрасочных покрытий и т.д.

Одним из результатов работы системы, используемых в масштабах предприятия, является база данных технологических маршрутов.

Структура данных для производства КМ в САПР ТП ТеМП

Композитные материалы представляют собой металлические и неметаллические матрицы (основы) с заданным распределением в них упрочнителей (волокон, дисперсных частиц и др.); при этом композитные материалы позволяют эффективно использовать индивидуальные свойства составляющих композиции. По характеру структуры композитные материалы подразделяются на волокнистые, упрочнённые непрерывными волокнами и нитевидными кристаллами, дисперсноупрочнённые композиционные материалы, полученные путём введения в металлическую матрицу дисперсных частиц упрочнителей, слоистые композитные материалы, созданные путем прессования или прокатки разнородных материалов. Сплавы с направленной кристаллизацией эвтектических структур также представляют собой композитные материалы. Комбинируя объемное содержание компонентов, можно, в зависимости от назначения, получать композитные материалы с требуемыми значениями прочности, жаропрочности, модуля упругости, абразивной стойкости, а также создавать композитные материалы с необходимыми магнитными, диэлектрическими, радиопоглощающими и другими специальными свойствами. Композитные материалы своим прообразом имеют широко известный железобетон, представляющий собой сочетание бетона, работающего на сжатие, и стальной арматуры, работающей на растяжение.

В результате проведенного анализа систем для проектирования ТП были определены функции автоматизированных систем управления (АСУ). Проанализированы структуры и типы хранения данных, используемые в САПР ТП ТеМП для производства КМ.

Функции АСУ устанавливают в техническом задании на создание конкретной АСУ на основе анализа целей управления, заданных ресурсов для их достижения, ожидаемого эффекта от автоматизации и в соответствии со стандартами, распространяющимися на данный вид АСУ. Каждая функция АСУ реализуется совокупностью комплексов задач,

отдельных задач и операций. Функции АСУ в общем случае включают в себя следующие элементы (действия):

- планирование и прогнозирование;
- учет, контроль, анализ;
- координацию и регулирование.

Необходимый состав элементов выбирают в зависимости от вида конкретной АСУ. Функции АСУ можно объединять в подсистемы по функциональному и другим признакам.

Виды АСУ подразделяются на:

- Автоматизированная система управления технологическим процессом или АСУ ТП – решает задачи оперативного управления и контроля техническими объектами в промышленности, энергетике, на транспорте.
- Автоматизированная система управления производством (АСУ П) – решает задачи организации производства, включая основные производственные процессы, входящую и исходящую логистику. Осуществляет краткосрочное планирование выпуска с учётом производственных мощностей, анализ качества продукции, моделирование производственного процесса. Для решения этих задач применяются MIS и MES-системы, а также LIMS-системы.

Зная процесс производства КМ и структуру хранения данных САПР ТП ТеМП, формируется структура данных для производства КМ на АО «Авиастар-СП» в САПР ТП ТеМП.

Структура данных ТП ПКМ

В структуру данных по ПКМ в ТеМПе включаются важные этапы технологического процесса производства, начиная от входного контроля материалов, заканчивая контролем готового изделия.

Основные операции ТП в структуре данных ТеМПа являются: подготовка к производству, выкладка препрега, формование выкладки и контроль готового изделия. Каждая основная операция содержит в себе подоперации, в которые включаются вспомогательные действия по работе с КМ. Для каждой подоперации задаются описания, содержащие в себе информацию о необходимых операциях с требуемым оборудованием, о поступаемых на основную операцию материал и вспомогательные приспособления (инструмент, оборудование и оснастка).

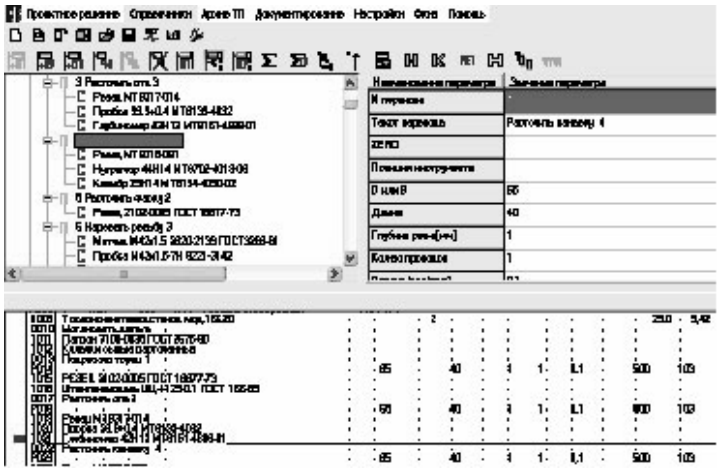


Рис. 1 Общий вид сформированной структуры данных в САПР ТП ТеМП

На основе сформированной структуры данных (рис. 1), имеется возможность получить полный цикл выполняемых работ от выдачи материала со склада до изготовления конечного изделия.

Список литературы

1. Малюх В.Н. Введение в современные САПР: Курс лекций. М.: ДМК Пресс, 2010. 192 с.
2. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 430 с.
3. Чернышов Е.А., Романов А.Д. современные технологии производства изделий из композиционных материалов // Современные наукоемкие технологии. 2014. №2. С. 46-51.
4. URL: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=33649 (дата обращения: 28.10.2016).

FORMATION OF STRUCTURES OF DATA FOR MATERIAL IN KOMPOZITSONNYH CAD TP TEMP

Abulgazina A.P., Efremenkov I.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. The article is devoted to the formation of a data structure for the production of composite materials in the CAD TP TeMP. We consider the features of technological processes (TP) in the production of composite-insulating material (KM). The reviewing and analysis of the systems for the project TP have been carried out. The structures and the types of data storage used in the CAD TP TeMP for KM production have been analyzed. The process of KM production of the company AO "Aviastar-SP", the species and the electronic structure of the TP have been considered.

Keywords: CAD TP TeMP, production of composite materials, the manufacturing process, the formation of these structures.

УДК 004.658.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ, ИМЕЮЩИХ РАЗЛИЧНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ, В РЕЛЯЦИОННЫХ БАЗАХ ДАННЫХ

Кулаков В.Л.

Институт авиационных технологий и управления

Аннотация. В статье рассмотрена возможность представления однородных объектов, имеющих различное информационное описание в реляционных базах данных, то есть ситуация, когда имеется достаточно большое, возможно очень большое множество атрибутов (характеристик) и конкретный объект характеризуется только частью атрибутов из этого множества, причём некоторые атрибуты, характерные для данного объекта, могут быть представлены списком. Основным недостатком реляционных баз данных считается невозможность или излишняя сложность при работе с данными достаточно сложной и разнообразной структуры. Однако, если ввести таблицы описания структуры информации по каждому объекту (таблицы-дескрипторы), то описание и использование в таблицах реляционных баз данных только той информации, которая соответствует каждому конкретному объекту оказывается удобным и компактным. Это показано на примере описания части семантики слов с помощью аппарата стандартных лексических функций. Современные программные средства поддержки баз данных позволяют контролировать соответствие между вводом (удалением) информации собственно в таблицу и в дескриптор.

Ключевые слова: базы данных реляционные, описание данных структурное, таблица-дескриптор, семантика слова, функция лексическая.

Введение

Во многих прикладных задачах необходима обработка однородных объектов требующих различного информационного описания, например, при создании (и ведении) электронных карточек пациентов поликлиники, создание и ведение базы данных музейных экспонатов, описании характеристик, снаряжения и вооружения кораблей военной группировки. При этом на данную информацию опирается много различных задач.

В процессе разработки программного обеспечения задачи формальной оценки качества изложения текста [1] потребовалась база данных, описывающих семантику значений (дефиниций) слов. При этом пришлось столкнуться с этой же проблемой.

Решение, которое предлагается в данной статье очень простое и универсальное, однако для лучшего понимания и проблемы и решения всё же лучше взять конкретную задачу.

Основная часть

Среди баз данных до настоящего времени наиболее простыми надёжными и в то же время достаточно мощными являются реляционные. Их основным недостатком считается невозможность или излишняя сложность работы с данными достаточно сложной и разнообразной структуры. Однако, во многих случаях, табличный способ представления информации является как технологически наиболее удобным, так и наиболее наглядным, а в

сложных случаях, часто, надо просто иметь возможность достаточно эффективно комбинировать таблицами. Пример такого подхода и описан в данной статье.

Этот подход заключается в использовании таблиц-дескрипторов как способа описания и использования однородных данных с разной структурой.

Для решения нашей задачи взяты в качестве исходной позиции некоторые моменты теории «Смысл <=>Текст» [2]. В этой теории важную роль играет так называемый «Толково-комбинаторный словарь», состоящий из статей, а часть любой статьи составляет набор значений лексических функций. Организация описания этих значений является предметом нашего рассмотрения.

Среди лексических функций (в дальнейшем – ЛФ) мы будем далее различать стандартные и нестандартные ЛФ. Для уяснения нашего вопроса мы не будем рассматривать нестандартные ЛФ, а просто «пройдёмся» по перечню стандартных.

Syn(синоним) и три варианта квазисинонимов «шире по смыслу», «уже по смыслу» и «пересекаются по смыслу», по всей видимости, имеет смысл для любого слова (однако иногда составителям словаря синоним слова просто не известен).

Conv(«конверсив: слово, которое называет то же самое отношение, что и ключевое слово C_0, но взятое «в ином направлении», т.е. с перестановкой тех же актантов («смысловых» компонентов. – *В.К.*) на другие места [2]), имеет смысл только для слов, обозначающих отношения и может иметь несколько вариантов: «Нижние индексы при символе Conv указывают тип … $Conv_{21}$ означает перестановку первого и второго актантов, $Conv_{312}$ – превращение третьего актанта в первый, первого во второй, а второго в третий и т.д.»[2].

В этом месте, по всей видимости, необходимы некоторые пояснения. Во-первых, классическим примером конверсива или конверсивов в ситуации «продажа» будут слова «купить» и «продать»: «X купил у YZ» и «Yпродал X-су Z». Проще: по смыслу конверсивами будут слова «учить» и «учиться»; по всей видимости в русском языке простейшим способом образования конверсива является форма страдательного (пассивного) залога.

Во-вторых, интересным в данном случае является вопрос об индексации: может ли одно и то же слово (значение слова) порождать (для одной и той же ситуации) различные конверсивы, в зависимости от перестановки актантов. Поскольку целью нашей работы в данный момент является разработка структуры представления информации (проще говоря, таблиц), то данный вопрос является существенным.

Если предположить, что у нас могут быть ситуации, описываемые четырьмя актантами, а количество перестановок четырёх элементов (4!) равно 24, то, учитывая все возможные перестановки, мы должны создать 24 таблицы.

Однако, поскольку мы не знаем ни одного примера такого рода, в данном конкретном случае, мы будем считать что для одного C_0 возможен только один конверсив и он не зависит от места в описании ситуации.

С другой стороны, если вдруг пример такого рода обнаружится, может быть всё же не стоит создавать много таблиц, а в нашей таблице конверсивов ввести ещё один столбец, в котором указывать соответствующие индексы. Если исходить из гипотезы, что таких случаев не может быть очень много, то этот вариант – дополнения единственной таблицы новым столбцом представляется достаточно разумным.

Теперь заметим, что обе функции (Syn и Conv) не однозначны и в прямом смысле, например, синонимом к слову «лингвистика» могут быть и «языкознание» и «языковедение», а конверсивом к слову «бояться» «страшить» и «пугать».

Так как синонимов к одному слову может быть несколько, то, если описывать слово, нужно указать соответствующий список. Чтобы не нарушать один из основных принципов реляционных баз данных – атомарность значения, надо создать таблицу синонимов. Очевидно, что так надо поступить в отношении большинства лексических функций. Более того, мы рассматриваем не слова, а дефиниции слов и список синонимов у каждой дефиниции свой: каждой дефиниции каждого слова надо присвоить идентификатор – внешний ключ для всех таблиц лексических функций. В таблицы дескрипторов мы просто указываем: есть хотя бы одна соответствующая запись в таблице синонимов (каждой из таблиц квазисинонимов) или нет. Ещё раз повторим: с конверсией более интересно. Тут могут быть двух, трёх и четырёх актантные отношения, следовательно, у нас могут быть одно, двух или трёхэлементные строки конверсивов, соответствующих одному слову, то есть, для конверсивов с целью экономии памяти, желательно сделать три отдельных таблицы и в дескрипторе соответствующим образом указывать, к какому из них обращаться.

Третья лексическая функция Anti – антоним: понятно, что антонимы есть не у всех слов. То есть значение этой функции может либо быть, либо отсутствовать.

По поводу этой функции сделаем одно замечание: пример «купить – продать», который мы привели в качестве конверсивов, можно использовать и как пример антонимов. То есть возникает вопрос, нет ли у этих функций чего-то общего. Однако, учитывая, что конверсивы описывают одно действие, но в разных направлениях, а антонимы (если говорить о действиях) обычно разные (строить – разрушать; ползать – летать), то можно считать, что множества конверсивов и антонимов просто имеют небольшое (в какой-то мере – случайное) пересечение.

«4. Der – синтаксический дериват: слово совпадающее с C_0 по смыслу, но принадлежащее к другой части речи. Поскольку мы различаем четыре основных части речи: S – существительное, A – прилагательное, Adv – наречие и V – глагол, имеется четыре вида дериватов: S_0,A_0, Adv_0 и V_0.

Естественно, что каждый из указанных здесь дериватов может быть образован лишь от слова не «своей» части речи, т.е. S_0 – не от существительных [преобразование $X{=>}S_0(X)$ есть номинация], A_0 – не от прилагательных [$X{=>}S_0(X)$ – адъективация] и т.п.» [2]. Таким образом, дескриптор этой функции – строка из 4 бит, которая имеет, по крайней мере, один нуль.

«5. Gener – название такого понятия, родового по отношению к понятию, обозначенному ключевым словом C_0, что в данном языке возможно либо сочетание вида $\mathrm{Gener}(C_0) \xrightarrow{5} \delta(C_0)$, синонимическое с C_0, либо (если C_0 существительное) сочетание вида C_0, C_1, …, C_n *и другие* <*прочие*>$\mathrm{Gener}(C_0)$. Здесь *δ обозначает некоторый синтаксический дериват от* C_0 (может быть «нулевой»)» [2].

В дескрипторе этой функции отведём строку из двух битов.

«Для всех дальнейших построений исключительно важным является понятие ситуации (stateofaffairs). … С формальной точки зрения понятие ситуации должно считаться неопределяемым; тем не менее, будут уместными следующие содержательные пояснения.

Под ситуацией понимается определённое лексическое отражение (в данном языке) некоторого «куска» действительности. Каждая ситуация идентифицируется своим ключевым словом C_0; вообще говоря, одна и та же ситуация может обозначаться разными ключевыми словами, которые в таком случае являются либо синонимами, либо конверсивами, либо синтаксическими деривантами друг друга.

Далеко не всякое слово однозначно определяет ситуацию. Ситуации полностью определяются лишь именами действий, процессов, состояний и т.п., т.е. глаголами, а также «абстрактными» (обычно отглагольными или отадъективными) существительными.Имена сущностей (предметов, лиц и т.д.) – предметные, вещественные и т.п. существительные, как правило, сами по себе ситуацию не задают, а для обозначения ситуации, связанной с такими существительными, должно использоваться словосочетание или сложное слово. Так, слово *кровь* связано со следующими разными ситуациями: 'кровообращение', 'кровотечение', 'пачканье кровью', 'анализ крови', 'переливание крови', 'кровопускание', 'донорство' и, возможно, с рядом других.

Ситуации, обозначаемые отдельными лексическими единицами естественных языков, имеют, как правило, от одного до четырёх «смысловых» компонентов, или семантических актантов* (обозначаемых заглавными латинскими буквами A, B, C, Dили X, Y, Z, W). Так ситуация 'спать' может быть обозначена ключевыми словами *спать* или *сон*[S_0(*спать*) = *сон, V_0*(*сон*) = *спать*]; это одноактантная ситуация: A – тот, кто спит.

Пример четырёхактантной ситуации – 'продажа' (*продажа/продавать*): A – продающий, B – товар, C – покупатель, D – цена товара, т.е.

Иван продаёт Перу лыжи за 10 рублей.

Возможны ситуации, вообще не имеющие семантических актантов: 'дождь', 'морозит'.

Вопрос о рассмотрении ситуаций с большим числом семантических актантов остаётся открытым. … Прочем, лексемы, обозначающие пяти- и даже шестиактантные ситуации, встречаются, ср. *арендовать* и *командировать* (пример Ю.Д. Апресяна): …A – кто, B – кого, C – куда, Б – откуда, E – на какой срок и P – с какой целью (*Дирекция командировала Бориса из Москвы в Воркуту на 6 месяцев для обмена опытом*)» [2].

Итак, можно создать таблицу дескрипторов, которая имеет следующую структуру и описывает пять первых стандартных лексических функций и признак (определяет слово ситуацию или нет).

Таблица 1

Структура таблицы для первых пяти лексических функций (ДЛФ1_5)

Функция	Syn				Conv	Anti	Der				Gener		Сит
Столбец	Syn	$Syn_ш$	$Syn_у$	$Syn_п$			S_0	A_0	Adv_0	V_0	δ	Сп	
Тип или домен	бит	бит	бит	бит	целое	бит	бит	бит	бит	бит	бит	бит	целое

Следующая таблица (вернее таблицы) дескрипторов относятся только к «словам-ситуациям», каждая из которых имеет столько столбцов (актантов), сколько указано в поле «сит» (плюс столбец с ключевым словом) (таких таблиц мы создадим 6, но если выявятся слова-ситуации с большим количеством актантов, то можно без проблем добавить

и такие таблицы. Назовём эти таблицы-дескрипторы ДАКn, где n – количество актантов в ситуации.

«6. S_i (I – 1, 2, 3, 4) – типовое название i-го актанта. В тексте обозначения конкретных актантов выступают – при глаголе-сказуемом, называющем ситуацию, – в роли подлежащего и сильных дополнений: *Иван, Пётр, лыжи* и *10 рублей* суть обозначения конкретных актантов глагола *продаёт* во фразе, приведённой выше. ЛФ S_1 – это типовое (т.е. даваемое по роли в ситуации) название первого актанта, в нашем примере с продажей лыж – *продавец.* Если C_0 – «активное» обозначение ситуации, то $S_1(C_0)$ обычно соответствует семантическому агенту (каузатору, имеющему определённую цель); тем самым многие S_1 суть nominaagentis/auctoris.

Соответственно S_2, S_3 и S_4 – это типовые названия второго, третьего и четвёртого актантов ; в уже упоминавшемся примере – *покупатель, товар и цена.* В тех случаях, когда $Si(C_0)$ имеет несклееное выражение, оно соединяется с C_0 отношением 2: $Si \rightarrow C_0$. Если C_0 – существительное, то запись $Si(C_0)$ является сокращением для $Si(Oper_1(C_0))$» [2]. Поскольку, даже приведённые в [2] примеры указывают на многовариантность значений, то и в данном случае для значения каждой функции надо создать свою таблицу. Причём в таблицу собрать значения соответствующей функции (актанта), независимо от того сколько актантов в ситуации описываемой данным значением слова.

«7. S_c – типовое название второстепенных компонентов ситуации – сирконстантов (Л. Теьер) , таких, как место, инструмент, способ действия и т.п. $(S_c \xrightarrow{2} C_0)$ …

В тех случаях, когда некоторое S_c имеет в качестве ключевого слова C_0 глагол, причём выражение этого S_c оказывается несклееным , вместо самого C_0 при S_cобычно выступает синтаксический дериват C_0, как правило – S_0. Это значит, что выражение *арена борьбы* должно записываться как S_{loc}(*бороться*) $\xrightarrow{2}$ S_0(*бороться)* и т.п.

S_{loc} – типовое название места осуществления данной ситуации (= 'то, где…')…

S_{instr} – типовое название инструмента, используемого в данной ситуации (= 'то, чем/ посредством чего…')…

S_{mod} – типовое название способа (манеры, характера) осуществления данной ситуации (= 'то, как…')…

S_{res} – типовое название результата данной ситуации (= 'то, что получается…' Апресян 1971)…

Будет, возможно, нелишним подчеркнуть, что S_{loc}, S_{instr}, S_{mod} и S_{res} с одной стороны и S_0, S_1, S_2 иS_3 с другой часто совпадают друг с другом, ср. *мойка* – S_0 и S_{res}от*мыть,зажигание* = S_0 и S_{instr}, *смазка* = S_0 и S_3, *требование* = S_0 и S_2 и т.п.» [2].

То есть, следующие четыре поля – это сирконстанты S_{loc}, S_{instr}, S_{mod} и S_{res}.

Далее «Соотносительные лексические функции Sing (лат. singulum 'отдельный'; «единичность») - типовое название одной «штуки», одного «кванта» некоторого C_0 – и Mult (лат.multum 'множество'; «множественность») – типовое название совокупности множества $C_0(Sign \xrightarrow{2} C_0, Mult \xrightarrow{2} C_0)$» [2].

Эта функция, в общем-то, никак не связана с ситуацией и поэтому добавляем в таблицу ДЛФ1_5 ещё два битовых столбца.

Далее. «9. Figur «фигуральное обозначение») – принятая метафора для C_0 (Figur $\rightarrow C_0$). Figur часто употребляется в сочетании с Magn (см. ниже, стр 89, №13)». Аналогично предыдущему – добавляем поле в таблицу ДЛФ1_5.

То же самое относится к следующей функции.

«Centr («центр», «разгар») – типовое обозначение «центральной» части предмета или процесса (Centr $\xrightarrow{2}$ C_0) …

Centr обычен в сочетании с Loc_{in} (см. ниже, стр 91, № 17) Loc_{in} – *Centr*(*город*) = *в центре* [*города*], Loc_{in}*Centr*(*блаженство*) = *на верху* [*блаженства*], Loc_{in}*Centr*(*дорога*) = *посреди* [*дороги*], Loc_{in}*Centr*(*возраст*) = // *во цвете лет*], Loc_{in}*Centr*(*движение*1) = *на полном ходу.* (Loc_{in}Centr – ещё один пример сложной ЛФ; ср. выше, стр. 80)» [2].

Идём далее: «11. A_i (i=1, …, 4) – типовое определение i-го актанта по его реальной роли в ситуации («такой, который…», «такой, которого…»; ($A_i \xrightarrow{2} C_0$) …» [2]. Возвращаемся к таблицам ДАКn – это следующие n столбцов.

«12. $Able_i$ (лат. *habilis*'способный';i=1, …, 4) – типовое определение i-го актанта по его потенциальной роли в ситуации («такой, который…», «такой, который может…»; «такой, которого можно…»; ($Able_i \xrightarrow{2} C_0$).

$Able_i$ следует отличать от близких к ним по смыслу названий таких свойств, которые в нормальных условиях обычно (но не обязательно) влекут $Able_i$ср. *удивлять – удивительный* (=$Able_i$) – *необычный*: необычное, как правило, удивительно, хотя и не всегда, но с большой вероятностью; обратное же неверно. Такие слова, как *необычный* по отношению к *удивлять, получают специальное обозначение* $Qual_i$(от лат. *qualitas*'качество'» [2]. Продолжаем формировать таблицы ДАКn.

«13. $Magn_0$ и $Magn_i$ (лат. *magnus*'большой';i=1, …, 4) – обозначение 'высокой степени', 'интенсивности', 'очень' самой ситуации ($Magn_0$) или её i-го актанта (Magn: Magn $\xleftarrow{5}$ C_0)…

К параметру Magn примыкают параметры Plus ('более') и Minus ('менее'), не имеющие самостоятельных реализаций, а выступающих исключительно в составе сложных параметров (см. стр. 80), например $CausPredPlusMagn_0$(скорость) = увеличивать, повышать или $CausPredPlMinusMagn_0$(скорость) = уменьшать, понижать, сбрасывать, сбавлять [о Caus и Pred см. ниже, стр. 95, № 22, и стр. 92» [2].

Продолжаем формировать таблицы ДАКn. После чего возвращаемся к таблице ДЛФ1_5:

«14. Ver (лат. *verus*'истинный') – 'правильный', 'соответствующий назначению', 'какой следует' (Ver $\xleftarrow{5}$ C_0)»[2] и «15. Bon (лат. *verus*'хороший') –' хороший ' (Bon $\xleftarrow{5}$ C_0)… По аналогии с Magn: Plus – Minus для параметров Bon напрашиваются родственные параметры Melior (=PlusBon) и Pejor (=MinusBon); они могут быть использованы сходным образом в составе сложных параметров: IncepMelior(дисциплина) = укрепляться, IncepPejor(дисциплина) = расшатываться, IncepMelior(культура) = расцветать, IncepPejor(культура)=упадок и т.п.» [2].

Опять обращаемся к таблицам ДАКn: «16. Adv_{ix}(i=1, …, 4; x = A, B, C, D) – имя ситуации в роли определения при глаголе, называющем другую ситуацию. Здесь индекс x используется следующим образом: Adv_{1A}(V) – это такие «наречия» от глагола V, которые, заменяя в тексте V, требуют превратить в вершину (вместо V) первый актант этого V

(*усиление* =>*усиливались* в приведённом ниже примере); $Adv_{1B}(V)$ – делает вершиной второй актант (*в выборе* => *выбрал,* там же) и т.д.» [2]. В зависимости от количества актантов (k) добавляем в таблицу ДАКnk[2] битов.

Далее опять отходим от ситуаций (т.е. возвращаемся к таблице ДЛФ1_5): «17 Loc (лат. locus 'место') – предлог типовой локализации (пространственной, временной или абстрактной); $Loc \xrightarrow{2} C_0$. Различаются Loc_{in} «статическая локализация (≈ русск. *в* + предл. пад.), Loc_{ad}– предлог направления (≈ русск. *в* + вин. пад.) и Loc_{ab}– предлог удаления (≈ русск. *из* + род. пад.), т.е. ***в Москве – в Москву – из Москвы.*** Но благодаря наличию регулярных корреляций между предлогами обычно достаточно указать Loc_{in} (Loc_{ad} и Loc_{ab} предсказываются по нему: если

Loc_{in} = *в* + $S_{предл}$, то Loc_{ad}=*в* + $S_{вин}$, а Loc_{ad} = из +$S_{род.}$ и т.д.).

Подчеркнём, что под типовой локализацией понимается наиболее «прямое», наиболее «естественное» расположение, т. е. расположение, наиболее соответствующее природе и назначению «вещи», обозначенной ключевым словом C_0.Так, предмет или вещество может находиться, вообще говоря, и в тазу, и на (перевёрнутом) тазе, и под тазом, и за тазом, и у таза, но главное, «органическое» расположение вещей относительно таза, который является специальным вместилищем, – это ***быть в***; поэтому Loc_{in}(таз 1) = ***в*** (+$S_{предл\ 2}$)[7]…

Для ряда слов параметр Loc не удаётся определить однозначно: например Loc_{in}(снег) – либо ***в [снегу]***, либо ***на [снегу]***, причём в и на здесь противопоставлены по смыслу. В таких случаях (как и всегда, когда значения той или иной лексической функции не синонимичны) следует прибегать к семантическим пометам Loc_{in}(снег) = ***в***[+$S_{предл\ 2}$;внутри]; Loc_{in}(снег) = ***на***[+$S_{предл\ 2}$;на поверхности]; подробнее об этом см. ниже, стр. 102» [2].

Поскольку использовались слова «как правило», то зарезервируем всё же три таблицы и соответственно три бита в таблице ДЛФ1_5.

Следующая функция «18. Copul (лат copula 'связка') – 'быть', 'являться' $Loc \xrightarrow{2} C_0$» [2] также дополняет таблицу ДЛФ1_5.

«Для пояснения очередных параметров необходимо рассмотреть следующую схему. Пусть имеется название ситуации C_0 и названия двух её семантических актантов A и B (мы берём в качестве иллюстрации двухактантную ситуацию, чтобы не усложнять изложение): все эти три слова – существительные. Чтобы построить правильную русскую фразу, описывающую ситуацию C_0 и включающую в себя C_0, A и B, необходим личный глагол (который, однако, не добавлял бы к C_0, A и B лишнего смысла). Этот глагол можно в принципе выбрать одним из 10 способов, а именно, это может быть: 1) глагол, у которого обозначение A будет подлежащим, а C_0 – первым дополнением (обозначение B может быть вторым дополнением)[8], т.е. «что делает A с C_0»; 2) глагол, у которого обозначение B будет подлежащим, а C_0 – первым дополнением (обозначение A может быть вторым дополнением), т.е. «что делает B с C_0»; 3) глагол, у которого не будет подлежащего, а C_0 – первым дополнением (A и B могут быть вторым и третьим дополнениями), т.е. «что делается с C_0»; 4) глагол, у которого C_0 будет подлежащим, а A – первым дополнением (B может быть вторым дополнением), т.е. «что C_0 делает с A»; …10) глагол, у которого не будет

подлежащего, В будет первым дополнением, а C_0 могут быть вторым дополнением, т.е. «что делается при помощи В и C_0»;

Для обозначения этих десяти глаголов и введены три группы параметров.

$Oper_i$ ('операция с …') – языковые обозначения стрелки в выражениях $A \rightarrow C_0$, $B \rightarrow C_0$ и $\Lambda \rightarrow C_0$, т.е. глаголы, имеющие название ситуации первым дополнением (*питать любовь, читать доклад, быть в отчаянии, подвергнуться осмотру, тянет запахом*);

$Func_i$ ('функционирование') – языковые названия отношений $A \rightarrow C_0$, $B \rightarrow C_0$ и $\Lambda \rightarrow C_0$, т.е. глаголы, имеющие название ситуации подлежащим (*отчаяние охватило …,, возмездие настигло…, тишина царит…*);

$Labor_{ij}$ ('обработка') – название отношений $A \rightarrow B + C_0$, $B \rightarrow A + C_0$ и $\Lambda \rightarrow A + C_0$, т.е. глаголы, имеющие название ситуации вторым дополнением, а название актантов – подлежащим и первым дополнением (*окружать кого уважением, подвергать кого/что осмотру*).

Нижним индексом при символах Oper, Func и Labor, как и выше, обозначаются актанты: $Oper_1$ имеет подлежащим название А, а $Oper_2$ – В; $Func_1$ имеет первым дополнением А, $Labor_{12}$ имеет подлежащим обозначение актанта А, а первым дополнением – В; индекс $_0$ означает отсутствие соответствующего элемента $Oper_0$ – безличный Oper; $Func_0$ – не имеет дополнений, $Labor_0$ – безличный Labor» [2]. То есть дополняем таблицы ДАКn.

«Параметры 22-24 (см. ниже), т.е. Gaus, Perm и Liqu, родственны в том отношении, что все три обозначают действия, связанные с «созданием»/»уничтожением» ситуации C_0. Более точно, Perm и Liqu выражаются через Gaus и отрицание, см. ниже, стр. 95. При этом символы Gaus, Perm и Liqu без нижних индексов обозначают действия неучастников ситуации, а синдексами – такие же действия соответствующих актантов. Во многих случаях названные параметры употребляются в составе сложных функций – вместе с Oper, Func и Labor. Непосредственно к названию C_0 они присоединяются лишь в том случае, если C_0 – либо глагол, либо название конкретного предмета, и речь идёт о его действительном создании/уничтожении» [2]. В данном случае речь идёт о дополнении структуры таблиц ДАКn.

Следующие три параметра: «Incep – 'начинать' ($Incep \xrightarrow{2} C_0$)», «Cont – 'продолжать' = 'не переставать' = 'не начинать не' ($Cont \xrightarrow{2} C_0$)» и «27.Fin - 'переставать' = 'начинать не' ($Fin \xrightarrow{2} C_0$)», хотя и связаны с ситуациями, но вполне могут быть помещены в таблицу ДЛФ1_5 (впрочем, как и в таблицы ДАКn).

«28 Perf («перфектив») – завершённость действия, достижение им своего естественного предела. Отдельного самостоятельного выражения параметр Perf в русском языке не имеет; как правило это значение передаётся формами совершенного вида: *одеваться – одеться, ломать – сломать, умирать – умереть, выковыривать – выковырять* и т.п. (хотя, разумеется, далеко не всякая форма совершенного вида выражает именно Perf: так не только это значение имеют формы типа: *поспать, проспать, недоспать)*

29. Result («результатив») – 'состояние в результате …', этот параметр, как и Perf, имеет в русском языке только склеенное выражение. Значение Result и его отношение с Perf иллюстрируются тройками типа

C_0PerfResult		
ложиться	*//лечь*	*//лежать*
вставать	*//встать*	*// стоять*
учиться	*//научиться*	*//уметь*
покупать	*//купить*	*//иметь*
получать (в подарок)	*//получить (в подарок)*	*//иметь*

Из Perf(C_0) логически следует Result(C_0), но обратное, вообще говоря, неверно, поскольку один и тот же результат может быть достигнут разными путями» [2]. На всякий случай мы заносим описание наличия значений этих лексических функций в таблицу ДЛФ1_5.

«30. Fact^j (лат. *factum*'факт') – 'реализовываться', 'выполниться' («стать фактом»); Fact $\xrightarrow{1}$ C_0. Имеется в виду осуществление «требования», содержащегося в значении слова C_0, - эксплицитного, например, *приказ, совет, приглашение* или имплицитного, как в *экзамен* («требует» проявить знания), *искушение* («требует» поддаться ему), *препятствие* («требует» прекратить то, что делается, например, движение). Верхний индекс (римские цифры) представляет, если это надо, степень осуществления подразумеваемого требования, причём меньший индекс присваивается более низкой степени: Fact^I (*капкан*) = *срабатывать*, Fact^{II} (*капкан*) = *поймать*. Fact^I (*чувство* II) = *говорить, подсказывать,* Fact^{II} (*чувство* II) = *заставлять, не позволять (не)*" [2]. Для этой функции мы создадим (на всякий случай 3 таблицы) и соответственно отведём три бита в таблице ДЛФ1_5.

«31. Real$^j_{12}$- 'реализовать', 'выполнить' («требование», содержащееся в C_0); Real$^j_{12}$ $\xrightarrow{2}$ C_0. Индекс J имеет то же значение, что и выше – степень выполнения; нижний индекс обозначает глубинно-синтаксический актант, выполняющий требование» [2]. Опять же будем считать, что в некоторых случаях возможно три варианта j и, поэтому создадим для данной функции 6 таблиц и соответственно отведём 6 битов в строке таблицы ДЛФ1_5.

«32. Prepar^j(лат. *preparare*'готовить') - приводит в полную готовность к (употреблению, функционированию и т.п.); Prepare^j $\xrightarrow{2}$ C_0. Индекс j, как и при Fact и Real, показывает степень готовности»[2]. По аналогии добавляем 3 таблицы и 3 бита в строку ДЛФ1_5.

«33. Degrad («деградировать») - 'портиться', 'выходить из строя' (=IncpPredAntiVer: 'начинать быть не таким, как следует' или IncepPejor: 'начинать быть хуже', ср. стр. 90; Degrad $\xrightarrow{1}$ C_0»[2]. Одна новая таблица – один бит в строку ДЛФ1_5.

«34. Imper («императив») – значение «повеления»; регулярное (грамматическое) выражение Imper у глаголов – повелительное наклонение» [2]. Одна новая таблица – один бит в строку ДЛФ1_5.

«35. Son (лат. *sonum*'звук') – название типового звучания C_0 (Son $\xrightarrow{1}$ C_0)» [2]. Одна новая таблица – один бит в строку ДЛФ1_5.

«До сих пор мы приводили достаточно абстрактные лексические функции, имеющие более или менее широкую сочетаемость. Имеется, кроме того, ряд ряд более конкретных лексических функций, определённых лишь для сравнительно узких групп слов и тем самым приближающихся к нестандартным ЛФ. Таковы, например, следующие лексические функции.

36. Destr (лат. *destruere*'разрушать'; Королёв – Эрастов 1968; 29-30) – типовое название «агрессивного» действия C_0: *Коровая бодает, оса жалит, автомобиль давит, болото засасывает <затягивает>…*($Destr \xrightarrow{1} C_0$)

37. Cap (лат. *caput*'голова', 'глава') - 'начальник': *декан факультета, ректор университета, заведующий кафедрой, настоятель собора, директор школы (завода), командир отряда, глава семьи (правительства), вождь племени, …*($Cap \xrightarrow{2} C_0$)

38. Equip - 'личный состав': *расчёт орудия, экипаж танка, труппа театра, население государства (города), …*($Equip \xrightarrow{2} C_0$)

39 Doc - 'документ'; различают три вида Doc: Doc_{res}(ср.S_{dC0} в Апресян 1971) – 'документ, являющийся результатом' [«воплощающий в себе» C_0: *отчитываться – отчёт; жаловаться – жалоба; просить – просьба, прошение, ходатайство, заявление, отношение, …*($Cap \xrightarrow{2} C_0$)

Doc_{perm}- 'документ на право…':Doc_{perm}Open (*поезд*) = [*проездной*] *билет*; Doc_{perm}Open (*автомобиль*) = [*водительские*] *права*; Doc_{perm}Open (*входить*) = *пропуск; лицензия на отстрел (производство); ордер на арест, …*

Doc_{cert}- 'документ, удостоверяющий…': *свидетельство о браке, диплом о высшем образовании, аттестат зрелости, паспорт, удостоверение личности, командировка 2 = командировочное удостоверение, справка о болезни …*

40. Attr ('атрибут'; Королёв – Эрастов 1968; 28) – типовая метонимия для C_0 (в отличие от ЛФ №№36-39, являющихся скорее параметрами, данная ЛФ – скорее замена» [2].

Каждая из этих функций порождает одну новую таблицу и добавляет один бит в строку ДЛФ1_5.

В результате часть структуры базы данных, описывающая значения стандартных функций получилась следующая: по две таблицы-дескриптора на каждое слово и более 60 таблиц в которых хранятся соответствующие значения лексических функций. В этих таблицах нет избыточных строк, и структура дескриптора позволяет написать приложения таким образом, чтобы обращаться к этим таблицам только в тех случаях, когда они содержат соответствующую информацию. С другой стороны необходимо обеспечить автоматическое заполнение дескрипторов по мере заполнения соответствующих таблиц. Существующие программные средства позволяют сделать это без особых проблем, например, путём создания триггеров на языке SQL, либо путём программирования реакции на события в системах типа Delphi.

Сделаем ещё два замечания.

Во-первых, такая структура построения базы данных (отдельная таблица для каждой лексической функции), позволяет вести и обратный поиск, то есть определить список ситуаций, в которых данное слово характеризует актант или список слов, для которых данное слово является значением какой-либо лексической функции.

Во-вторых, такая структура позволяет достаточно просто дополнять нашу базу данных новыми словами-значениями и постепенно по мере выявления заполнять значения лексических функций для существующих в базе значений слов.

Ещё один вопрос: стоило ли так подробно описывать лексические функции, если мы хотели всеголишь описать часть структуры базы данных? На наш взгляд – да, поскольку, как правило, при рассмотрении конкретных задач выявляются вопросы, требую-

щие рассмотрения и решения не только для одной, а для целого ряда в чём-то аналогичных конкретных задач.

В этой статье не рассмотрены все вопросы, касающиеся представления статей толково-комбинаторного словаря, там ещё много интересных вопросов. Рассмотрен только один частный вопрос, который появляется при создании ещё ряда информационных систем, некоторые из которых мы назвали в начале статьи.

Список литературы

1. Кулаков В.Л. Возможные подходы к формальной оценке качества передачи смысла текста при его изложении // Информационные системы и технологии в АПК. Ульяновск, 2002. С. 136-146.
2. Мельчук И.А. Опыт теории лингвистических моделей «Смысл<=>Текст». Семантика, синтаксис. «Школа «Языки русской культуры». М., 1999. 368 с., ил., библ. по гл.

PRESENTING HOMOGENEOUS OBJECTS WITH DIFFERENT INFORMATIONAL DESCRIPTIONS IN THE RELATIONAL DATA BASES

Kulakov V.L.

Institute of Aviation Technology and Control

Abstract. The article deals with the possibility of presenting homogeneous objects with different informational descriptions in the relational data bases. It is assumed that there is a significant, probably enormous number of object attributes (characteristics). However, every particular object is characterized only by a part of the attributes of the multitude; at thatsome of the attributes can be presented as a list. The main drawback of the relational data bases is considered to be either the impossibility or excessivelabor inputs in working with the data of quite complicated and diverse structure. However, if a table describing the informational structure of each object is introduced (descriptor tables), than description and use only of the information corresponding to each particular object in the tables of the relational data bases turns out to be convenient and compact.Thisis shownin the example describing a part of the word semantics with the help of the standard lexical functions.The up-to-date software support facilities of the data bases allow controlling the correspondence between the data input (deletion) into the table itself and into the descriptor..

Keywords: relational data bases, data description structure, descriptor table, word semantics, lexical function.

УДК 519.95

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Михеева Е.А., Карева П.В., Сайфутдинова А.Р., Табакова Е.Д., Шевалдов И.А.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе исследуются пять важнейших предполных классов двухзначной логики P_2: класс самодвойственных функций S, класс монотонных функций M, класс линейных функций L, класс функций, сохраняющих константу нуль T_0 и класс функций, сохраняющих константу единица T_1. Разработаны алгоритмы исследования функций из P_2 на самодвойственность, монотонность, линейность, сохранение константы 0 и 1, которые в конечном итоге реализованы программами. Программы на самодвойственность, линейность, сохранение константы 0 и 1 написаны на языке программирования Delphi. Программа на монотонность написана на языке программирования PascalABC.

Ключевые слова. Двузначная логика; предполные классы; функциональная полнота; программная реализация объектов дискретной математики; объекты дискретной математики – класс самодвойственных функций, класс монотонных функций, класс линейных функций, класс функций, сохраняющих константу 0 и класс функций, сохраняющих константу 1; языки программирования: Delphi, PascalABC.

Исследуются пять важнейших предполных классов двухзначной логики P_2: класс самодвойственных функций S, класс монотонных функций M, класс линейных функций L, класс функций, сохраняющих константу нуль T_0 и класс функций, сохраняющих константу единица T_1.

Понятие двухзначной логики как системы функций с определенной на ней операцией суперпозиции относится к основным понятиям дискретной математики. В двухзначной логике, как в любой другой функциональной системе, главной проблемой является ответ на основной вопрос функциональной полноты. Он звучит так : система функций $F=\{f_1,\ldots,f_n,\ldots\}$ из P_2 полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L. Таким образом, при исследовании функциональной полноты в P_2 одно из важнейших мест занимает исследование функций из P_2 на принадлежность классам T_0, T_1, S, M и L.

Все необходимые обозначения, понятия и определения можно найти в работах [1-4].

В данной работе разработаны алгоритмы исследования функций из P_2 на самодвойственность, монотонность, линейность, сохранение константы 0 и 1, которые в конечном итоге реализованы программами.

Программы на самодвойственность, сохранение константы 0 и 1 написаны на Delphi.

Преимущества программы: наглядный результат, возможность ввести функцию разными способами, многофункциональность.

Недостаток программы: ограниченное количество переменных.

Программа на монотонность написана на языке программирования PascalABC.

Преимущества программы: высокая скорость вычисления, экономия времени пользователя при исследовании функций на монотонность, простота реализации, наглядность алгоритма.

Недостаток программы: ограниченное количество переменных (не более 10).

Программа на линейность написана на языке программирования Delphi. Она исследует функцию на линейность: методом таблиц и методом неопределённых коэффициентов. Преимуществами данной программы являются быстрая скорость вычислений, наглядность и простота интерфейса.

Данная работа является продолжением работ [5-8].

Программная реализация объектов дискретной математики способствует внедрению информационных технологий как в обучение дискретной математике, так и в исследование функциональной полноты в P_2.

Список литературы

1. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Математического инта им. В. А. Стеклова АН СССР. М., 1958. Т. 51. С. 3-142.
2. Яблонский С.В, Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966. С. 3-120.
3. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979, 1986 (2-е изд., перераб. и доп.), 2001 (3-е изд., стер.).
4. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику. Ч.1. Ульяновск: УлГУ, 2013. 102 с.
5. Михеева Е.А., Табакова Е.Д. Принцип двойственности для булевых функций и его программная реализация // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. научных работ, представленных на Международную научную конференцию «69 Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 177.
6. Михеева Е.А., Карева П.В. Исследование множества всех двоичных наборов длины N по отношению к операции предшествования и его программная реализация // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. научных работ, представленных на Международную научную конференцию «69 Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 175-176.
7. Михеева Е.А., Сайфутдинова А.Р. Разложение булевых функций в виде суммы по модулю 2 и его программная реализация // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. научных работ, представленных на Международную научную конференцию «69 Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 176-177.
8. Михеева Е.А., Табакова Е.Д. Самодвойственность функций и ее программная реализация // Труды молодых ученых Ульяновского государственного университета: сб. докл. и тез. докл. студентов и аспирантов на XXVI ежегодной науч.-практич. конф. (апрель-май 2016 г.) / под ред. В.Н. Голованова. Ульяновск: УлГУ, 2016.

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE OBJECTS OF DISCRETE MATHEMATICS

Mikheeva E.A., Kareva P.V., Sayfutdinova A.R., Tabakova Y.D., Shevaldov I.A.

Ulyanovsk State University

Abstract. In this work, investigated five major precomplete classes of two-valued logic P_2: the class of self-dual functions *S*, the class of monotone functions *M*, the class of linear functions *L*, the class of functions, which preserving a constant zero T_0, and the class of functions, which preserving a constant one T_1. Also, designed algorithms of researching functions from P_2 on self-dual, monotone, linearity, preserving constants zero and one, which realized by the programs. The program on monotone is written in the programming language PascalABC, other programs are written in Delphi.

*Keywords:*The two-valued logic; precomplete classes; functional completeness; software implementation of the objects of discrete mathematics; the objects of discrete mathematics – the class of self-dual functions, the class of monotone functions, the class of linear functions, the class of functions preserving constants zero and the class of functions preserving one; programming languages: Delphi, PascalABC.

УДК 62-52; 62-8

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КОДАХ АУТЕНТИФИКАЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КЛЮЧОМ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТАБЛИЦ

Котков А.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе рассмотрены коды аутентификации, стойкие к имитации и подмене сообщений, оптимальные коды с неограниченным ключом на основе ортогональных таблиц, приводятся их конструкции. Представлены результаты работы над прототипом программы, которая строит эти коды.
Ключевые слова: код аутентификации, имитация сообщения, хеш-функция.

Обеспечение целостности сообщения – это невозможность изменения сообщения таким образом, чтобы получатель этого не обнаружил. Под аутентификацией понимается подтверждение того, что информация получена от «законного» источника и получателем является тот, для кого она предназначалась. Один из способов обеспечения целостности – это вычисление MAC (Message Authentication Code) – кода аутентификации.

Кодом аутентификации(без сокрытия) называется четвёрка *(X, K, Y, h),* где X – конечное множество сообщений, K – множество ключей, Y – конечное множество свёрток, h – ключевая хеш-функция и выполнено равенство:

$$Y = \bigcup_{k \in K} h_k(X).$$

Протокол аутентификации, решающий задачи обеспеченияцелостности сообщения при передаче/хранении, а также аутентификации источника данных для случая доверяющих друг другу сторон, основанный на использовании кода аутентификации, предполагает наличие общего секретного ключа и заключается в передаче сообщения в виде *(x, y),* где$y = h_k(x)$: $A \rightarrow B : (x, y)$.

Протокол аутентификации состоит в следующем: участникAдля передачи сообщения x вычисляет проверочное значение – код аутентификации сообщения $y = h_k(x)$, дописывает его к x иотправляет полученную пару (x, y) участнику B. Получив такоесообщение, участник B проверяет равенство $y = h_k(x)$: если оновыполнено, то принимает его; если – нет, то отвергает.

Основными требованиями к хеш-функциям,задаваемым ключом, являются:

- высокая сложность подбора сообщения с правильным значением свертки; это обеспечивает невозможность создания поддельных ложных сообщений при атаках типа «имитация»;

• высокая сложность подбора для заданного сообщения с известным значением свертки другого сообщения с правильнымзначением свертки; это обеспечивает невозможность модификации передаваемых сообщений при атаках «подмена».

Первое требование означает защищенность от атаки типа «имитация» (impersonation), т.е. от передачи сфабрикованныхсообщений в пустом канале в целях навязывания принимающейстороне ложных сообщений, второе – защищенность от атакитипа «подмена» (substitution) передаваемых сообщений.

Поскольку противник имеет возможность выбора $(x, y)\epsilon X \times Y$, его шансы на успех имитации сообщения выражаются такой величиной [4]:

$$P_{им} = max_{(x,y)\in X\times Y} P\big(K(x,y)\big),$$

где $K(x,y) = \{k\epsilon K | h_k(x) = y\}$, $P\big(K(x,y)\big) = \sum_{k\epsilon K\,(x,y)} P_K(k)$.

Вероятность успеха подмены сообщения будет вычисляться по следующей формуле:

$$P_{подм} = \max(P(K(\tilde{x},\tilde{y}) \mid K(x,y))), \qquad \forall x, \tilde{x}\epsilon X, x \neq \tilde{x}, \forall y, \tilde{y}\epsilon Y$$

Теорема [5]. Для любого кода аутентификации *(X, K, Y, h)* справедливы следующие утверждения:

1. $P_{им} \geq \frac{1}{|Y|}$, причем нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда для всех $(x, y) \in X \times Y$выполнено равенство $P\big(K(x,y)\big) = \frac{1}{|Y|}$.

2. $P_{подм} \geq \frac{1}{|Y|}$, причем нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда для$\forall x, \tilde{x}\epsilon X, x \neq \tilde{x}, \forall y, \tilde{y}\epsilon Y$выполнено равенство $P(K(x,y)|K(\tilde{x},\tilde{y})) = \frac{1}{|Y|}$.

3. $P_{им}$ и $P_{подм}$одновременно достигают нижней границы тогда и только тогда, когда для$\forall x, \tilde{x}\epsilon X, x \neq \tilde{x},\ \forall y, \tilde{y}\epsilon Y$выполнено равенство $P\big(K(x,y) \cap K(\tilde{x},\tilde{y})\big) = \frac{1}{|Y|^2}$.

Коды аутентификации со свойством $P_{им}$=$P_{подм} = \frac{1}{|Y|}$ называются оптимальными кодами аутентификации. Для построения таких кодов используются ортогональные таблицы.

Ортогональной таблицей ОА(*n, s*) порядка *n* и высоты *s* называется матрица с *s* строками и n^2 столбцами, элементы которой – числа *1,...n*, а каждая пара строк ортогональна.

Недостатком данной математической модели кода аутентификации является ограничения, накладываемые на мощности множеств *X* и *K*.

В работе [3] рассмотрена математическая модель кода аутентификации без этих ограничений, которая является аналогом математической модели шифров замены с ограниченным и неограниченным ключом, введенную А.Ю. Зубовым и позволяющую строить совершенные имитостойкие шифры.

Пусть *U, V* – конечные множества возможных кодвеличин и кодобозначений, *K* – конечное множество ключей, $h: K \times U \to V$ – ключевая хэш-функция. Процесс выработки кода аутентификации для сообщения $x = u_1 \ldots u_l$ на ключе $k_1 \ldots k_l$ заключается в замене каждой кодвеличины u_i на кодобозначение v_i в соответствии с ключом k_i, $i = 1,\ldots,l$. Опорным кодом кода аутентификации является совокупность $\Delta_H^0 = (U, K, V, h)$, для которой $V = \bigcup_{k\in K} h_k(U)$.

l-той степенью опорного кода Δ_H^0 является совокупность $\Delta_H^l = \big(U^l, K^l, V^l, h^{(l)}\big)$, где U^l, K^l, V^l – декартовы степени соответствующих множеств U, K, V; множество $h^{(l)}$ состоит

из отображений $h_{\bar{k}}: U^l \to V^l, \bar{k} \in K^l$, таких, что для любых $\bar{u} = u_1 \dots u_l \in U^l$, $\bar{k} = k_1 \dots k_l \in K^l$ выполнено равенство $h_{\bar{k}}(\bar{u}) = h_{k_1}(u_1) \dots h_{k_l}(u_l) = v_1 \dots v_l \in V^l$.

Кодом аутентификации с неограниченным ключомназывается семейство $\Delta_H = \left(\Delta_H^l, l \in N; \psi_c\right)$, где ψ_c – случайный генератор ключевого потока.

Код аутентификации с неограниченным ключом Δ_Hявляется оптимальным, если оптимальным является код Δ_H^l для любого $l \in N$.

Предположим, что для кода аутентификации Δ_H^l, $l \in N$, $P_{им}^l$ – вероятность успеха имитации, а $P_{подм}^l(s)$ – вероятность успеха подмены в сообщениировно s пар элементов вида $(u_i, v_i) \in U \times V$, где $v_i = h_{k_i}(u_i)$. Тогда, если кодаутентификации Δ_H является оптимальным, то

$$P_{им}^l = \frac{1}{|V|^l}, \qquad P_{подм}^l(s) = \frac{1}{|V|^s},$$

то есть $P_{им}^l \to 0$ при $l \to \infty$, $P_{подм}^l(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Из конструкции кода аутентификации Δ_H видно, что длина сообщения совпадает с длиной свёртки и с длиной ключевого потока. Эта конструкция предназначена для особо важных случаев, поэтому на общий размер можно закрыть глаза, как и в случае совершенных шифров. Стоит отметить, что размерность ортогональной таблицы, которая представляет хеш-функцию, не зависит от длины исходного сообщения, а строится лишь для опорного кода аутентификации Δ_H^0.

Таким образом, увеличивая битовую длину кодовеличин и кодообозначений, можно получить необходимую вероятность атак типа имитация и подмена.

В процессе изучения данной теории, был написан прототип на C++, который строит коды аутентификации для $l = 8$. В качестве генератора псевдослучайных чисел, здесь используется генератор, построенныйна основе ГОСТ Р 34.12-2015(Кузнечик) в режиме гаммирования. Тесты NIST для данного генератора представлены на рисунке 1.

```
-------------------------------------------------------------------------------
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES
-------------------------------------------------------------------------------
   generator is <num.txt>
-------------------------------------------------------------------------------
 C1  C2  C3  C4  C5  C6  C7  C8  C9 C10  P-VALUE  PROPORTION  STATISTICAL TEST
-------------------------------------------------------------------------------
  1   1   1   1   1   1   0   1   2   1  0.991468     10/10     Frequency
  3   0   2   0   2   1   1   0   0   1  0.350485      9/10     BlockFrequency
  1   0   1   0   2   1   2   2   0   1  0.739918     10/10     CumulativeSums
  1   2   0   2   0   0   4   0   0   1  0.066882     10/10     CumulativeSums
  2   1   0   0   0   1   3   0   3   0  0.122325     10/10     Runs
  1   0   1   0   4   2   1   1   0   0  0.122325     10/10     LongestRun
  0   1   1   2   0   4   0   2   0   0  0.066882     10/10     FFT
  1   0   1   3   0   0   2   0   1   2  0.350485     10/10     NonOverlappingTemplate
```

Рис. 1. Тесты NIST

Для n = q, где q – степень простого числа, существуют так называемые полные системы из (n−1) попарно ортогональных латинских квадратов. Способ их построения в 1938г. опубликовал Р.Боуз: достаточно рассмотреть многочлены $f_a(x,y) = ax+y$ над полем GF(q) при ненулевых a.

Ортогональная таблица строится выписыванием каждого латинского квадрата такого вида в столбец, что гарантирует её ортогональность. Для построения ортогональных таблиц реализована библиотека для построения конечных полей, вычислений внутри конечного поля.

Тесты прототипа на время представлены в таблице 1. Параметры компьютера, на котором производились тесты: процессор Intel(R) Core(TM) i5-3230MCPU 2.60 Гц, ОЗУ DDR3 8 Гб, ж.д. Hitachi HTS547564A9E384 — Sata 3GB/S, объём буферной памяти 8 Мб, внешняя скорость передачи данных 300 Мб/с, внутренняя скорость передачи данных 996 Мбит/с.

Таблица 1

Тест программы на время

Создание		**Проверка**	
Размер, Мб	**Время, с**	**Размер, Мб**	**Время, с**
4	0.223	4	0.185
40	2,117	40	2,05
700	36,92	700	36,82
4500	336,07	4500	325,12

В данной работе приведена конструкция кодов аутентификации с неограниченным ключом, которая позволяет устремить вероятности имитации и подмены передаваемых сообщений к нулю, что не представлялось возможным для классической модели. Также представлено описание программного продукта, который реализует данную модель кодов аутентификации.

Список литературы

1. Зубов А.Ю. Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры. М.: Гелиос АРВ, 2005. 192 с.
2. Рацеев С.М. Некоторые обобщения теории Шеннона о совершенных шифрах // Вестн. Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2015. № 1 (8). С. 11-127.
3. Рацеев С.М., Череватенко О. И. О кодах аутентификации на основе ортогональных таблиц // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 4(37). С. 178-186.
4. Рацеев С.М. Об оптимальных кодах аутентификации // Системы и средства информатики. 2013. №1(23). С. 53-57.
5. Черемушкин А. В. Криптографические протоколы. Основные свойства и уязвимости. М.: Академия, 2009. 272 с.

OPTIMAL CODES OF AUTHENTICATION WITH UNLIMITED KEY BASED ON ORTHOGONAL ARRAYS

Kotkov A.V.

Ulyanovsk State University

Abstract. In the paper the authentication codes which are resistant to imitation and substitution of messages have been considered together with optimal codes with unlimited key based on the orthogonal tables, and their constructions.The results of the work on a prototype program that builds these codes have been presented.

Keywords: authentication code, imitation messages, hash function.

УДК 62-52; 62-8

АНАЛИЗ СООБЩЕНИЙ ХАКЕРСКИХ ФОРУМОВ КАК ИНСТРУМЕНТ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НОВЫХ УГРОЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Полетаев В.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В работе рассмотрены системы обнаружения вредоносной деятельности в компьютерных сетях, которая может быть направлена на реализацию различных угроз информационной безопасности.

Ключевые слова: сетевые атаки, угрозы информационной безопасности, хакерские форумы.

В настоящее время глобальныеинформационные сети оказывают растущееевлияние на все новые и новые сферы нашей жизни. Отрасль информационных технологий относится к одной из наиболее динамично развивающихся, она находится в стадии глубокой интеграции с традиционными отраслями промышленности, экономики, транспорта, связи и др. Происходит стремительное развитие единого глобального информационно-телекоммуникационного пространства, формируются новые социальные группы, оказывается существенное влияние на традиционный образ жизни людей по всему миру. К сожалению, на сегодняшний день наблюдается стремительный рост не только новых технологий, обеспечивающих информационную потребность человечества, но и разнообразия компьютерных атак, осуществляемых с их помощью.

В данной статье речь идет о системах обнаружения вредоносной деятельности в компьютерных сетях, которая может быть направлена на реализацию различных угроз информационной безопасности.

Актуальность темы определяется несколькими группами факторов. С одной стороны, системы обнаружения атак на компьютерные сети уже давно применяются как одно из средств защиты информации. Разработчики систем защиты и консультантами в этой области активно применяются такие термины, как защита "по периметру", "стационарная" и "динамическая" защита, "проактивные" средства защиты информации.С другой стороны аналитические обзоры компаний, специализирующиеся в сфере Интернет-технологий и защиты информации, такие как Symantec, Trustware, KasperskyLabs показывают, что за последние несколько лет количество атак на различные информационные системы продолжает расти, а средства, которыми пользуются злоумышленники, превращаются из простых хакерских инструментов в серьезное информационное оружие.

Исследования в области обнаружения атак на компьютерные сети и системы ведутся за рубежом уже больше четверти века. Изучены признаки атак, разработаны и эксплуатируются методы и средства обнаружения попыток несанкционированного преодоления средств защиты информации, как межсетевых, так и локальных - на логическом и даже на физическом уровнях. На российском рынке широко представлены коммерческие системы обнаружения атак иностранных компаний (ISS RealSecure, Snort, Cisco и т.д.), которые,

однако, не содержат эффективных превентивных средств обнаружения атак и реагирования на них.

На сегодняшний день системы обнаружения атак представляют собой программные и аппаратно-программные решения, которые автоматизируют процесс сбора, хранения, анализа и контроля событий, протекающих в компьютерной системе или сети, а также самостоятельно анализируют эти события в поисках признаков нарушения информационной безопасности. Данные системы защиты могут сигнализировать о том, что в настоящий момент обнаружился определенный признак атаки. Кроме того, применяемые на сегодняшний день системы обнаружения сетевых атак решают, как правило, только одну частную задачу - защиту от внешнего нарушителя, пытающегося преодолеть используемые системы защиты информации извне локальной сети, оставляя нерешенной задачу защиты от реализации внутренних угроз.

Сетевые атаки имеют разную природу и могут проводиться на разных уровнях информационной системы. Как известно, атаки имеют не только количественные, но и качественные характеристические признаки. Атаки типа SQL-инъекций или межсайтовый скриптинг не имеют сигнатур, которые позволяли бы достаточно точным образом их обнаружить, однако часто порождают последовательность однотипных действий злоумышленника, которые в достаточном количестве можно трактовать как атаку.

Поскольку количество различных типов и способов организации несанкционированных проникновений в чужие компьютерные сети за последние несколько лет существенно увеличилось, системы обнаружения атак стали важным компонентом инфраструктуры безопасности большинства организаций. Этому способствует и значительное количество публикаций, и стремительное появление все более изощренных и сложных подходов и методов к обнаружению атак в информационных системах. Согласно существующимпубликациям, все системы обнаружения атак можно разделить на системы, ориентированные на поиск:

- аномалий взаимодействия контролируемых объектов;
- сигнатур всех узнаваемых атак;
- искажения эталонной профильной информации.

Значительное внимание уделяется решению вопросов формального описания и моделирования систем разграничения доступа, антивирусной защите, формированию защищенных операционных систем и защите информации от несанкционированного доступа.

Вместе с тем, в глобальной сети Интернет в настоящее время существует значительное количество дискуссионных информационных ресурсов (далее – форумов), посвященных вопросам информационной безопасности и механизмам получения несанкционированного доступа к компьютерной информации. Они различаются по тематикам обсуждаемых на них вопросов и категориям участвующих в них пользователей. В части из них преобладают участники, заинтересованные вобмене сведениями о защите информации, в других – интересующиеся способами совершения компьютерных атак. Наиболее популярными темами, обсуждаемыми в настоящее время на хакерских форумах, являются:

- программирование, направленное на реализацию угроз информационной безопасности;
- программное обеспечение, которое используется при организации компьютерных атак;

- мошенничество с использованием информационных технологий;
- противоправные действия с пластиковыми картами и обналичивание денежных средств, добытых преступным путем;
- созданием вредоносных компьютерных программ;
- защита информации;
- вопросы обеспечения анонимности при совершении противоправных действий с использованием информационных технологий.

Таким образом, анализ текстовых сообщений участников хакерских форумов, создаваемых при обсуждении новых механизмов реализации угроз информационной безопасности, может быть использован в качестве превентивной меры при обеспечении защиты компьютерной информации. Получая сведения об актуальных в настоящее время способах преодоления механизмов информационной безопасности, специалист по защите информации имеет возможность оценить степень угрозы для защищаемых им информационных ресурсов и предпринять меры по нейтрализации возможных уязвимостей.

При организации форумов, как правило, используются наиболее популярные программные платформы:

- Invision Power Board (IPB)
- vBulletin
- PunBB
- Simple Machines Forum (SMF)
- Vanilla
- XenForo
- phpBB

Перечисленные программные средства в своей реализации используют базы данных, отличающиеся по своей структуре. Вместе с тем, общая структура базы данных форумов, содержащая информацию о текстовых сообщениях, выглядит следующим образом (рис. 1):

При помощи стрелок на рисунке 1 обозначены взаимосвязи таблиц базы данных, реализованные применением первичных ключей. Представленная структура позволяет проводить семантический и статистический анализ текстовые сообщения хакерских форумов, учитывая их принадлежность к конкретному форуму, теме форума, количеству сообщений темы форума, автору, рейтингу автора, а также время создания.

Таким образом, учитывая существование компьютерных программ, обладающих функциональными возможностями по сбору сообщений пользователей форумов, представляется возможным реализовать программное средство, способное формировать поток текстовых сообщений различных хакерских форумов. В автоматическом режиме могут быть собраны сведения о том, на каком из хакерских форумов оставлено сообщение, его текст, дата и время создания, название темы и форума, а также псевдоним и рейтинг автора.

В дальнейшем, на основании семантического и статистического анализа потока создаваемых на различных хакерских форумах текстовых сообщений, возможно построение прогнозов относительно формирования новых угроз информационной безопасности и их классификация по типам угроз и степени опасности. Схема модулей описанного программного средства выглядит следующим образом (рис. 2).

Алгоритм работы программного средства выявления новых угроз информационной безопасности выглядит следующим образом (рис. 3).

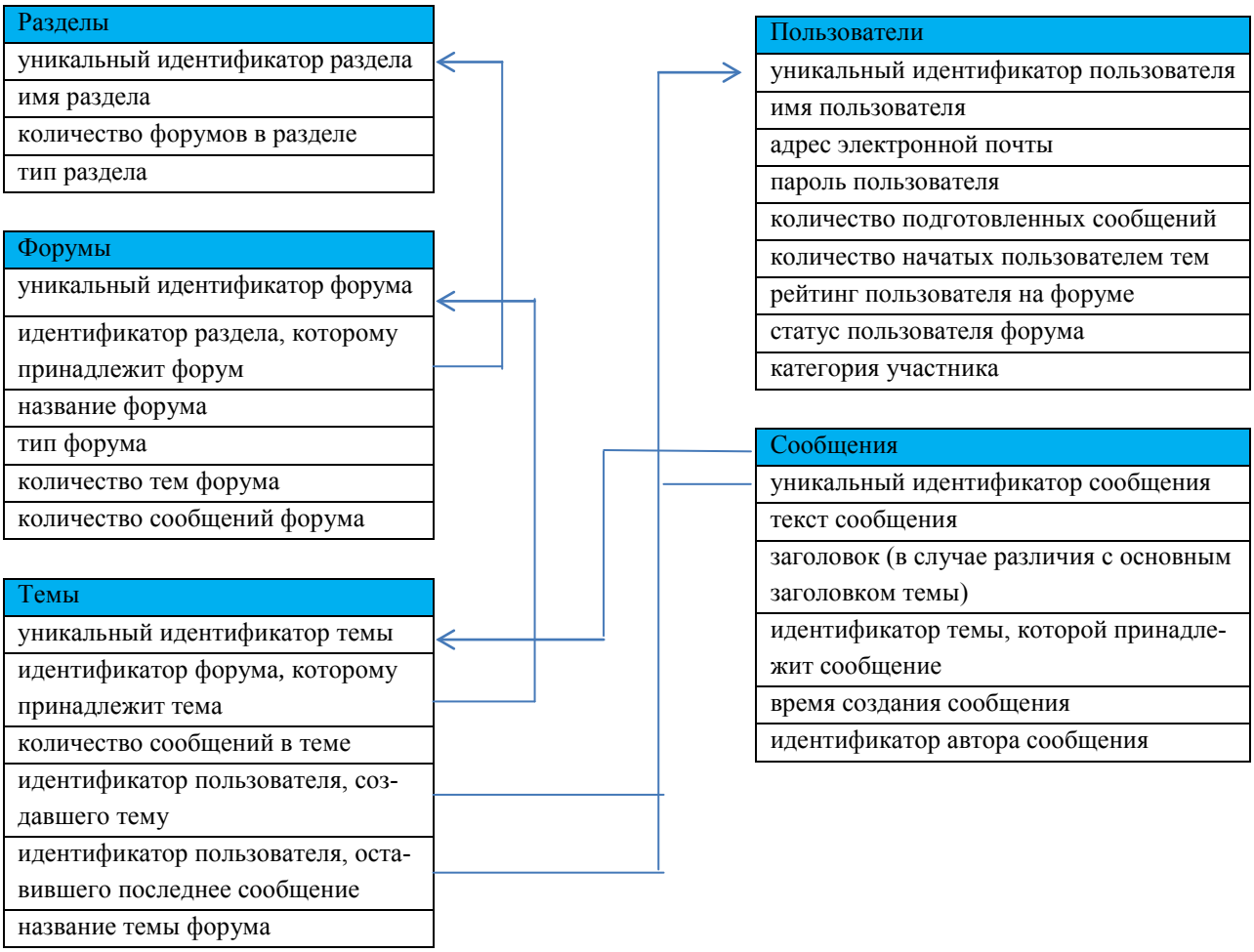


Рис. 1. Структура форумов

Рис. 2. Схема модулей программного средства выявления новых угроз информационной безопасности

Рис. 3. Алгоритм работы программного средства выявления новых угроз информационной безопасности

Список литературы

1. KasperskySecurityBulletin 2010. Электронныйресурс / KasperskyLab ZAO, 2015 Режим доступа http://www.securelist.com/.
2. Symantec Report on AttackKits and Malicious Websites-2015Электронныйресурс./Symantec. Режим доступа: http://scm.symantec.com.
3. TrustwareGlobalSecurityReport 2014. Электронныйресурс / Trustwave, 2010. Режим доступа: http://www.trustwave.com/GSR.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е, стер. М.: Высш. шк., 2000. 479 с.
5. Лукацкий А. Обнаружение атак. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 624 с.
6. Милославская Н.Г., Толстой А.И. Интрасети: доступ в Internet, защита: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
7. Программно-аппаратный комплекс SymantecNetworkSecurity 7100. Электронный ресурс / Symantec. Режим доступа: http://www. Symantec. com/region/ru/product/SNS71 xx.html.
8. Руководящий документ. Автоматизированные системы. Защита от несанкционированного доступа к информации. Классификация автоматизированных систем и требования по защите информации // Гостехкомиссия России. М., 1992.
9. Руководящий документ. Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Показатели защищенности от несанкционированного доступа к информации // Гостехкомиссия России. М., 1992.

ANALYSIS OF THE MESSAGES HACKER FORUMS AS A TOOL FOR PREDICTION OF NEW SECURITY THREATS

Poletayev V.S.

Ulyanovsk State University

Abstract. The paper discusses the detection of malicious activities on computer networks, which can be directed to the implementation of various information security threats.

Keywords: network attacks, threats to information security, hacking forums.

УДК 519.683

ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЛОЧНОГО ШИФРА AES

Шлыков Д.И.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Приводятся возможности новой библиотеки SDIAES для шифрования файлов шифром AES, которая обеспечивает самое быстрое шифрование среди уже имеющихся популярных криптографических библиотек. Приводятся графики временных замеров и рассматриваются основные причины такой высокой производительности новой библиотеки.
Ключевые слова: шифр, блочный шифр, шифр AES.

Введение

В современном мире проблема защиты информации является очень актуальной. Люди активно начали развивать методы криптографии, открывать что-то новое, создавать различные шифры, цифровые подписи, протоколы и многое другое. Все это находит применение, в первую очередь, в бизнесе, где проходят межбанковские расчеты по компьютерным сетям, по кредитным картам, переводы заработной платы, заказ билетов через интернет, покупки в интернет-магазинах, разговоры по мобильным телефонам и электронная почта. Все эти операции так или иначе обрабатывают личную информацию (или очень секретную информацию – гос. тайна) и она не должна попасть в руки злоумышленника.

Поэтому были разработаны различные шифры, в том числе и AES. Advanced Encryption Standard (AES) – новый криптографический стандарт, который стал преемником DES в 2000 году.

В мире существует много популярных реализаций данного шифра. Например, его поддерживают такие библиотеки, как OpenSSL, Crypto++, .NET и другие. В рамках данной работы была написана новая реализация – SDIAES, и далее в статье речь пойдет именно о ней.

Шифр AES исследовался во многих работах [1-4]. В данной работе будут исследованы скоростные характеристики данного шифра. Для примера производительности различных библиотек ниже будут приведены графики суммарных временных замеров, то есть складывалось время шифрования и расшифрования файла для каждого размера файла.

Как видно из рисунков, реализация SDIAES очень быстра (почти в два раза), по сравнению с другими очень популярными библиотеками. Сами замеры производились на одном и том же компьютере, с использованием процессора с аппаратной поддержкой шифра AES. Но возникает вопрос почему? За счет чего такая производительность? На эти вопросы в статье поэтапно даются ответы.

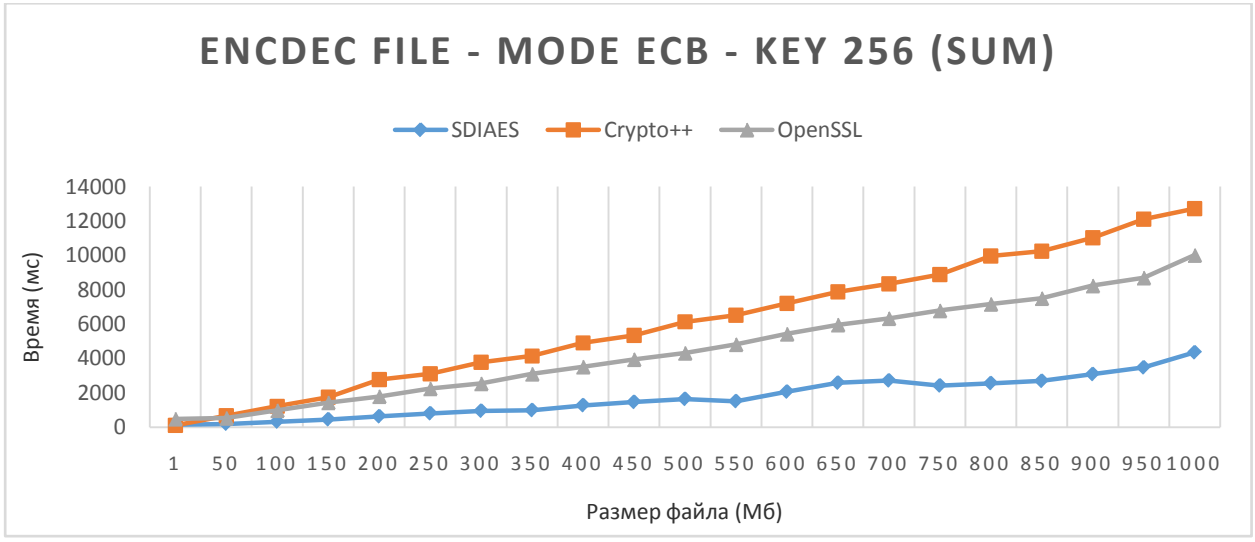


Рис. 1. Режим ECB на ключе 256 бит

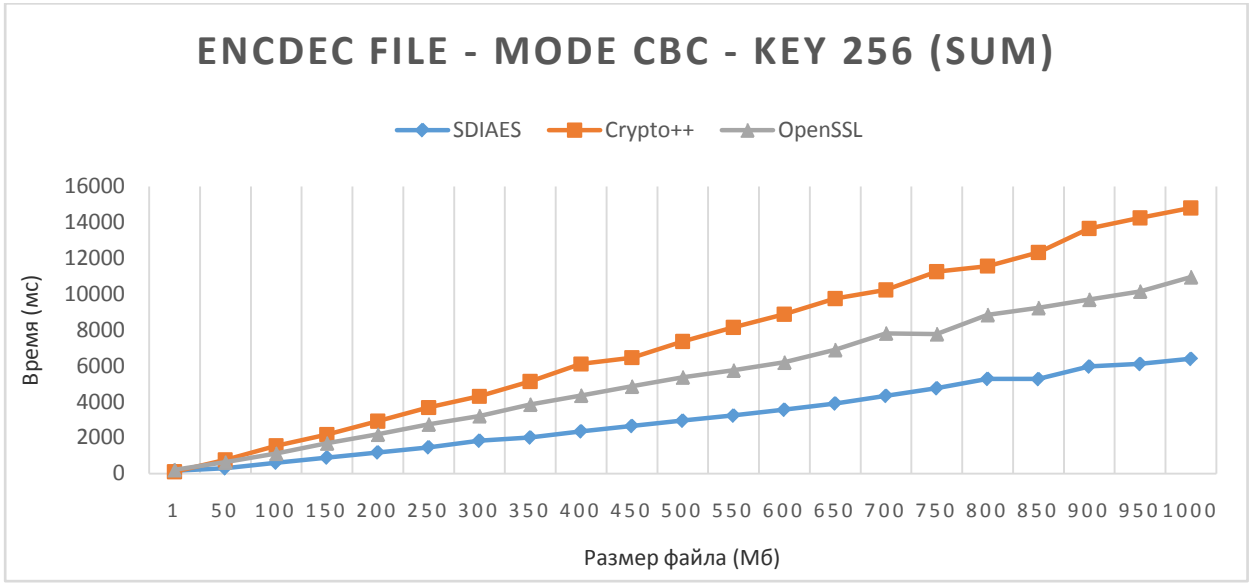


Рис. 2. Режим CBC на ключе 256 бит

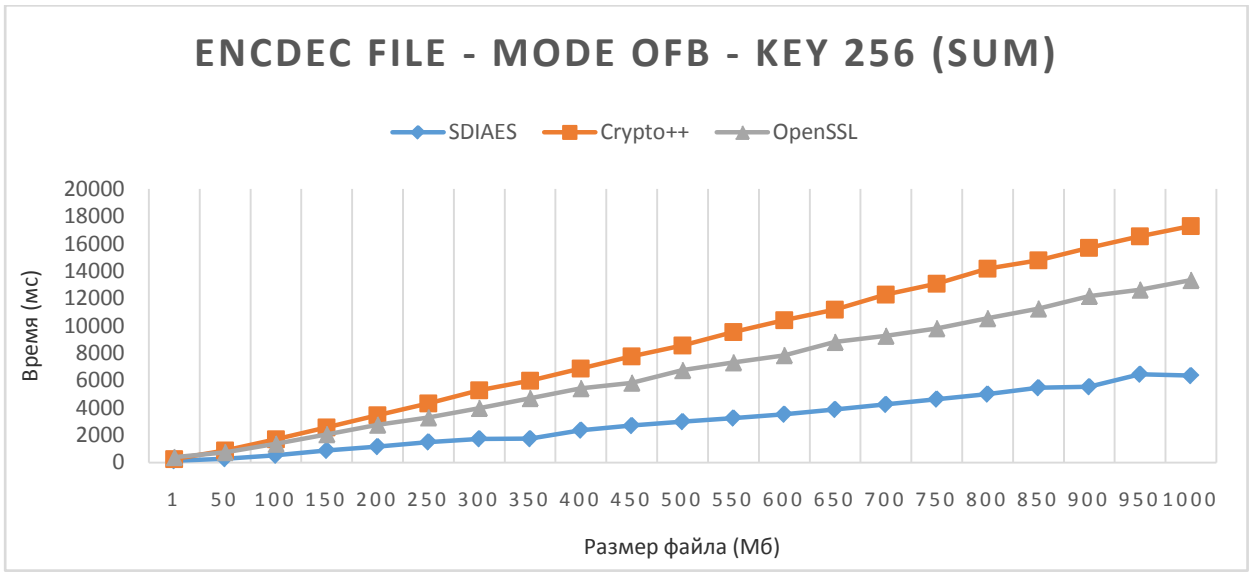
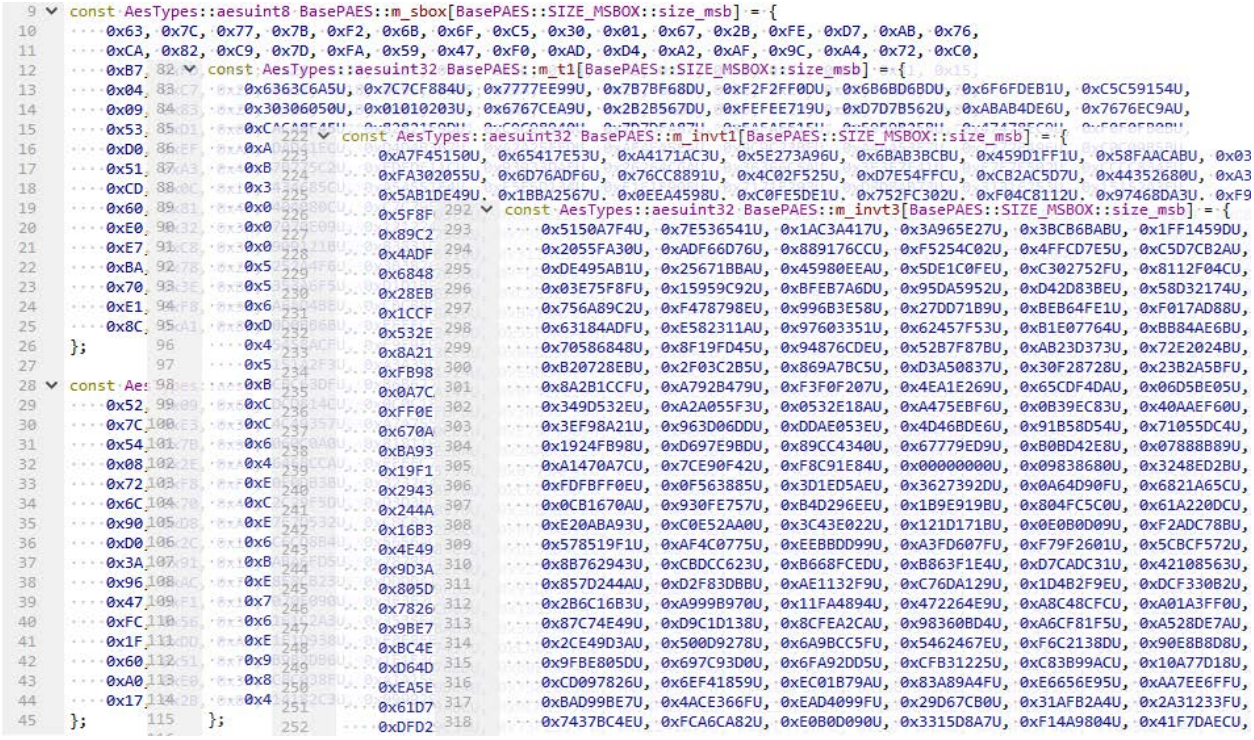


Рис. 3. Режим OFB на ключе 256 бит

1. Табличные реализации

Шифр AES, в силу своего математического описания, очень удобно раскладывается в готовые таблицы для расчётов. Некоторые этапы шифрования можно заранее просчитать и вынести в отдельные таблицы, причем они не будут зависит от входных данных. Далее они уже используются в ходе самого шифрования или расшифрования и корректны для любой последовательности входных данных. Это помогает сэкономить процессорное время и увеличить общую пропускную способность именно программных реализаций.



```
const AesTypes::aesuint8 BasePAES::m_sbox[BasePAES::SIZE_MSBOX::size_msb] = {
    0x63, 0x7C, 0x77, 0x7B, 0xF2, 0x6B, 0x6F, 0xC5, 0x30, 0x01, 0x67, 0x2B, 0xFE, 0xD7, 0xAB, 0x76,
    0xCA, 0x82, 0xC9, 0x7D, 0xFA, 0x59, 0x47, 0xF0, 0xAD, 0xD4, 0xA2, 0xAF, 0x9C, 0xA4, 0x72, 0xC0,
    0xB7, 0xFD, 0x93, 0x26, 0x36, 0x3F, 0xF7, 0xCC, 0x34, 0xA5, 0xE5, 0xF1, 0x71, 0xD8, 0x31, 0x15,
    0x04, 0xC7, 0x23, 0xC3, 0x18, 0x96, 0x05, 0x9A, 0x07, 0x12, 0x80, 0xE2, 0xEB, 0x27, 0xB2, 0x75,
    0x09, 0x83, 0x2C, 0x1A, 0x1B, 0x6E, 0x5A, 0xA0, 0x52, 0x3B, 0xD6, 0xB3, 0x29, 0xE3, 0x2F, 0x84,
    0x53, 0xD1, 0x00, 0xED, 0x20, 0xFC, 0xB1, 0x5B, 0x6A, 0xCB, 0xBE, 0x39, 0x4A, 0x4C, 0x58, 0xCF,
    0xD0, 0xEF, 0xAA, 0xFB, 0x43, 0x4D, 0x33, 0x85, 0x45, 0xF9, 0x02, 0x7F, 0x50, 0x3C, 0x9F, 0xA8,
    0x51, 0xA3, 0x40, 0x8F, 0x92, 0x9D, 0x38, 0xF5, 0xBC, 0xB6, 0xDA, 0x21, 0x10, 0xFF, 0xF3, 0xD2,
    0xCD, 0x0C, 0x13, 0xEC, 0x5F, 0x97, 0x44, 0x17, 0xC4, 0xA7, 0x7E, 0x3D, 0x64, 0x5D, 0x19, 0x73,
    0x60, 0x81, 0x4F, 0xDC, 0x22, 0x2A, 0x90, 0x88, 0x46, 0xEE, 0xB8, 0x14, 0xDE, 0x5E, 0x0B, 0xDB,
    0xE0, 0x32, 0x3A, 0x0A, 0x49, 0x06, 0x24, 0x5C, 0xC2, 0xD3, 0xAC, 0x62, 0x91, 0x95, 0xE4, 0x79,
    0xE7, 0xC8, 0x37, 0x6D, 0x8D, 0xD5, 0x4E, 0xA9, 0x6C, 0x56, 0xF4, 0xEA, 0x65, 0x7A, 0xAE, 0x08,
    0xBA, 0x78, 0x25, 0x2E, 0x1C, 0xA6, 0xB4, 0xC6, 0xE8, 0xDD, 0x74, 0x1F, 0x4B, 0xBD, 0x8B, 0x8A,
    0x70, 0x3E, 0xB5, 0x66, 0x48, 0x03, 0xF6, 0x0E, 0x61, 0x35, 0x57, 0xB9, 0x86, 0xC1, 0x1D, 0x9E,
    0xE1, 0xF8, 0x98, 0x11, 0x69, 0xD9, 0x8E, 0x94, 0x9B, 0x1E, 0x87, 0xE9, 0xCE, 0x55, 0x28, 0xDF,
    0x8C, 0xA1, 0x89, 0x0D, 0xBF, 0xE6, 0x42, 0x68, 0x41, 0x99, 0x2D, 0x0F, 0xB0, 0x54, 0xBB, 0x16
};

const AesTypes::aesuint32 BasePAES::m_t1[BasePAES::SIZE_MSBOX::size_msb] = {
    0x6363C6A5U, 0x7C7CF884U, 0x7777EE99U, 0x7B7BF68DU, 0xF2F2FF0DU, 0x6B6BD6BDU, 0x6F6FDEB1U, 0xC5C59154U,
    0x30306050U, 0x01010203U, 0x6767CEA9U, 0x2B2B7D56U, 0xFEFEE719U, 0xD7D7B562U, 0xABAB4DE6U, 0x7676EC9AU,
    0xCACA8F45U, 0x8282C9DBU, 0xC9C90E40U, 0x7D7DFA87U, 0xFAFA3515U, 0x5959EBB2U, 0x4747EC9CU, 0xF0F00BEBU,
    0xADAD67C0U, 0xD4D4FD7BU, 0xA2A2EA32U, 0xAFAF6519U, 0x9C9CBF23U, 0xA4A4F753U, 0x727296E4U, 0xC0C05B9BU,
    0xB7B7C275U, 0xFDFD1CE1U, 0x9393AE3DU, 0x26266A4CU, 0x36365A6CU, 0x3F3F417EU, 0xF7F702F5U, 0xCCCC4F83U,
    0x34345C68U, 0xA5A5F451U, 0xE5E534D1U, 0xF1F108F9U, 0x717193E2U, 0xD8D873ABU, 0x31315362U, 0x15153F2AU,
    0x04040C08U, 0xC7C75295U, 0x23236546U, 0xC3C35E9DU, 0x18182830U, 0x9696A137U, 0x05050F0AU, 0x9A9AB52FU,
    0x0707090EU, 0x12123624U, 0x8080809BU, 0xE2E2DF3DU, 0xEBEBCD26U, 0x27274E69U, 0xB2B27FCDU, 0x7575EA9FU,
    0x09091B12U, 0x83839E1DU, 0x2C2C7458U, 0x1A1A2E34U, 0x1B1B2D36U, 0x6E6EB2DCU, 0x5A5AEEB4U, 0xA0A0FB5BU,
    0x5252F6A4U, 0x3B3B4D76U, 0xD6D661B7U, 0xB3B3CE7DU, 0x29297B52U, 0xE3E33EDDU, 0x2F2F715EU, 0x84849713U,
    0x5353F5A6U, 0xD1D168B9U, 0x00000000U, 0xEDED2CC1U, 0x20206040U, 0xFCFC1FE3U, 0xB1B1C879U, 0x5B5BEDB6U,
    0x6A6ABED4U, 0xCBCB468DU, 0xBEBED967U, 0x39394B72U, 0x4A4ADE94U, 0x4C4CD498U, 0x5858E8B0U, 0xCFCF4A85U,
    0xD0D06BBBU, 0xEFEF2AC5U, 0xAAAAE54FU, 0xFBFB16EDU, 0x4343C586U, 0x4D4DD79AU, 0x33335566U, 0x85859411U,
    0x4545CF8AU, 0xF9F910E9U, 0x02020604U, 0x7F7F81FEU, 0x5050F0A0U, 0x3C3C4478U, 0x9F9FBA25U, 0xA8A8E34BU,
    0x5151F3A2U, 0xA3A3FE5DU, 0x4040C080U, 0x8F8F8A05U, 0x9292AD3FU, 0x9D9DBC21U, 0x38384870U, 0xF5F504F1U,
    0xBCBCDF63U, 0xB6B6C177U, 0xDADA75AFU, 0x21216342U, 0x10103020U, 0xFFFF1AE5U, 0xF3F30EFDU, 0xD2D26DBFU,
    0xCDCD4C81U, 0x0C0C1418U, 0x13133526U, 0xECEC2FC3U, 0x5F5FE1BEU, 0x9797A235U, 0x4444CC88U, 0x1717392EU,
    0xC4C45793U, 0xA7A7F255U, 0x7E7E82FCU, 0x3D3D477AU, 0x6464ACC8U, 0x5D5DE7BAU, 0x19192B32U, 0x737395E6U,
    0x6060A0C0U, 0x81819819U, 0x4F4FD19EU, 0xDCDC7FA3U, 0x22226644U, 0x2A2A7E54U, 0x9090AB3BU, 0x8888830BU,
    0x4646CA8CU, 0xEEEE29C7U, 0xB8B8D36BU, 0x14143C28U, 0xDEDE79A7U, 0x5E5EE2BCU, 0x0B0B1D16U, 0xDBDB76ADU,
    0xE0E03BDBU, 0x32324864U, 0x3A3A4E74U, 0x0A0A1E14U, 0x4949DB92U, 0x06060A0CU, 0x24246C48U, 0x5C5CE4B8U,
    0xC2C25D9FU, 0xD3D36EBDU, 0xACAC6243U, 0x62629195U, 0x9595A43AU, 0xE4E479B1U, 0x797937E7U, 0xC8C8AE6DU,
    0x3737394EU, 0x6D6DB4D9U, 0x8D8D0356U, 0xD5D5FA44U, 0x4E4E9C1EU, 0xA9A9FB58U, 0x6C6CB0D8U, 0x5656E9B5U,
    0xF4F407E5U, 0xEAEA7A93U, 0x6565AF4CU, 0x7A7A8E6CU, 0xAEAE5478U, 0x0808080CU, 0xBABACD56U, 0x7878E8A5U,
    0x2525BA1FU, 0x2E2E7254U, 0x1C1C2438U, 0xA6A6F157U, 0xB4B4C673U, 0xC6C65197U, 0xE8E823CBU, 0xDDDD7CA1U,
    0x7474E89CU, 0x1F1F3E21U, 0x4B4BDD96U, 0xBDBD6161U, 0x8B8B0738U, 0x8A8A0F85U, 0x7070E090U, 0x3E3E4274U,
    0xB5B5C471U, 0x6666AACCU, 0x4848D890U, 0x03030506U, 0xF6F601F7U, 0x0E0E121CU, 0x6161A3C2U, 0x35355F6AU,
    0x5757F9AEU, 0xB9B9D069U, 0x86869117U, 0xC1C15899U, 0x1D1D273AU, 0x9E9EB927U, 0xE1E138D9U, 0xF8F813EBU,
    0x9898B32BU, 0x11113322U, 0x6969BBD2U, 0xD9D970A9U, 0x8E8E8907U, 0x9494A733U, 0x9B9BB62DU, 0x1E1E223CU,
    0x87879215U, 0xE9E920C9U, 0xCECE4987U, 0x5555FFAAU, 0x28287850U, 0xDFDF7AA5U, 0x8C8C8F03U, 0xA1A1F859U,
    0x89898009U, 0x0D0D171AU, 0xBFBFDA65U, 0xE6E631D7U, 0x4242C684U, 0x6868B8D0U, 0x4141C382U, 0x9999B029U,
    0x2D2D775AU, 0x0F0F111EU, 0xB0B0CB7BU, 0x5454FCA8U, 0xBBBBD66DU, 0x16163A2CU
};

const AesTypes::aesuint32 BasePAES::m_invt1[BasePAES::SIZE_MSBOX::size_msb] = {
    0xA7F45150U, 0x65417E53U, 0xA4171AC3U, 0x5E273A96U, 0x6BAB3BCBU, 0x459D1FF1U, 0x58FAACABU, 0x03
    0xFA302055U, 0x6D76ADF6U, 0x76CC8891U, 0x4C02F525U, 0xD7E54FFCU, 0xCB2AC5D7U, 0x44352680U, 0xA3
    0x5AB1DE49U, 0x1BBA2567U, 0x0EEA4598U, 0xC0FE5DE1U, 0x752FC302U, 0xF04C8112U, 0x97468DA3U, 0xF9
    0x5F8F03C6U, 0x4003BC42U, 0x1C6376D1U, 0x2D8A95A2U, 0x0F46E255U, 0xB891EB20U, 0xFC5FC729U, 0x3D
    0x89C276DCU, 0x263E4B86U, 0xC51E3750U, 0xBE6530DBU, 0x7DFC9303U, 0x48F52A0AU, 0x1FD7462EU, 0xBD
    0x4ADF6826U, 0xBF9BD165U, 0x9D7CC25AU, 0x59328A50U, 0x1577498BU, 0xEB6D3F64U, 0xC90A70B6U, 0x07
    0x6848D9ABU, 0xFDC21323U, 0x8F7CB403U, 0xCA491862U, 0x70633EC1U, 0xAE565299U, 0xE23DF4E7U, 0x8D
    0x28EB1775U, 0x44C3AE84U, 0xA1684260U, 0x8B43E1B3U, 0x2257025EU, 0xDA416A13U, 0xF76B1141U, 0x47
    0x1CCF2DDFU, 0x7614B5C5U, 0xDAC6B231U, 0x10749C12U, 0xB5926438U, 0xEC6C4209U, 0xCD03E2FCU, 0x6E
    0x532E0DF1U, 0x355C7A99U, 0xCB3F3327U, 0xFC0A8924U, 0xB1A8648EU, 0xF958BF3FU, 0x9219E9C6U, 0x74
    0x8A21219CU, 0x6487F949U, 0xEC78EA8EU, 0xCF1AC843U, 0xD2E6EC7AU, 0x6B43F106U, 0xE6A1ABAFU, 0x60
    0xFB9836A5U, 0x8A2859A3U, 0x33DCB962U, 0x7C22E8BCU, 0x3B1A1437U, 0x1E0DB6C8U, 0xB4320F59U, 0xDF
    0x0A7C5AC4U, 0x14771DE9U, 0x2CDF6458U, 0x35733F9DU, 0x96A05A4DU, 0x02B8DA1FU, 0x01C69AB8U, 0x8F
    0xFF0EC719U, 0x774CFDB5U, 0xC5A6D9E4U, 0x3790D880U, 0x06F2EC9EU, 0x05D1AA7CU, 0x12E8F7A8U, 0x31
    0x670A49A7U, 0x7D95384FU, 0x2FE2A102U, 0x9FCF0E59U, 0xA8DEB7BCU, 0x19FB8D2AU, 0x896137D7U, 0x23
    0xBA936A25U, 0xEA1C9144U, 0x1DABC0FEU, 0x8878CA2FU, 0xCBB9D47DU, 0x3E901468U, 0xB2C3C6D1U, 0x24
    0x19F1D4AEU, 0x3A7BDF2CU, 0x78AEF632U, 0x5BC11DDDU, 0x1FDB4E3AU, 0xC6D27A88U, 0x61A59F6CU, 0x2E
    0x2943A2CBU, 0x15F93157U, 0x4EDA2708U, 0xE8C6AD36U, 0xDB878632U, 0xB8C738E8U, 0x57E8C837U, 0xC7
    0x244A0DA2U, 0xC337DCC9U, 0x1A17853BU, 0x88A62ECFU, 0xC810F36AU, 0xDECD1C6EU, 0x75F7411FU, 0xA1
    0x16B34C8EU, 0x9A82465CU, 0xE4DAEC43U, 0x43BFC251U, 0x9F6CEFC8U, 0x62F8347DU, 0xD1A3CC96U, 0x39
    0x4E49B446U, 0x42431F61U, 0xA1E03CD2U, 0x4B7695F1U, 0x1A65DAC7U, 0xDD5634F9U, 0x5E1FB3E5U, 0xD4
    0x9D3A1846U, 0x0170C4A3U, 0xA3AFB034U, 0x0F3906A0U, 0x2A5E413EU, 0x0DB5E157U, 0xB6C919EAU, 0x14
    0x805D3BB5U, 0xF3ADA5E8U, 0xC05896F7U, 0x734ACCB1U, 0xAC2BF966U, 0x3A96751CU, 0x4A9FC0ADU, 0x22
    0x78262CE4U, 0x5A91A7BFU, 0x8EC6AD9DU, 0xA4371FBCU, 0x8BE75007U, 0x6DA8F01AU, 0xFDB78AC8U, 0xF0
    0x9BE74DA8U, 0x566DBFABU, 0x4B09231AU, 0xFE7E5A83U, 0x8679B369U, 0xD2E16755U, 0x49C981DFU, 0x8C
    0xBC4E6B11U, 0x08C81422U, 0x4EE2BD35U, 0xC2A61CF2U, 0x81CB7A76U, 0x52DFE83AU, 0x66CB703EU, 0xD4
    0xD64D2C31U, 0x8CED6324U, 0x421643FAU, 0x2895A8D1U, 0x6B74BB3DU, 0x92C25BA1U, 0x7848E226U, 0xAC
    0xEA5E9DEBU, 0x6584DB3AU, 0xF8B0A1EFU, 0xAB1FD2C6U, 0x4DB38F43U, 0xFA120756U, 0xE5B73C2EU, 0x96
    0x61D7A0C1U, 0x34F8F9B0U, 0x3DB38A52U, 0x357FD6BEU, 0x8772C74FU, 0x64EBDF41U, 0x5B29A1B1U, 0x21
    0xDFD2AD85U, 0x9058C75AU, 0x3F8659E2U, 0x6387B358U, 0xB96CDA07U, 0xD579F8AFU, 0x4691A516U, 0xDA
    0x7437BC4EU, 0xFCA6CA82U, 0xE0B0D090U, 0x3315D8A7U, 0xF14A9804U, 0x41F7DAECU,
```

Реализация SDIAES в своей программной реализации как раз и используют эти заранее просчитанные таблицы, что дает хороший прирост скорости. Ниже будет приведен пример скоростных замеров в оперативной памяти для конкретного компьютера.

Таблица 1

Характеристики используемого компьютера

Характеристики компьютера	
CPU	AMD FX-6200 (фиксированная частота работы – 4314 MHz, множитель 21.5)
RAM	Kingston HyperX 2 x 8 Gb Blue – 1866 MHz (Dual channel, North-Bridge Frequency – 2207.4 MHz)
Motherboard	ASUS SABERTOOTH 990FX R1.0
HDD / SSD	**HDD**: WD Red – WDC WD20EFRX
OS	Windows 10 Pro x64
GPU	AMD Radeon R9 270X, GDDR5, 2048 Mb (Speed GP – 1120 MHz, Speed Memory – 1400 MHz)

Таблица 2

Скоростные замеры процедур шифрования и расшифрования блоков данных

Тип памяти	Статическая		Динамическая	
Тип операции	**ENC** (Mb/s)	**DEC** (Mb/s)	**ENC** (Mb/s)	**DEC** (Mb/s)
128 бит	216.2	212.9	217.02	212.3
192 бит	183.0	179.1	183.6	178.7
256 бит	157.1	153.3	157.2	153.1

2. Индивидуальные алгоритмы

На сегодняшний день на практике широко используются следующие режимы шифрования данных:

- ECB (Electroniccodebook) - режим электронной кодовой книги или простой замены;
- CBC (Cipher block chaining) - режим сцепления блоков шифротекста;
- CFB (Cipher feed back) - режим обратной связи по шифротексту;
- OFB (Output feed back) - режим обратной связи по выходу.

SDIAES поддерживает все вышеперечисленные режимы для всех длин ключей (поддерживается как шифрование потоков данных в оперативной памяти, так и отдельных файлов). Для каждого режима проработан отдельный алгоритм шифрования и расшифрования, за счет чего достигается максимальная оптимизация всех этапов обработки данных. Хотя на вход могут подавать одни и те же данные (например, имена файлов, длины ключей, размеры буферов и т.д.), но в зависимости от режима (ECB, CBC, OFB или CFB) и той операции, которую мы хотим произвести (ENC – шифрование и DEC – расшифрование) будут вызывается совершенно различные функции, которые наилучшим образом заточены для выполнения конкретной задачи.

3. Асинхронный ввод и вывод

Здесь стоит вопрос как эффективно и по максимуму использовать время. Сама асинхронность по-настоящему эффективно себя проявляет на шифровании файлов. Обычно файлы хранятся где-то на твердотельных накопителях или на жестких дисках. Ее оттуда сначала необходимо считать, подгрузить в оперативную память. Операция это достаточно медленная, собственно, как и само шифрование данных программным путем в оперативной памяти. В среднем эта скорость около 150 Мб/с, что примерно равно средним скоростям работы современных жестких дисков. Здесь мы и применяем асинхронный ввод и вывод данных.

В алгоритмах SDIAES (при шифровании файлов) применяется два (или более) буфера для данных. Как только первый буфер будет заполнен данными он отправляетсяна шифрование. И пока шифруется первый буфер, во второй начинается подгрузка данных. Потом шифрование переключается на второй буфер данных, а первый записывается на носитель. В результате мы эффективно используем время. Носитель информации практически постоянно загружен на 100% считыванием и записыванием, поскольку процессор обрабатывает данные немного быстрее. Ниже приведена картинка, которая графически описывает этот процесс.

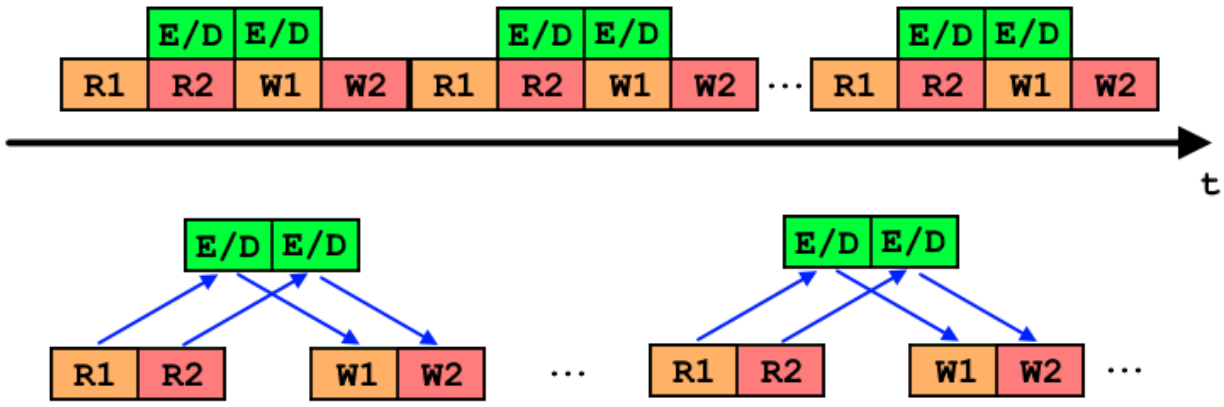


Рис. 4. Схема обработки данных во время шифрования или расшифрования
E/D – процедура шифрования или расшифрования считанных данных
R1 – процесс чтения в первый буфер с носителя
R2 – процесс чтения во второй буфер с носителя
W1 – процесс записи первого буфера на носитель
W2 – процесс записи второго буфера на носитель

4. Скажем нет циклам!

Много – не значит медленно. Есть мнение, что чем меньше программного кода, тем он быстрее работает. Казалось бы – да, но на практике это далеко не так. Не известно, как компиляторы весь ваш «ужатый» код развёртывают и оптимизируют. Поэтому, если Вам действительно важна производительность, то лучше не полениться и прописать все важные операции самому и очень детально.

Собственно, первое, что бросается в глаза – это циклы. На организацию циклов требуются дополнительные переменные, дополнительная проверка условий и ветвление. Поэтому в SDIAES широко применяется развертывание циклов везде, где это возможно и разумно. Для примера можно посмотреть на рисунки ниже, где видно, как разворачиваются циклы для раундов шифрования.

```
451     //1 - round
452     b0 = m_t0[a0 & 0xFF] ^ m_t1[(a1 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a2 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a3 >> 24)] ^ m_rkw[ 4];
453     b1 = m_t0[a1 & 0xFF] ^ m_t1[(a2 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a3 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a0 >> 24)] ^ m_rkw[ 5];
454     b2 = m_t0[a2 & 0xFF] ^ m_t1[(a3 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a0 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a1 >> 24)] ^ m_rkw[ 6];
455     b3 = m_t0[a3 & 0xFF] ^ m_t1[(a0 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a1 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a2 >> 24)] ^ m_rkw[ 7];
456     //2 - round
457     a0 = m_t0[b0 & 0xFF] ^ m_t1[(b1 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(b2 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(b3 >> 24)] ^ m_rkw[ 8];
458     a1 = m_t0[b1 & 0xFF] ^ m_t1[(b2 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(b3 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(b0 >> 24)] ^ m_rkw[ 9];
459     a2 = m_t0[b2 & 0xFF] ^ m_t1[(b3 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(b0 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(b1 >> 24)] ^ m_rkw[10];
460     a3 = m_t0[b3 & 0xFF] ^ m_t1[(b0 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(b1 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(b2 >> 24)] ^ m_rkw[11];
461     //3 - round
462     b0 = m_t0[a0 & 0xFF] ^ m_t1[(a1 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a2 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a3 >> 24)] ^ m_rkw[12];
463     b1 = m_t0[a1 & 0xFF] ^ m_t1[(a2 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a3 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a0 >> 24)] ^ m_rkw[13];
464     b2 = m_t0[a2 & 0xFF] ^ m_t1[(a3 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a0 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a1 >> 24)] ^ m_rkw[14];
465     b3 = m_t0[a3 & 0xFF] ^ m_t1[(a0 >> 8) & 0xFF] ^ m_t2[(a1 >> 16) & 0xFF] ^ m_t3[(a2 >> 24)] ^ m_rkw[15];
```

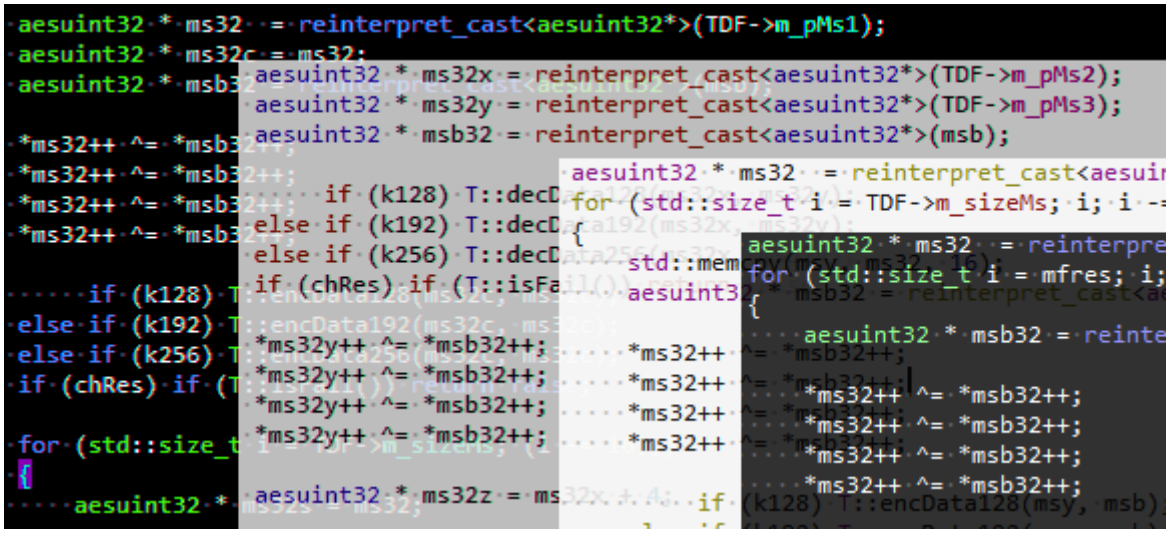
Рис. 5. Программное шифрование блока данных (128 бит).
Развертывание циклов для раундов (10, 12 и 14)

5. Указательная арифметика

В языке C++ есть указатели. Это, по сути, адрес оперативной памяти, к которому мы обращаемся. Они применяются для эффективных проходов по массивам данных, по

строкам и т.д. Эти указатели можно очень эффективно перемещать по данным, применяя незамысловатые префиксные и постфиксные операции сложения или вычитания в сочетании с другими операциями, вместо обычного обращения к массиву по индексу.

В SDIAES они повсеместно применяются. Особенно это касается функций шифрования и расшифрования файлов.



Зачастую эти операции применяются в тех же развернутых циклах. Здесь есть простор действий и для самого компилятора. Он может оптимизировать данный код под 64-разрядные операционные системы, что может значительно увеличить общую скорость выполнения.

6. Особенности библиотеки SDIAES

Основные особенности реализации SDIAES, которые делают ее такой быстрой, были перечислены выше. Но не было сказано, какой действительно функционал она предоставляет.

На самом деле эта библиотека состоит из трех базисных частей, и эти части разделяются на способы шифрования данных. Так какие же способы могут быть в принципе на компьютере? Можно выделить три основных, которые опираются на оборудование/железо:

- Программный способ – это обычный и повсеместный способ выполнения программы. Процессор выполняет различные команды и что-то там шифруется.
- Аппаратный – этот способ похож на первый. Он тоже от части программный, но современные процессоры (или специальные микросхемы) поддерживают алгоритмы AES на аппаратном уровне. То есть какие-то операции можно выполнить буквально за парочку процессорных тактов. В данном случае это шифрование раундов. В процессоры уже вшиты все необходимые данные для обработки раундов, нам нужно лишь вызвать одну ассемблерную команду. Это дает колоссальный прирост производительности по сравнению с полностью программным способом.
- Шифрование на видеокарте (GPU) – да-да, современные видеокарты обладают огромным потенциалом, о котором мало кто подозревает, играя в компьютерные игры. Она по сути тоже обрабатывает данные программным способом, и у нее нет аппаратной

поддержки AES. Но она выигрывает за счет распараллеливания операций вычисления. Например, Вы шифруете данные в режиме ECB при помощи процессора. Вы можете распараллелить процесс шифрования. Но на сколько? Если у вас в процессоре 8 ядер, то будет 8 потоков. Быстрее в 8 раз. А в видеокарте может быть до 1280 (и более) таких независимых ядер. Прирост скорости в 1280 раз. Ощутимо.

Все три способа реализация SDIAES поддерживает для всех режимов и длин ключей. Можно написать программу, которая будет использовать данную библиотеку для эффективного шифрования потоков данных в оперативной памяти или больших файлов. Она будет запускаться и в автоматическом режиме определять какую реализацию использовать. Программная реализация идет всегда по умолчанию. Она, как правило, самая медленная. Но можно выполнит запрос: поддерживает ли сам процессор аппаратное шифрование, и если да, то использовать его (он более предпочтителен перед видеокартой). Если процессор не поддерживает, то можно узнать поддерживает ли драйвер Вашей видеокарты выполнение программ на ней. Если да, то можно использовать ее.

Заключение

В любом случае у программиста будет выбор, как наиболее эффективно использовать ресурсы и оборудование системы, чтобы затратить минимум времени на выполнение криптографических операций. И это как раз является ответом на вопрос «Почему?» реализация SDIAES такая быстрая. Данная реализация использует возможности языка C++ и возможности самой системы наиболее эффективным способом. И конечно же не малую роль играют сами компиляторы, на которых собирается программа. Чем они новее, тем лучше выполняются оптимизации кода.

Список литературы

1. Долгов В.И., Руженцев В.И. О методе выполнения оценки стойкости шифра Rijndael к дифференциальным атакам // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 1 (18).
2. Калинин Д.А., Козина Г.Л. Быстродействие шифров «Калина» и AES // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2013. № 1 (28).
3. Воронин Р.И. Алгебраический криптоанализ однораундового S-AeS // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2011. № 4.
4. Алексеев Д.М., Кутняк Н.А. Программная реализация алгоритма шифрования AES // Инновационная наука. 2016. № 4-3 (16).

HIGH SOFTWARE IMPLEMENTATION BLOCK CIPHER AES

Shlykov D.I.

Ulyanovsk State University

Abstract: The possibility of a new library SDIAES encryption cipher AES file, which provides the fastest encryption among existing popular cryptographic libraries. The schedule time measurements and are considered the main reasons for the high performance of the new library.

Keywords: cipher block cipher, AES cipher.

УДК 621.391

ОЦЕНКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРОГА РЕШАЮЩЕЙ СХЕМЫ РАДИОПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА, ОСНОВАННОГО НА «НАИВНОМ» БАЙЕСОВСКОМ ПОДХОДЕ

Украинцев Ю.Д., Козловский В.А., Гончаров А.В.

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В современных радиоприемных устройствах порог решающей схемы определяется на основе классического байесовского подхода, предполагающего, что статистические характеристики сигнала и помех (их смеси) подчиняются априорно известной нормальной плотности распределения вероятностей (ПРВ) мгновенных значений огибающей, наблюдаемой на его входе. Это не всегда соответствует реальной обстановке, требующей оценки не только параметров, но и самой ПРВ. Применение «наивного» метода Байеса, позволяющего восстановить ПРВ, связано с необходимостью обработки статистических данных, снимаемых с определенного элемента радиоприемного тракта. Статистическая обработка данных заведомо приводит к статистическим погрешностям в определении не только ПРВ, но и ее параметров (квантилей). В работе представлены результаты имитационного моделирования качества определения порога решающей схемы радиоприемника. Показано, что этот порог инвариантен не только к условиям распространения радиоволн, но и к помеховой обстановке. Приведена сравнительная оценка качества приема сигналов при отсутствии и наличии предлагаемого анализатора.

Ключевые слова: мгновенные значения огибающей сигнала, адаптивный порог решающей схемы приемника, мода сигнала, мода смеси сигнала с помехой, дисперсия порога решающей схемы, плотность распределения вероятностей (ПРВ), процедура Парзена.

Введение

В настоящее время на линиях беспроводной связи широко применяется алгоритм решающей схемы радиоприемного устройства, основанный на классическом Байесовском подходе. Этот подход предполагает, что плотность распределения мгновенных значений огибающей смеси радиоприемного устройства априорно известна. Она основана на основе статистики, полученной за предыдущие несколько лет. При этом предполагают, что эта ПРВ подчиняется нормальному закону распределения.

Исследования последних лет, связанных с бурным насыщением эфира радиоизлучениями различных диапазонов волн убедительно показывают, что эти ПРВ лишь в 30% сеансов связи подчиняются нормальному, в 60% - релеевскому и в 10% – логарифмически нормальному законам распределения [2, 3, 5]. Все это свидетельствует о необходимости

текущей оценки ПРВ, отражающей состояние реальной радиотрассы. Возможность восстановления текущей ПРВ дает основания для использования «наивного» метода Байеса для определения порога решающей схемы радиоприемного устройства. Однако применение этого метода требует оценки качества определения порога решающей схемы.

Постановка задачи

Для повышения помехоустойчивости на линиях современной тропосферной связи предлагается использовать адаптивно-непараметрический классификатор, основанный на текущем восстановлении плотности распределения (ПРВ) мгновенных значений огибающей принимаемого сигнала в каждой ветви разнесения.Алгоритм работы восстановления ПРВ основан на непараметрической оценке ПРВ Парзена-Розенблатта, анализ которого проведен в работах [7-11]. При этом в ходе сеанса связи определяются наиболее вероятные значения сигнала (мода) при отсутствии и наличии помех, устанавливается в соответствии с реальной обстановкой на линии связи порог решающей схемы, а затем на основе сдвига мод принимается решение о вероятности ошибочного приема. Для уточнения качества определения порога методом имитационного моделирования набиралась достаточная статистика (репрезентативная выборка) мод сигнала, мод смеси сигнала и помехи, а также порога решающей схемы. На основе этих выборок строились ПРВ сигнала, ПРВ смеси сигнала с помехой и порога решающей схемы, что позволило определить дисперсию (разброс) указанных параметров. В заключительной части работы приведен график вероятности ошибочной классификации помех при использовании классического байесовского подхода и подхода, основанного на «наивном» методе Байеса.

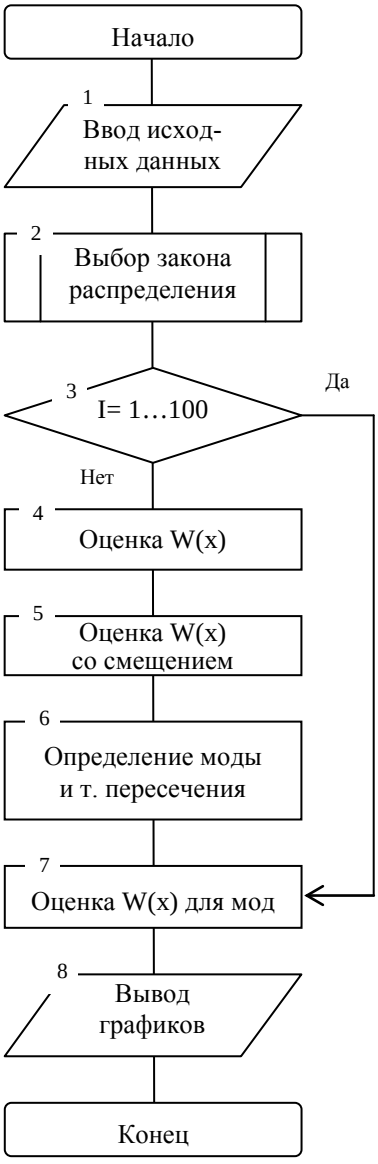


Рис. 1

Решение задачи

Оценка ПРВ основывается на рекуррентной парзеновской процедуре [10]:

$$W_N(X) = W_{N-1}(X) + \frac{1}{N}\left(W_{N-1}(X) + \frac{1}{h_N}K(y)\right)$$, где:

N-объем выборки достаточной статистики;

h_N – ширина аппроксимирующей функции;

K(y) – аппроксимирующая функция.

Обоснование параметров оценки ПРВ представлено в работах [7-9].

На основе этой процедуры определяются ПРВ сигнала и ПРВ смеси сигнала и помехи. На основе классического метода Байеса известно, что ПРВ смеси сигнала и помехи будет сдвинута вправо относительно ПРВ сигнала. Место пересечения этих двух плотностей и является порогом решающей схемы радиоприемного устройства, т.е.

$$W(U_c)=W(U_{c+п})$$

На основе полученных значений ПРВ принимаемого сигнала определяется значение ее моды в соответствии с выражением:

$$M(i,T) = \max_{(X)} W_N(X),$$

где i – временной интервал набора достаточной статистики; T – общее время, необходимое для набора статистики на заданном интервале.

На основе полученных значений ПРВ принимаемой смеси сигнала и помех определяется значение ее моды в соответствии с выражением:

,

где i – временной интервал набора достаточной статистики; T – общее время, необходимое для набора статистики на заданном интервале.

В принципе все параметры, необходимые для работы решающей схемы приемника определены на основе анализа текущей статистики по мгновенным значениям огибающей смеси сигнала и помех, наблюдаемой на входе радиоприемного устройства. При этом в дальнейшем вероятность ошибочного приема сигнала определяется, как и при классическом Байесовском подходе:

- если $U_c U_{пор}$ – принимается решение об отсутствии помех;
- если $U_c U_{пор}$ – принимается решение о наличии помех.

Учитывая, что порог решающей схемы определялся на основе обработки статистики, потребовалось уточнение точности его определения. Для этого набиралась статистика мод, как наиболее вероятного значения принимаемого сигнала, смеси сигнала и помехи, а также самого порога. На основе этих статистик с помощью представленной выше процедуры Парзена были восстановлены ПРВ мод сигнала, смеси сигнала и помехи, а также порога решающей схемы радиоприемного устройства. При этом обработке были подвергнуты два наиболее часто встречающихся закона: нормальный и релеевский.

Алгоритм имитационного моделирования представлен на рис. 1.

Результаты решения задачи

Результаты имитационного моделирования в предположении, что статистические характеристики сигнала и помехи подчиняются нормальному закону распределения, представлены на рис. 2.

Нормальный закон распределения

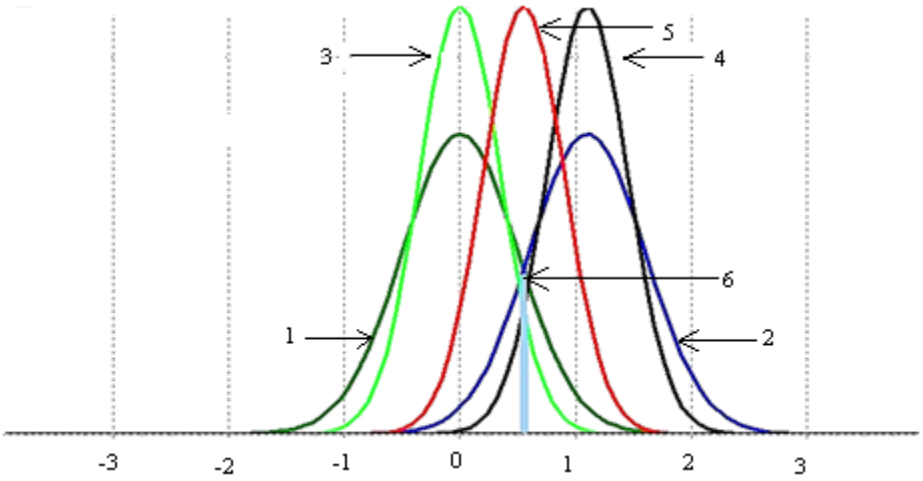


Рис. 2

По осям графика отложены: ордината плотность распределения вероятности, по оси абсцисс – интервал восстановления ПРВ. При этом 1-я кривая – это ПРВ сигнала,

2-я – ПРВ смеси сигнала и помехи. Точка их пересечения является порогом решающей схемы (6). Следующие три кривые на том же графике характеризуют ПРВ мод сигнала (3), ПРВ смеси сигнала с помехой (4) и ПРВ порога решающей схемы (5). Из графика видно, что порог решающей схемы приемника (6), определенный как на основе обработки статики мгновенных значений сигнала и смеси сигнала и помех размещается в той же точке, что и определенный на основе сдвига мод сигнала и смеси сигнала и помех. Это свидетельствует о высоком качестве определения порога решающей схемы приемника, полученного на основе текущей статистики, снимаемой на реальной трассе в любых климатических условиях.

Релеевский закон распределения.

Результаты имитационного моделирования в предположении, что статистические характеристики сигнала и помехи подчиняются релеевскому закону распределения, представлены на рис. 3.

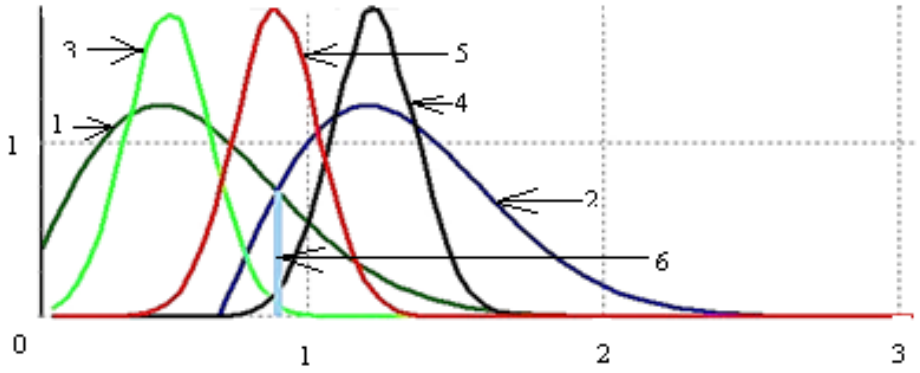


Рис. 3

Выводы по работе.

1. Современные быстродействующие микропроцессорные вычислительные системы позволяют обрабатывать объемы достаточной статистики (100 независимых отсчетов мгновенных значений огибающей принимаемого сигнала) в реальном масштабе времени.

2. В свою очередь, это позволяет, не увеличивая массо-габаритные показатели современных беспроводных систем связи, повысить их эффективность работы в условиях непараметрической неопределенности относительно сигналов и помех.

Список литературы

1. Васильев К.К., Глушков В.А., Дормидонтов А.В., Нестеренко А.Г. Теория электрической связи; под общей редакцией К.К. Васильева. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. 452 с.
2. Гусятинский И.А., Немировский А.С. и др. Дальняя тропосферная радиосвязь. М.: Связь, 1968. 246 с.
3. Немировский М.С., Шорин О.А., Бабин А.И., Сартаков А.Л. Беспроводные технологии от последней мили до последнего дюйма: учеб. пособие. М.: Эко-Тренз, 2010. 400 с.
4. Орлов А.И., Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 250 с.
5. Репин В.Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 1. С. 61-72.

6. Смирнов Н.В. Асимптотическаямощнотьнекторых непараметрических критериев: труды Всесоюзного совещания по математической статистике. Ереван, 1960.
7. Украинцев Ю.Д., Украинцев К.Ю., Сравнительный анализ парзеновских (непараметрических) процедур восстановления ПРВ // Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем: труды шестой научно-практической конференции (с участием СНГ). Ульяновск, УлГТУ, 2009. С. 233-236.
8. Украинцев К.Ю. Селиверстов М.В. Методика определения порога решающей схемы адаптивно-непараметрического классификатора помеховой ситуации // Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем: труды седьмой всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ), г. Ульяновск, 22-23 сентября 2011 г. Ульяновск, УлГТУ, 2011. 246 с.
9. Украинцев Ю.Д. Украинцев К.Ю. Обоснование параметров непараметрической процедуры восстановления априорно неопределенной плотности распределения вероятностей // Ученые записки ульяновского государственного университета. Сер. Математика и информационные технологии. Вып1 (3) / под ред. А.А. Смагина. Ульяновск: УлГУ, 2012. 286 с.
10. Parzen, On estimation of a probability density function and mode, Ann. Math. Statist.33, 3 (1962). С. 1065-1-76.
11. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estinatesof a density function, Ann. Math / Statist, 27,3 (1956). P. 832-837.

ASSESSMENT OF THE IDENTIFICATION THRESHOLD DECISION CIRCUIT RADIO RECEIVER, BASED ON THE "NAIVE" BAYESIAN APPROACH

Ukraintsev Yu.D., Kozlovskiy V.A., Goncharov A.V.

Ulyanovsk State University

Научное издание

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
Ульяновского государственного университета

Серия
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Выпуск 1(7)
2015

Под ред. доц. О. А. Перегудовой

Директор Издательского центра *Т. В. Филиппова*
Оформление обложки *Р. А. Водениной*
Подготовка оригинал-макета *Е. Е. Гусевой*

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 13.02.2017.
Формат 60×84/8. Гарнитура Times New Roman
Усл. п. л. 15,1. Уч.-изд. л. 12,9. Тираж 100 экз.
Заказ № 10 /

Оригинал-макет подготовлен в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017 г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

Отпечатано с оригинал-макета в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017 г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42