Ученые записки

Ульяновского государственного университета

Серия

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Ульяновской государственный университет

Ученые записки
Ульяновского государственного университета

Серия

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Выпуск 1(5)

Ульяновск - 1998

ББК 22.1+22.2

Печатается по решению Ученого Совета механико-математического факультета Ульяновского государственного университета

Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Выпуск 1(5) / Под ред акад. РАЕН, проф. А.С. Андреева. — Ульяновск: УлГУ, 1998. — 179 с.

ISBN-5-88866-048-5

В сборнике публикуются статьи преподавателей и аспирантов механико-математического факультета по фундаментальным проблемам математики и механики.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся проблемами алгебры и математической логики, математической кибернетики и теории вероятностей, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела.

ISBN-5-88866-048-5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Андреев А.С.

Рассмотрим движение механической системы с обобщёнными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, стеснённой линейными неголономными стационарными связями, под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, зависящих явно от времени. Возьмём в качестве уравнений движения уравнения в форме Воронца [1]:

$$\begin{gathered}\dot q = B(q)\dot q^1\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q^1}\right) - \frac{\partial}{\partial q^1}(\Theta - \Pi) - \frac{\partial}{\partial q^2}(\Theta - \Pi)B = Q_1 + G_1\dot q^1 \qquad (1)\\ q = (q^1, q^2),\ q^1 \in R^s,\ q^2 \in R^p\ (s + p = n),\end{gathered}$$

где $B = B(q)$ – матрица коэффициентов неголономных связей, $2\Theta = (\dot q^1)^T A(q)\dot q^1$ – приведённая с учётом связей кинетическая энергия системы (A – матрица $s \times s$), $\Pi = \Pi(t, q)$ – потенциальная энергия, $Q_1 = Q_1(t, q, \dot q^1)$ – равнодействующая обобщённых гироскопических и диссипативных сил, $G_1\dot q^1$ – члены неголономности, имеющие гироскопический характер.

Допустим, что $\frac{\partial\Pi}{\partial q} = 0$ при $q = 0$. Тогда система (1) имеет нулевое положение равновесия $\dot q = q = 0$. Задача об асимптотической устойчивости положения равновесия по $\dot q$ и q^1 решалась в [2–4] в предположениях, что обобщённые силы не зависят явно от времени, решения системы (1) из некоторой окрестности $\dot q = q = 0$ ограничены по q^2, точки множества $\{q^1 = 0, q^2 = \text{const}\}$ – положения равновесия (1). В [5] задача решалась в предположении, что $\Pi = \Pi(q)$ и влияние времени t и координат q^2 исчезают при $t \to +\infty$ и $q^2 \to \infty$.

Результаты работы [6] позволяют найти решение задачи при более общих предположениях.

Допустим, что $\Pi(t, 0) \equiv 0$, $\frac{\partial\Pi}{\partial t} \le 0$. Тогда для производной от $\Theta + \Pi$ имеем [2]:

$$\frac{d}{dt}(\Theta + \Pi) = \frac{\partial\Pi}{\partial t} + Q_1^T\dot q^1.$$

Уравнения (1), разрешённые относительно $\ddot{q}^1$, будут такими:

$$\begin{gathered}\dot{q}^2 = B(q)\dot{q}^1 \\ \ddot{q}^1 = \left\{(\dot{q}^1)^T C \dot{q}^1\right\} - A^{-1}\left(\tfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^1} + \tfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^2} B + Q_1 + G_1 \dot{q}^1\right),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\left\{(\dot{q}^1)^T C \dot{q}^1\right\}$ – набор n-квадратичных относительно $\dot{q}^1$ форм.

Предположим, что значения $\Pi(t,q)$, $B(q)$, $\{C(q)\}$, $A(q)$, $\frac{\partial \Pi}{\partial q}$, $Q_1(t,q,\dot{q}^1)$, $G_1(t,q,\dot{q}^1)$ ограничены и удовлетворяют условиям Липшица по переменным q^1 в области $\{\|\dot{q}^1\| \le H_1,\ \|q^2\| < +\infty,\ \|q^1\| \le H_1\}$. Тогда уравнения, предельные к (2), имеют такой же вид:

$$\begin{gathered}\dot{q}^2 = B^*\dot{q}^1 \\ \ddot{q}^1 = \left\{(\dot{q}^1)^T C^* \dot{q}^1\right\} - (A^{-1})^*\left((\tfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^1} + \tfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^2} B)^* + Q_1^* + G_1^* \dot{q}^1\right),\end{gathered} \tag{3}$$

где звёздочкой отмечено выражение, предельное к соответствующему выражению из (2). Например,

$$B^*(q) = B(q),\ Q_1^*(t,q,\dot{q}^1) = \lim_{n\to\infty} Q_1(t_n + t, q, \dot{q}^1)$$

или

$$B^*(t,q) = \lim_{n\to\infty} B(q^1, q^2(t_n + t)),$$

$$Q_1^*(t,q^1,\dot{q}) = \lim_{n\to\infty} Q_1(t_n + t, q^1, q^2(t_n + t), \dot{q})\ (t_n \to +\infty).$$

Из вида системы (2) следует, что её решения, лежащие на множестве $\{\dot{q}^1 = 0\}$, должны удовлетворять соотношениям

$$\dot{q}^2 = 0,\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^2} B\right)^* = 0.$$

Поэтому при условии

$$\left\|\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^2} B\right\|_s \ge \delta(\varepsilon) > 0. \tag{4}$$

для малых $\|q^1\| \in \{\|q^1\| \ge \varepsilon > 0\}$ система (3) не имеет решений, содержащихся в множестве $\{\|q^1\| > 0\} \cap \{\dot{q}^1 = 0\}$. Условие (4) означает отсутствие положений системы (1) вне множества $\{\dot{q}^1 = 0\}$ и сохранение этого свойства при $t_n \to +\infty$ и $\|q_n^2\| \to +\infty$.

На основании теорем работы [6] имеем следующие результаты о влиянии сил вязкого трения на устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Теорема 1. Предположим, что:

1) функция $\Pi = \Pi(t,q)$ определённо-положительна по q^1;
2) выполнено условие (4);
3) диссипативные силы таковы, что $Q_1^T \dot{q}^1 \le -h(\|\dot{q}^1\|) \le 0$ (h – функция типа Хана).

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ асимптотически устойчиво по $\dot{q}$ и q^1.

Теорема 2. Предположим, что:

1) функция $\Pi = \Pi(t,q)$ определённо-положительна по q^1; $\|\partial \Pi/\partial q\| \le l$ для $t \in R^+$ и малых $\|q\|$;
2) для всех $(t,q) \in \{\Pi(t,q) \ge \varepsilon > 0\}$ выполнено соотношение (4);
3) диссипативные силы таковы, что $Q_1^T \dot{q}^1 \le -h(\|\dot{q}^1\|) \le 0$.

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$ и q^1.

Теорема 3. Предположим, что:

1) при некотором $t = t_0 \ge 0$ в любой малой окрестности $q = 0$ существует значение q_0, для которого $\Pi(t_0, q_0) < 0$;
2) для всех $(t,q) \in \{\Pi(t,q) \le -\varepsilon < 0\}$ выполняется соотношение (4);
3) диссипативные силы таковы, что $Q_1^T \dot{q}^1 \le -h(\|\dot{q}^1\|) \le 0$.

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ неустойчиво.

Аналогичные результаты можно получить, когда $\Pi(t,q) = g(t)\Pi_0(t,q)$, $g(t) > 0$. Например, имеет место следующий результат:

Теорема 4. Предположим, что:

1) функция $\Pi_0(t,q)$ определённо-положительна по q^1, $\|\partial \Pi_0/\partial q\| \le l$ для $t \in R^+$ и малых $\|q\|$, $\partial \Pi_0/\partial t \le 0$ для $t \in R^+$ и малых $\|q^1\|$;
2) коэффициент $g(t)$ имеет оценки $0 < g_0 \le g(t) \le g_1$;
3) для всех $(t,q) \in \{\Pi(t,q) \ge \varepsilon > 0\}$ выполнено соотношение (4);

4) диссипативные силы таковы, что имеют место оценки:

$$Q_1^T \dot q^1 \le -(\dot q^1)^T H(t,q)\dot q^1,$$

$$(\dot q^1)^T H(t,q)\dot q^1 + \frac{\dot g(t)}{g(t)}\Theta(q,\dot q) \ge \|\dot q^1\|^2.$$

Тогда положение равновесия $q = \dot q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво по $\dot q$ и q^1.

Пример. Рассмотрим неоднородный шар, который катается и вертится на шероховатой горизонтальной плоскости, совершающей вертикальные колебания, при допущениях, рассмотренных в [1]. Центральный эллипсоид инерции шара является эллипсоидом вращения, центр масс шара не совпадает с геометрическим центром O_1 шара, а ось симметрии эллипсоида инерции проходит через геометрический центр шара. Конфигурация тела определяется пятью обобщёнными координатами: декартовыми координатами x, y точки K соприкосновения шара с плоскостью в системе координат $Oxyz$, у которой ось Oz направлена вертикально вверх; углами Резаля θ и ψ и углом поворота тела φ относительно оси динамической симметрии $O_1\zeta$, параллельной плоскости Oxz во всё время движения [1]. Согласно [1], находим уравнения неголономных связей:

$$\dot x - R\dot\psi + R\dot\varphi\sin\theta = 0,\ \dot y = R\dot\varphi\sin\psi\cos\theta + R\theta\cos\psi = 0$$

и функцию Лагранжа

$$L = \tfrac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + ml[\dot x(\dot\theta\sin\psi\sin\theta - \dot\psi\cos\psi\cos\theta) + \dot y\dot\theta\cos\theta] +$$
$$\tfrac12(A + ml^2)(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\cos^2\theta) + \tfrac12 C(\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta)^2 + m(g + \ddot z_1(t))\cos\psi\cos\theta,$$

где m – масса тела, l – расстояние между центром шара и его центром масс, C – осевой, A – экваториальный моменты инерции тела, $z_1(t)$ – закон вертикальных колебаний плоскости вдоль неподвижной оси $O_2z\|Oz$.

Примем, что диссипативные силы есть производные функции Релея

$$F = \frac12\left[\frac{h}{R^2}(\dot x^2 + \dot y^2) + h_1(\dot\varphi\cos\psi\cos\theta - \dot\theta\sin\psi)^2\right].$$

Из уравнений движения определяем, что шар имеет два различных семейства положений равновесия

$$\theta = 0,\ \psi = 0;\quad \theta = \pi,\ \psi = 0.$$

Применяя теорему 4, имеем следующий результат. При условиях

$$h(g - \ddot z_1(t)) - z_1^{(3)}(t)(mR^2 - 2mlR + A + ml^2) \ge h_0 = \text{const} > 0,$$

$$h_1(g - \ddot z_1(t)) - z_1^{(3)}(t)C \ge h_0,\quad \ddot z_1(t) \le g - \varepsilon, \varepsilon > 0$$

первое семейство положений равновесия равномерно асимптотически устойчиво по $\dot x$, $\dot y$, $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$, θ, ψ. Аналогичным образом можно найти, что при условиях

$$h(g + \ddot z_1(t)) + z_1^{(3)}(t)(mR^2 - 2mlR + A + ml^2) \ge h_0 > 0,$$

$$h_1(g + \ddot z_1(t)) + z_1^{(3)}(t)C > h_0,\quad \ddot z_1(t) > -g + \varepsilon, \varepsilon > 0$$

второе семейство положений равновесия неустойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-01067).

Литература

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

2. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т.35. Вып. 1. С.131–143.

3. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неавтономных систем// ПММ. 1967. Т.31. Вып.2. С.260–271.

4. *Risito C.* Sulla stabilita asimtotica puzziale // Ann.Math.pura ed appl. 1970. Ser.4. V.84. P.279–292.

5. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability by the method of limiting equations // Ann.Math.pura ed appl. 1985.

6. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1981. Т.55. Вып.4. С.539–547.

МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ В СИСТЕМАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Андреева О.П.

По ряду причин важность проблем рационального выбора в последние десятилетия значительно возросла. Во-первых, возрос динамизм ситуации и уменьшился промежуток времени, когда принятые ранее решения остаются правильными. Во-вторых, развитие науки и техники привело к появлению большого количества альтернативных вариантов решения. В-третьих, увеличилась взаимозависимость принимаемых решений и их последствий, в результате этого процесс принятия решения сильно усложнился, стали появляться новые средства анализа задач и оценки альтернативных вариантов. Традиционные способы стали малопригодными. Поэтому возникла задача разработки адекватной системы поддержки принятия решений (ПР). Спектр решаемых задач ПР во многом зависит от метода, поэтому был проведен сравнительный анализ методов ПР, который показал, что практически все методы обладают целым рядом недостатков, которые существенно затрудняют принятие адекватного решения:

- устанавливаются только качественные, но не количественные отношения между величинами;

- некоторые методы (например, равновесное взвешивание частных критериев) содержат смещенную оценку, т.к. выносится суждение относительно одного частного критерия, а затем независимо относительно другого. Поэтому результирующий многомерный вектор имеет смещение между компонентами, выражающееся в некоторых методах в двойном подсчете важности частного критерия;

- трудоемкость (например, в теории полезности построение функции полезности с одновременным учетом более чем двух аспектов является отдельной сложной задачей);

- ограничения, налагаемые на методы (в модели сравнительных суждений Терстона распределение суждений лица, принимающего решения (ЛПР), обязательно должно быть нормальным, что сужает круг решаемых задач);

- "навязывание" согласованности (это относится к методам психофизического шкалирования).

В результате проведенного сравнительного анализа методов было выяснено, что наиболее перспективным является метод анализа иерархий (МАИ), как наиболее полно удовлетворяющий всем требованиям, предъявляемым к системам такого рода.

Теория МАИ отражает то, что представляется естественным ходом человеческого мышления. Сталкиваясь с множеством контролируемых или неконтролируемых элементов, отражающих сложную ситуацию, разум объединяет их в группы в соответствии с распределением некоторых свойств между элементами. Метод позволяет повторять данный процесс таким образом, что группы рассматриваются в качестве элементов следующего уровня системы.

Задачи, к которым применим этот метод, обладают следующими характеристиками:

1. Уникальность, неповторяемость ситуации выбора.

2. Сложный для оценки характер рассматриваемых альтернатив.

3. Недостаточная определенность последствий принимаемых решений.

4. Наличие совокупности разнородных факторов, которые следует принять во внимание.

Центральным вопросом на языке иерархии является следующий: насколько сильно влияют отдельные факторы самого низкого уровня иерархии на вершину - общую цель? Неравномерность влияния по всем факторам приводит к необходимости определения интенсивности влияния или приоритетов факторов.

Определение приоритетов факторов низшего уровня относительно цели может быть сведено к последовательности задач определения приоритетов для каждого уровня, а каждая такая задача -

к последовательности попарных сравнений.

Иерархическая композиция является индуктивным обобщением следующей идеи. Заданы веса независимых элементов одного уровня. По отношению к каждому элементу заданному уровню формируется матрица собственных векторов-столбцов элементов уровня, находящегося непосредственно ниже заданного. Затем вектор весов элементов этого уровня используется для взвешивания соответствующих собственных векторов-столбцов. Умножая матрицу собственных векторов-столбцов на вектор-столбец весов, получаем составной вектор весов элементов нижнего уровня.

Таким образом, суть метода состоит в том, что после иерархического воспроизведения проблемы устанавливаются приоритеты критериев и оценивается каждая из альтернатив по всем критериям, а затем выбирается предпочтительная, соответствующая максимальному значению приоритета. Сравнение критериев и альтернатив производится с помощью следующей шкалы:

Значение	Определение
1	Равная важность
2	Слабое предпочтение
3	Сильное предпочтение
4	Очень сильное предпочтение
5	Абсолютное предпочтение

С помощью этой шкалы для каждого элемента всех уровней, кроме последнего, составляются матрицы из попарных сравнений элементов иерархии.

Вычисления производятся по следующим формулам:

1. Локальные приоритеты (степень влияния элементов заданного уровня иерархии на элементы предыдущего уровня), которыми являются собственные вектора составленных матриц, соответствующие их максимальным собственным значениям.

$\hat{x}_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}, x_i = \frac{\hat{x}_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$, - приближенное значение собственного вектора.

Весьма полезным побочным продуктом этой теории является вычисление согласованности, которая, в отличие от других методов, означает не только транзитивность, но и пропорциональность суждений ЛПР.

В отличие от большинства других методов, МАИ допускает несогласованность как неотъемлемую часть теории. Признавая, что человеческие мысли находятся в постоянном процессе изменения и эволюции, не следует настаивать на 100%-ной согласованности; так, суждения могут сразу же измениться, после того как проблема, казалось бы, решена. Но, с другой стороны, надежные решения не могут быть приняты без приемлемого уровня согласованности. Для численной оценки несогласованности автор предлагает вычислить максимальное собственное значение λ_{max} составленной матрицы попарных суждений, причем здесь так же, как и для собственных векторов, вычисляется приблизительное значение λ_{max}:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} (x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij})$$

Индекс согласованности: $ИС = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} 100\%$.

Для хорошей согласованности рекомендуется, чтобы ИС составлял не больше 10%.

2. Глобальные приоритеты синтезируются, начиная с верхнего уровня, по следующей формуле:

$$P_k = W_k P^{k-1},$$

причем $P_1 = (1, 1, ..., 1)^T$.

Решением является та альтернатива, которой соответствует максимальный глобальный приоритет.

Согласованность всей иерархии: $\frac{\sum_i ИС_i P_i}{\sum_i СС_i P_i}$, где CC_i – средняя согласованность матрицы $i \times i$.

Однако в отдельных задачах, где учитываются одновременно 7 и более аспектов, становится сложно держать под контролем согласованность суждений. Поэтому необходима модификация метода, предполагающая анализ ИС для того, чтобы выяснить, какой элемент иерархии вносит больший вклад в несогласованность суждений. Для этого был предложен следующий метод. Из полученных локальных приоритетов формируется идеально согласованная матрица:

$$B = (b_{ij}), \text{ где } b_{ij} = x_i/x_j.$$

Исследования математического аппарата метода показали, что чем ближе матрица A, составленная ЛПР, к идеально согласованной, тем ближе матрица (A - B) к нулевой. Следовательно, объект, дающий наибольшую несогласованность, будет соответствовать той строке матрицы (A - B), сумма элементов которой максимальна:

$$S = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - b_{ij}.$$

На сегодняшний день реализована система поддержки ПР (с описанной выше модификацией), исследован математический аппарат метода, реализован блок задач, решаемых с помощью данного метода.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ПЛАТЕЖА[1]

Арбеев К.Г.

1.Введение. Предположим, что на некотором рынке непрерывно во времени происходит торговля конечным числом d первичных активов. Пусть $S = (S_t, t \in [0,T])$, где $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$ - d-мерный стохастический процесс со строго положительными компонентами, описывающий изменение цен данных активов.

Будем считать, что $S_t^i, i = 1, \dots, d$ определяются уравнениями:

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_u^i \mu_u^i du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t S_u^i \sigma_u^{ij} dW_u^j. \quad (1)$$

Здесь $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}$ – d-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами W_t^i, $\mu_t^i = \mu^i(t,\omega)$, $\sigma_t^{ij} = \sigma^{ij}(t,\omega)$ удовлетворяют условиям:

$$E(\int_0^T |\mu^i(u,\omega)| du) < \infty, \quad (2)$$

$$\int_0^T (\sigma^{ij}(u,\omega))^2 du < \infty \quad \text{P-п.н.} \quad (3)$$

Рассмотрим гильбертово пространство H функций платежа ψ, таких, что $\psi = \psi(S), S = (S_t, t \in [0,T]), \psi \in \mathbf{L}^2[(\Omega, F, P)]$ со скалярным произведением

$$< \psi_1, \psi_2 >= E^P \psi_1 \psi_2, \quad \text{где } \psi_1, \psi_2 \in H. \quad (4)$$

Введем функционал предпочтения для систем функций платежа $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N), \psi_i \in H, i = 1, ..., N$:

$$J_\Psi = \sum_{i=1}^{N} v_{\psi_i}, \quad (5)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант N 98-02-02304)

где v_ψ - некоторые "веса", удовлетворяющие условию:

$$v_{c_1\psi_1+c_2\psi_2} = c_1 v_{\psi_1} + c_2 v_{\psi_2}, c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \psi_1, \psi_2 \in H. \qquad (6)$$

Модель (1)- (4) аналогична модели, рассмотренной в [3], если, пользуясь обозначениями и терминами из [3], положить процентную ставку $r(t) = 0$, т.е. $B(t) = 1$ и считать, что функции платежа зависят от значений процесса $S_t, t \in [0, T]$. Поэтому все результаты [3] остаются справедливыми для модели (1) - (4). Дополнение (1)- (4) понятиями "весов" и "функционала предпочтения" позволяет рассматривать более широкий класс задач, имеющих практическое приложение в области экономики.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Пусть $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ - некоторая фиксированная система функций платежа, $\psi_i \neq 0, i = 1, ..., N$. Поставим задачу найти ортонормированную в смысле скалярного произведения $< .,. >$ систему функций платежа $\bar{\bar{\Psi}}$, такую, что

$$J_{\bar{\bar{\Psi}}} = \max_{\bar{\bar{\Psi}}} J_{\bar{\bar{\Psi}}}, \qquad (7)$$

где $\bar{\bar{\Psi}}$ - некоторая ортонормированная система, полученная на основе заданной системы Ψ.

Алгоритм нахождения решения (7) приводится в п. 2. Данная задача является промежуточным шагом при отыскании оптимальной бесконечной ортонормированной системы функций платежа. Задача отыскания базиса имеет важное значение, поскольку при известном базисе произвольную функцию платежа ψ, как элемент гильбертова пространства, можно выразить через компоненты базиса. Следовательно, решается задача оценивания произвольной функции платежа - для этого достаточно оценить компоненты базиса. В [3] приведен алгоритм отыскания ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве функций платежа ψ, зависящих от конечного числа активов, для дискретных процессов. В п. 3 приводится алгоритм отыскания ортонормированного базиса для непрерывных процессов.

Полученный базис также является оптимальным в смысле бесконечного функционала предпочтения, аналогичного (5). Следует отметить, что, в отличие от [3], в алгоритмах отыскания оптимальных ортонормированных систем конкретный вид скалярного произведения $< .,. >$ не играет роли. Поэтому вместо (4) можно использовать другие виды скалярных произведений, соответствующие рассматриваемой экономической модели.

2. Алгоритм нахождения конечной оптимальной ортонормированной системы функций платежа. Прежде, чем перейти к решению данной задачи, получим произвольную ортогональную систему на основе системы Ψ, применив к функциям платежа $\psi_1, \ldots, \psi_N$ известную процедуру ортогонализации векторов.

Полагаем

$$\bar{\psi}_1 = \psi_1. \qquad (8)$$

Компоненты $\bar{\psi}_i, i = 2, \ldots, N$ определяем из выражений

$$\bar{\psi}_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\bar{\psi}_j + \psi_i, \qquad (9)$$

где c_{ij} выбираем из условия $< \bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j >= 0, j = 1, \ldots, i-1$:

$$c_{ij} = -\frac{< \psi_i, \bar{\psi}_j >}{< \bar{\psi}_j, \bar{\psi}_j >}, j = 1, \ldots, i-1. \qquad (10)$$

Теорема. *Пусть $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ - некоторая фиксированная система функций платежа, $\psi_i \neq 0, i = 1, ..., N$, J_Ψ - соответствующий функционал предпочтения:*

$$J_\Psi = \sum_{i=1}^{N} v_{\psi_i}.$$

Тогда существует ортонормированная в смысле скалярного произведения $< .,. >$ система функций платежа $\bar{\bar{\Psi}}$, такая, что

$$J_{\bar{\bar{\Psi}}} = \max_{\bar{\bar{\Psi}}} J_{\bar{\bar{\Psi}}},$$

где $\bar{\bar{\Psi}}$ - некоторая ортонормированная система, полученная на основе заданной системы Ψ.

Доказательство. Пусть $\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_N)$ - ортогональная система, полученная из Ψ с помощью алгоритма (8) - (10). Тогда очевидно, что $\bar{\bar{\Psi}} = (\bar{\bar{\psi}}_1, \ldots, \bar{\bar{\psi}}_N)$, где

$$\bar{\bar{\psi}}_i = \frac{\bar{\psi}_i}{\sqrt{<\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i>}}, i = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

будет ортонормированной системой. Тогда из (8) - (10), (11) и по определению весов имеем:

$$J_{\bar{\bar{\Psi}}} = \sum_{i=1}^{N} v_{\bar{\bar{\psi}}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{<\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i>}} v_{\bar{\psi}_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{<\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i>}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} v_{\bar{\psi}_j} + v_{\psi_i} \right).$$

Отсюда

$$J_{\bar{\bar{\Psi}}} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{\sqrt{<\bar{\psi}_j, \bar{\psi}_j>}} v_{\psi_j} + \left(\sum_{i=j+1}^{N} \frac{c_{ij}}{\sqrt{<\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i>}} \right) v_{\bar{\psi}_j} \right]. \tag{12}$$

Исходя из (12), предлагается следующий алгоритм нахождения оптимальной ортонормированной системы.

Оптимизируем $\frac{1}{\sqrt{<\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1>}} v_{\psi_1} + \left(\sum_{i=2}^{N} \frac{c_{i1}}{\sqrt{<\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i>}} \right) v_{\bar{\psi}_1}$.

Обозначим:

$$\Psi^{(k_1)} = (\psi_{k_1}, \psi_2, \ldots, \psi_1, \ldots, \psi_N), k_1 \in \{1, \ldots, N\}, \tag{13}$$

$$l_1 = \arg \max_{k_1 \in \{1, \ldots, N\}} \left\{ \frac{v_{\psi_1^{(k_1)}}}{\sqrt{<\bar{\psi}_1^{(k_1)}, \bar{\psi}_1^{(k_1)}>}} + \sum_{i=2}^{N} \frac{c_{i1}^{(k_1)}}{\sqrt{<\bar{\psi}_i^{(k_1)}, \bar{\psi}_i^{(k_1)}>}} v_{\bar{\psi}_1^{(k_1)}} \right\}, \tag{14}$$

где

$$\bar{\psi}_1^{(k_1)} = \psi_1^{(k_1)} \tag{15}$$

$$c_{i1}^{(k_1)} = -\frac{<\psi_i^{(k_1)}, \bar{\psi}_1^{(k_1)}>}{<\bar{\psi}_1^{(k_1)}, \bar{\psi}_1^{(k_1)}>}, i = 2, \ldots, N. \tag{16}$$

$$\bar{\psi}_i^{(k_1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^{(k_1)} \bar{\psi}_j^{(k_1)} + \psi_i^{(k_1)}, i = 2, \ldots, N. \tag{17}$$

$$c_{ij}^{(k_1)} = -\frac{<\psi_i^{(k_1)}, \bar{\psi}_j^{(k_1)}>}{<\bar{\psi}_j^{(k_1)}, \bar{\psi}_j^{(k_1)}>}, i = 2, \ldots, N, j = 1, \ldots, i-1. \tag{18}$$

Положим:

$$\tilde{\bar{\psi}}_1 = \frac{\psi_1^{(l_1)}}{\sqrt{<\bar{\psi}_1^{(l_1)}, \bar{\psi}_1^{(l_1)}>}}, \tilde{\psi}_1 = \psi_1^{(l_1)}. \tag{19}$$

Оптимизируем теперь $\frac{1}{\sqrt{<\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n>}} v_{\psi_n} + \left(\sum_{i=n+1}^{N} \frac{c_{in}}{\sqrt{<\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_i>}} \right) v_{\tilde{\psi}_n}$, для $n = 2, \ldots, N$.

Обозначим:

$$\Psi^{(k_n)} = (\psi_1^{(l_{n-1})}, \ldots, \psi_{k_n}^{(l_{n-1})}, \ldots, \psi_n^{(l_{n-1})}, \ldots, \psi_N^{(l_{n-1})}), k_n \in \{n, \ldots, N\}, \tag{20}$$

$$l_n = \arg \max_{k_n \in \{n, \ldots, N\}} \left\{ \frac{v_{\psi_n^{(k_n)}}}{\sqrt{<\bar{\psi}_n^{(k_n)}, \bar{\psi}_n^{(k_n)}>}} + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{c_{in}^{(k_n)} v_{\bar{\psi}_n^{(k_n)}}}{\sqrt{<\bar{\psi}_i^{(k_n)}, \bar{\psi}_i^{(k_n)}>}} \right\}, \tag{21}$$

где

$$\bar{\psi}_n^{(k_n)} = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj}^{(k_n)} \tilde{\psi}_j + \psi_n^{(k_n)}, \quad c_{in}^{(k_n)} = -\frac{<\psi_i^{(k_n)}, \bar{\psi}_n^{(k_n)}>}{<\bar{\psi}_n^{(k_n)}, \bar{\psi}_n^{(k_n)}>}, i = n+1, \ldots, N. \tag{22}$$

$$\bar{\psi}_i^{(k_n)} = \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}^{(k_n)} \tilde{\psi}_j + \sum_{j=n}^{i-1} c_{ij}^{(k_n)} \bar{\psi}_j^{(k_n)} + \psi_i^{(k_n)}, i = n+1, \ldots, N. \tag{23}$$

$$c_{ij}^{(k_n)} = -\frac{<\psi_i^{(k_n)}, \tilde{\psi}_j>}{<\tilde{\psi}_j, \tilde{\psi}_j>}, \quad j \le n-1, \quad c_{ij}^{(k_n)} = -\frac{<\psi_i^{(k_n)}, \bar{\psi}_j^{(k_n)}>}{<\psi_j^{(k_n)}, \psi_j^{(k_n)}>}, \quad j \ge n. \tag{24}$$

Положим:

$$\tilde{\psi}_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj}^{(l_n)} \tilde{\psi}_j + \psi_n^{(l_n)}, \tilde{\bar{\psi}}_n = \frac{\tilde{\psi}_n}{\sqrt{<\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n>}}.$$

Из (21) очевидно, что от выбора дальнейших компонент значение максимума в (21) не изменится. Таким образом, с помощью данного алгоритма получаем ортонормированную систему $\tilde{\bar{\Psi}} = (\tilde{\bar{\psi}}_1, \ldots, \tilde{\bar{\psi}}_N)$, построенную на основе заданной системы Ψ и являющуюся решением задачи (7).Теорема доказана.

3. Алгоритм нахождения оптимальной бесконечной ортонормированной системы функций платежа. Пусть $\Psi =$

$(\psi_1, \ldots, \psi_N)$ - некоторая фиксированная система функций платежа, $\psi_i \neq 0, i = 1, ..., N$. Построим на основе Ψ оптимальную конечную ортонормированную систему $\tilde{\tilde{\Psi}} = (\tilde{\tilde{\psi}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{\psi}}_N)$, пользуясь алгоритмом из п. 2. Укажем процедуру, позволяющую строить бесконечную ортонормированную систему функций платежа. Сформулируем для этого следующее утверждение.

Утверждение. *Существует функция платежа* $\tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}$, *такая, что* $\tilde{\tilde{\psi}}_{N+1} \neq 0$, $< \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}, \tilde{\tilde{\psi}}_i >= 0, i = 1, \ldots, N$, $< \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}, \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1} >= 1$ *и*

$$\tilde{\tilde{J}}_{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} v_{\tilde{\tilde{\psi}}_i} = \max_{\substack{\tilde{\tilde{\psi}}_{N+1} \neq 0, \quad < \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}, \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1} >= 1, \\ < \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}, \tilde{\tilde{\psi}}_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, N}} \left(\sum_{i=1}^{N} v_{\tilde{\tilde{\psi}}_i} + v_{\tilde{\tilde{\psi}}_{N+1}} \right).$$

Обозначим ${}^{(N+1)}\tilde{\tilde{\Psi}} = (\tilde{\tilde{\psi}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{\psi}}_{N+1})$. Применяя утверждение к ${}^{(N+1)}\tilde{\tilde{\Psi}}$, определяем ${}^{(N+2)}\tilde{\tilde{\Psi}} = (\tilde{\tilde{\psi}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{\psi}}_{N+2})$, ${}^{(N+3)}\tilde{\tilde{\Psi}}$ и т.д., то есть получаем ${}^{(\infty)}\tilde{\tilde{\Psi}}$ - оптимальную ортонормированную систему в H - гильбертовом пространстве функций платежа.

Литература

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов.- М:Наука, 1986.
2. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов.- М:Наука, 1974.
3. *Madan D.B., Milne F.* Contingent Claims Valued and Hedged by Pricing and Investing in a Basis - Math. Finance. Vol. 4. No 3. P. 223 - 245.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Безгласный С.П.

В работе рассмотрена задача о стабилизации нестационарных колебаний математического маятника, имеющего произвольно двигающуюся в плоскости колебаний точку подвеса. Решение задачи приведено на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных функций и предельных систем [1,2], позволяющего применить в данной задаче функции Ляпунова, имеющие знакопостоянные производные. Получено управление, обеспечивающее равномерную асимптотическую устойчивость нестационарных программных движений математического маятника с двигающейся точкой подвеса.

Пусть $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый от нижнего положения, и пусть точка O подвеса маятника может совершать произвольные движения в плоскости колебания маятника, которые описываются законами $\theta(t)$, $\nu(t)$ вдоль соответственно вертикальной и горизонтальной осей неподвижной системы координат в этой плоскости. Примем для простоты, что масса маятника $m = 1$ и длина подвеса маятника $l = 1/a$, $a > 0$.

Движения маятника можно описать уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{1}$$

где $q \in R^n$, $\dot{q} \in R^n$ — обобщенные координаты и скорости (вектор-столбцы). Кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{2}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^{\top} A(t, q)\dot{q} = \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

— квадратичная форма скоростей,

$$T_1 = B^\top(t,q)\dot q = (l\dot\nu(t)\cos\varphi + l\dot\theta(t)\sin\varphi)\dot\varphi$$

— линейная форма скоростей,

$$T_0 = \frac{1}{2}(\dot\nu^2(t) + \dot\theta^2(t))$$

— скалярная функция. На маятник действует потенциальная сила $Q = -\partial\Pi/\partial q$ гравитационного поля Земли с потенциальной энергией

$$\Pi = gl(1-\cos\varphi) + \theta(t).$$

Тогда уравнения движения маятника примут вид

$$\ddot\varphi + a\ddot\nu(t)\cos\varphi + a\ddot\theta(t)\sin\varphi + ag\sin\varphi = 0. \tag{3}$$

Предположим, что движения маятника должны происходить по заданной программе $\varphi = \varphi_0(t)$, которая является решением уравнения (3).

Поставим задачу о стабилизации программных движений $\varphi_0(t)$ математического маятника — определить вид стабилизирующего момента сил M, который обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость в целом нестационарных программных движений $\varphi_0(t)$ математического маятника.

Исследуем задачу о стабилизации таких программных движений на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных функций и предельных систем [1,2], позволяющего на основе теорем из [3] применить в данной задаче функцию Ляпунова, имеющую знакопостоянную производную.

Введем линейную замену переменных по правилу

$$x = \varphi - \varphi_0(t).$$

Тогда согласно результатам из [3] получим значения входящих в уравнение выражений через отклонения:

$$\bar T_2 = \frac{1}{2}l^2\dot x^2,$$

$$\bar T_1 = \dot\varphi_0(t)l^2\dot x + l(\dot\nu(t)\cos(x+\varphi_0(t)) + \dot\theta(t)\sin(x+\varphi_0(t)))\dot x;$$

$$\bar T_0 = \frac{1}{2}\dot\varphi_0^2(t)l^2 + l\dot\varphi_0(t)(\dot\nu(t)\cos(x+\varphi_0(t)) + \dot\theta(t)\sin(x+\varphi_0(t)))+$$
$$\frac{1}{2}(\dot\nu^2(t) + \dot\theta^2(t)).$$

И вместо (3) будем иметь уравнение в отклонениях

$$\ddot x + \ddot\varphi_0(t) + a\ddot\nu(t)\cos(x+\varphi_0(t)) \tag{4}$$
$$+a\ddot\theta(t)\sin(x+\varphi_0(t)) + ag\sin(x+\varphi_0(t)) = 0.$$

Также согласно [3] определим величины

$$\frac{\partial\bar B}{\partial t} = l^2\ddot\varphi_0(t) + l(\ddot\nu(t)\cos(x+\varphi_0(t)) + \ddot\theta(t)\sin(x+\varphi_0(t)))+$$
$$l\dot\varphi_0(t)(\dot\theta(t)\cos(x+\varphi_0(t)) - \dot\nu(t)\sin(x+\varphi_0(t)));$$
$$\frac{\partial\bar T_0}{\partial x} = l\dot\varphi_0(t)(\dot\theta(t)\cos(x+\varphi_0(t)) - \dot\nu(t)\sin(x+\varphi_0(0))).$$

Стабилизирующий момент M для уравнения (4) возьмем согласно теореме 2 из [3] в виде

$$M = -d(t)\dot x - c(t)x + \ddot\varphi_0(t)+ \tag{5}$$
$$a(\ddot\nu(t)\cos(x+\varphi_0(t)) + \ddot\theta(t)\sin(x+\varphi_0(t))) + ag\sin(x+\varphi_0(t)).$$

С помощью функции Ляпунова $V(t,x,\dot x) = 1/2(c(t)x^2 + \dot x^2)$ по теореме 2 [3]имеем, что при выполнении условий

$$0 < \varepsilon_0 \le d(t) \quad (\varepsilon_0 = const) \tag{6}$$

$$c(t) \ge \alpha_0,\ 0 < \alpha_0 = const \tag{7}$$

управляющий момент (5) решает задачу о стабилизации программных движений $\varphi = \varphi_0(t)$ математического маятника с движущейся точкой подвеса.

Замечание. В рассмотренном случае при указанном стабилизирующем моменте имеет место равномерная асимптотическая устойчивость программных движений, поэтому свойство стабилизируемости сохраняется при малых постоянно действующих возмущениях.

Полученные результаты развивают результаты работ [3-6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 96-01-01067).

Литература

1. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations// J. Differ. Equat. 1977. V.23. N.2. P.216-223.

2. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

3. Bezglasnyi S. On stabilization of program motions of controlled mechanical systems// Proceedings of the 22 Yugoslav Congress of theoretical and appliedmechanics – Vrnjacka Banja, June 2 – June 7. 1997. – P.107-112.

4. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы// Прикладная математика и механика. 1996. Т.60. Вып.3. С.388-396.

5. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с оценкой качества управления// ПММ. 1997. Т.61. Вып.1. С.44-51.

6. Безгласный С.П. К задаче о стабилизации нестационарных программных движений математического маятника// Ученые записки УлГУ. Фундаментальные проблемы математики и механики. – Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып.2(4). С.19-23.

ОБЩИЙ ЗАКОН ЭКВИАСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ[2]

Богданов А.Ю.

В статье изучается проблема локальной и глобальной стабилизации нестационарной нелинейной дискретной системы с обратной связью

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + g(k, x(k))u(k)$$
$$y(k) = h(k, x(k)) + J(k, x(k))u(k), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$; f, g, h, J - гладкие отображения допустимых размерностей, удовлетворяющие условиям предкомпактности [1]. Предполагается, что $f(k,0) \equiv 0, h(k,0) \equiv 0$.

Следуя работам [2–5], систему (1) будем называть диссипативной, если существуют неотрицательная функция Ляпунова $V : Z_+ \times R^n \to R_+$, $V(k,0) \equiv 0$, и функция $W : Z_+ \times R^m \times R^m \to R^1$, такая, что для всех $u \in R^m$ и всех $k \in Z_+$ выполнено

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \leq W(k, y(k), u(k)). \tag{2}$$

Функция $V(k,x)$ при этом называется функцией запаса, а функция $W(k,y,u)$ - темпом поставки. В дальнейшем для функций Ляпунова и их оценок будем считать выполненными условия предкомпактности.

В случае, когда $W(k, y(k), u(k)) = y^T(k)u(k)$, система (1) называется пассивной. При этом для строгого неравенства в (2) задача о стабилизации системы (1) может быть решена при помощи теоремы типа Ляпунова об асимптотической устойчивости для дискретных систем [6–7].

Исследуем задачу о стабилизации системы (1) в случае, когда в соотношении (2) с функцией $W = y^T u$ имеет место равенство. Такие системы принято называть системами без потерь [3].

[2]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 97-01-00967.

Необходимые и достаточные условия того, что система (1) является системой без потерь, определяются следующей теоремой.

Теорема 1.1. Система (1) с C^2 функцией Ляпунова $V(k,x)$ является системой без потерь, если и только если

A1)

$$V(k+1, f(k,x)) = V(k,x), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f(k,x)} g(k,x) = h^T(k,x), \tag{4}$$

$$g^T(k,x)\left.\frac{\partial^2 V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=f(k,x)} g(k,x) = J^T(k,x) + J(k,x). \tag{5}$$

A2) $V(k+1, f(k,x) + g(k,x)u)$ квадратична по u.

Доказательство. Необходимость. Если система (1) без потерь, то существует неотрицательная функция Ляпунова $V(k,x)$ такая, что

$$V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u) = V(k,x) + h^T(k,x)u + u^T\frac{J(k,x)+J^T(k,x)}{2}u,$$

$$\forall u \in R^m.$$

Очевидно, что, полагая $u \equiv 0$, получаем (3). Легко показать, что

$$\frac{\partial V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u)}{\partial u} = \left.\frac{\partial V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f(k,x)+g(k,x)u} =$$

$$= h^T(k,x) + u^T[J(k,x) + J^T(k,x)].$$

$$\frac{\partial^2 V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u)}{\partial u^2} =$$

$$= g^T(k,x)\left.\frac{\partial^2 V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=f(k,x)+g(k,x)u} g(k,x) = J^T(k,x) + J(k,x).$$

Что влечет (4) и (5) немедленно при $u \equiv 0$. Условие A2) очевидно.

Достаточность. Из предположения A2) следует, что

$$V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u) = A(k,x) + B(k,x)u + u^T C(k,x)u, \forall u \in R^m.$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$A(k,x) = V(k+1, f(k,x)) = V(k,x),$$

$$B(k,x) = \left.\frac{\partial V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u)}{\partial u}\right|_{u=0} =$$

$$= \left.\frac{\partial V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f(k,x)} g(k,x),$$

$$C(k,x) = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u)}{\partial u^2}\right|_{u=0} =$$

$$= \frac{1}{2}g^T(k,x)\left.\frac{\partial^2 V(k+1,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=f(k,x)} g(k,x).$$

По предположению A1) и из (1) ясно, что

$$V(k+1, f(k,x)+g(k,x)u) - V(k,x) = h^T(k,x)u + \frac{1}{2}u^T[J(k,x)+J^T(k,x)]u =$$

$$= y^T(k)u, \forall u \in R^m.$$

Таким образом, система (1) является системой без потерь с функцией Ляпунова $V(k,x) \in C^2$.

Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1. В случае дискретных линейных стационарных систем теорема 1.1 сводится к хорошо известному результату Калмана [см. 8–9]. Линейная система вида

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{6}$$

является системой без потерь с функцией Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$, если и только если существует матрица $P > 0$ такая, что

$$A^T PA = P$$

$$B^T PA = C \tag{7}$$

$$D + D^T = B^T PB$$

Из соотношений (7) следует, что, если $D = 0$, то и $C = 0$. Это в свою очередь влечет, что линейная система (6) является системой без потерь, только если выход $y(k) = 0$. Более того, если $rank B = m$, то система (6) с $D = 0$ является системой без потерь, только если $P = 0$. Иными словами, такая линейная система никогда не может быть системой без потерь с функцией Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$, которая положительно определена.

Введем определение наблюдаемости $x = 0$ для системы (1), являющееся естественным расширением соответствующего понятия из теории линейных систем [10]. Для этого определим $f_k^0(x) = x, f_k^1(x) = f(k,x), ..., f_k^i(x) = f(k+i-1, f_k^{i-1}(x))$. Тогда $\varphi(k,x,n_0) = f_{n_0}^{k-n_0}(x)$ является решением системы $x(k+1) = f(k, x(k)), x(n_0) = x, k \ge n_0$.

Определение 1. Система (1) локально нуль-наблюдаема, если существует окрестность U для $x = 0$ такая, что из выполнения для любого $x(n_0) = x \in U = U(n_0)$ равенства

$$y(k)|_{u(k)=0} = h(\varphi(k,x,n_0)) = 0, \forall k \ge n_0 \in Z_+ \text{ следует, что } x \equiv 0.$$

Если $U = R^n$, то система (1) нуль-наблюдаема.

Определим $\tilde{S} = \{x \in R : h(n_0+i, f_{n_0}^i(x)) = 0, \forall i, n_0 \in Z_+\}$. Тогда несложно видеть, что система (1) нуль-наблюдаема, если и только если $\tilde{S} = \{0\}$.

Необходимые и достаточные условия нуль-наблюдаемости системы (1) могут быть найдены из следующей теоремы.

Теорема 1.2. Предположим, что система (1) является системой без потерь с C^2 функцией Ляпунова $V(k,x)$. Определим

$$S = \{x \in R^n : \left.\frac{\partial V(n_0+i+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f_{n_0}^{i+1}(x)} g(n_0+i, f_{n_0}^i(x)) = 0,$$
$$\forall i, n_0 \in Z_+\}.$$

Тогда система (1) нуль-наблюдаема, если и только если $S = \{0\}$.

Доказательство. Из определения 1 следует, что необходимо только показать, что множества S и $\tilde{S}$ совпадают. Но это следует немедленно из (4):

$$h^T(n_0+i, x(n_0+i)) = h^T(n_0+i, f_{n_0}^i(x)) = (u \equiv 0) =$$
$$= \left.\frac{\partial V(n_0+i+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f(n_0+i,f_{n_0}^i(x))=f_{n_0}^{i+1}(x)} g(n_0+i, f_{n_0}^i(x)) = 0,$$
$$\forall x(n_0) = x, \forall i \in Z_+, \forall n_0 \in Z_+.$$

Таким образом, $S = \{0\}$, если и только если $\tilde{S} = \{0\}$.

Теорема 1.2 доказана.

Замечание 2. Для стационарных линейных систем без потерь доказанный критерий нуль-наблюдаемости сводится к хорошо известному в литературе о линейных системах критерию. Для линейной системы (6)

$$\left.\frac{\partial V(n_0+i+1,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=f_{n_0}^{i+1}(x)} g(n_0+i, f_{n_0}^i(x)) = x^T (A^{i+1})^T PB = 0\,.$$

Применяя теорему Гамильтона-Кэли, и учитывая $S = \{0\}$, заключаем, что

$$rank[A^T PB,\ (A^2)^T PB,\ \ldots, (A^n)^T PB]^T = n\,.$$

Так как линейная система (6) без потерь, то из соотношений (7) следует

$$rank[C^T,\ A^T C,\ \ldots, (A^{n-1})^T C^T]^T = n.$$

Таким образом, линейная система (6) наблюдаема.

Теорема 1.3. Предположим, что:

1) система (1) является системой без потерь с функцией Ляпунова $V(k,x)$, которая положительно определена в окрестности $x = 0$ и допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\varphi : Z_+ \times R^m \to R^m$ - произвольное гладкое отображение, удовлетворяющее условиям предкомпактности и такое, что $\varphi(k,0) \equiv 0$, $y^T\varphi(k,y) \ge w(\|y\|)$, $\forall y \ne 0, \forall k \in Z_+$;

3) система (1) локально нуль-наблюдаема и существует хотя бы одна предельная система

$$x(k+1) = f_0(k, x(k)) + g_0(k, x(k))u(k)$$

$$y(k) = h_0(k, x(k)) + J_0(k, x(k))u(k),$$

которая локально нуль-наблюдаема в некоторый момент $n_0 \geq 0$ (без ограничения общности можно полагать $n_0 = 0$).

Тогда гладкая выходная обратная связь в виде закона управления

$$u = -\varphi(k, y) \tag{8}$$

локально стабилизирует равномерно по x_0 точку равновесия $x = 0$.

Если же вместо условия 3) потребовать, что система (1) и предельная система нуль-наблюдаемы, функция Ляпунова $V(k,x)$ удовлетворяет условию $w_1(\|x\|) \leq V(k,x) \leq w_2(\|x\|)$ в R^n , то управление (8) глобально стабилизирует точку равновесия $x = 0$ равномерно по x_0.

Доказательство. Любое решение замкнутой системы, формируемой (1) и (8), удовлетворяет соотношению

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) = -y^T(k)\varphi(k, y(k)) \leq 0 \tag{9}$$

Отсюда следует, что замкнутая система равномерно устойчива по Ляпунову, потому что $V(k,x)$ не возрастает вдоль решений замкнутой системы, $V(k,x)$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел [7]. Докажем, что точка $x = 0$ является также точкой равномерного по x_0 притяжения.

Предположим противное, то есть отсутствие равномерного по x_0 притяжения. Пусть U_0 – окрестность наблюдения для предельной системы в момент $n_0 = 0$. По свойству равномерной устойчивости определим окрестность U_δ точки $x = 0$ такую, что все решения замкнутой системы удовлетворяют условию $\|x(k, n_0, x_0)\| < \varepsilon$, $\forall k \geq n_0$, если $x_0 \in U_\delta$, причем ε выберем так, чтобы $\bar{U}_\varepsilon \subset U_0$. Так как равномерного по x_0 притяжения нет, то существует момент времени $\tilde{n}_0$,

компакт $K \subset U_\delta$, последовательность $n_k \to +\infty$, последовательность $\{x_0^{n_k}\} \in K$ и значение $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\|x(\tilde{n}_0 + n_k, \tilde{n}_0, x_0^{n_k})\| \geq \varepsilon_0$. Очевидно, что $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$.

Из свойства равномерной устойчивости определим $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0/2) > 0$. Тогда очевидно $\delta_0 \leq \|x(\tilde{n}_0 + n, \tilde{n}_0, x_0^{n_k})\| \leq \varepsilon$, $\forall k$, $\forall n \in [0, n_k]$. Пусть $\xi_k \to +\infty$ – последовательность, по которой определяется предельная система. Выберем так подпоследовательность $\tilde{n}_k \to +\infty$ из последовательности $n_k \to +\infty$, что $\lim_{k\to+\infty}(\tilde{n}_k - \xi_k) = +\infty$. Пусть $\psi_k = x(\tilde{n}_0 + \xi_k, \tilde{n}_0, x_0^{\tilde{n}_k})$. Очевидно $\delta_0 \leq \|\psi_k\| < \varepsilon$. Построим последовательность функций $\psi_k(n) = x(\tilde{n}_0 + \xi_k + n, \tilde{n}_0, x_0^{\tilde{n}_k}) = x(n, \tilde{n}_0 + \xi_k, \psi_k)$. Имеем $\|\psi_k(n)\| \geq \delta_0$ при $n \in [0, \tilde{n}_k - \xi_k]$.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\psi_k \to \psi_0 \in U_0$. Тогда $\psi_k(n) \rightrightarrows \psi^*(n, 0, \psi_0)$ – решению предельной системы из условия теоремы, причем $\|\psi^*(n, 0, \psi_0)\| \geq \delta_0$, $\forall n \geq 0$.

Так как $V_k[n] = V(n, x(n, \tilde{n}_0 + \xi_k, \psi_k))$ монотонно не возрастает и ограничена снизу, то при переходе к пределу при $k \to +\infty$ при учете соотношения (9) имеем

$$V(n+1, \psi^*(n+1, 0, \psi_0)) - V(n, \psi^*(n, 0, \psi_0)) = c_0 - c_0 = 0 =$$

$$= -\tilde{y}^T(n)\tilde{\varphi}(n, \tilde{y}(n)) \leq 0,$$

где знак "~" означает, что рассматриваются соответствующие предельные функции, и $\tilde{y}(n) = h_0(n, \psi^*(n, 0, \psi_0)) + J_0(n, \psi^*(n, 0, \psi_0))\tilde{u}(n)$. Следовательно, для любого $n \in Z_+$ выход предельной системы $\tilde{y}(n) = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{u}(n) = -\tilde{\varphi}(n, \tilde{y}(n)) = 0, \forall n \in Z_+$. Так как предельная система локально нуль-наблюдаема в момент времени $n_0 = 0$ и $\psi_0 \in U_0$, то необходимо $\psi_0 = 0$. А этого не может быть, так как $\|\psi_0\| \geq \delta_0$.

Полученное противоречие доказывает теорему 1.3.

Литература

[1] *LaSalle J.P.* The Stability of Dynamical Systems / SIAM, Philadel-

phia. 1976. 76 p.

[2] *Byrnes C.I., Isidori A.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. - 1991. Vol.36. P. 1228-1240.

[3] *Byrnes C.I., Lin W.* Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback // Syst. Contr. Letts. - 1993. Vol.21. P. 255-263.

[4] *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems part I: General theory // Arch. Ration, Mech. Anal. - 1972. Vol. 45. P. 325-351.

[5] *Hill D.* Dissipativeness, stability theory and some remaining problems // in Analysis and Control of Nonlinear Systems. C.I. Byrnes, C.F. Martin and R.E. Sacks, Eds. North-Holland. - 1988. P. 443-452.

[6] *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. - М.: Наука, 1982.

[7] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. - М.: Мир, 1971.

[8] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

[9] *Hitz L., Anderson B.D.O.* Discrete positive real functions and their application to system stability // Proc. of IEEE. - 1969. Vol. 116. P. 153-155.

[10] *Nijmeijer H.* Observability of autonomous discrete-time nolinear systems : A geometric approach // Int. J. Contr. - 1982. Vol. 36. P. 867-874.

ЦЕНТРАЛЬНО-ПРОСТЫЕ API-АЛГЕБРЫ ЛИ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

И. В. Богомолова

Целью статьи является доказательство того, что центрально-простая API-алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль над этим полем является конечномерной.

Пусть K-поле. Согласно С. П. Мищенко (см., напр., [2]), API-алгеброй порядка $m \geq 1$ назовем K-алгебру Ли, удовлетворяющую некоторому так называемому разреженному тождеству порядка m, т. е. системе линейных относительно $x_1, \ldots, x_m$ нетривиальных тождеств вида

$$\sum_{\sigma \in S(m)} c_\sigma(a) a_1 x_{\sigma(1)} \ldots a_m x_{\sigma(m)} \equiv 0, \qquad (*)$$

где $c_\sigma(a) \in K$ зависят от перестановки σ и от строки a, состоящей из произвольных бесконечных слов $a_1, \ldots, a_m$ в заданном счетном алфавите.

Очевидно, в системе $(*)$ можно (и будем) считать $c_\varepsilon(a) = 1$ (ε — единица группы $S(m)$).

ЛЕММА 1. Пусть L — K-алгебра Ли, для которой существуют $z_0, \ldots, z_m \in L$, такие, что $z_0 \neq 0$ и при любом $i = 1, \ldots, m$ $z_i z_0 = \beta_i z_{i-1}$ для некоторого $\beta_i \in K \setminus \{0\}$. Тогда L не является API-алгеброй порядка m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в системе $(*)$ тождество, отвечающее $a = (y, y^{m-1}, \ldots, y)$. Подставив в него вместо $y, x_1, \ldots, x_m$ соответственно $z_0, z_{m-1}, \ldots, z_1$, убеждаемся в том, что указанное тождество в алгебре L не выполняется. $\square$

Пусть W_n, S_n, H_q, K_q — четыре классические серии алгебр Ли картановского типа, $\widetilde{W}_n$, $\widetilde{S}_n$, $\widetilde{H}_q$, $\widetilde{K}_q$ — их пополнения по естественным фильтрациям (см. [3, гл. 6, § 43]).

ЛЕММА 2. Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Тогда алгебры W_n ($n \geq 1$), S_n ($n \geq 2$), H_q ($q \geq 1$), K_q ($q \geq 0$) не являются API-алгебрами Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $W_n \subset W_{n+1}$, $S_n \subset S_{n+1}$, $H_q \subset H_{q+1}$, $K_0 \subset W_1$, а при четном n $H_{n/2} \subset S_n$, то утверждение леммы достаточно доказать для алгебры H_1, а также для всех алгебр K_q. Для каждой такой алгебры мы построим бесконечную последовательность ее элементов $z_0, z_1, \ldots$, любой начальный отрезок которой удовлетворяет условиям леммы 1, ссылка на которую и завершит доказательство.

1) Случай H_1. Положим $f_k = x^{k+1} + y^{k+1} \in K[x, y]$, $z_k = \frac{\partial f_k}{\partial x}\partial_y - \frac{\partial f_k}{\partial y}\partial_x = (k+1)(x^k\partial_y - y^k\partial_x) \in H_1$. Тогда $z_k z_0 = -(k+1)z_{k-1}$ при $k \geq 1$.

2) Случай K_q, $q \geq 0$. Положим $f_k = x^k \in K[x, t_1, \ldots, t_{2q}]$, $z_k = (2-\delta)f_k\partial_x + \frac{\partial f_k}{\partial x}\delta + \sum_{i=1}^{q}(\frac{\partial f_k}{\partial t_i}\partial_{q+i} - \frac{\partial f_k}{\partial t_{q+i}}\partial_i) = 2x^k\partial_x + kx^{k-1}\delta \in K_q$; здесь $\delta = t_1\partial_1 + \ldots + t_{2q}\partial_{2q}$. Тогда $z_k z_0 = -2kz_{k-1}$ при $k \geq 1$. □

ТЕОРЕМА. Пусть L — центрально простая API-алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики нуль. Тогда L конечномерна над K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [3, гл. 6, § 42, теорема 42.1] L является алгеброй Ли картановского типа. Достаточно показать теперь, что если L бесконечномерна над K, то она не является API-алгеброй. В самом деле, пусть $\tilde{L}$ — пополнение по фильтрации, заданной картановскими продолжениями L. Поскольку L и $\tilde{L}$ имеют одни и те же тождества, то достаточно установить, что $\tilde{L}$ не есть API-алгебра. Известно, что $\tilde{L}$ изоморфна (бесконечномерной) алгебре типа $\widetilde{W}_n$, $\tilde{S}_n$, $\widetilde{H}_q$ или $\widetilde{K}_q$ (см. [3, гл. 6, § 43, теорема 43.1]), ни одна из которых не является API-алгеброй в силу леммы 2. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя другую технику, можно доказать конечномерность над своим центроидом простой API-алгебры Ли, определенной над произвольным полем характеристики нуль.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи матем. наук. — 1990. — Т. 45. Вып. 6(276). — С. 25–45.

[3] Размыслов Ю.П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

О ДЛИНЕ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ $P_n(W_1)$

Верёвкин А.Б.

Пусть k – поле нулевой характеристики, а W_1 – алгебра Витта над полем k: то есть, W_1 имеет счётный базис $\{e_i\,;\, i{=}-1,0,1,\ldots\}$ и определяется соотношениями $\{e_ie_j{=}(j{-}i)e_{i+j}\,;\, i,j{\geqslant}-1\}$, задающими на W_1 структуру k-алгебры Ли.

Над числовым полем k алгебра W_1 реализуется векторными полями с полиномиальными коэффициентами на прямой k^1 — здесь в качестве e_i-тых служат операторы $t^{i+1}\partial/\partial t$.

W_1 — алгебра с тождествами, например, в ней выполняется такое

$$\sum_{\mu\in\mathcal{S}_4}\mathrm{sgn}(\mu)(((x_0x_{\mu(1)})x_{\mu(2)})x_{\mu(3)})x_{\mu(4)}=0$$

не вытекающее из лиевых аксиом антисимметричности и Якоби.

Пересечение ядер всех гомоморфизмов из счётнопорождённой свободной алгебры Ли $L(x_i\,;\,i{\in}\mathbb{N})$ над k в W_1 называется вербальным идеалом тождеств алгебры Витта $T(W_1)$. Линейную оболочку полилинейных лиевских мономов степени n от $x_1,\ldots,x_n$ в $L(x_i\,;\,i{\in}\mathbb{N})$ обозначим P_n. Пространства $P_n{\cap}T(W_1)$ и $P_n/(P_n{\cap}T(W_1))$ обозначим $T_n(W_1)$ и $P_n(W_1)$ соответственно.

Перестановки индексов переменных задают левое действие симметрической группы $\mathcal{S}_n$ в P_n, сохраняющее $T_n(W_1)$. Поэтому, по теореме Машке, можно считать, что $P_n\cong T_n(W_1){\oplus}P_n(W_1)$ как $\mathcal{S}_n$–представления. Известно, что неприводимые представления $\mathcal{S}_n$ исчерпываются модулями Шпехта S^λ, где $\lambda{=}(\lambda_1,\ldots)\vdash n$ — разбиение n: то есть, $\lambda_1{\geqslant}\lambda_2{\geqslant}\ldots{\geqslant}0$, $\Sigma_i\,\lambda_i{=}n$ (см. [1]). Таким образом, над полем k любое $\mathcal{S}_n$–представление U имеет *каноническое разложение*

$$U=\bigoplus_{\lambda\vdash n}U_\lambda,\quad \text{где}\quad U_\lambda\cong S^\lambda\otimes_k \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{S}_n]}(S^\lambda,U) \tag{1}$$

и U_λ — это сумма всех неприводимых компонент U изоморфных S^λ.

Число слагаемых в разложении (1) назовём *канонической длиной U* и обозначим $\mathrm{lc}(U)$. Цель работы — оценка величин $\mathrm{lc}(P_n(W_1))$ и $\mathrm{lc}(T_n(W_1))$.

Предложение 1. *$\mathrm{lc}(P_n(W_1))$ и $\mathrm{lc}(T_n(W_1))$ промежуточного роста при $n\to\infty$.*

Доказательство:

Прежде всего отметим, что в разложении модуля P_n встречаются все разбиения за исключением (2^2); (2^3); $(1^i){:}\,i{\geqslant}3$; $(j){:}\,j{\geqslant}2$ (см. [2]). Поэтому при $n{\geqslant}7$ имеем оценку (см. [3, с. 83]):

$$\mathrm{lc}(P_n)=p(n)-2\sim p(n)\sim\frac{1}{4\sqrt{3}\,n}\exp(\pi\sqrt{2/3}\,n^{1/2}). \tag{2}$$

Определим вес разбиения $\lambda{=}(\lambda_1,\ldots)\vdash n$ формулой

$$\omega(\lambda){:=}\sum_{i\geqslant 1}(i{-}2)\lambda_i\,.$$

В книге [4] показано, что из условия $\omega(\lambda){\geqslant}0$ вытекает $P_n(W_1)_\lambda\cong 0$. В работе [5] доказано и обратное: если $\omega(\lambda)<0$, тогда $P_n(W_1)_\lambda\ncong 0$. Этих фактов достаточно для доказательства предложения.

Множество всех разбиений числа n разделим на две части:

$$P_+(n)=\{\lambda\vdash n\,|\,\omega(\lambda){\geqslant}0\}\quad\text{и}\quad P_-(n)=\{\lambda\vdash n\,|\,\omega(\lambda)<0\}.$$

Полагая $p_+(n){:=}\sharp P_+(n)$ и $p_-(n){:=}\sharp P_-(n)$, получим

$$\mathrm{lc}(T_n(W_1)){\geqslant}p_+(n)-2;\quad \mathrm{lc}(P_n(W_1))=p_-(n)-1+\delta_{n1}-\delta_{n4}\,.$$

Интересующие нас величины мажорируются последовательностью $p(n)$, которая имеет промежуточный рост, согласно формуле (2) на стр.35.

Чтобы оценить $p_+(n)$ снизу, отметим цепочку равенств и неравенств:

$$\sharp\{\lambda\vdash n\,|\,\lambda_1=i\}=\sharp\{\lambda'\vdash n\,|\,\lambda'_1=i\}=\dim_k(k[t_1,\ldots,t_i]_{\mathcal{S}_i})_{n-i}=$$

$$=\;[t^{n-i}]\left(\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{1-t^k}\right)\geqslant[t^i]\left(\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{1-t^k}\right)=p(i),\quad\text{при}\quad n{-}i\geqslant i\,.$$

Далее заметим, что если $\lambda_1 \leqslant n/3$, тогда $\lambda_3+\lambda_4+\ldots \geqslant n/3$ и $\omega(\lambda)\geqslant 0$. Применяя интегральный признак оценки монотонного ряда, получим:

$$p_+(n) \geqslant \sum_{l=1}^{[n/3]} p(l) > \int_1^{[n/3]-1} \frac{1}{4\sqrt{3}\,x} \exp(\pi\sqrt{2/3}\sqrt{x})dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{[n/3]-1}} \frac{\exp(\pi\sqrt{2/3}y)}{y} dy > \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{2n}} \exp(\pi\sqrt{2/3}y)\Big|_1^{\sqrt{[n/3]-1}} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{2n}} \exp(\pi\sqrt{2n}/3) = o(n^{4/5}(p(n))^{\sqrt{3}/3}) \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Итак, получена промежуточная оценка снизу $\mathrm{lc}(T_n(W_1))$.

Чтобы оценить снизу $p_-(n)$ последовательностью промежуточного роста заметим, что $\omega(\lambda) < 0$ при достаточно больших λ_1: обозначив $l{:=}n-\lambda_1$ получим неравенство

$$\omega(\lambda) \leqslant -\lambda_1 + l(l-1)/2 = \omega\left((\lambda_1, 1^l)\right).$$

Также видим, что при целых $l \geqslant 0:\ l(l-1)/2 \geqslant l-1$.

Следовательно, если $\lambda_1 > l(l-1)/2$, то $\lambda = (\lambda_1, \mu)$ — является разбиением n и $\omega(\lambda) < 0$ для любого $\mu \vdash l$. Тем самым, находим вложение множеств:

$$\{(\lambda_1, \mu) \,|\, \lambda_1 > l(l-1)/2,\ \mu \vdash l = n - \lambda_1\} \subseteq P_-(n),$$

а также равенства:

$$\sharp\{(\lambda_1, \mu) \,|\, \lambda_1 > \frac{l(l-1)}{2},\ \mu \vdash l\} = \sharp\{\mu \vdash l \,|\, \lambda_1 > \frac{l(l-1)}{2}\} = \sum_{l=0}^{L} p(l),$$

где L — целая часть положительного корня уравнения

$$n - l = \lambda_1 = \frac{l(l-1)}{2} \quad \text{или} \quad l^2 + l - 2n = 0,$$

этот положительный корень можно оценить снизу таким способом

$$l_+ = \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} > \frac{\sqrt{8n}-1}{2} = \sqrt{2n} - 0.5 .$$

Следовательно,

$$p_-(n) > \sum_{l=1}^{L} p(l), \quad \text{где} \quad L = [\sqrt{2n} - 0.5] .$$

Аналогично проведённой ранее оценке $p_+(n)$, получим

$$p_-(n) > \int_1^{L-1} \frac{1}{4\sqrt{3}\,x} \exp(\pi\sqrt{2x/3})dx > \frac{\exp(\pi\sqrt{2/3}y)}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{L-1}}\Big|_1^{\sqrt{L-1}} \sim$$

$$\sim \frac{\exp(\pi\sqrt[4]{8n/9})}{2\pi\sqrt[4]{8n}} = o(p(n)) \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Что и завершает наше доказательство. □

Замечание 2. *Полученные миноранты $p_-(n)$, $p_+(n)$ явно неточны, ибо в сумме набирают только $o(p(n))$.*

Далее мы получим информацию о последовательности $\mathrm{lc}(P_n(W_1))$, использовав производящую функцию веса ω.

На минуточку заведём другой вес ω' для разбиений, полагая

$$\omega'(\lambda){:=}\omega(\lambda'), \quad \text{тогда} \quad \omega(\lambda) = \omega(\lambda'') = \omega'(\lambda').$$

Отметим, что каждый элемент l разбиения λ, независимо от других элементов того же разбиения, вносит в $\omega'(\lambda)$ величину

$$-1+0+1+\cdots+(l-2) = \frac{l(l-3)}{2} .$$

Использовав запись $\lambda' = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots)$, приходим к выражению

$$\omega'(\lambda') = \sum_{l\geqslant 1} \frac{l(l-3)}{2} m_l$$

и мы получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Omega(z,t) \;&:=\; \sum_{n,\,\lambda\vdash n} z^{\omega(\lambda)} t^{|\lambda|} = \sum_{n,\,\lambda'\vdash n} z^{\omega'(\lambda')} t^{|\lambda'|} = \\ &= \sum_{m_l \geqslant 0} \left(\prod_{l\geqslant 1} \left(z^{\frac{l(l-3)}{2} m_l} t^{l m_l} \right) \right) = \\ &= \prod_{l\geqslant 1} \left(\sum_{m_l\geqslant 0} \left(z^{\frac{l(l-3)}{2}} t^l \right)^{m_l} \right) = \prod_{l\geqslant 1} \left(1 - z^{\frac{l(l-3)}{2}} t^l \right)^{-1} . \end{aligned}$$

Итак,

$$\Omega(z,t) = \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-1} \left(1 - \frac{t^2}{z}\right)^{-1} \prod_{l \geqslant 3} \left(1 - z^{\frac{l(l-3)}{2}} t^l\right)^{-1}. \tag{3}$$

Через $\Omega_-(z,t)$ — главную (Лорановскую) часть по z ряда $\Omega(z,t)$ выражается производящая функция последовательности $p_-(n)$

$$\Omega_-(z,t) := \sum_{\lambda,\,\omega(\lambda)<0} z^{\omega(\lambda)} t^{|\lambda|}, \quad \sum_{n\geqslant 1} p_-(n) t^n = \Omega_-(1,t)$$

и учитывая невходящие в P_n разбиения (см. стр.35) получаем

Предложение 3.

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{lc}(P_n(W_1)) t^n = \Omega_-(1,t) - \frac{t^2}{1-t} - t^4,$$

где $\Omega_-(z,t)$ — Лорановская часть по z в окрестности 0 ряда $\Omega(z,t)$ (см. формулу (3) на стр.38).

Эта работа поддержана программой "Университеты России — фундаментальные исследования" №13–57 и приняла представленный вид после полезных бесед с С.П. Мищенко и Н.А. Власовым, которым я выражаю свою благодарность.

Литература

[1] Джеймс Г. *Теория представлений S_n*.– М.: Мир, 1982.

[2] Клячко А.А. *Элементы Ли ...*.//Сиб. мат. ж. Т.XV, №6. 1974. С.1296–1304.

[3] Эндрюс Г. *Теория разбиений*.– М.:Наука, 1982.

[4] Размыслов Ю.П. *Тождества алгебр и их представлений*.– М.:Наука, 1989.

[5] Власов Н.А. *Об одном свойстве ...*. – в наст. сб.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ ВИТТА

Власов Н.А.

Простота закона умножения в алгебре Витта W_1 (напомним, что базис имеет вид e_{-1}, e_0, e_1 ,... и $e_ie_j{=}(j{-}i)e_{i+j}$) приводит к существенным сложностям при изучении ее тождеств. В частности, до сих пор не найден базис тождеств алгебры W_1. Возможно, что шагом к решению задачи о базируемости и других вопросов станет результат данной работы о полилинейных тождествах W_1. Но прежде автору необходимо сообщить некоторые предварительные сведения и ввести обозначения.

Во всей статье мы работаем с полем $\mathbb{F}$ только нулевой характеристики. Зафиксируем счетный алфавит $X{=}\{x_1, x_2, \ldots\}$, рассмотрим свободную алгебру Ли $L(X)$ и свободную ассоциативную алгебру $A(X)$. Нам понадобится коммутаторная запись для элементов из $A(X)$:$[ab]{=}ab{-}ba$. Будем использовать левонормированную запись неассоциативных мономов: $abc{=}((ab)c)$; также $[abc]{=}[[ab]c]$ для $A(X)$. Если, например, полином имеет вид $waa\ldots av$, то запишем его просто как wa^pv; и опять $[waa\ldots av]{=}[wa^pv]$. Для обозначения кососимметричного набора переменных как в элементах из $L(X)$, так и из $A(X)$ используем сокращение:

$$w_0\bar{x}_1w_1\bar{x}_2w_2\ldots\bar{x}_nw_n = \sum(-1)^\tau w_o x_{\tau(1)} w_1 x_{\tau(2)} w_2 \ldots, x_{\tau(n)} w_n,$$

где суммирование ведется по элементам симметрической группы S_n.

Пространство P_n полилинейных лиевых элементов, записанных от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращается в модуль симметрической группы S_n, если действие перестановки q определить как:

$$q \circ (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}) = x_{q(i_1)} x_{q(i_2)} \ldots x_{q(i_n)}.$$

Это же действие определяет по дистрибутивности на множестве P_n структуру модуля групповой алгебры $\mathbb{F}S_n$, что позволяет применить теорию представлений симметрических групп. С приводимой ниже информацией об этом читатель более подробно может ознакомиться в [1]. Как уже упоминалось, характеристика $\mathbb{F}$ равна нулю, а значит по теореме Машке $\mathbb{F}S_n$-модуль P_n является прямой суммой неприводимых модулей. Классы изоморфных неприводимых $\mathbb{F}S_n$-модулей находятся во взаимо-однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями числа n:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k, n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k.$$

Для каждого разбиения такого типа строится диаграмма Юнга d, состоящая из k строк с $i-$строкой длины n_i клеток. Заполнив клетки диаграммы числами от 1 до n, получим таблицу Юнга τd. С помощью таблицы τd можно построить элемент групповой алгебры, пропорциональный идемпотенту:

$$E_{\tau d} = \sum_{p \in R_{\tau d}, q \in C_{\tau d}} (-1)^q pq,$$

где $R_{\tau d}$ — подгруппа симметрической группы, оставляющая на месте множество чисел, принадлежащих каждой фиксированной строке таблицы,а $C_{\tau d}$ таким же образом определенная подгруппа, только относительно столбцов. Элемент $f_{\tau d}{=}E_{\tau d} \circ (x_1 x_2 \ldots x_n)$ будет порождать в P_n неприводимый подмодуль. Итак

$$P_n = \sum_{d \in D_n} P_d,$$

где D_n — множество всех упорядоченных разбиений числа n, а P_d — сумма всех неприводимых изоморфных подмодулей, построенных по таблицам Юнга, получаемым из диаграммы d. Строение элемента $f_{\tau d}$ доставляет доказанная в [2].

Теорема 1. *Полином $f_{\tau d}$ является линейной комбинацией слагаемых вида $w(m_1, \ldots, m_k)$ — полилинейных элементов, в которых на определенных местах расположено k (k — длина первой строки диаграммы d) кососимметричных наборов переменных, причем $i-$набор состоит из m_i переменных (m_i — длина $i-$го столбца диаграммы d).*

Нам понадобятся также некоторые числовые величины, сопоставляемые диаграмме d:

$$\omega(a_1, a_2, \ldots, a_k; d){=}a_1 n_1{+}a_2 n_2{+}\ldots{+}a_k n_k.$$

Особую роль будет играть величина $\omega(d){=}\omega(-1, 0, 1, 2, \ldots; d)$. Важно еще помнить, что алгебра W_1 обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой:

$$W_1 = \ldots \oplus V_{-2} \oplus V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \ldots,$$

где $V_i = 0$ при $i < -1$ и $V_i =< e_i >$ при $i \geq -1$.

Перейдем теперь к формулировке основного результата.

Теорема 2. *Пусть P_d — сумма всех неприводимых изоморфных подмодулей в P_n, построенных по таблицам Юнга, получаемым из диаграммы d, $d \neq (l), l > 1$, $d \neq (2,2)$. Тогда следующие условия равносильны*

1) $\omega(d) \geq 0$;
2) $P_d \subseteq T(W_1)$.

Доказательство. Обратим сначала внимание на то,что условия $d \neq (l), l > 1$, $d \neq (2,2)$ существенны, поскольку выполняются равенства (см. [3])

$$E_{\tau(l)} \circ (x_1 x_2 \ldots x_l){=}0, E_{\tau(2,2)} \circ (x_1 x_2 x_3 x_4){=}0,$$

хотя $\omega(l){=}-l$, $\omega(2,2){=}-2$. Справедливы также и равенства (снова [3])

$$E_{\tau(1^m)} \circ (x_1 x_2 \ldots x_m){=}0, m > 2; E_{\tau(2,2,2)} \circ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6){=}0,$$

так что далее не будем рассматривать диаграммы $(2,2)$,$(2,2,2)$, (l),$l > 1$,(1^m),$m > 2$.

Следствие 1)$\Rightarrow$2) получено еще в [4]. Но ради полноты изложения автор все же хочет привести его доказательство. Зафиксируем диаграмму $d{=}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Докажем, что если $\omega(d) \geq 0$, то алгебра W_1 удовлетворяет любому тождеству вида

$$f_{\tau d}{=}f_{\tau d}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Предположим противное — существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из W_1, что

$$f_{\tau d}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Заметим сначала, что для некоторых $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots$ из W_1

$$e_{-1} f_{\tau d}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{\tau d}(b_1, b_2, \ldots, b_n) + f_{\tau d}(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) + \ldots \ .$$

Таким образом будем считать (градуировка в W_1), что

$$f_{\tau d}(b_1, b_2, \ldots, b_n) + f_{\tau d}(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) + \ldots = e_{-1} \ .$$

Рассмотрим, однако, результат подстановки элементов e_i в полиномы $w(m_1, \ldots, m_k)$, суммой которых, по теореме 1, является элемент $f_{\tau d}$. Градуировка и то, что подстановка в кососимметричный набор одинаковых векторов обнуляет $w(m_1, \ldots, m_k)$, приводит к тому, что для любого гомоморфизма ϕ из $L(X)$ в W_1, такого, что $\phi(x_i) = e_j$

$$\phi(w(m_1, \ldots, m_k)) = \alpha e_s,$$

$\alpha \in \mathbb{F}, s \geq \omega(d) \geq 0$. Противоречие.

Теперь перейдем к случаю $\omega(d) < 0$. Нам достаточно построить по d ненулевой элемент $xF_d(adx, ady, adz_1, adz_2, \ldots, adz_{k-2})$, являющийся линейной комбинацией полиномов вида $g_{\tau d}$. Его полной линеаризацией будет ненулевой полилинейный полином $f_d = \sum \alpha_\tau f_{\tau d}$, где $\alpha_\tau \in \mathbb{F}$ и суммирование ведется по таблицам Юнга. Если алгебра W_1 не станет удовлетворять тождеству

$$xF_d(adx, ady, adz_1, adz_2, \ldots, adz_{k-2}) \equiv 0,$$

а значит и тождеству $f_d \equiv 0$, то доказательство теоремы закончится.

Рассмотрим сначала диаграммы вида $(m+n, m), n \geq 1$. В качестве $F_{(m+n,m)}$ возьмем $[xy]^m x^{m+n-1}$, сделаем подстановку в полином $xF_{(m+n,m)}(adx, ady)$ и убедимся, что элемент

$$e_{-1}(e_{-1}e_{s+1})^m e_{-1}^{m+n-1} =$$

$= (-1)^{m+n-1}(s+2)^m(s+1)(-s+1)(-2s+1)\ldots(-(m-2)s+1) \times$
$\times \frac{(ms)!}{(ms-m-n+1)!} e_{ms-m-n}$

не равен нулю при достаточно большом s. Для диаграммы вида $(m, m), m \geq 3$ $F_{(m,m)}(x, y) = [xy][xy]y[xy]^{m-3} + yy[xy]x[xy]^{m-3}$ и при $s \neq 0$ элемент

$$e_{-1}F_{(m,m)}(ade_{-1}, ade_{s+1}) = \bar{e}_{-1}(e_{-1}e_{s+1})^2 \bar{e}_{s+1}(e_{-1}e_{s+1})^{m-3} =$$

$$= 2(-s)^{m-3}(s+1)(s+2)^m(m-2)! e_{ms}$$

также не равен нулю. Разобраться с полиномом $F_{(1,1)}(x, y) = y$ предоставим самому читателю.

Таким образом, осталось рассмотреть диаграммы с тремя и более строками. Рассмотрим ассоциативные полиномы вида

$$f(x, y, z_1, z_2, \ldots; k, l, m) =$$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z}_1[\bar{z}_2 x^3][\bar{z}_3 x^3][\bar{z}_4 x^3][\bar{z}_5 x^6][\bar{z}_6 x^6][\bar{z}_7 x^6] \ldots$$

$$[\bar{z}_{3k-4} x^{3k-3}][\bar{z}_{3k-3} x^{3k-3}][\bar{z}_{3k-2} x^{3k-3}][\bar{z}_{3k-1} x^{3k-1}]^l [\bar{z}_{3k} x^{3k}]^m,$$

причем возможен только один случай из трех:

$$а) l=0, m=0; б) l=1, m=0; в) l=1, m=1.$$

Видоизменим $f(x, y, z_1, z_2, \ldots; k, l, m)$ следующим образом. Заменим q-ое количество переменных x, расположенных на произвольных местах и не входящих в кососимметричный набор, на $[xy]$. Обозначим полученный полином как $g(x, y, z_1, z_2, \ldots; k, l, m, q)$. С его помощью построим полином по диаграмме $d = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ (ниже $d' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_l)$ – диаграмма, сопряженная к d)

$$F_d(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{k-2}) =$$

$$= y^r \left(\prod_{n \in d', n = 3i+j+m, n > 2} g(x, y, z_1, z_2, \ldots; i, j, m, q) \right) [xy]^s x^t,$$

причем при построении надо учитывать следующее. Во-первых, $r=1$, если для диаграммы $n_1 = n_2$, в противном случае $r=0$. Здесь нужно заметить, что из $\omega(d) < 0$ следует невозможность $n_1{=}n_2{=}n_3$. Во-вторых, величины q,s и t выбираются так, что степень полинома $F_d(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{k-2})$ по x равна n_1-1, а по y равна n_2.

Покажем, что тождество $xF_d(adx, ady, adz_1, adz_2, \ldots, adz_{k-2}) \equiv 0$ при $\omega(d) < 0$ не выполняется в алгебре W_1. Рассмотрим элемент

$$F{=}e_{-1}F_d(ade_{-1}, ade_0, ade_1, ade_2, \ldots, ade_{k-3}, ade_j),$$

где величина j удовлетворяет неравенству

$$\omega(-1, 0, 1, 2, \ldots, j; d) \geq -1.$$

Оказывается $F{=}\alpha c_{\omega(-1,0,1,2,\ldots,j;d)}$, где α — ненулевой элемент поля. Убедиться в этом несложно — на самом деле F содержит кососимметричные наборы всего лишь из 3,4 и 5 элементов (причина — градуировка в W_1). К тому же читатель сможет без особого труда убедиться в неравенстве нулю следующих элементов ($m \geq -1$, $k \geq 0$):

$$e_m(\bar{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_s e_{-1}^{3k}) =$$
$$= 2(-1)^{9k}\frac{(3k)!(3k+1)!(s+1)!}{(s-3k-1)!}e_{m+s-3k-1}, s \geq 3k+1;$$
$$e_m(\bar{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_t e_{-1}^{3k+2}) =$$
$$= e_m(\bar{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+1}e_{-1}^{3k})(e_t e_{-1}^{3k+2}) -$$
$$- e_m(\tilde{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\tilde{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_t e_{-1}^{3k})(e_{3k+1}e_{-1}^{3k+2}) =$$
$$= -4\frac{(3k)!(3k+1)!(3k+2)!(t+1)!}{(t-3k-2)!}e_{m+t-3k-2}, t \geq 3k+2;$$
$$e_m(\bar{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+2}e_{-1}^{3k+2})(\bar{e}_r e_{-1}^{3k+3}) =$$
$$= e_m(\bar{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+1}e_{-1}^{3k})(\bar{e}_{3k+2}e_{-1}^{3k+2})(e_r e_{-1}^{3k+3}) -$$
$$- e_m(\tilde{e}_{3k-1}e_{-1}^{3k})(\tilde{e}_{3k}e_{-1}^{3k})(\tilde{e}_{3k+1}e_{-1}^{3k})(\tilde{e}_r e_{-1}^{3k+2})(e_{3k+2}e_{-1}^{3k+3}) =$$
$$= (-1)^{3k+4}8\frac{(3k)!(3k+1)!(3k+2)!(3k+3)!(r+1)!}{(r-3k-3)!}e_{m+r-3k-3}, r \geq 3k+3.$$

Доказательство теоремы завершено.

В заключение автор хотел бы поблагодарить своего научного руководителя С.П.Мищенко за поставленную задачу и полезные обсуждения.

Литература

[1] Бахтурин Ю.А. *Тождества в алгебрах Ли.* — М.: Наука, 1985. – 448 с.

[2] Мищенко С.П. *О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль*//Матем. заметки. — 1986. – Т.40. – №6. С.713 – 721.

[3] Клячко А.А. *Элементы Ли в тензорной алгебре*// Сиб. матем. журн. – 1974. Т.15.– №6. – С.1296 – 1304.

[4] Размыслов Ю.П. *Тождества алгебр и их представлений.*– М.:Наука, 1989. – 432 с.

О ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ [3]

Горбунов В.К.

1. Введение. Рассмотрим [1] рынок n товаров $x = (x_1, ..., x_n)$ с заданными ценами $p = (p_1, ..., p_n)$. Покупатели выделяют для закупки этих товаров деньги в количестве b. Их отношение предпочтения представляется ординальной функцией полезности $u(x)$, положительной при $x > 0$, возрастающей и вогнутой. Под рациональным поведением (РП) покупателей понимается покупка набора товаров, определяемого задачей (выпуклого программирования)

$$\max\{u(x) : \langle p, x\rangle \le b, \quad x \ge 0\}. \qquad (1)$$

Зависимости решения (1) от параметров $\{x_i(p, b), i = 1, ...n\}$ называются *функциями спроса*. Эти функции могут использоваться для объективного и эффективного анализа и регулирования рынков и национальной экономики в целом.

Для реализации прикладного потенциала задачи РП (1) необходимо построить функцию полезности $u(x)$, объясняющую наблюдаемый спрос $x(p, b)$, т.е. решить обратную задачу РП. Она решается на основе данных торговой статистики о моделируемом рынке за некоторый период, т.е. данных об объемах и ценах продаж

$$\{x^t, p^t : t = 0, 1, ..., T\}. \qquad (2)$$

Такая задача относится к нелинейному регрессионному анализу и является очень сложной. Существенным продвижением здесь стали работы С.Африата ([10] и др.), где были получены и исследованы системы линейных неравенств, определяющих значения функции $u(x)$, соответствующие данным (2). Они были получены в рамках теории выявленного предпочтения (ТВП) Самуэльсона - Хаутеккера [11].

[3] Работа поддержана грантами РГНФ ($N^o 98-04-02219$) и РФФИ ($N^o 98-06-03360$)

Для решения систем Африата ввиду их специфики общие методы линейного программирования неэффективны, и Х.Верианом были разработаны специальные методы, также реализующие идеи ТВП [12, 13]. Однако эти методы неприменимы в случае несовместности, которая может иметь место из-за погрешностей данных (2) и требует специальных подходов. Известный прием возмущения коэффициентов, предложенный Африатом и развиваемый в [8, 9], нельзя считать окончательным решением проблемы.

В даннойой работе, развивая результаты [5], мы выводим системы Африата из условий экстремума для задачи (2), обходясь без понятий ТВП, и предлагаем *релаксационно-штрафной* метод, позволяющий в несовместном случае вычислять меру несовместности и псевдорешение (произвольной) системы линейных неравенств.

2. Системы Африата. Применяя к задаче (1) теорему Куна-Таккера [2], нетрудно показать [5], что седловая пара $(x(p, b), \lambda(p, b))$ ее функции Лагранжа и функция $u(x)$ связаны неравенством

$$u(x(p, b)) - \lambda(p, b)\langle p, x(p, b)\rangle \ge u(x) - \lambda(p, b)\langle p, x\rangle, \quad \forall x \ge 0. \qquad (3)$$

Из этого и из свойств функции полезности следует, что множитель Лагранжа $\lambda(p, b) > 0$ и $\langle p, x(p, b)\rangle = b$.

Пусть известна торговая статистика (2) за некоторый период, причем все цены p^t и объемы продаж x^t положительны. С этой статистикой свяжем величины

$$\begin{cases} b_{st} = \langle p^s, x^t\rangle, & b_t = b_{tt}, \\ u_t = u(x^t), & \lambda_t = \lambda(p^t, b_t), \quad 0 \le s, t \le T. \end{cases} \qquad (4)$$

Подставив в (3) $p = p^t$, $b = b_t$, $x = x^s$, получим *общую систему Африата* [10, 12]:

$$u_s \le u_t + \lambda_t(b_{ts} - b_t), \quad 0 \le s, t \le T. \qquad (5)$$

Для теории спроса и теории агрегирования особое значение имеет случай *однородных предпочтений* потребителей на некоторых группах товаров. Такие предпочтения представляются линейно-однородными функциями полезности, определяемыми условием $\{u(tx) = t \cdot u(x),\ \forall t > 0\}$. Этот случай рассмотрен в [5], где показано, что $x(p, b) = x(p, 1) \cdot b \equiv \hat{x}(p) \cdot b$ ($\hat{x}(p)$ – *удельный спрос*). При этом оказалось продуктивным ввести обратный множитель $z(p) = 1/\lambda(p)$, удовлетворяющий равенству $z(p)u(\hat{x}(p)) = 1$. Это равенство позволяет считать $z(p)$ *индикатором уровня цен*, а функцию $u(x)$ – *индикатором уровня (количества) потребления*.

В однородном случае обозначения (4) корректируются с учетом $\lambda_t = \lambda(p^t),\ z_t = z(p^t),\ \hat{x}^t = \hat{x}(p^t) = x^t/b_t,\ 0 \le t \le T$. При этом

$$z_t u_t = b_t, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

и система (5) распадается на две *специальные системы Африата*:

$$b_t z_s \le b_{st} z_t, \quad 0 \le s, t \le T. \tag{7}$$

$$u_s b_t \le u_t b_{ts}, \quad 0 \le s, t \le T, \tag{8}$$

Решение одной из них определяет согласно (6) решение другой. К этим системам следует добавить условия, обеспечивающие положительность переменных. Учитывая смысл величины $z(p)$ (индикатор цен) и связь (6), полагаем $z_o = 1,\ u_o = b_o$. Подстановка этих условий в соответствующую систему (7) или (8) позволяет получить двусторонние ограничения [5]:

$$\frac{b_t}{b_{0t}} \le z_t \le \frac{b_{t0}}{b_0}, \quad \frac{b_0 b_t}{b_{t0}} \le u_t \le b_{0t}, \quad 1 \le t \le T. \tag{9}$$

3. Релаксационно-штрафной метод. Рассмотрим проблему решения систем Африата, учитывая их возможную несовместность. Совместность этих систем гарантирована при достаточно жестких предположениях: постоянстве потребительских предпочтений в период наблюдений, их однородности (дополнительное условие) и главное – при точности данных (2). Реальная статистика содержит неизбежные погрешности и при установлении несовместности решаемой системы желательно установить, объясняется ли она этими погрешностями?

Общим методом решения систем линейных неравенств является симплекс-метод линейного программирования (ЛП). При этом требуется переход от неравенств к равенствам путем введения дополнительных переменных для каждого неравенства исходной системы. Системы Африата связывают $2T$ (в общем случае) или T (в однородном случае) переменных и состоят из $T(T+1)$ неравенств. Соответственно, применение симплекс-метода требует введения $T(T+1)$ дополнительных неотрицательных переменных, что очень усложняет задачу.

Рассмотрим специальную систему (7), определяющую индикаторы цен $\{z_t\}$. Решение (8) можно построить по ним, пользуясь (6). Перейдем к коэффициентам

$$a_{st} = \frac{b_{st}}{b_t} \equiv \frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^t, x^t \rangle}.$$

Эти коэффициенты являются [5] индексами цен Ласпейреса L^P_{ts} (взвешенными по базисному периоду t), а их обратные значения $1/a_{st}$ суть индексы цен Пааше P^P_{st} (взвешенные по текущему периоду t).

Итак, рассмотрим систему (7) с выделенными двусторонними ограничениями (9):

$$\frac{1}{a_{0t}} \le z_t \le a_{t0}, \quad z_s \le a_{st} z_t, \quad 1 \le s, t \le T. \tag{10}$$

Предположим вначале, что эта система совместна. Двусторонние ограничения в силу отмеченной связи коэффициентов a_{st} с индексами Ласпейреса и Пааше означают, что $P^P_{0t} \le z_t \le L^P_{0t}$. Соответственно, разумно поставить задачу о нахождении решения системы (10), ближайшего к среднегеометрическим значениям этих индексов, т.е. к индексам Фишера $F^P_{0t} = \sqrt{L^P_{0t} P^P_{0t}} \equiv \sqrt{a_{t0}/a_{0t}}$. Это (или иное) априорное приближение обозначим z^0_t и введем квадратичную функцию

$$\varphi_0(z) = \sum_{t=1}^{T} (z_t - z^0_t)^2. \tag{11}$$

Задача о нахождении решения (10), ближайшего к точке z^0, заключается в минимизации (11) при условиях (10).

Итак, поставлена задача квадратичного программирования (КП) с простейшим функционалом – квадратом евклидовой нормы (11). Для таких задач существуют различные конечные методы решения [2, 3]. Специфика системы ограничений (10) заключается в том, что все они являются неравенствами и число их существенно превосходит число переменных. При этом выгодно использовать методы типа "активных наборов" [3], не требующие введения искусственных переменных для сведения неравенств к равенствам. В [4] разработан алгоритм такого типа для задачи о нормальном решении систем линейных неравенств. К этому классу принадлежит задача минимизации (11) при условиях (10).

Элементарной операцией алгоритма [4] является задача о проекции текущего приближения искомого решения на грань допустимого множества, определяемую обновляемым наборов индексов – номеров активных ограничений. Малое число переменных в каждом ограничении системы (10) позволяет вычислять такие проекции экономично. Алгоритм вычисляет множители разложения искомого решения по строкам матрицы системы ограничений из активного набора. Число активных индексов на каждой итерации в общем случае существенно меньше числа всех неравенств. Для коррекции матриц Грама обновляемых подсистем ограничений существуют эффективные алгоритмы [3].

Метод активных наборов требует задания исходной допустимой точки, т.е. некоторого решения системы линейных неравенств (10). Стандартный метод искусственного базиса здесь, как отмечено выше, неэффективен. Эта проблема решается приближенно, но более просто и одновременно с проблемой возможной несовместности в рамках КП следующим методом [6].

Введем вспомогательную переменную r, параметр $c > 0$ и функционал

$$\varphi_c(z, r) = \varphi_0(z) + c \cdot r^2. \tag{12}$$

От системы (10) перейдем к ослабленным ограничениям на переменные $\bar{z} = (z, r)$:

$$\begin{cases} z_t - r \le a_{t0}; \quad -z_t - r \le -a_{0t}^{-1}; \\ z_s - a_{st} z_t - r \le 0, \quad 1 \le s, t \le T. \end{cases} \tag{13}$$

Поставим задачу минимизации (12) при ограничениях (13). Здесь переменная r играет роль "штрафа" нарушений ограничений исходной системы (10). Легко видеть, что независимо от совместности (10) система (13) совместна и эта задача разрешима, причем единственно, при любом $c > 0$. Допустимые точки здесь строятся тривиально. Для любого набора положительных координат $\{z_t\}$ можно указать нижнюю границу координаты r, начиная с которой точка $\bar{z}$ становится допустимой. Для нашей задачи естественным начальным приближением будет точка $\bar{z}^0 = (z^0, r_0)$, где

$$r_0 = \max\{z_s^0 - a_{st} z_t^0;\ z_t^0 - a_{t0};\ -z_t^0 + \frac{1}{a_{0t}} :\ 1 \le s, t \le T\}.$$

Утверждение. *Если z^* – решение исходной задачи минимизации (11) при условиях (10), а (z^c, r_c) – решение задачи минимизации (12) при условиях (13), то*

$$\lim_{c\to\infty} z^c = z^*, \quad \lim_{c\to\infty} r_c = 0.$$

Это утверждение нетрудно доказать для произвольных систем линейных неравенств, применяя обычную технику исследования метода штрафных функций [2].

Таким образом, переход от минимизации (11) при условиях (10) к расширенной минимизации функционала (12) при ослабленных ограничениях (13) решает проблему формирования начальной точки исходной системы неравенств и позволяет получить приближенно ее нормальное решение. В случае несовместности (10) решение (z^c, r_c) задачи (12), (13) при достаточно большом C аппроксимирует ее нормальное псевдорешение и меру несовместности. Вспомогательная задача остается задачей КП, причем с матрицей, легко преобразуемой к единичной, и с легко задаваемой допустимой точкой. К этой задаче применим упомянутый алгоритм [4]. Будем называть такой переход *релаксационно штрафным методом* решения систем неравенств. Из результатов [7] следует, что вспомогательная задача (12), (13) корректна.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда невязка r_c однородной системы (10) оказалась неприемлемо большой для объяснения ее влиянием погрешностей статистики (2). В этом случае следует переходить к общей системе Африата (5). Эта система порождается более широким классом функций полезности, чем однородные. Однако совместность и здесь негарантирована как в силу возможной неадекватности модели РП (1) данному объекту, так и по причине неточности статистики. К системе (5) применимо почти все, что предложено выше для (10). Здесь также естественны задача о проекции некоторого разумного приближения $\{u_t^0, \lambda_t^0\}$ и применение для ее решения релаксационно-штрафного метода. Такое приближение можно построить после получения приближенного псевдорешения z^c системы (10): $\lambda_t^0 = 1/z_t^c$, $u_t^0 = b_t\lambda_t^0$. Также можно наложить дополнительное требование согласованности набора $\{u_t, \lambda_t\}$ со свойством однородности. Это свойство выражается равенствами $\{u_t = \lambda_t b_t, 1 \leq t \leq T\}$. Соответственно, к исходному функционалу следует добавить квадратичную невязку этих равенств.

Литература

[1] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1988.

[3] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985.

[4] Горбунов В.К. Экстремальные задачи обработки результатов измерений. - Фрунзе: Илим, 1990.

[5] Горбунов В.К. Индексы рационального потребления // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер."Финансовая и страховая математика". - М.: Изд. "ТВП". Т.4. Вып.1. 1997. С.66-85.

[6] Горбунов В.К. Метод линеаризации для некорректных систем уравнений и неравенств // Нелинейный анализ и его приложения. Межд. конгресс: Тезисы докл. - М.: Акад. нелин. наук, 1998. С.140.

[7] Горбунов В.К. Регуляризация компактно разрешимых задач // Вестник Моск. ун-та. Сер.15. ВМК. 1999. N1. С.20-23.

[8] Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Математическое моделирование. 1998. Т.10. N4. С.105-116.

[9] Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Анализ торговой статистики Нидерландов 1951- 1977 гг. с помощью обобщенного непараметрического метода. - М.: Изд. ВЦ РАН, 1998.

[10] Afriat S.N. The constraction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. N7. P.67-77.

[11] Houthakker H.S. Revealed preference and the utility function // Economica. 1950. V. 17. P.159-174.

[12] Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. V. 50. N4. P.945-973.

[13] Varian H. Non-parametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. V. L. P.99-110.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСКОПА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Дёмина М.В.

Рассмотрим задачу об устойчивости стационарных движений тяжелого гироскопа в совершенном кардановом подвесе с вертикальной осью вращения внешнего кольца [1,2]. При этом карданов подвес расположен на подвижной платформе, совершающей вертикальные колебания по закону $z = z(t)$.

Используя обозначения [2], найдем выражение кинетической и потенциальной энергии

$$T = \frac{1}{2}M_{\text{общ}}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}[A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2] + \frac{1}{2}A_2\dot{\psi}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}[A_1\dot{\theta}^2 + B_1\dot{\psi}^2\sin^2\theta + C_1\dot{\psi}^2\cos^2\theta] + (m_1 z_1^0 + m_2 z_2^0)\dot{z}\sin\theta\dot{\theta},$$

$$\Pi = Mgl(1 - \cos\theta) + M_{\text{общ}}zg,$$

где ψ - угол поворота внешней рамки, угол прецессии; θ - угол поворота внутренней рамки, угол нутации; φ - угол поворота ротора относительно внутренней рамки; A, C - главные моменты инерции ротора; A_1, B_1, C_1 - главные моменты инерции внутренней рамки; A_2 - момент инерции внешнего кольца; m_1, m_2, m - масса ротора, внутренней и внешней рамки; z_1^0, z_2^0 - координаты центров масс ротора и внутренней рамки, $M_{\text{общ}} = m + m_1 + m_2$, $Ml = m_1 z_1^0 + m_2 z_2^0$, $z = z(t)$ - закон движения платформы вдоль вертикальной оси.

Координаты φ и ψ являются циклическими, рассматриваемая система при отсутствии внешних сил имеет циклические интегралы

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = p_\varphi = \text{const}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = [(A+B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2 + C\cos^2\theta]\dot{\psi} + C\cos\theta\dot{\varphi} = p_\psi = \text{const}.$$

Определяем функцию Рауса

$$R = T - \Pi - \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} = \frac{1}{2}M_{\text{общ}}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}(A + A_1)\dot{\theta}^2 +$$

$$+Ml\dot{z}\sin\theta\dot{\theta} - Mgl(1 - \cos\theta) - M_{\text{общ}}z(t)g -$$

$$-\frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{2((A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2)} - \frac{p_\varphi^2}{2C}.$$

Находим

$$\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}} = (A + A_1)\dot{\theta} + Ml\dot{z}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial R}{\partial\theta} = Ml\dot{z}\cos\theta\dot{\theta} - \sin\theta\left\{-\frac{p_\psi - p_\varphi\cos\theta}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(p_\varphi - \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)(A + B_1 - C_1)\cos\theta}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2}\right) + Mgl\right\}.$$

Предположим, что при повороте внутренней рамки возникает момент вязкого трения

$$M_\theta = -k\dot{\theta}, \quad k = \text{const} > 0.$$

Составим уравнения движения по переменной θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial\theta} = M_\theta, \tag{2}$$

или

$$(A + A_1)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} = -M\ddot{z}l\sin\theta - \sin\theta\left\{-\frac{p_\psi - p_\varphi\cos\theta}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(p_\varphi - \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)(A + B_1 - C_1)\cos\theta}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2}\right) + Mgl\right\}. \tag{3}$$

Введем функции

$$W^0(\theta, p_\psi, p_\varphi) = \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)}{2((A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2)} - \frac{1}{2}Mgl\cos\theta,$$

$$W(t, \theta, p_\psi, p_\varphi) = -M\ddot{z}l\cos\theta + W^0(\theta, p_\psi, p_\varphi).$$

Из уравнения (3) получаем, что гироскоп может совершать стационарные движения, в которых

$$\theta = \theta_0, \ \theta_0 = 0 \text{ или } \Pi, \ \dot{\theta} = 0, \ p_\varphi = p_\varphi^0 = \text{const}, \ p_\psi = p_\psi^0 = \text{const}. \quad (4).$$

Эти две ветви стационарных движений совпадают с такими же ветвями стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе в случае неподвижной платформы,

$$\frac{\partial W}{\partial \theta}=\frac{\partial W^0}{\partial \theta}=0 \ \text{ при } \ \theta=0,\Pi.$$

Теорема позволяет определить достаточные условия асимптотической устойчивости множества стационарных движений (4) по $\dot\theta$ и θ.

В случае стационарных движений

$$\theta=\theta_0,\ \theta_0=0,\ \dot\theta=0,\ p_\varphi=p_\varphi^0=\mathrm{const},\ p_\psi=p_\psi^0=\mathrm{const} \qquad (5)$$

эти условия являются следующими

$$0<d_0\le d(t)=-\frac{p_\psi-p_\varphi}{C_1+A_2}\cdot\left(p_\varphi-\frac{(p_\psi-p_\varphi)(A+B_1-C_1)}{C_1+A_2}\right)+$$
$$+Mgl+M\ddot z l\le d_1,$$

где d_0, d_1 - const,

$$0<k_0\le 2kd-(A+A_1)M\,\ddot z\, l\le k_1,$$

где k_0, k_1 - const.

В случае стационарных движений

$$\theta=\theta_0,\ \theta_0=\Pi,\ \dot\theta=0,\ p_\varphi=p_\varphi^0=\mathrm{const},\ p_\psi=p_\psi^0=\mathrm{const} \qquad (6)$$

условия асимптотической устойчивости множества стационарных движений (6) по $\dot\theta,\theta$ являются следующими

$$0<d_0\le d(t)=-\frac{p_\psi+p_\varphi}{C_1+A_2}\cdot\left(p_\varphi+\frac{(p_\psi+p_\varphi)(A+B_1-C_1)}{C_1+A_2}\right)+$$
$$+Mgl+M\ddot z l\le d_1,$$

где d_0, d_1 - const,

$$0<k_0\le 2kd-(A+A_1)M\,\ddot z\, l\le k_1,$$

где k_0, k_1 - const.

В случае неподвижной платформы рассматриваемая система имеет третью ветвь стационарных движений, которые определяются следующим соотношением [2]

$$\left.\frac{\partial W}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0\ne0,\Pi}=0 \iff \theta=\theta_0:\ -\frac{p_\psi-p_\varphi\cos\theta_0}{(A+B_1)\sin^2\theta_0+C_1\cos^2\theta_0+A_2}\times$$
$$\times\left(p_\varphi-\frac{(p_\psi-p_\varphi\cos\theta_0)(A+B_1-C_1)\cos\theta_0}{(A+B_1)\sin^2\theta_0+C_1\cos^2\theta_0+A_2}\right)+Mgl=0,$$
$$\dot\theta=0,\ p_\varphi=p_\varphi^0=\mathrm{const},\ p_\psi=p_\psi^0=\mathrm{const}. \qquad (7).$$

Для случая подвижной платформы такое стационарное движение будет существовать, если в осях внутренней рамки действует переменный момент

$$M_\theta^k=M\ddot z l\sin\theta_0.$$

Допуская действие такого момента, получаем, что уравнения движения системы по переменной θ будут иметь следующий вид

$$(A+A_1)\ddot\theta+k\dot\theta=$$
$$=M\ddot z l(\sin\theta_0-\sin\theta)-\sin\theta\left\{-\frac{p_\psi-p_\varphi\cos\theta}{(A+B_1)\sin^2\theta+C_1\cos^2\theta+A_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(p_\varphi-\frac{(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)(A+B_1-C_1)\cos\theta}{(A+B_1)\sin^2\theta+C_1\cos^2\theta+A_2}\right)+Mgl\right\}.$$

Применяя теорему из [1], получаем следующие достаточные условия условной асимптотической устойчивости стационарных движений (7) (то есть асимптотической устойчивости по $\dot\theta,\theta$ при условии, что циклические постоянные не возмущаются, $p_\varphi=p_\varphi^0=\mathrm{const}$, $p_\psi=p_\psi^0=\mathrm{const}$):

$$0<a_0\le M\ddot z l\cos\theta_0+\sin\theta_0\left.\frac{\partial^2W^0}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}\le a_1,$$

где a_0, a_1 - const,

$$0<b_0\le\frac{M\,\ddot z\, l\cos\theta_0}{M\ddot z l\cos\theta_0+\sin\theta_0\left.\frac{\partial^2W^0}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}}+2k\le b_1,$$

где b_0, b_1 - const.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 96-01-01067).

Литература

1. Андреев А.С., Демина М.В. Об устойчивости стационарных движений неавтономных лагранжевых систем. РАН, ПАНИ, НИИРЭК. Серия "Проблемы исследований Вселенной". Вып.20 "Проблемы пространства, времени, тяготения". Сб.научн.ст.Часть 2. Политехника. С-Петербург, 1997.С.108-117.

2. Рубановский В.Н., Степанов С.Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ. 1969. Т.33. Вып.5. С.904-912.

КРАТНОСТИ ХАРАКТЕРОВ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ МНОГООБРАЗИЯ AN_2

А.Джамбруно (Университет в Палермо (Италия)), С.П.Мищенко, М.В.Зайцев (Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова)

В работе продолжены исследования числовых характеристик многообразий алгебр Ли в случае нулевой характеристики основного поля. Основным результатом является пример многообразия со сверхполиномиальным ростом кодлины, но с кратностями, ограниченными полиномиальной функцией.

Предполагается знакомство читателя с основами теории представлений симметрической группы и ее использованием при изучении многообразий линейных алгебр. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $xyz = ((xy)z)$. А также еще раз напоминаем, что основное поле F имеет нулевую характеристику.

Обозначим через $P_n(V)$ подпространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ в относительно свободной алгебре $L(X, V)$ многообразия V алгебр Ли. На этом пространстве естественным образом задано действие симметрической группы S_n.

При любом n модуль $P_n(V)$ раскладывается в прямую сумму неприводимых модулей группового кольца FS_n. Число неприводимых слагаемых в этой сумме обозначим $l_n(V)$. Будем называть эту числовую характеристику кодлиной многообразия V. Обозначим через $t_n(V)$ число неизоморфных неприводимых слагаемых в разложении модуля $P_n(V)$ в сумму неприводимых. Эту числовую характеристику назовем типом многообразия V. Кроме того, для разбиения λ числа n обозначим через m_λ число изоморфных неприводимых слагаемых, соответствующих этому разбиению. Понятно, что выполняется следующее равенство $l_n(V) = \sum_\lambda m_\lambda$, причем, число ненулевых слагаемых этой суммы равно $t_n(V)$.

Одним из классов алгебр Ли, которые строением полилинейных частей соответствующих многообразий подобны ассоциативному случаю, является класс API-алгебр. В работе [1] двух последних авторов показано, что для любого многообразия API-алгебр Ли (так называемых, многообразий ассоциативного типа) последовательность кодлин растет как полиномиальная функция (это полностью соответствует ассоциативному случаю). В то же время приведены примеры многообразий алгебр Ли, для которых рост последовательности кодлин является сверхполиномиальным. Однако, для приведенных примеров такой большой рост последовательности кодлин достигается за счет роста кратностей характеров неприводимых модулей. То есть уже некоторые кратности имеют сверхполиномиальный рост. В данной работе приводится пример многообразия, кодлина которого имеет сверхполиномиальный рост, в то время как кратности каждого неприводимого модуля ограничены полиномиальной функцией. То есть сверхполиномиальность кодлины достигается за счет числа различных неприводимых неизоморфных модулей, а не за счет вклада одной кратности, как было во всех более ранних примерах.

Основным объектом исследований данной работы является многообразие AN_2, которое определяется следующим тождеством

$$(x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6) = 0.$$

Более двадцати лет назад это многообразие было подробно исследовано И.Б.Воличенко. В работах [2-3] было доказано, что многообразие AN_2 является шпехтовым, имеет сверхэкспоненциальный рост последовательности $(\dim P_n(AN_2)), n = 1, 2, \ldots,$ коразмерностей вербального идеала, а также другие свойства этого многообразия. Например, такое: любое собственное подмногообразие многообразия AN_2 имеет экспоненциальный рост. Позже, после возникновения понятия многообразия ассоциативного типа (см. статью [4]), стало ясно, что из работы [3] следует также экстремальность по отношению и к этому свойству. То есть само многообразие AN_2 не является многообразием ассоциативного типа, а его любое собственное подмногообразие уже имеет ассоциативный тип.

Для более подробного ознакомления отсылаем читателей к указанным работам.

При доказательстве нашего результата использован следующий результат из работы [3]. Рассмотрим подпространство Q_n в $P_{n+3}(AN_2)$, порожденное элементами вида

$$x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{p(1)}x_{p(2)}\cdots x_{p(n)},$$

где p перестановка из симметрической группы S_n. Пространство Q_n естественным образом превращается в S_n–модуль. В предложении 2 работы [3] установлено, что в разложении модуля Q_n в прямую сумму неприводимых нет изоморфных слагаемых, кроме того, присутствуют неприводимые модули соответствующие всем диаграммам Юнга.

Одним из основных результатов данной работы является

Теорема 1. *Кратность m_λ неприводимого модуля для любого разбиения λ числа n в разложении полилинейной части $P_n(AN_2)$ не превосходит число n^9.*

Кроме этого нового свойства многообразия AN_2, на основе исследования полилинейной части $P_n(AN_2)$ установлено, что в ее разложении в сумму неприводимых модулей присутствуют модули, соответствующие почти всем разбиениям числа n. Более точно, установлено, что возможно нулевые слагаемые соответствуют только не более $2n$ разбиениям числа n. На основе этого исследования получена вторая теорема, перед формулировкой которой поясним свойство эквивалентности функций натурального аргумента.

Скажем, что две функции $f(n)$ и $g(n)$ натурального аргумента n асимптотически эквивалентны, если их отношение стремится к 1 при стремлении аргумента n в бесконечность. Обозначим это свойство так: $f(n) \sim g(n)$.

Теорема 2. *Для кодлины и типа многообразия AN_2 выполнены следующие условия:*

$$\ln(l_n(AN_2)) \sim \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}, \ \ln(t_n(AN_2)) \sim \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Таким образом, кодлина и тип асимптотически равны экспоненциальной функции вида $\exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})$. Следовательно, эти числовые функции имеют промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным рост, то есть растут быстрее любого многочлена, но медленней любой показательной функции. В то же время, как отмечалось выше, любое собственное подмногообразие многообразия AN_2 является многообразием ассоциативного типа, а следовательно, имеет согласно работе [1] полиномиальную кодлину. Поэтому из теоремы 2 получаем

Следствие. *Многообразие AN_2 является минимальным многообразием со сверхполиномиальным ростом кодлины.*

Результаты работы получены в период совместного пребывания в Палермо в апреле 1998 года по приглашению первого из авторов.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 96-01-00146 и 98-01-01020.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев М.В., Мищенко С.П. О полиномиальности роста кодлины многообразия алгебр Ли//Алгебра и логика (в печати).

2. Воличенко И.Б. О многообразиях алгебр Ли AN_2 над полем характеристики нуль// ДАН БССР. 1981. Т. 25. N 12. С. 1063 - 1066.

3. Воличенко И.Б. Многообразия алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль// Сибирский математический журнал. 1984. T.XXV. N 3. С.40-54.

4. Мищенко С.П. О некоторых классах алгебр Ли//ВМГУ. Серия Математика. Механика. 1992. N 3. С. 55 - 57.

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ БИРКГОФА-ХИНЧИНА[5]

Жданов Д.А.

Определим на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbf{R}}, \mathbf{P})$ измеримый ограниченный стационарный процесс $\xi = (\xi(t))_{t\in\mathbf{R}}$ с и $\mathbf{E}\xi(0) = 0$. Будем считать, что $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t^\xi$, где $\mathcal{G}_t^\xi = \sigma(\xi_s, s \le t)$. Пусть также выполняется условие

$$\int_0^\infty \sqrt{\mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\xi(t)|\mathcal{G}_0)^2\right.}dt < \infty,$$

что обеспечивает (см. лемму 4.2.1 [1]) существование положительной константы

$$v = \left\{2\int_0^\infty \mathbf{E}\xi(0)\xi(t)\ dt\right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Рассмотрим в схеме серий (при $n = 1, 2, \ldots$) на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t\ge 0}, \mathbf{P})$ с $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{G}_{nt}$ семейство процессов $x^n = (x_t^n)_{t\ge 0}$ с

$$x_t^n = x_0 + \sqrt{n}\int_0^t \xi(ng(s) + \alpha_s x_s^n)\ ds + \int_0^t b(\ t, x_s^n, \xi(ns)\ )\ ds \tag{2}$$

с неслучайным начальным условием x_0, детерминированными функциями α_s, $g(s)$, $b(t, x, z)$.

Основной целью этой работы является изучение предельного поведения распределений семейства случайных процессов $x^n = (x_t^n)_{t>0}$ при $n \to \infty$, построение аппроксимации второго порядка (диффузионной аппроксимации) для такого рода процессов. Следует заметить, что различными вариантами диффузионной аппроксимации занимались многие авторы (см., например, [1],[2] и имеющуюся там библиографию). Результаты настоящей работы – некоторое обобщение принципа инвариантности для стационарных процессов. Отличием является введение коэффициентов - неслучайных функций

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 97-01-00967).

и возмущения, зависящего от самого процесса. С другой стороны, приводимая ниже теорема – обобщение теоремы 2 [2] (в стохастическое уравнение Ито-Вольтерра вводится дополнительное слагаемое, описывающее обратную связь с нормировкой).

Пусть в схеме (2) α_s - интегрируемая, $g(s)$ - строго монотонная непрерывно дифференцируемая функции, $b(t,x,z)$ - измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$|b(t,x,z)| \le L\ , \qquad |b(t_1,x_1,z) - b(t_2,x_2,z)| \le L(|x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{\alpha}),$$

с некоторыми константами $L>0$ и $\alpha>0$.

Теорема. *Для процессов x^n при $n\to\infty$ имеет место слабая сходимость распределений*

$$(x_t^n)_{t\ge 0} \ \xrightarrow{\mathcal{L}}\ \left(\int_0^t \frac{a}{\sqrt{g'(s)}}\, dW_s - \mathbf{E}\xi^2(0)\int_0^t \frac{\alpha_s}{g'_s}\, ds + \overline{x}_t\right)_{t\ge 0}, \tag{3}$$

где $\overline{x}_t$ решение уравнения Вольтерра

$$\overline{x}_t = x_0 + \int_0^t \mathbf{E}b(t,\overline{x}_s,\xi(0))\ ds,$$

a - константа из (1), $W=(W_t)_{t\ge 0}$ - винеровский процесс.

Доказательство. Обозначим $u_s^n = g(s) + \frac{1}{n}x_s^n\alpha_s$. Тогда

$$du_s^n = dg(s) + \frac{x_s^n}{n}\, d\alpha_s + \frac{\alpha_s}{\sqrt{n}}\xi(nu_s^n)\ ds \tag{4}$$

и $ds = (g'(s))^{-1}(du_s^n - \frac{1}{n}x_s^n\, d\alpha_s - n^{-1/2}\alpha_s)dx_s^n$. Подставим это выражение для ds в (2). Получим

$$x_t^n = x_0 + \sqrt{n}\int_0^t \frac{\xi(nu_s^n)}{g'(s)}\, du_s^n - \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^t \xi(nu_s^n)\frac{x_s^n}{g'(s)}\, d\alpha_s - \int_0^t \frac{\alpha_s}{g'(s)}\xi^2(nu_s^n)\ ds$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^t \frac{\xi(nu_s^n)}{g'(s)}\, dB^n(s) + \int_0^t b(\ t, x_s^n, \xi(ns)\ )\ ds, \tag{5}$$

где $B^n(t) = \int_0^t b(\ t, x_s^n, \xi(ns)\ )\ ds$.

Рассмотрим второе слагаемое (5). Докажем сначала, что при $n\to\infty$ имеет место слабая сходимость распределений

$$\left(\sqrt{n}\int_0^t \xi(nu_s^n)\ du_s^n\right)_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(a\,W_{g(t)}\right)_{t\ge 0}, \tag{6}$$

где a определено (1) , $W=(W_t)_{t\ge 0}$ – винеровский процесс.

Для доказательства (6) рассмотрим вспомогательный процесс $G_n(x)$, $-\infty < x < \infty$

$$G_n(x) = \int_0^x \xi(ny)\ dy.$$

По формуле Ито получаем

$$G_n(u_t^n) = \int_0^t \xi(nu_s^n)\ du_s^n.$$

В силу очевидной из (4) и теоремы Пойа сходимости при $n\to\infty$

$$\sup_{0\le s\le t}|u_s^n - g(s)| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \tag{7}$$

слабые пределы $G_n(g(t))$ и $G_n(u_t^n)$ совпадают. С учетом теоремы Биркгофа-Хинчина получаем при $n\to\infty$ слабую сходимость распределений

$$\left(\sqrt{n}\int_0^{g(t)} \xi(ns)\ ds\right)_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(a\,W_{g(t)}\right)_{t\ge 0},$$

что и доказывает (6).

Пусть $\{v^k(s)_{0\le s\le t}\}_{k\ge 1}$ последовательность кусочно-постоянных функций таких, что $\sup_{0\le s\le t}\left|v^k(s) - (g'(s))^{-1}\right| \to 0$ при $k\to\infty$ и $v^k(s) = v_i^k = const$ при $s\in[t_i,t_{i+1})$, где $0=t_0<\ldots<t_k=t$ разбиение отрезка $[0,t]$. Тогда $\forall\epsilon>0\ \exists K$ такое, что $\forall k\ge K$ выполняется

$$\sup_{0\le s\le t}\left|v^k(s) - (g'(s))^{-1}\right| < \epsilon$$

и, применяя интегрирование по частям, с учетом (6), получаем

$$\left|\sqrt{n}\int_0^t \left(\frac{1}{g'(s)} - v^k(s)\right)\xi(nu_s^n)\ du_s^n\right|$$

$$= \left| \sqrt{n} \left(\frac{1}{g'(s)} - v^k(s) \right) \int\limits_0^s \xi(nu_y^n)\, du_y^n \,\Big|_0^t - \right.$$

$$\left. -\sqrt{n} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \xi(nu_y^n)\, du_y^n\, d\left(\frac{1}{g'(s)} - v^k(s) \right) \right|$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \left| a \left(\frac{1}{g'(s)} - v^k(s) \right) W_{g(t)} - a \int\limits_0^t W_{g(s)}\, d\left(\frac{1}{g'(s)} - v^k(s) \right) \right| \le a\epsilon |W_g(t)|\,. \tag{8}$$

В силу (6) имеет место при $n \to \infty$ слабая сходимость распределений

$$\left(\sqrt{n} \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^k(s)\xi(nu_s^n)\, du_s^n \right)_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(a \sum_{i=0}^{k-1} v_i^k(s)[W_{g(t_{i+1})} - W_{g(t_i)}] \right)_{t>0},$$

где a определено (1). В силу произвольности ϵ получаем слабую сходимость распределений при $n \to \infty$

$$\left(\sqrt{n} \int\limits_0^t \frac{1}{g'(s)} \xi(nu_s^n)\, du_s^n \right)_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(a \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{g'(s)}}\, dW_s \right)_{t\ge 0}. \tag{9}$$

Рассмотрим третье слагаемое (5).

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^t \xi(nu_s^n) x_s^n\, d\alpha_s = \int\limits_0^t \xi(nu_s^n) \left(x_0 \int\limits_0^s \xi(nu_p^n)\, dp \right) d\alpha_s$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^t \xi(nu_s^n) B^n(s)\, d\alpha_s\,. \tag{10}$$

Аналогично случаю второго слагаемого можно показать, что слабые пределы $\int_0^t \xi(nu_s^n)\, ds$ и $\int_0^t \xi(ns)\, ds$ совпадают. Применяя принцип усреднения Боголюбова, получаем

$$\int\limits_0^t \xi(nu_s^n)\, ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и, следовательно, с учетом ограниченности процесса ξ,

$$\int\limits_0^t \xi(nu_s^n) \cdot \left(x_0 + \int\limits_0^s \xi(nu_p^n)\, dp \right) d\alpha_s \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0. \tag{11}$$

По неравенству Чебышева, с учетом ограниченности функции $b(x, y, z)$, получаем

$$\mathbf{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^t \xi(nu_s^n) B^n(s)\, d\alpha_s > \epsilon \right) \le$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}\epsilon} \mathbf{E} \left(\int\limits_0^t \xi(nu_s^n) B^n(s)\, d\alpha_s \right) \le \frac{C\alpha_t}{\sqrt{n}\epsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{12}$$

Из (10) – (12) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^t \xi(nu_s^n) \frac{x_s^n}{g'(s)}\, d\alpha_s \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0. \tag{13}$$

Рассмотрим четвертое слагаемое (5). Докажем сначала, что при $n \to \infty$

$$\int\limits_0^t g'(s)\xi^2(nu_s^n)\, ds \xrightarrow{\mathbf{P}} g(t)\, \mathbf{E}\xi^2(0). \tag{14}$$

Для доказательства (14) рассмотрим вспомогательный процесс $T_n(x)$, $-\infty < x < \infty$

$$T_n(x) = \int\limits_0^x \xi^2(ny)\, dy.$$

По формуле Ито получаем

$$T_n(u_s^n) = \int\limits_0^t g'(s)\xi^2(nu_s^n)\, ds + \frac{1}{n} \int\limits_0^t \xi^2(nu_s^n) x_s^n\, d\alpha_s + \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^t \alpha_s \xi^3(nu_s^n)\, ds$$

$$+ \frac{1}{n} \int\limits_0^t \xi^2(nu_s^n) \alpha_s\, dB^n(s).$$

С учетом теоремы Пойа очевидно, что при $n \to \infty$

$$\sup_{0\le s\le t} \left| T_n(u_s^n) - \int\limits_0^t g'(s)\xi^2(nu_s^n)\, ds \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Исходя из принципа усреднения Боголюбова, с учетом (7), очевидно получаем (14).

Пусть $\{h^k(s)_{0\le s\le t}\}_{k\ge 1}$ последовательность кусочно-постоянных функций таких, что

$$\sup_{0\le s\le t} \left| h^k(s) - \frac{\alpha_s}{(g'(s))^2} \right| \to 0, \quad k \to \infty$$

и $h^k(s) = h_i^k = const$ при $s \in [t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_0 < \ldots < t_k = t$ разбиение отрезка $[0,t]$.

Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists K$ такое, что $\forall k \geq K$ выполняется

$$\sup_{0\leq s\leq t}\left|h^k(s) - \frac{\alpha_s}{(g'(s))^2}\right| < \epsilon.$$

и

$$\left|\int_0^t \left(\frac{\alpha_s}{(g'(s))^2} - h^k(s)\right) g'(s)\xi^2(nu_s^n)\ ds\right| \leq \epsilon \int_0^t g'(s)\xi^2(nu_s^n)\ ds. \tag{15}$$

Для

$$\int_0^t h^k(s)\xi^2(nu_s^n)\ ds = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^k(s)g'(s)\xi^2(nu_s^n)\ ds$$

с учетом (13) справедливо, что при $n \to \infty$

$$\int_0^t h^k(s)\xi^2(nu_s^n)\ ds \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi^2(0)\int_0^t h^k(s)\ dg(s). \tag{16}$$

В силу (14), (15) и произвольности ϵ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^t \frac{\alpha_s}{g'(s)}\xi(nu_s^n)\ ds \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi^2(0)\int_0^t \frac{\alpha_s}{g'(s)}\ ds. \tag{17}$$

Рассмотрим последнее слагаемое (5). Обозначим

$$\Delta_t^n = \sup_{t\leq T}\left|x_0 + \int_0^t b(t, x_s^n, \xi(ns))ds - \overline{x}_t\right|.$$

Тогда

$\Delta_t^n \leq \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t [b(t,x_s^n,\xi(ns)) - b(t,\overline{x},\xi(ns))]\,ds\right| +$

$+\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t [b(t,\overline{x}_s,\xi(ns)) - b(t,\overline{x},\xi(0))]\,ds\right| \leq$

$\leq C\int_0^t \Delta_s^n\ ds + \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t [b(t,\overline{x}_s,\xi(ns)) - b(t,\overline{x},\xi(0))]\,ds\right|.$

Пусть

$$\psi_T^n(t) = \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t [b(t,\overline{x}_s,\xi(ns)) - \mathbf{E}b(t,\overline{x},\xi(0))]\,ds\right|.$$

По теореме 9.6.1 [4] при всех $t \geq 0$

$$\mathbf{P} - \lim_{n\to\infty}|\psi_T^n(t)| = 0.$$

В силу того, что $b(t,x,z)$ удовлетворяет условию Липшица по t, x

$$\mathbf{P} - \lim_{n\to\infty}\sup_{t\leq 1}|\psi_T^n(t)| = 0.$$

Значит,

$$\mathbf{P} - \lim_{n\to\infty}\sup_{t\leq T}|\psi_T^n(t)| = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\Delta_t^n \leq C\int_0^t \Delta_s^n\ ds + \sup_{t\leq T}|\psi_T^n(t)|.$$

Следовательно, по лемме Гронуолла-Беллмана, имеет место сходимость при $n \to \infty$

$$x_0 + \int_0^t b(t, x_s^n, \xi(ns))ds \xrightarrow{\mathbf{P}} \overline{x}_t. \tag{18}$$

Сопоставляя (5), (9), (13), (17) и (18), получаем сходимость (3). Теорема доказана.

Автор выражает признательность Бутову А.А. за внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник ИНТ: Современные проблемы математики. Фундаментальное направление. Т.45. 1989.

2. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.:Наука, 1979. 424 с.

3. *Клепцына М.Л.* Принцип усреднения и диффузионная аппроксимация для уравнений Вольтерра // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. Вып. 2. С. 429-438.

4. *Liptser R.Sh., Shiryaev A.N.* Theory of martingales. Dordrecht: Klüwer, 1989. 800 p.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТИ С УПРАВЛЕНИЕМ ПРОЦЕССОМ ОБМЕНА ИНФОРМАЦИЕЙ

Е.А.Ковалев, Д.В.Глотов

Исследование и разработка методов управления процессом обмена информации в сетях связи и сетях передачи данных является одной из наиболее важных и в то же время наименее изученных проблем, возникающих при проектировании сетей. Управление процессом обмена информации разделяют на управление интенсивностью передаваемых по сети потоков и распределением потоков в сети. Управление интенсивностью потоков осуществляется ограничением потоков в каждом узле коммутации сети, а распределение потоков реализуется управлением путями передачи информации.

В качестве математический модели сети с управлением процессом обмена информации рассмотрим открытую сеть массового обслуживания (СеМо) с M узлами, в которую извне пуассоновскими потоками поступают два типа сообщений: заявки и управляющие команды (УК), причем в i-й узел заявки поступают с интенсивностью Λ_i, а УК - с интенсивностью λ_i. Предполагается, что обслуживание в узлах экспоненциальное с интенсивностью μ_i, $i = 1, 2, \cdots, M$. После окончания обслуживания в i-м узле заявка поступает в j-й узел как заявка с вероятностью p_{ij} или как УК с вероятностью q_{ij}, либо с вероятностью $p_{io} = 1 - \sum_{y=1}^{M}(p_{ij} + q_{ij})$ покидает сеть. Обработка управляющих команд принципиально отличается от обслуживания заявок. УК, поступающая в пустой узел, никаких действий не производит и мгновенно покидает сеть. Если в i-м узле имеются заявки, то поступившая УК с вероятностью r_{ij} перемещает одну любую заявку из узла i в узел j, либо с вероятностью $r_{io} = 1 - \sum_{j=1}^{M} r_{ij}$ удаляет одну заявку из сети. Матрицы $P = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, \cdots, M$, $Q = (q_{ij})$, $i, j = 1, 2, \cdots, M$, $R = (r_{ij}), = 1, 2, \cdots, M$; $j = 0, 1, \cdots, M$ являются матрицами переходов цепи Маркова. Будем считать, что P,Q и R такие,

что каждая заявка, поступившая в сеть, гарантированно покинет сеть в вероятностью 1.

Составим уравнения баланса для потоков заявок и УК, циркулирующих в сети. Обозначим через ψ_i интенсивность потока заявок, а через φ_i - интенсивность потока УК, поступающих в i-й узел.

Очевидно, что поток УК, поступающих в i-й узел, складывается из внешнего потока УК и потоков обслуженных заявок, поступающих в i-узел как УК. Таким образом,

$$\varphi_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j q_{ji}, \quad i = 1, 2, \cdots, M, \tag{1}$$

$$\text{где} \quad \alpha_j = \frac{\psi_j}{\mu_j + \varphi_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, M. \tag{2}$$

Аналогично, поток заявок, поступающих в i-й узел, складывается из: 1) внешнего потока заявок; 2) внешнего потока УК в j-й узел, при условии, что она переместит из него одну заявку в i-й узел с вероятностью r_{ji}; 3) потока обслуженных заявок в j-м узле, при условии, что они перейдут в i-узел как заявки; 4) потока обслуженных в каждом узле заявок, при условии, что обслуженная заявка перейдет в j-й узел как УК и переместит одну заявку в i-й узел. Учитывая все вышеизложенное, для ψ_i имеем

$$\psi_i = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(\lambda_j r_{ji} + \mu_j p_{ji}) + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \mu_k \sum_{j=1}^{M} \alpha_j q_{kj} r_{ji}, \quad i = 1, 2, \cdots, M. \tag{3}$$

Преобразовав правую часть (3), с учетом (2), получим:

$$\psi_i = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j p_{ji} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \varphi_j r_{ji}, \quad i = 1, 2, \cdots, M. \tag{4}$$

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t) = (n_1(t), \cdots, n_M(t)$, где $n_i(t)$-число заявок в i-м узле в момент времени t. При сделанных выше предположениях n(t) представляет собой марковский процесс.

Обозначим через 1_k вектор размерности M, у которого на k-ом месте находится единица, а все остальные компоненты равны нулю.

Предположим, что существует $P(n) = \lim_{t \to \infty} P(n(t) = n)$, где $n = (n_1, \cdots, n_M)$, тогда $P(n)$ удовлетворяет следующей системе уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{M}(I(n_i > 0)(\lambda_i + \mu_i) + \Lambda_i)P(n) = \sum_{i=1}^{M} I(n_i > 0)\Lambda_i P(n - 1_i) +$$

$$+ \sum_{j-1}^{M}\sum_{i-1}^{M} I(n_i > 0)(\lambda_j r_{ji} + \mu_j p_{ji})P(n+1_j-1_i) + \sum_{j-1}^{M} \lambda_j r_{j0} P(n+1_j) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j (p_{j0}+$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} I(n_i = 0)q_{ji})P(n+1_j) + \sum_{k=1}^{M} \mu_k \sum_{j=1}^{M} q_{kj} \sum_{i=1}^{M} I(n_i > 0)r_{ji} P(n+1_k+1_j-1_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \mu_k \sum_{j=1}^{M} q_{kj} r_{j0} P(n + 1_k + 1_j). \qquad (5)$$

Теорема. Если существует неотрицательное решение системы уравнений (1), (3) такое, что $\alpha_i < 1, i = 1, 2, \cdots, M$, то стационарное распределение вероятностей описанной выше сети имеет вид:

$$P(n) = \Pi_{i=1}^{M} \alpha_i^{n_i}(1 - \alpha_i), \qquad (6)$$

а α_i определяется из (1), (2), (3).

Доказательство. Будем искать решение системы уравнений (5) в виде (6), тогда после некоторых преобразований получим:

$$\sum_{i=1}^{M}(I(n_i > 0)(\mu_i + \lambda_i) + \Lambda_i) = \sum_{i=1}^{M} I(n_i > 0)\frac{1}{\alpha_i}(\Lambda_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(\lambda_j r_{ji} + \mu_j p_{ji}) + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \mu_k \sum_{j=1}^{M} \alpha_j q_{kj} r_{ji} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(\lambda_j + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \mu_k q_{kj}) r_{jo} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j (p_{j0} + \sum_{i=1}^{M} I(n_i = 0) q_{ji}).$$

Используя (1), (2), (3), после преобразований имеем:

$$\sum_{i=1}^{M} \Lambda_i = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j \sum_{i=1}^{M} q_{ji} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \varphi_j r_{j0} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j p_{j0}.$$

Учитывая соотношения для p_{ji}, q_{ji}, r_{ji}, получим:

$$\sum_{i=1}^{M}(\Lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu_j p_{ji} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \varphi_j r_{ji}) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(\mu_i + \varphi_i).$$

Последнее равенство в силу (2) и (4) является тождеством. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант 97-01-00967).

О ПОИСКЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ТОЖДЕСТВ

А.В.Кондратьев

В работе рассматривается метод поиска полилинейных тождеств (далее просто тождеств), основанный на технике некоммутативных базисов Грёбнера [1, стр. 33]. Метод ориентирован на реализацию в виде программы для компьютера. Все вычисления осуществляются над полем вычетов по модулю p (p — простое число) F_p, обозначаемого далее как $\mathbb{k}$. Следует отметить, что предлагаемые соображения могут использоваться и для поиска тождеств над полями нулевой характеристики.

Данный метод реализован автором в виде прототипа на языке программирования C++. Основным объектом для счёта автор использовал матричные алгебры, что, разумеется, не исключает исследование произвольных алгебр, задаваемых конечным копредставлением (образующими и соотношениями).

Работа по поиску тождеств делится на две части:

1) Генерирование тождеств.

2) Проверка отношения следования "нового" тождества степени d от заданного семейства ранее имевшихся степени $\leq d$.

1. Генерирование тождеств

Зафиксируем алгебру A, для которой генерируются тождества. В принципе, имеются два случая: A конечномерна или нет. Однако, они объединяются при вероятностном подходе. Пусть $A = \mathbb{k}\langle X|F\rangle$, где X — образующие, F — определяющие соотношения. Пусть g — тождество степени m, тогда оно обнуляется подстановкой любых элементов алгебры. $g(x) = \sum \alpha_I \cdot x_I$, где I — перестановки $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Подставляем вместо x_i элементы нормального базиса $N(A)$ по некоторой выборке $n_I \in N(A)^m$: $g(x) \longrightarrow g(n_I)$. Но, $g(n_I) = 0$ в A, что даёт линейные соотношения на α_I. В идеальном случае следует перебрать все возможные кортежи, что возможно в случае, когда A конечномерна. Решение получающейся однородной системы уравнений даёт все тождества порядка m в A. На практике возможности имеющихся вычислительных средств не дают возможности перебора всех кортежей из m элементов нормального базиса и для интересных конечномерных алгебр. Поэтому имеющийся программный прототип использует вероятностный подход, основанный на генерировании кортежей из m элементов нормального базиса случайным образом. Условием прекращения процесса служит "устойчивая" стабилизация ранга системы линейных соотношений.

2. Проверка следования

Нам понадобится операция получения тождеств следующей степени. Пусть f — тождество степени n от алфавита $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, т.е. $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Добавив к X новую образующую x_{n+1}, получим $n+2$ новых тождеств степени $n+1$:

$$x_{n+1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1 \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_i \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n \cdot x_{n+1}), f(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1}.$$

Имея в виду возможность данной операции, будем в дальнейшем полагать, что все тождества в наборе имеют одинаковую степень.

Пусть имеется набор тождеств $\{f_k\}$ степени $n+1$. Известно, что действие симметрической группы порядка $n+1$ S_{n+1} на данном наборе (т.е. объединение орбит такого действия) даёт $\mathbb{k}$–базис тождеств степени $n+1$. Проблема состоит в том, что данный базис содержит чрезвычайно много соотношений в практически-значимых случаях и возникают трудности с хранением соотношений в памяти компьютера при реализации вычислений. Использование техники базисов Грёбнера позволяет сократить число соотношений переходом от базиса векторного пространства к базису левого идеала L групповой алгебры симметрической группы $\mathbb{k}[S_{n+1}]$. Действительно, если $f_k = \sum \alpha_I \cdot x_I$, где I — перестановка $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, то не сложно определить отображение $f_k \longrightarrow \tilde{f}_k \in \mathbb{k}[S_{n+1}]$, положив $\tilde{f}_k = \sum \alpha_I^{(k)} \cdot \binom{12\ldots n}{I}$ и тогда действие S_{n+1} на индексах x_l есть умножение $\tilde{f}_k$ слева на элементы S_{n+1}, т.е. вместо векторного пространства тождеств степени $n+1$ можно работать с левым идеалом L в $\mathbf{k}[S_{n+1}]$, порождённым $(\tilde{f}_1, \ldots)$, $L = \mathbf{k}[S_{n+1}](\tilde{f}_1, \ldots)$.

Таким образом, вопрос о следовании тождества g степени $n+1$ из набора тождеств $\{f_k\}$ степени $n+1$ равносилен $\tilde{g} \in L$.

Далее вопрос стоит в выборе наиболее удобного представления алгебры $\mathbf{k}[S_{n+1}]$ посредством системы образующих и соотношений, т.е. $\forall\sigma \in S_{n+1}$ записывается в виде произведения выбранной системы образующих. Образующие порождают свободную алгебру T, а $\mathbf{k}[S_{n+1}] \cong T/I$, где I — двусторонний идеал, порождённый соотношениями симметрической группы. Для работы с $\mathbf{k}[S_{n+1}]$ идеал I задаётся левым базисом Грёбнера. Этот базис конечен, т.к. алгебра $\mathbf{k}[S_{n+1}]$ конечномерна (теорема Ж.Левина [2, стр.462, сл.2 из т.3]). Осталось позаботиться о выборе системы образующих и соотношений, при которой базис Грёбнера идеала I (= базис I как левого T–модуля) содержит минимальное число соотношений. Нетрудно видеть, что из теоремы Ж.Левина следует зависимость числа элементов одностороннего базиса Грёбнера от числа образующих, а именно $\dim I_T = \dim A \cdot (n-1) + 1$ при использовании стандартной градуировки [3]. Таким образом, вопрос сводится к выбору наименьшей системы образующих. Такой системой является транспозиция и цикл наибольшей длины. Тогда левый базис Грёбнера $\mathbf{k}[S_{n+1}]$ будет состоять из $(n+1)!+1$ соотношений. Исходные соотношения для I могут быть выбраны такими [4]:

$$s^n - 1, t^2 - 1, (s{\cdot}t)^{n-1} - 1, (t{\cdot}s^{n-1}{\cdot}t{\cdot}s)^3 - 1,$$

$$(t{\cdot}s^{j\cdot(n-1)}{\cdot}t{\cdot}s^j)^2 - 1,\ 2 \le j \le \left[\frac{n}{2}\right],$$

где s обозначает цикл, а t — транспозицию.

Далее необходимо построить левый базис Грёбнера I из этой системы соотношений. Левый базис Грёбнера идеала $\tilde{L}$ в T, соответствующего L в $\mathbf{k}[S_{n+1}]$, получается из базиса Грёбнера I добавлением $\{\tilde{f}_k\}$ с последующей канонизацией [3].

Теперь, согласно второй теореме об изоморфизме и по определению базиса Грёбнера, проверка $\tilde{g} = 0 \bmod L$ (т.е. следование g из заданного набора тождеств) сводится к последовательности правых редукций прообраза $\tilde{g}$ в T относительно $\tilde{L}$.

Литература

[1] Уфнаровский В.А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 57. М., 1990. С. 5-177.

[2] Levin J. Free modules over free algebras and free group algebras// Transactions of the AMS. Vol. 145. Nov. 1969. P. 455-465.

[3] Kondratyev A. On Zero Divisor Recognition / ISSAC'96 poster session, Zurich.

[4] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.– М.: Наука, 1980.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДОВ АДАМСА [6]

Куликов Г.Ю., Коноплянов А.В., Шиндин С.К.

1.Введение

В настоящее время контроль точности численного интегрирования дифференциальных уравнений методами Адамса осуществляется на основе вычисления локальной ошибки [1]–[3]. К сожалению, эта величина хоть и является неплохим критерием для управления размером шага, но, на самом деле, она не позволяет судить о величине реальной ошибки приближенного решения.Таким образом, нашей задачей является построение эффективного алгоритма вычисления глобальной ошибки для методов Адамса.

2.Вычисление главного члена локальной погрешности

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{1a}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1b}$$

с достаточно гладкой функцией $g : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$. Для численного решения системы (1) введем на отрезке произвольную неравномерную сетку

$$w_\tau = \{t_{k+1} = t_k + \tau_k,\ k = 0, 1, \ldots, K-1,\ t_K = t_0 + T\}$$

с диаметром $\tau = \max\limits_{0 \le k \le K-1} \{\tau_k\}$ и применим неявный l-шаговый метод Адамса

$$x_{k+1} - x_k = \tau_k \sum_{i=0}^{l} b_i(k) g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1. \tag{2}$$

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Министерства общего и профессионального образования (научная программа "Университеты России — фундаментальные исследования", проект № 230) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00006).

коэффициенты $b_i, i = 0, 1, \ldots, l$, метода (2) пересчитываются в каждой точке сетки ω_τ[2,с.366-369]. Мы считаем, что стартовые значения $x_i, i = 0, 1, \ldots, l-1$, заданы.

Введем функцию

$$L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k) - \tau_k \sum_{i=0}^{l} b_i(k) g(t_{k+1-i}, x(t_{k+1-i})), \tag{3}$$

$k = 0, 1, \ldots, K-1$, которая называется *погрешностью аппроксимации метода Адамса*. Известно [1]–[3], что l-шаговый метод (2) имеет порядок s тогда и только тогда, когда для любого многочлена $q(t)$ степени не выше s выполняется

$$L(t, q(t), \tau) \equiv 0. \tag{4}$$

Для явных методов Адамса $s = l$, для неявных $s = l + 1$ [2], [3].

Введем обозначения: $x(t_k)$ – значение точного решения задачи (1) в точке t_k, x_k – значение приближенного решения этой задачи, полученного с помощью метода (2), в точке t_k.Тогда, вычитая (2) из (3), имеем

$$x(t_{k+1}) - x_{k+1} = -x(t_k) + x_k + \tau_k \sum_{i=0}^{l} b_i(k) \partial_x g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}) \times$$
$$\times (x(t_{k+1-i}) - x_{k+1-i}) + L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) + \sum_{i=0}^{l} O((x(t_{k+1-i}) - x_{k+1-i})^2), \tag{5}$$

$k = 0, 1, \ldots, K-1$. Обозначим погрешность метода (2) в точке t_k через $\triangle x_{k+1-i} = x(t_{k+1-i}) - x_{k+1-i}$. Предполагая погрешность в точках $t_{k+1-i}, i = 1, 2, \ldots, l$ известной, из (5) мы найдем погрешность метода (2) в точке t_{k+1}

$$\begin{gathered}\triangle x_{k+1} = (E_n - \tau_k b_0(k) \partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} \times \\ \times \Big(\sum_{i=1}^{l} \tau_k b_i(k) \partial_x g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}) \triangle x_{k+1-i} - \\ \triangle x_k + L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) + E_n) + \\ + \sum_{i=0}^{l} O((\triangle x_{k+1-i})^2),\end{gathered} \tag{6}$$

$k = 0, 1, \dots, K-1$. Здесь E_n – единичная матрица размера n.

Положим $\triangle x_{k+1-i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, тогда формула (6) дает погрешность на шаге для метода (2)

$$\triangle \tilde{x}_{k+1} = (E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) + O((\triangle \tilde{x}_{k+1})^2),$$

где $\tilde{x}_{k+1}$–приближенное решение в точке t_{k+1} найденное при условии $x_{k-i} = x(t_{k-i})$, $i = 0, 1, \dots, l-1$. Так как $L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) = O(\tau^{s+1})$ и $\triangle x_{k+1} = O(\tau^{s+1})$, то с точностью до членов более высокого порядка имеем

$$\triangle \tilde{x}_{k+1} \cong (E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} L(t_{k+1}, x(t), \tau_k), \qquad (7)$$

$k = l-1, l, \dots, K-1$.

Соотношение (7) даст локальную ошибку метода (2) с точностью $O(\tau^{2s+2})$. Остается только определить величину $L(t_{k+1}, x(t), \tau_k)$. Из соотношений (3) и (4) имеем

$$L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) = \frac{(-1)^s}{(s+1)!} x^{(s+1)}(t_{k+1}) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{l} ((s+1)\tau_k b_i(k)) (\sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j})^s + (\tau_{k-1} + (s+1)\tau_k b_1(k))\tau_k^s \right) +$$
$$+ O(\tau^{s+2}).$$

Откуда, пренебрегая членами порядка $O(\tau^{s+2})$, окончательно получаем

$$L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) \cong \frac{(-1)^s}{(s+1)!} x^{(s+1)}(t_{k+1}) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{l} ((s+1)\tau_k b_i(k)) (\sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j})^s + (\tau_{k-1} + (s+1)\tau_k b_1(k))\tau_k^s \right). \qquad (8)$$

Тогда из (7) и (8) имеем

$$\Psi(t_k)\tau_k^{s+1} = \frac{(-1)^s}{(s+1)!} x^{s+1}(t_{k+1})(E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{l} ((s+1)\tau_k b_i(k)) (\sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j})^s + (\tau_{k-1} + (s+1)\tau_k b_1(k))\tau_k^s \right), \qquad (9)$$

$k = l-1, l, \dots, K-1$, где $\Psi(t_{k+1})$–коэффициент главного члена разложения локальной погрешности $\triangle \tilde{x}_{k+1}$ в ряд Тейлора по степеням τ_k.

Итак, из (9) следует, что для вычисления главного члена локальной погрешности метода (2) достаточно знать $s+1$–ую производную точного решения задачи (1). Для приближенного вычисления этой величины воспользуемся интерполяционным многочленом Ньютона степени $s+1$, построенным по точкам $g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i})$, $i = 0, 1, \dots, l+1$. Тогда, дифференцируя этот многочлен s раз, мы получаем величину $x_{k+1}^{(s+1)} = x^{s+1}(t_{k+1}) + O(\tau)$. Поэтому для главного члена локальной ошибки из (9) следует

$$\Psi(t_k)\tau_k^{s+1} = \frac{(-1)^s}{(s+1)!} x_{k+1}^{(s+1)} (E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}))^{-1} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{l} ((s+1)\tau_k b_i(k)) (\sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j})^s + (\tau_{k-1} + (s+1)\tau_k b_1(k))\tau_k^s \right), \qquad (10)$$

$k = l-1, l, \dots, K-1$. Таким образом, формула (10) позволяет очень эффективно находить главный член локальной ошибки для методов Адамса, особенно неявных .

3.Вычисление главного члена глобальной погрешности

В предыдущем пункте был предложен эффективный способ вычисления главного члена локальной погрешности методов Адамса. Но, как говорилось ранее, знания только главного члена локальной ошибки недостаточно для решения задачи (1) с заданной точностью. В этом разделе будет дан практический способ оценки глобальной погрешности метода (2). Предложенный способ не требует больших вычислительных затрат и будет особенно эффективен для неявных методов Адамса. Рассмотрим уравнение (6), которое мы вывели для ошибки метода (2). Предполагая теперь погрешность в точках t_{k+1-i}, $i = 1, 2, \dots, l$, известной и пренебрегая членами порядка $O(\tau^{2s})$, мы находим погрешность метода (2) в точке t_{k+1}

$$\begin{gathered}\triangle x_{k+1} \cong \left(E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1})\right)^{-1}\times \\ \times\left(\tau_k \sum_{i=1}^{l} b_l(k)\partial_x g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i})\triangle x_{k+1-i} - \triangle x_k + L(t_{k+1}, x(t), \tau_k)\right),\end{gathered} \tag{11}$$

где $L(t_{k+1}, x(t), \tau_k)$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) \cong \frac{(-1)^s}{(s+1)!}\bar{x}_{k+1}^{(s+1)}\times \\ \times\left(\sum_{i=2}^{l}((s+1)\tau_k b_i(k))(\sum_{j=0}^{i-1}\tau_{k-j})^s + (\tau_{k-1} + (s+1)\tau_k b_1(k))\tau_k^s\right).\end{gathered} \tag{12}$$

В (12) $\bar{x}_{k+1}^{(s+1)}$ обозначает $(s+1)$–ую производную приближенного решения, найденную с помощью многочлена Ньютона, построенного по значениям уточненного приближенного решения. Таким образом, формулы (11) и (12) позволяют вычислять главный член погрешности метода (2) для любой сетки ω_τ с достаточно малым диаметром τ с точностью $O(\tau^{s+2})$.

4.Неявные методы Адамса

До сих пор мы предполагали, что приближенное решение задачи (1), полученное с помощью многошагового метода Адамса, известно точно. Однако для неявных методов это, вообще говоря, не так. В случае применения таких методов для решения нелинейных задач мы получаем (2) в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, точное решение которой, за редким исключением, не может быть найдено. Поэтому очень важно рассмотреть возможность использования приближенных решений задачи (2) для вычисления локальной и глобальной погрешностей метода Адамса.

Обозначим через $\bar{x}_k = \bar{x}_k(N)$ приближенное решение задачи (2), полученное за N итераций некоторым итерационным методом. Тогда, принимая во внимание тот факт, что задача Коши для системы дифференциальных уравнений является частным случаем задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений, мы можем использовать для решения (1) следующие три метода

[4]:

$$x_{k+1}^i = \bar{G}_{k+1-l}^\tau x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{13а}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_{l-1}(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{13б}$$

$$\bar{x}_k = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1; \tag{13в}$$

$$x_{k+1}^i = x_{k+1}^{i-1} - \partial\bar{F}_{k+1-l}^\tau(x_{k+1}^{i-1})^{-1}\bar{F}_{k+1-l}^\tau x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{14а}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_{l-1}(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{14б}$$

$$\bar{x}_k = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1; \tag{14в}$$

$$x_{k+1}^i = x_{k+1}^{i-1} - \partial\bar{F}_{k+1-l}^\tau(x_{k+1}^0)^{-1}\bar{F}_{k+1-l}^\tau x_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{15а}$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad x_{k+1}^0 = \bar{H}_{l-1}(t_{k+1}), \quad k = l-1, l, \ldots, K-1, \tag{15б}$$

$$\bar{x}_k = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{15в}$$

где

$$\bar{G}_{k+1-l}^\tau x = \bar{x}_k + \tau_k\sum_{i=1}^{l} b_i(k)g(t_{k+1-i}, \bar{x}_{k+1-i}) + \tau_k b_0(k)g(t_{k+1}, x),$$

$\bar{F}_{k+1-l}^\tau = E_n - \bar{G}_{k+1-l}^\tau$ и $\bar{H}_{l-1}(t)$ – интерполяционный многочлен Ньютона степени $(s+1)$, построенный по точкам $\bar{x}_j$, $j = k, k-1, \ldots, k-l+1$. Таким образом, все три метода представляют собой комбинацию неявного метода Адамса (2) и одного из следующих итерационных процессов: метода простых итераций, полного или модифицированного метода Ньютона. В силу формул (83), (85) и (87) из [4] и замечаний из статьи [5] для ошибок методов (13)–(15) справедливы соответственно оценки:

$$x(t_k) - \bar{x}_k(N) = O(\tau^\xi), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{16}$$

где $\xi = \min\{N + \zeta - 1, r, s\}$, $\zeta = \min\{l, r, s\}$ и стартовые значения заданы с точностью $O(\tau^r)$, $r \geq 1$;

$$x(t_k) - \bar{x}_k(N) = O(\tau^\xi), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{17}$$

где $\xi = \min\{(\zeta+1)2^N - 2, r, s\}$;

$$x(t_k) - \bar{x}_k(N) = O(\tau^\xi), \quad k = l, l+1, \ldots, K, \tag{18}$$

где $\xi = \min\{(\zeta+1)(N+1)-2, r, s\}$.

Оценки (16)–(18) являются основополагающими для нахождения локальной и глобальной ошибок для методов (13)–(15). Из них следует, что если погрешность итерационного метода есть $O(\tau^{s+2})$, то все результаты изложенные выше, остаются справедливы для комбинированных методов (13)–(15). Поэтому нетрудно видеть, что при $N \geq 3$ для метода (13) и $N \geq 1$ для методов (14),(15) формулы (10) и (11) позволяют вычислять главные члены локальной и глобальной ошибок комбинированных методов, основанных на неявных методах Адамса.

Литература

[1] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

[2] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

[3] *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990.

[4] *Kulikov G.Yu.* Numerical methods solving the semi-explicit differential-algebraic equations by implicit fixed stepsize methods// Korean I. Comput. and Appl. Math. 1997. Vol. 4. № 2. P.281–318.

[5] *Куликов Г.Ю.*Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. № 8. С.73–89.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Лутошкин И.В.

Задачи оптимального управления с промежуточными фазовыми ограничениями являются трудными для качественного исследования и для численного решения. Распространение основного результата теории оптимальных процессов – принципа максимума Л.С. Понтрягина на такие задачи привело к теореме [2], практически неэффективной при решении реальных задач. Существующие методы численного решения задач с фазовыми ограничениями [3] основываются на методе штрафных функций, дискретизации непрерывных по времени фазовых ограничений, методах недифференцируемой минимизации. В первых двух случаях,как правило,трудно получить достаточно точное решение, а в третьем алгоритмы являются очень сложными и трудоемкими.

В [5,6] Горбуновым В.К. предложен метод снятия промежуточных фазовых ограничений, основанный на расширении фазового пространства. Метод заключается в следующем.

Рассмотрим управляемую систему, фазовое состояние которой представляется вектором $x \in E^n$, управляющие воздействия – вектором $u \in E^r$. Эти переменные связаны соотношениями:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T; \tag{1}$$

$$h_i(x(t), u(t)) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, l; \tag{2}$$

$$g_1(x(t_0)) = 0, \qquad g_2(x(T)) = 0; \tag{3}$$

$$u(t) \in U. \tag{4}$$

Требуется минимизировать функционал

$$J = g_0(x(T)). \tag{5}$$

Здесь

$$g_i : E^n \to E^{s_i}, \qquad 0 \le i \le 2;$$

Ограничимся рассмотрением терминального функционала и автономного случая. В качестве допустимых управляющих функций $u(t)$ ограничимся классом кусочно-непрерывных функций со значениями в U.

Будем использовать следующие обозначения: $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ – функция положительной срезки.

Введем "штрафную" функцию системы ограничений (2) в виде

$$P(x,u) = \sum_{i=1}^{l} (h_i^+(x,u))^2.$$

Эта функция равна нулю тогда и только тогда, когда ее аргументы удовлетворяют условиям (2). Она непрерывна и непрерывно дифференцируема по фазовым переменным, причем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P(x,u)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{l} h_i^+(x,u)\frac{\partial h_i}{\partial x}.$$

Считая $f_{n+1}(x,u) = P(x,u)$, определим дополнительную фазовую координату x_{n+1} так, что

$$\dot{x}_{n+1} = f_{n+1}(x(t), u(t)), \qquad x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{6}$$

Очевидно, процесс $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ удовлетворяет ограничениям (2) тогда и только тогда, когда

$$x_{n+1}(T) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, исходная задача с промежуточными фазовыми ограничениями (2) эквивалентна следующей:

Минимизировать функционал (5) при условиях (1), (3), (4), (6), (7).

Заметим, что формальное преобразование задачи часто не уменьшает ее трудности, более того, задача может стать вырожденной (в смысле неинформативности гамильтониана [4]).

Разберем конкретную задачу, и на ее примере рассмотрим два способа решения задач с фазовыми ограничениями.

Возьмем в качестве примера некоторую замкнутую экономику как совокупность двух секторов: производство средств производства и производство предметов потребления. Средства производства (фонды) в обоих секторах будем считать однотипными, их количества в секторах, соответственно, обозначим через x_1, x_2. Коэффициент фондоотдачи в первом секторе равен α и коэффициент амортизации фондов – m. Все величины положительны.

Справедливы следующие уравнения динамики фондов

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha u x_1 - m x_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(1-u)x_1 - m x_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Параметр u здесь управляющий, он может выбираться из условия

$$0 \le u \le 1. \tag{9}$$

Начальное состояние системы задано:

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0. \tag{10}$$

Целью планирования распределения выпускаемых фондов $x_1(t)$ будем считать максимизацию выпуска предметов потребления за период T. Этот выпуск определяется функционалом

$$I(x(T)) = \int_0^T x_2(t)dt. \tag{11}$$

Решение (8)-(11) (при $m = 0$) известно из [7].

Оптимальное управление $u(t)$ в случае $\alpha T > 2$ выглядит следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

где τ определяется из условия $\tau = T - \dfrac{2}{\alpha}$. В случае $\alpha T \le 2$ функционал (11) достигает своего максимума при управлении $u(t) = 0$, $0 \le t \le T$.

Структура этого оптимального управления имеет следующую интерпретацию. Если T достаточно велико, т.е. $T \geq 2/\alpha$, то все создаваемые фонды направляются в первый сектор до момента τ, а после этого все новые фонды перебрасываются во второй сектор, производящий конечную продукцию.

Заметим, что данная модель несет депрессивный характер развития экономики, т.к. $x_1(T) < x_1(0)$ и, таким образом, развитие средств производства является затухающим. Логично было бы дополнить данную модель дополнительными условиями, которые помогли бы преодолеть возникшие трудности.

Для разрешения данной проблемы предлагается ввести следующие фазовые ограничения:

$$x(t) \geq x(0). \tag{12}$$

Смысл этих фазовых ограничений очевиден: требуется, чтобы выпуск обоих секторов не опускался ниже заданного.

Теперь перед нами ставится новая задача: минимизировать функционал (11) при условиях (8), (9), (10), (12), т.е. задача оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Для решения этой проблемы использовались два метода решения задач такого типа:

1) метод снятия фазовых ограничений путем расширения фазового пространства (описан выше);

2) метод свертки критериев лексикографической минимизации.

Отметим, что в обоих случаях задачи оптимального управления решались методом параметризации [1].

Сформулируем задачу, получающуюся при использовании первого метода. Динамика будет описываться следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha u x_1 - m x_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(1-u)x_1 - m x_2, \\ \dot{x}_3 &= ([x_1^0 - x_1(t)]^+)^2 + ([x_2^0 - x_2(t)]^+)^2, \end{aligned} \tag{13}$$

с соответствующими краевыми условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0, \qquad x_3(0) = x_3(T) = 0. \tag{14}$$

Ограничение на управление (9) и целевая функция (11) остаются без изменений. Отметим, что при $m = 0$ решение задачи (9), (11), (13), (14) совпадает с решением задачи (8)-(11).

Как было уже отмечено выше, эту задачу будем решать методом параметризации в классе кусочно-постоянных управлений следующей структуры:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq t < \tau \\ u_2, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, мы получаем конечномерную задачу нелинейного программирования. Эта задача трехмерна (u_1, τ, u_2).

Будем минимизировать функционал

$$J(x(T)) = Cx_3^2(T) - \int_0^T x_2(t)dt, \tag{16}$$

где C – штраф. Динамика системы описывается (6) с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = 1, \qquad x_3(0) = 0. \tag{17}$$

Пусть $T = 10$, $C = 10000$, $\alpha = 0.3$, $m = 0.05$. Задачи Коши интегрируются методом Рунге-Кутта 2-го порядка с шагом интегрирования 0.3. Конечномерная задача решается методом проекции градиента (выход по норме приращения аргумента, $\varepsilon = 0.001$)

u_1	u_2	τ	J	I
0.734	0	4.259	-14.342	14.363

Эта же задача решалась методом параметризации в более широком классе: кусочно-постоянные управления структуры:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq t < \tau_1 \\ u_2, & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ u_2, & \tau_2 \leq t \leq T \end{cases} \tag{18}$$

Эта задача (9), (13), (16), (17) уже пятимерна. Метод решения конечномерной задачи остается тем же самым.

u_1	u_2	u_3	τ_1	τ_2	J	I
0.743	0	0.316	3.722	8.40	-14.417	14.435

Теперь сформулируем задачу, получающуюся при использовании метода свертки. Динамика процесса остается в виде (8), ограничение на управление (9), начальное состояние (10), функционал (11) сворачивается с фазовым ограничением (12) следующим образом:

$$J_\beta = (1-\beta)\int_0^T([x_1(0)-x_1(t)]^+)^2+([x_2(0)-x_2(t)]^+)^2dt-\beta\int_0^T x_2(t)dt. \quad (19)$$

Минимизация функционала (19) (при фиксированном параметре $0 \leq \beta \leq 1$) при условиях (8), (9), (10) происходит методом параметризации в классе (18). Метод интегрирования и шаг интегрирования, а также метод решения конечномерной задачи и условие прекращения вычисления остаются такими же, как и в предыдущей задаче.

На начальном этапе β полагается равным 1, и решается задача (8)-(10), (18), (19), после этого β устремляется к 0, и при каждом β опять же решается задача (8)-(10), (18), (19). Предельное решение будет искомым.

u_1	u_2	u_3	τ_1	τ_2	$J_{0.01}$	I
0.721	0.04	0.457	3.768	8.977	-0.143	14.351

Автор выражает благодарность научному руководителю Горбунову В.К. за помощь при подготовке статьи.

Литература

[1] Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. N2.

С. 292-303.

[2] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.

[3] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1973.

[4] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.

[5] Горбунов В.К. Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления // Дифф. уравнения и их приложения: тезисы докл. 1$^{\text{й}}$ междун. научно-практ. конф. С-Пб, 1996. 58 с.

[6] Горбунов В.К. Снятие фазовых ограничений в задачах оптимального управления. Фрунзе, 1981.

[7] Горбунов В.К. Оптимальное управление: принцип максимума Понтрягина.- Ульяновск: ФМГУ, 1994.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КАПИТАЛОМ [7]

Николаев А.Ф.

1.Введение

Диффузионная модель (B, S) - рынка Блэка-Шоулса (см., например, [1]-[3]) определяется облигацией и набором акций. Процентная ставка по облигации может быть случайной или детерминированной, а ее знак - произвольный. Стоимость любой акции в каждый момент времени является случайной величиной. В условиях этого рынка инвестор стремится достичь реализации некоторых условий в заключительный момент игры. Однако до сих пор неизвестно, каким образом должен вести себя инвестор на рынке, представленном только облигациями, в предположении,что перевод капитала из одной ценной бумаги в другую сопровождается межоперационными задержками. В модели (B, S) - рынка в [1]-[3] поиск оптимальной стратегии инвестора основан на замене меры и сведении уравнений модели к более удобному для анализа виду (приведение распределения к т.н. мартингальной мере). В нашем случае решение не может быть найдено аналогичным образом: процессы, описывающие активы данного рынка не содержат мартингальной части (являются дифференцируемыми). Таким образом, возникает нетривиальная задача поиска оптимального поведения инвестора на рынке, состоящего только из облигаций. В данной работе предполагается описание такого рынка и решение указанной задачи. В статье рассматривается простой случай: рынок состоит из двух облигаций, а инвестор прекращает игру в случайный момент времени.

[7]работа выполнена при поддержке гранта РГНФ N 98-02-02304.

2.Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим модель рынка, состоящего из двух активов - облигаций, и функционирующий в непрерывном времени. Стоимость облигации $B^i, i = 1,2$ в каждый момент времени $t \geq 0$ определяется соотношением

$$dB_t^i = r_t^{(i)} B_t^i dt, \tag{1}$$

где $r_t^{(i)}$ - процент, выплачиваемый по облигации B^i в момент времени $t \geq 0, i = 1,2$. Предположим, что процентная ставка $r^{(i)}$ в каждый момент времени принимает одно из двух возможных значений: $r - a_i, r + a_i$, причем $0 < a_i < r$. Изменение значения процентной ставки $r^{(i)}, i = 1,2$ происходит в случайные моменты времени. Для описания динамики $r^{(i)}$ зафиксируем вероятностное пространство (Ω, F, P). В каждый момент времени $t \geq 0$ процесс $r^{(i)}$ может быть определен соотношением

$$r_t^{(i)} = r + a_i n_t^{(i)}. \tag{2}$$

где процесс $n^{(i)} = (n_t^{(i)})_{t \geq 0}$ в каждый момент времени принимает значение -1 или 1 и описывается следующим образом:

$$n_t^{(i)} = n_0^{(i)} - 2\int_0^t n_{s-}^{(i)} d\pi_s^{(i)}, \tag{3}$$

$$P\{n_0^{(i)} = 1\} = P\{n_0^{(i)} = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $\pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$ - независимые пуассоновские процессы, совершающие скачки с интенсивностями λ_1 и λ_2, причем $n_0^{(1)}$ и $n_0^{(2)}$ являются независимыми случайными величинами (процессы $\pi^{(i)}$ также не зависят от случайных величин $n_0^{(j)}$, $i, j = 1,2$). Заметим, что $n^{(i)}, i = 1,2$ представляют собой процессы типа "телеграфный сигнал".

Представим себе инвестора, который, обладая в начальный момент времени капиталом $X_0 = x$, стремится увеличить его, воспользовавшись возможностями рынка (1) - (2). Так, инвестор мог бы вложить свои средства в покупку облигации B^1. При этом его капитал X увеличивался бы, в соответствии с (1), следующим образом при $X_0 = x$:

$$dX_t = r_t^{(1)} X_t dt. \tag{4}$$

В этом случае доход инвестора в заключительный, необязательно детерминированный, момент игры $T > 0$ составит

$$X_T = x\ exp\left\{\int_0^T r_s^{(1)} ds\right\}.$$

Если бы в начальный момент игры инвестор купил облигации B^2 и на всем ее протяжении хранил свои деньги в этих облигациях, то аналогичным образом его капитал изменялся бы по формуле "сложных процентов" с $X_0 = x$:

$$dX_t = r_t^{(2)} X_t dt \tag{5}$$

и в последний момент времени достиг бы значения

$$X_T = x\ exp\left\{\int_0^T r_s^{(2)} ds\right\}.$$

На самом деле инвестор может управлять своими средствами на рынке. При этом он имеет право одномоментно продать имеющийся в наличии один вид облигаций и купить другой, если считает, что это позволит ему увеличить капитал. Распоряжаясь таким образом средствами на рынке, инвестор добивается того, что его капитал эволюционировал либо в соответствии с (4), либо в соответствии с (5).

Пусть $u = (u_t)_{t\geq 0}$ процесс управления капиталом. При этом будем считать, что $u_t = 0$, если средства вложены в облигации B^1, и $u_t = 1$, если средства вложены в облигации B^2. Тогда эволюция капитала инвестора может быть описана следующим образом:

$$dX_t = [r_t^{(1)} + (r_t^{(2)} - r_t^{(1)})u_t] X_t dt,\ X_0 = x.$$

Предположим, что каждое переформирование портфеля сопровождается потерей некоторой части капитала, связанной с издержками на проведение финансовых операций. Чтобы описать данные потери, рассмотрим процесс межоперационных издержек $C = (C_t)_{t\geq 0}$, стохастический дифференциал которого имеет следующий вид

$$dC_t = \alpha X_{t-} dN_t,\ C_0 = 0, \tag{6}$$

где точечный процесс $N = (N_t)_{t\geq 0}$ с

$$N_t = \sum_{0<s\leq t} |\Delta u_s|,\ N_0 = 0 \tag{7}$$

представляет собой число перераспределений капитала между облигациями до момента времени $t \geq 0$ включительно. Коэффициент $\alpha \in (0, 1)$ определяет, какая часть капитала инвестора покрывает межоперационные издержки при переформировании портфеля. Заметим, что процесс C является неубывающим, поэтому, как и в диффузионной модели (B, S) - рынка, его можно интерпретировать как процесс суммарного потребления до текущего момента времени включительно. Таким образом, изменение капитала инвестора примет следующий вид

$$dX_t = [r_t^{(1)} + (r_t^{(2)} - r_t^{(1)})u_t] X_t dt - dC_t, \quad X_0 = x. \tag{8}$$

Построим целевой функционал, исходя из допущения, что инвестор прекращает игру в некоторый случайный момент времени. Рассмотрим ситуацию, когда этот момент является очередным моментом изменения процентной ставки, интенсивность скачков которой - наименьшая. Не ограничивая общности, считаем, что

$$\lambda_1 \leq \lambda_2, \tag{9}$$

и завершение игры происходит в один из моментов τ_j, где $\{\tau_j\}_{j\geq 0}$, $\tau_0 = 0$, образуют последовательность моментов скачков процесса $r^{(1)}$. Обозначим $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ поток σ-алгебр, удовлетворяющий обычным условиям, $\mathcal{F}_t = \sigma\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)};\ \pi_s^{(1)}, \pi_s^{(2)},\ s \leq t\}$. Образуем множество допустимых управлений

$$U = \{u = (u_t)_{t\geq 0} : u_t(\omega) \in \{0, 1\}, u_t \sim \mathcal{F}_t \text{ измерима}\}. \tag{10}$$

Зафиксируем некоторое целое число $k \geq 0$. Введем

$$R_k(u) = E\, ln X_{\tau_k-}(u) \tag{11}$$

целевой функционал, являющийся средней доходностью на полуинтервале $[0, \tau_k)$. Тогда задача инвестора состоит в поиске допустимого управления u^*, которое максимизирует значение $R_k(u)$ для любого целого $k \geq 0$:

$$R_k(u^*) = sup\{R_k(u), u \in U\}. \tag{12}$$

Имеет место следующая теорема, предлагающая инвестору разные варианты оптимального поведения на рынке (1)-(2) в зависимости от параметров этого рынка.

Теорема. *Пусть выполнено условие (9) и $a_1 \geq a_2$.*

1. Если коэффициент потери капитала α удовлетворяет ограничению

$$\alpha \leq \alpha^*(\lambda_1, \lambda_2) = 1 - exp\left\{-\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right\}, \tag{13}$$

то решением задачи (12) является управление $u^* = (u_t^*)_{t\geq 0}$ с

$$u_t^* = I\{r_t^{(1)} = r - a_1\}, \tag{14}$$

причем

$$R_k(u^*) = ln(x) + \frac{k}{\lambda_1}(r + \frac{a_1}{2}) - (k-1)ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right). \tag{15}$$

2. Если $\lambda_2 \to \infty$, а коэффициент α удовлетворяет следующему ограничению

$$\alpha \geq \lim_{\lambda_2 \to \infty} \alpha^*(\lambda_1, \lambda_2) = 1 - exp\left\{-\frac{a_1}{\lambda_1}\right\}, \tag{16}$$

то оптимальное в смысле (12) управление $u^* = (u_t^*)_{t\geq 0}$ имеет вид

$$u_t^* = I\{r_0^{(1)} = r - a_1\}, \tag{17}$$

причем

$$R_k(u^*) = \begin{cases} ln(x) + \dfrac{rk}{\lambda_1}, & k \text{ четное} \\ ln(x) + \dfrac{rk}{\lambda_1} + \dfrac{a_1}{2\lambda_1}, & k \text{ нечетное} \end{cases} \tag{18}$$

Замечание. Исходя из соображений здравого смысла, на описанном рынке инвестору следует хранить деньги в облигациях B^1, если процентная ставка $r^{(1)}$ принимает максимальное значение; и в облигациях B^2, если $r^{(1)}$ принимает минимальное значение. Согласно первой части теоремы это действительно так, если коэффициент потери капитала α ограничен некоторой константой. Если же α оказывается больше этой константы, то всю игру выгоднее держать деньги в облигациях только одного вида. При этом вид облигации определяется в нулевой момент времени. Вторая часть теоремы подтверждает эти предположения, но лишь при условии $\lambda_2 \to \infty$.

Доказательство данной теоремы основано на использовании принципа динамического программирования.

Литература

1. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов.II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80-129.
2. *Волков С.Н, Крамков Д.О.* О методологии хеджирования опционов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1997. Т. 4. Вып. 1. С. 18-65.
3. *Ioannis Karatzas. Lectures on the Mathematics of Finance. - CRM, monograph series. ISSN 1065-8599. V. 8. 1997.*
4. *Жакод Ж.. Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т.1; 2. М.: Физматгиз, 1994.

ПРОЦЕСС ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ[8]

Носова А.Е.

Пусть $X = (X_t)_{t\geq 0} = (X^1 = (X^1_t)_{t\geq 0}, \ldots, X^d = (X^d_t)_{t\geq 0})$ – векторный процесс случайного блуждания на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ в случайной среде $\epsilon = \{\ (\lambda^1(i), \ldots, \lambda^d(i))\ ,\ (\mu^1(i), \ldots, \mu^d(i)), i \in \mathbf{Z}^d\}$, где $\lambda^k(i)$ и $\mu^k(i)$ – интенсивности соответственно положительных и отрицательных скачков k-й компоненты X^k в момент $t > 0$ при условии, что X_{t-} равняется $i = (i^1, \ldots, i^d) \in Z^d$, $1 \leq k \leq d$ (см. подробнее [2]). Предполагается, что $(\lambda^k(i), \mu^k(i))_{1\leq k\geq d}$, $i \in Z^d$ – положительные $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины.

Рассмотрим случай блуждания в симметричной случайной среде: при любых $i = (i^1, \ldots, i^d)$ и $k = 1, \ldots, d$

$$\mu^k(i) = \mu^k(i^1, i^2, \ldots, i^d) = \lambda^k(i^1, i^2, \ldots, i^k - 1, \ldots, i^d), \tag{1}$$

и для некоторых констант $c_1 > 0$ и $c_2 \geq c_1$

$$c_1 \leq \lambda^k(i) \leq c_2, \tag{2}$$

где случайные величины $\lambda^k(i)$ одинаково распределены и независимы. Для исследования процесса X будем пользоваться схемой серий: при $n = 1, 2, \ldots,$ $X^{(n)} = (X^{(n)}_t)_{t\geq 0}$ с $X^{k,n} = (X^{k,n}_t)_{t\geq 0}$, $1 \leq k \leq d$ при $X^{k,n}_t = X^k_{n\cdot t}$, и $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$ с $\mathcal{F}^n_t = \mathcal{F}_{n\cdot t}$.

Рассмотрим минимальное представление процесса, то есть наблюдаем только одну компоненту, для определенности будем считать, что $k = 1$ (естественно, для для других компонент имеют место аналогичные формулы). Обозначим для $t > 0$ и для $\hat{i} \in \mathbf{Z}^{d-1}$ с $\hat{i} = (i^2, i^3, \ldots, i^d)$

$$\rho_t(\hat{i}) = P_0(X^2_t = i^2, \ldots, X^k_t = i^k, \ldots, X^d_t = i^d | \mathcal{F}^{X^1}_t) \tag{3}$$

[8]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 97-01-00967).

и, соответственно, при $n \geq 1$ $\rho^n_t(\hat{i}) = \rho_{nt}(\hat{i})$. Для $X^{1,n} = (X^{1,n}_t)_{t\geq 0}$ – одномерного процесса случайного блуждания относительно $(\mathbf{F}^{X^{1,n}}, P)$ случайной средой является

$$\varepsilon^n = \{(\lambda^n(i,t))_{t\geq 0}, (\mu^n(i,t) = \lambda^n(i-1,t))_{t\geq 0})_{t\geq 0}, i \in \mathbf{Z}\},$$

где

$$\lambda^n(i,t) = \sum_{\hat{i}=(i^2,i^3,\ldots,i^d)\in \mathbf{Z}^{d-1}} n \cdot \lambda^1(i, i^2, i^3, \ldots, i^d) \cdot \rho^n_t(\hat{i}). \tag{4}$$

Рассмотрим в минимальном представлении для первой компоненты $X^{1,n}$ в схеме серий распределения

$$Q(\frac{X^{1,n}_t}{\sqrt{n}} > a) = \hat{E}(I(\frac{X^{1,n}_t}{\sqrt{n}} > a) \cdot Z^n_t), \tag{5}$$

где по мере $\hat{Q}$ процесс имеет независимые компоненты с интенсивностями скачков тождественно равными $E\lambda^1(i)$, $i \in \mathbf{Z}^d$.

Обозначим $Z^n_t = dQ^n_t / d\hat{Q}^n_t$ – процесс отношения правдоподобия, тогда $Z_n = (Z^n_t)_{t\geq 0}$ определяется формулами

$$Z^n_t = Z^n_0 + \int_0^t Z^n_{s-} d\, M^n_s, \tag{6}$$

$$Z^n_t = Z^n_0 \cdot \exp \varphi^n_t, \tag{7}$$

$$\varphi^n_t = M^n_t - \frac{1}{2} < M^c > + \sum_{0<s\leq t} [\ln(1 + \Delta M^n_s) - \Delta M^n_s], \tag{8}$$

и в данном случае $< M^c > \equiv 0$. Процесс $M^n = (M^n)_{t\geq 0}$ имеет вид

$$M^n_t = \int_0^t \left(\frac{\lambda^n(X^{1,n}_{s-}, s-)}{\hat{\lambda}^n} - 1 \right) (dA^{1,n}_s - \hat{\lambda}^n ds) + \tag{9}$$

$$\int_0^t \left(\frac{\lambda^n(X^{1,n}_{s-} - 1, s-)}{\hat{\lambda}^n} - 1 \right) (dB^{1,n}_s - \hat{\lambda}^n ds),$$

где $\hat{\lambda}^n = E\lambda^{1,n}(i), i \in \mathbf{Z}^d$.

В данной заметке рассматривается поведение процессов отношения правдоподобия $Z^n = (Z^n_t)_{t\geq 0}$ в случае $d = 1$ и $d = 2$. Приведем здесь критерий абсолютной непрерывности и сингулярности (см.[3]).

Теорема 1. (Кабанов, 1978). Предположим, что $\hat{P} \ll_{loc} P$ и обозначим $Z_t = d\hat{Q}_t/dQ_t$. Пусть $M \in \mathcal{M}_{loc}$ и $d\ Z_t = Z_t \cdot dM_t$, $M_0 = 0$. Тогда

$$\hat{P} \ll P \Leftrightarrow \hat{Q}(\mathbf{B}_\infty(M) < \infty) = 1, \tag{10}$$
$$\hat{P} \perp P \Leftrightarrow \hat{Q}(\mathbf{B}_\infty(M) = \infty) = 1,$$

где

$$\mathbf{B}_t =< M^c >_t + \frac{x^2}{1+|x|} * \nu_t^M, \frac{x^2}{1+|x|} * \nu_t^M = \int_0^t \int \frac{x^2}{1+|x|} d\ \nu^M,$$

и ν^M – компенсатор меры скачков μ^M локального мартингала M (по P).

В нашем случае $< M^c > \equiv 0$ и в связи с тем, что скачки локального мартингала M

$$\Delta M_t^n = \left(\frac{\lambda^n(X_{t-}^{1,n}), t}{\hat{\lambda}^n}\right) \cdot \Delta A_t^{1,n} + \left(\frac{\lambda^n(X_{t-}^{1,n}) - 1, t}{\hat{\lambda}^n}\right) \cdot \Delta B_t^{1,n} \tag{11}$$

ограничены, условия абсолютной непрерывности и сингулярности эквивалентны соответсвенно $\hat{P}(< M^n >_\infty < \infty) = 1$ и $\hat{P}(< M^n >_\infty = \infty) = 1$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $|\lambda(i,j) - E\hat{\lambda}| > \varepsilon > 0$ P-п.н. Тогда в случаях $d = 1$ и $d = 2$ локально абсолютно непрерывные меры $(Q_t)_{t\geq 0}$ и $(\hat{Q}_t)_{t\geq 0}$ определенные в (5) сингулярны.

Доказательство. 1. Пусть $d = 1$, тогда рассмотрим две случайные среды $\varepsilon = \{\lambda(i), \mu(i) = \lambda(i-1), i \in \mathbf{Z}\}$ и $\hat{\varepsilon} = \{\hat{\lambda}(i) \equiv \hat{\lambda}, \hat{\mu}(i) = \hat{\lambda}(i-1) \equiv \hat{\lambda}\}$, где по мере $\hat{Q}$ процесс X имеет независимые компоненты с интенсивностями скачков тождественно равными $E\lambda(i)$, $i \in \mathbf{Z}$. Процессы $Z^n = (Z_t^n)_{t\geq 0}$ и $M^n = (M_t^n)_{t\geq 0}$ определены соответственно формулами (6)-(8) и (9).

В схеме серий $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda^n(i) = n \cdot \lambda(i), \tag{12}$$

$$\hat{\lambda}^n = n \cdot \hat{\lambda},$$

где $\{\lambda(i), i \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяют ограничению (2) и будем предполагать, что $\lambda(0) \neq \hat{\lambda}$ $\hat{P}$-п.н.

Мартингал M обладает характеристикой $< M^n >=(< M^n >_t)_{t\geq 0}$

$$< M^n >_t = \int_0^t \left(\frac{\lambda(X_{s-}^{1,n})}{\hat{\lambda}} - 1\right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}\ d\ s + \tag{13}$$
$$\int_0^t \left(\frac{\lambda(X_{s-}^{1,n} - 1)}{\hat{\lambda}} - 1\right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}\ d\ s.$$

Покажем, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость $< M^n >_t \to \infty$ P-п.н. при любом $t > 0$.

Заметим, что для любой константы $c > 0$

$$\int_0^t \left(\frac{\lambda(X_{s-}^{1,n})}{\hat{\lambda}} - 1\right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}\ d\ s \geq \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=-[c\sqrt{n}]}^{i=[c\sqrt{n}]} (\lambda(i) - \hat{\lambda})^2 \cdot n \cdot \int_0^t I(X_s^{1,n} = i)\ d\ s \tag{14}$$

(здесь $[\cdot]$ – целая часть числа).

Тогда

$$n \cdot \int_0^t I(X_s^{1,n} = i)\ d\ s = \int_0^{t \cdot n} I(X_s^1 = i)\ d\ s. \tag{15}$$

Условие $\hat{P}$-п.н. возвратности состояния i эквивалентно условию $\hat{P}$-п.н. бесконечности

$$\int_0^\infty I(X_s^1 = i)\ d\ s = +\infty. \tag{16}$$

Поэтому для процесса $X_t = A_t - B_t$ как разности двух пуассоновских процессов выполняется следующее

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n \cdot t} I(X_s = i)\ d\ s = +\infty \qquad \hat{P} - \text{ п.н.} \tag{17}$$

Из теоремы 1 и из формул (14) и (17) следует сингулярность локально абсолютно непрерывных мер $(Q_t)_{t\geq 0}$ и $(\hat{Q}_t)_{t\geq 0}$ в случае $d = 1$.

2. Пусть $d = 2$. Случайная среда ε^n определена в (4) и по мере $\hat{Q}$ процесс X^1 имеет независимые компоненты с интенсивностями скачков тождественно равными $E\lambda^1(i,j) = \hat{\lambda}$.

В схеме серий $n = 1, 2, \dots$

$$\lambda^n(i,t) = n \cdot \lambda(i,t), \tag{18}$$

$$\hat{\lambda}^n = n \cdot \hat{\lambda}.$$

Будем предполагать, что для $\forall \quad \varepsilon > 0$

$$|\lambda(i,j) - \hat{\lambda}| > \varepsilon \qquad P - \text{п.н.} \tag{19}$$

Треугольная скобка $< M^n >= (< M^n >_t)_{t \geq 0}$ имеет вид

$$< M^n >_t = \int\limits_0^t \left(\frac{\lambda(X^{1,n}_{s-}, s-)}{\hat{\lambda}} - 1 \right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda} \;\; d\,s + \tag{20}$$

$$\int\limits_0^t \left(\frac{\lambda(X^{1,n}_{s-} - 1, s-)}{\hat{\lambda}} - 1 \right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda} \;\; d\,s,$$

где

$$\lambda(i,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda^1(i,j) \cdot \rho^n_t(j). \tag{21}$$

Для константы c выполняется

$$\int\limits_0^t \left(\frac{\lambda(X^{1,n}_{s-}, s-)}{\hat{\lambda}} - 1 \right)^2 \cdot n \cdot \hat{\lambda} \;\; d\,s \;\geq \tag{22}$$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=-[c\sqrt{n}]}^{i=[c\sqrt{n}]} \sum_{j=-[c\sqrt{n}]}^{j=[c\sqrt{n}]} \int\limits_0^t \;\; (\lambda^1(i,j) - \hat{\lambda})^2 \cdot \rho^n_s(j)^2 \cdot n \cdot \;\; I(X^{1,n}_s = i) \; d\,s.$$

Оценка снизу для выражения в правой части неравенства (22) в силу (19) имеет вид

$$\frac{\varepsilon^2}{\hat{\lambda}} \cdot n \cdot \int\limits_0^t \sum_{j=-[c\sqrt{n}]}^{[c\sqrt{n}]} \rho^2_s(j) \; ds. \tag{23}$$

Минимум функции $\sum\limits_{j=-[c\sqrt{n}]}^{[c\sqrt{n}]} \rho^2_s(j)$ при условии, что $\sum\limits_{j=-[c\sqrt{n}]}^{[c\sqrt{n}]} \rho_s(j) = 1$ доставляет $\rho_s(j) = \frac{1}{2c\sqrt{n}}$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\frac{\varepsilon^2}{\hat{\lambda}} \cdot n \cdot \int\limits_0^t \sum_{j=-[c\sqrt{n}]}^{[c\sqrt{n}]} \rho^2_s(j) \; ds \geq n \cdot \frac{\varepsilon^2}{\hat{\lambda}} \cdot \frac{t}{c\sqrt{n}}. \tag{24}$$

То есть при $n \to \infty$ имеет место сходимость P-п.н. $< M^n >_t \to \infty$ при любом $t > 0$. Следовательно, в случае $d = 2$ абсолютно непрерывные меры $(Q_t)_{t \geq 0}$ и $(\hat{Q}_t)_{t \geq 0}$ сингулярны. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1) Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.

2) Butov A.A. Random walks in random environments of a general type // Stoch. and Stoch. Reports. 1994. V. 48. P. 145-160.

3) Shiryayev A.N. Martingales: Recent developments, results and applications // International Statist. Review. 1981. V. 49. P. 199-233.

МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И ВАРИАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ

Перегудова О.А.

1. Основные предположения.

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1.1}$$

правая часть которой $X(t,x)$ есть вектор-функция $X'(t,x) = (X^1(t,x),...,X^n(t,x))$, $X(t,0) = 0$, $x \in R^n$. Вещественные функции $X^i(t,x^1,...,x^n)$ определены, непрерывны в области $\Gamma = \{(t,x) : \| x \| < \nu, t \geq 0\}$ ($\nu = const > 0$ или $\nu = +\infty$) и имеют в ней непрерывные частные производные по $x^1,...,x^n$, которые ограничены в каждой замкнутой области $\Gamma_0' = \{(t,x) \in \Gamma : t \geq 0, \| x \| \leq \nu_0'\}$.

Это обеспечивает существование, единственность, нелокальную продолжимость решений системы и непрерывную зависимость их от начальных данных (и времени t) в области Γ.

Будем рассматривать вектор-функцию $v(t,x) = (v^1(t,x),...,v^k(t,x))'$, $v : \Gamma \to R^k$, $v \in C^1(\Gamma)$, $\|v(t,x)\| = \|v^1(t,x)\| + ... + \|v^k(t,x)\|$, $\dot{v}(t,x) = \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}X(t,x)$ - производная по времени от $v(t,x)$ в силу системы (1.1), где $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ - вектор-столбец, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ - $k \times n$-матрица.

Пусть выполняется дифференциальное неравенство :

$$\dot{v}(t,x) = f_1(t,v(t,x)) - f_2(t,v(t,x),x)$$

$f_2(t,v(t,x),x) \geq 0$ $t \geq 0$, $\| x \| < \nu$, $\bar{v}(t,x) > 0$. ($\bar{v}(t,x) = \sum\limits_{s=1}^{l} v^s(t,x)$, $(1 \leq l \leq k$)).

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение :

$$\dot{u} = f_1(t,u), \tag{1.2}$$

где $u \in R^k$.

Пусть $v(t,x)$ и уравнение (1.2) являются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для уравнения (1.1) , т.е.

$$\dot{v}(t,x) \leq f_1(t,v(t,x)) \tag{1.3}$$

$$f(t,v) \in W(\Omega), f(t,0) \equiv 0, \tag{1.4}$$

где $W(\Omega)$ - класс функций, определенных, непрерывных в открытой области $\Omega \subset T \times R^k$ и квазимонотонных в следующем смысле : каждая вещественная функция f^s является неубывающей по совокупности внедиагональных переменных $(y^1,...,y^{s-1},y^{s+1},...,y^k$ в области Ω, т.е. такой, что $f^s(t,y_1) \leq f^s(t,y_2)$ для любых $(t,y_1),(t,y_2) \in \Omega$: $y_1^1 \leq y_2^1,...,y_1^{s-1} \leq y_2^{s-1}, y_1^s = y_2^s, y_1^{s+1} \leq y_2^{s+1},...,y_1^k \leq y_2^k$. (Условие Важевского).

Пусть $v(t,x)$ является вектор-функцией Ляпунова, т.е. $v(t,0) \equiv 0$ и $\bar{v}(t,x)$ -определенно положительна.

Далее будем предполагать, что :

1) система (1.2) имеет единственное решение $u = u(t,t_0,v_0)$, $t \geq t_0, u(t_0,t_0,v_0) = v_0$, где $v_0 = v(t_0,x_0), (t_0,x_0) \in \Gamma_0'$;
2) матрица $\Phi(t,t_0,v_0) = \frac{\partial u(t,t_0,v_0)}{\partial v_0}$ существует, непрерывна и матрица $\Phi^{-1}(t,t_0,v_0)$ определена при всех $t \geq t_0$.

Определим функцию $w(t,x)$ следующим образом :

$$v(t,x) = u(t,t_0,w(t,x)) \tag{1.5}$$

$t \geq t_0, x = x(t,t_0,x_0)$ - решение системы (1.1), $w(t_0,x_0) = v_0$. Дифференцируя равенство (1.5) по t , получаем

$$\dot{v}(t,x) = \frac{\partial u(t,t_0,w(t,x))}{\partial t} + \frac{\partial u(t,t_0,w(t,x))}{\partial v_0} \cdot \dot{w}(t,x)$$

и таким образом, имеем :

$$f_1(t,v(t,x)) - f_2(t,v(t,x),x) = f_1(t,u(t,t_0,w(t,x))) + \Phi(t,t_0,w(t,x)) \cdot \dot{w}(t,x)$$

$$\dot{w}(t,x) = -\Phi^{-1}(t,t_0,w(t,x))f_2(t,v(t,x),x), w(t_0,x_0) = v_0 .$$

Обозначим :

$$\Phi^{-1}(t,t_0,w(t,x))f_2(t,v(t,x),x) = W(t,w(t,x),x) .$$

Определим вспомогательную систему :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(t,x) \\ \dot{w} = -W(t,w,x). \end{cases} \tag{1.6}$$

Допустим, что функции $X(t,x), W(t,w,x), f_1(t,v)$ удовлетворяют условиям предкомпактности в ограниченном смысле [1,2]. Тогда системе (1.6) соответствует множество предельных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = X^*(t,x) \\ \dot{w} = -W^*(t,w,x). \end{cases}$$

2.Теоремы о локализации положительного предельного множества, о притяжении и об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1).

Теорема 2.1 Предположим, что :

1) решение $(x(t,t_0,x_0), w(t,t_0,v_0,x_0))$ системы (1.6) ограничено некоторым компактом $K \forall t \geq t_0$;

2) функция $v(t,x)$ ограничена на решении $x(t,t_0,x_0)$ системы (1.1);

3) выполняется неравенство :

$$W(t,w,x) \geq 0, \forall t \geq t_0,$$

где $w = w(t,t_0,v_0,x_0), x = x(t,t_0,x_0)$.

Тогда для $\forall$ предельной точки $y \in \Omega^+(x(t,t_0,x_0))$ существует предельная совокупность (X^*, W^*, f_1^*) и решение $x = x^*(t)$ предельного уравнения $\dot{x} = X(t,x)$ такое, что $x^*(0) = y$, $\{(x^*(t), t \in R^+\} \subset \Omega^+(x(t,t_0,x_0))$ и, кроме того, $\Omega^+(x(t,t_0,x_0)) \subset \{W^*(t,w^*,x) = 0\}$, где $w^* = \lim_{t\to+\infty} w(t,t_0,v_0,x_0)$.

Теорема 2.2 Предположим, что :

1) решение $(x(t,t_0,x_0), w(t,t_0,v_0,x_0))$ системы (1.6) ограничено некоторым компактом $K \forall t \geq t_0$;

2) функция $v(t,x)$ ограничена на решении $x(t,t_0,x_0)$ системы (1.1);

3) выполняется неравенство :

$$W(t,w,x) \geq 0 \forall t \geq t_0,$$

где $w = w(t,t_0,v_0,x_0), x = x(t,t_0,x_0)$;

4) для предельной совокупности множество (X^*, W^*, f_1^*) $\{W^*(t,w^*,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = X^*(t,x)$, кроме, $x^* = 0$ (где $w^* = \lim\limits_{t\to+\infty} w(t,t_0,v_0,x_0)$) .

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1.1) является притягивающим.

Теорема 2.3 Предположим, что :

1) Функция $v(t,x)$ определенно положительна (и, соответственно, $v^1(t,x), ..., v^k(t,x)$ допускают бесконечно малый высший предел);

2) Нулевое решение системы сравнения $\dot{y} = f_1(t,y), y \in R^+$ устойчиво (соответственно, устойчиво раномерно по t_0) относительно $y^1, ..., y^l (1 \leq l \leq k)$ при условии $y_0 = v(t_0,x_0) = v_0$ для $(t_0,x_0) \in \Gamma_0^l$;

3) выполняется неравенство:

$$W(t,w,x) > 0 \forall t > t_0,$$

где $x = x(t,t_0,x_0), w = w(t,t_0,v_0,x_0)$;

4) Для $\forall$ предельной совокупности (X^*, W^*, f_1^*) множество $\{W^*(t,w^*,x) = 0$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = X(t,x)$, кроме $x^* = 0$. (где $w^* = \lim\limits_{t\to+\infty} w(t,t_0,v_0,x_0)$).

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво (асимптотически устойчиво равномерно по (t_0,x_0)).

3.Случай линейной системы сравнения.

Рассмотрим частный случай системы сравнения :

$$\dot{u} = f(t)u \tag{3.1}$$

$u(t_0) = v_0$. Тогда $u(t,t_0,v_0) = \Phi(t,t_0)v_0$ - решение этой системы, где $\Phi(t,t_0)$ - фундаментальная матрица решений, $\Phi(t_0,t_0) = E$.

Предположим, что матрица $\Phi(t,t_0)$ существует, непрерывна и матрица $\Phi^{-1}(t,t_0)$ определена при всех $t \geq t_0$.

Определим функцию $w(t,x)$ следующим образом :

$$w(t,x) = \Phi^{-1}(t,t_0)v(t,x).$$

Тогда

$\dot{w}(t,x) = \dot{\Phi}^{-1}(t,t_0)v(t,x) + \Phi^{-1}(t,t_0)\dot{v}(t,x) = \dot{\Phi}^{-1}(t,t_0)v(t,x) + \Phi^{-1}(t,t_0)(f(t)v(t,x) - f_2(t,v(t,x),x)) = -\Phi^{-1}(t,t_0)f_2(t,v(t,x),x)$.

Справедлива следующая теорема об асимптотической устойчивости.

Теорема 3.1. Предположим, что :

1) Функция $\bar{v}(t,x)$ определенно-положительна (и, соответственно, $v^1(t,x),...,v^k(t,x)$ допускают бесконечно малый высший предел);

2) Нулевое решение системы сравнения $u = 0$ устойчиво (соответственно устойчиво равномерно по t_0) относительно $u^1,...,u^l (1 \leq l \leq k)$ при условии $u_0 = v(t_0,x_0) = v_0$, для $(t_0,x_0) \in \Gamma_0'$;

3) $\dot{w}(t,x) = -\Phi^{-1}(t,t_0)f_2(t,v(t,x),x) \leq 0$ где $x = x(t,t_0,x_0), w(t_0,x_0) = v_0$.

4) для $\forall$ предельной совокупности $(X^*(t,x), \Phi^{-1}(t,t_0)\cdot f_2^*(t,v,x), f_1^*(t,v))$ множество $\{\Phi^{-1}(t,t_0)\cdot f_2^*(t,v^*(t,x),x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = X^*(t,x)$, кроме $x^* \equiv 0$.

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво (асимптотически устойчиво равномерно по (t_0,x_0)).

Рассмотрим пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\sin t + e^{-t})x_1 + (\sin t - e^{-t})x_2 - \sin^2 t[(x_1)^3 + x_1(x_2)^2] \\ \dot{x}_2 = (\sin t - e^{-t})x_1 + (\sin t + e^{-t})x_2 - \sin^2 t[(x_1)^2 x_2 + (x_2)^3]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Функцию Ляпунова $v(t,x)$ возьмем в виде $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))'$, где $v_1 = 1/2(x_1+x_2)^2, v_2 = 1/2(x_1-x_2)^2$.

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = (x_1+x_2)(2\sin t(x_1+x_2) - \sin^2 t[(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)]) \\ \dot{v}_2 = (x_1-x_2)(2e^{-t}(x_1-x_2) - \sin^2 t[(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2)]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = 4\sin t\cdot v_1 - 2\sin^2 t\cdot v_1\cdot(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{v}_2 = 4e^{-t}\cdot v_2 - 2\sin^2 t\cdot v_2\cdot(x_1^2+x_2^2). \end{cases}$$

Определим функцию $w(t,x) = (w_1(t,x), w_2(t,x))$, где

$$\begin{cases} w_1(t,x) = exp[-\int_0^t 4\sin t dt]\cdot v_1(x) \\ , w_2(t,x) = exp[-\int_0^t 4e^{-t}dt]\cdot v_2(x). \end{cases}$$

Тогда, дифференцируя функцию $w(t,x)$ по t в силу системы (3.2), получаем

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = exp[-\int_0^t 4\sin t dt](-4\sin t\cdot v_1 + \dot{v}_1) \\ \dot{w}_2 = exp[-\int_0^t 4e^{-t}dt](-4e^{-t}\cdot v_2 + \dot{v}_2). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -e^{4\cos t - 4}\cdot 2\sin^2 t\cdot v_1\cdot(x_1^2+x_2^2) \leq 0 \\ \dot{w}_2 = -e^{4exp(-t)-4}\cdot 2\sin^2 t\cdot v_2\cdot(x_1^2+x_2^2) < 0. \end{cases}$$

$\dot{w}^*(t,x^*) = 0$ - производная предельной функции $w(t,x)$ в силу предельной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = (\sin(t+\alpha))x_1^* + \sin(t+\alpha)x_2^* - \sin^2(t+\alpha)[(x_1^*)^3 + x_1^*(x_2^*)^2] \\ \dot{x}_2^* = (\sin(t+\alpha)x_1^* + \sin(t+\alpha)x_2^* - \sin^2(t+\alpha)[(x_1^*)^2 x_2^* + (x_2^*)^3]. \end{cases}$$

Т.о. получаем

$$\begin{cases} e^{4\cos(t+\alpha)-4}\cdot 2\sin^2(t+\alpha)\cdot v_1^*\cdot(x_1^{*2}+x_1^{*2}) \equiv 0 \\ e^{-4}\cdot 2\sin^2(t+\alpha)\cdot v_2^*\cdot(x_1^{*2}+x_2^{*2}) \equiv 0. \end{cases}$$

Тогда, либо $v_1^* = 0, v_2^* = 0$, либо $(x_1^{*2}+x_2^{*2}) = 0. \Rightarrow x_1^* = x_2^* = 0$. Т.о. получаем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.2). .

Литература

1. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. V.23. N2. P.216-223.

2. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 96-01-01067).

ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММ ПОИСКА В ДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Полякова Л.Н.

Основная идея верификации программы состоит в том, чтобы формально доказать соответствие между текстом программы (на языке программирования) и спецификацией задачи (на языке спецификации).

Свойство программы, характеризующееся отсутствием ошибок в программе по отношению к целям разработки, называется корректностью (правильностью) программы [1].

Задача верификации состоит в демонстрации свойства корректности программы. Таким образом, под верификацией понимают установление соответствия между программой и ее спецификацией, описывающей цель разработки. Иначе, верификация это вычисление истинности предиката от двух аргументов: программы (на языке программирования) и спецификации (на языке спецификации). Истинность этого предиката устанавливает свойство корректности программы, если спецификация не содержит ошибок.

В отличие от тестирования верификация предполагает аналитическое исследование свойств программы по ее тексту, поэтому цель верификации можно достичь только строгим математическим доказательством соответствия программы ее спецификации. Для возможного проведения таких доказательств необходимо построить соответствующую формальную систему, в которой были бы формально определены свойства корректности программы. В понятие корректности программы входит такое свойство как частичная корректность. Частичная корректность - это удовлетворение внешним спецификациям вход-выход при условии завершения выполнения программы, т.е. достижения в процессе вычисления выхода программы.

Наиболее распространенным методом доказательства частичной корректности программ является метод индуктивных утверждений [1]. Он позволяет свести доказательство свойства частичной корректности программы к доказательству некоторого конечного числа утверждений, записанных в виде формул логического языка спецификации и имеющих интерпретации в соответствующей проблемной области. Метод индуктивных утверждений включает в себя следующие основные этапы:

1) получение аннотированной программы заданием индуктивных утверждений для входа, выхода и контрольных точек программы в виде формул логического языка спецификаций;

2) определение набора условий корректности для всех путей между соседними контрольными точками в виде формул логического языка спецификации;

3) доказательство истинности условий корректности как теорем формальной теории соответствующей проблемной области.

На первом этапе формируется спецификация программы. Языки спецификации - целое семейство языков, призванных конкретизировать постановку задачи и облегчить их последующее программирование и сопровождение.

Спецификация некоторой программы Prgm осуществляется приписыванием индуктивных утверждений контрольным точкам (точкам между операторами) программы, при этом выходу оператора begin приписывают входной предикат (пред-условие) программы $P(x)$, определяющий множество допустимых значений исходных данных x , а входу оператора end приписывают выходной предикат (пост-условие) $Q(x, y)$, определяющий цель вычислений по данной программе, т.е. желаемую связь между выходными данными y и исходными x.

На втором этапе свойство частичной корректности определяется формулой логики предикатов. Язык индуктивных утверждений о свойствах программ содержит формулы вида :

$$\{P\}A\{Q\} \text{ — тройки Хоара,}$$

где P и Q пред- и пост- условия оператора A.

Они формализуют утверждение о частичной корректности программ и включают формулы логического языка спецификации (P и Q) и текст оператора A.

Неформальный смысл тройки Хоара состоит в следующем: если P есть истина непосредственно перед выполнением оператора A, и выполнение оператора A завершается, то Q есть истина для значений переменных, соответствующих завершению A.

Тройка Хоара — основной элемент утверждения о свойствах операторов программы. Она характеризует семантику оператора как преобразователя предикатов. Каждый оператор A с этой точки зрения выступает в виде преобразователя пред-условия P (свойства состояния памяти перед выполнением оператора A) в пост-условие (свойство состояния памяти после выполнения A).

Учитывая понятие тройки Хоара , получаем; программа Prgm обладает свойством частичной корректности относительно P и Q тогда и только тогда, когда ее тройки Хоара истинны;

$$\text{PCOR (Prgm): } \{P\} \text{ Prgm } \{Q\}.$$

При выполнении программы Prgm, заданной внешней спецификацией в виде пред-условия $P(x_1, \ldots, x_n)$, для различных исходных данных возможны различные последовательности операторов, начинающихся оператором begin и оканчивающихся оператором end. Такие последовательности называются трассами вычислений. Истинность тройки Хоара $\{P\}$ Prgm $\{Q\}$ имеет место, если истинны тройки Хоара для всех трасс T_j, т.е.

$\{P\}$ Prgm $\{Q\}$: $\forall j(\{P_j\}T_j\{Q\})$, где P_j — предикат вычисления выполняются по j-той трассе T_j; T_j — трасса вычислений, соответствующая P_j. Трассы вычислений осуществляют разбиение пред-условия P таким образом, что

$$P = \vee P_j; \quad \forall j_1, j_2((j_1 \neq j_2) \Rightarrow P_{j1} \wedge P_{j2} = \text{ false}).$$

Совокупность аксиом и правил вывода для троек Хоара некоторого языка программирования и составляет его аксиоматическую систему (исчисление троек Хоара), в которой возможен вывод истинных утверждений о свойствах программ или ее фрагментов. Для доказательства частичной корректности программ в некоторой проблемной области воспользуемся такой системой подмножества языка Паскаль, которая получила известность как аксиоматическая система Хоара [1]. Часть аксиом и правил этой системы представлена ниже:

П1. $\{P\}A_1; \ldots A_i; \ldots A_n\{Q\} \vdash \{P\}$
begin $A_1; \ldots; A_i; \ldots; A_n$ end $\{Q\}$

П2. $\{P\}A\{\alpha - \text{ if}\}A_1\{Q\}, \{P\}A\{\neg\alpha - \text{ if}\}A_2\{Q\} \vdash \{P\}A;$
if α then A_1 else $A_2\{Q\}$

П3. $\{P\}A\{\alpha \Rightarrow Q\} \vdash \{P\}A\{\alpha - \text{ if}\}\{Q\}$

П4. $\{P\}A\{Q(x \leftarrow e)\} \vdash \{P\}A; x := e\{Q\}$

П5. $P \Rightarrow Q \vdash \{P\}$ null $\{Q\}$

Методы верификации практически приложимы к любым проблемным областям. В то же время верификация реальных программ — трудоемкий процесс, что связано с трудностями аннотирования программ и доказательства условий их корректности.

Применим метод индуктивных утверждений для верификации программ в некоторой проблемной области. В частности, рассмотрим класс программ, которые по произвольной динамической структуре на входе строят некоторую динамическую структруру на выходе. Пусть исходная динамическая структура представляет бинарное дерево поиска, в котором после включения очередной вершины нарушено условие сбалансированности. Prgm - это фрагмент программы, восстанавливающий сбалансированность дерева по алгоритму, предложенному Н.Виртом [2]. Несколько слов о самой программе. Условие сбалансированности при включении нового узла в сбалансированное бинарное дерево поиска нарушается только в следующих двух случаях:

* к исходному узлу поочередно подсоединяются два узла в одном направлении (либо по левым ветвям, либо по правым ветвям);

* к исходному узлу поочередно подсоединяются два узла в разных направлениях (либо по левой и правой ветвям, либо по правой и левой ветвям).

Следовательно, для алгоритма балансировки имеет значение взаимное расположение трех узлов дерева, которое принимает один из четырех возможных видов. Все четыре варианта исходных данных после применения алгоритма балансировки приводят к следующему: два узла из исходной тройки узлов становятся левой и правой ветвями третьего узла. Выходная динамическая структура представляет собой сбалансированное бинарное дерево поиска.

Для описания спецификации входа и выхода программы введем предикаты $R(v_i, v_j)$ и $L(v_i, v_k)$, определяющие соответственно следующие понятия динамических структур: узел v_j является правым поддеревом узла v_i, а узел v_k является левым поддеревом узла v_i. Введенным предикатам соответствуют функции $R(v_i) = v_j, L(v_i) = v_k$.

1-ый этап: получение аннотированной программы, т.е. формирование индуктивных утверждений для пред-условия P и пост-условия Q.

Различные исходные данные определяют различные трассы вычислений, которые производят разбиение пред-условия P $P = \vee P_j$, где для данной программы Prgm предикаты P_1, P_2, P_3 и P_4 определяют приведенные ниже высказывания.

P_1: к узлу v_i поочередно подсоединяются узлы v_j и v_k по левым ветвям, следовательно,

$P_1 = (R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})$.

P_2: к узлу v_i поочередно подсоединяются узлы v_k по левой и v_j по правой ветвям, следовательно,

$P_2 = (R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_k)(R(v_k) = v_i)(L(v_k) = \text{nil})(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = \text{nil})$.

P_3: к узлу v_k поочередно подсоединяются узлы v_j и v_i по правым ветвям, следовательно,

$P_3 = (R(v_k) = v_j)(L(v_k) = \text{nil})(R(v_j) = v_i)(L(v_j) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = \text{nil})$.

P_4: к узлу v_k поочередно подсоединяются узлы v_i по правой и v_j по левой ветвям, следовательно,

$P_4 = (R(v_k) = v_i)(L(v_k) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = \text{nil})$.

Пост-условие Q запишем так:

$Q = (R(v_j) = v_i)(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = \text{nil})$.

Чтобы доказать истинность тройки Хоара $\{P\}$ Prgm $\{Q\}$, нужно доказать истинность троек Хоара $\{P_j\}T_j\{Q\}$ для всех трасс, т.е. $\{P_1\}T_1\{Q\}, \{P_2\}T_2\{Q\}, \{P_3\}T_3\{Q\}, \{P_4\}T_4\{Q\}$.

2-ой этап: определение условий корректности по тексту программы. Условия корректности программы Prgm получим, используя правила вывода П1...П5.

Программа Prgm:

```
{P} begin { операторы S}
    if α1 then { операторы S1}
      if α2 then { операторы A1}
        begin { однократный LL-поворот}
            p1 := p^.left; p^.left:= p1^.right; p1^.right:= p; p := p1
        end else { операторы A2}
        begin { двукратный LR-поворот}
        p1 := p^.left; p2 := p1^.right; p1^.right:= p2^.left;
        p2^.left:= p1; p^.left:= p2^.right;
        p2^.right:= p; p := p2
```

end

else { операторы $S2$}

if α_3 then { операторы $A3$}

begin { однократный RR-поворот}

$p1 := p\hat{}.\text{right}$; $p\hat{}.\text{right} := p1\hat{}.\text{left}$; $p1\hat{}.\text{left} := p$; $p := p1$

end else { операторы $A4$}

begin { двукратный RL-поворот}

$p1 := p\hat{}.\text{right}$; $p2 := p1\hat{}.\text{left}$; $p1\hat{}.\text{left} := p2\hat{}.\text{right}$;

$p2\hat{}.\text{right} := p1$; $p\hat{}.\text{right} := p2\hat{}.\text{left}$;

$p2\hat{}.\text{left} := p$; $p := p2$

end

end

В программе не конкретизированы условия:

$\alpha 1$ — к исходному узлу очередной узел подключен слева;

$\alpha 2$ — к исходному узлу второй узел подсоединяется в том же направлении, что и первый;

$\alpha 3$ — к исходному узлу второй узел подсоединяется в том же направлении, что и первый.

Программу опишем на нескольких уровнях детализации.

1 шаг: $\{P\}$ Prgm: begin S end $\{Q\}$. По правилу П1 получаем $\{P\}S\{Q\}$.

2 шаг: $\{P\}$ Prgm: begin

if $\alpha 1$ then $S1$ else $S2$

$\{Q\}$ end.

По правилу П2 получаем $\{P\}\{\alpha 1\text{–if}\}S1\{Q\}$, $\{P\}\{\neg\alpha 1\text{–if}\}S2\{Q\}$.

По правилу П3

$\{P\}S1\{\alpha 1 \Rightarrow Q\}$, $\{P\}S2\{\neg\alpha 1 \Rightarrow Q\}$.

3 шаг:

$\{P\}$ Prgm: begin

if $\alpha 1$ then

if $\alpha 2$ then $A1$ else $A2$

else

if $\alpha 3$ then $A3$ else $A4$

$\{Q\}$ end.

По правилу П2	По правилу П3
$\{P\}\{\alpha 2-\text{if}\}A1\{\alpha 1 \Rightarrow Q\}$	$U_1 : \{P\}A1\{\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow Q\}$
$\{P\}\{\neg\alpha 2-\text{if}\}A2\{\alpha 1 \Rightarrow Q\}$	$U_2 : \{P\}A2\{\alpha 1 \wedge \neg\alpha 2 \Rightarrow Q\}$
$\{P\}\{\alpha 3-\text{if}\}A3\{\alpha 1 \Rightarrow Q\}$	$U_3 : \{P\}A3\{\neg\alpha 1 \wedge \alpha 3 \Rightarrow Q\}$
$\{P\}\{\neg\alpha 3-\text{if}\}A4\{\neg\alpha 1 \Rightarrow Q\}$	$U_4 : \{P\}A4\{\neg\alpha 1 \wedge \neg\alpha 3 \Rightarrow Q\}$

По правилу П4 для условия $U1$:

$\{P\}\{\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow Q(p1 := p\hat{}.\text{left})(p\hat{}.\text{left} := p1\hat{}.\text{right})(p1\hat{}.\text{right} := p)(p := p1)$.

По правилу П5

$P \Rightarrow (\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow Q(p1 := p\hat{}.\text{left})(p\hat{}.\text{left} := p1\hat{}.\text{right})(p1\hat{}.\text{right} := p)(p := p1))$.

Операторы программы $p1 := p\hat{}.\text{left}$ $p\hat{}.\text{left} := p1\hat{}.\text{right}$ $p1\hat{}.\text{right} := p$ $p := p1$ соответствуют функциям языка спецификации $L(v_i) \leftarrow \text{nil}$ $R(v_j) \leftarrow v_i$.

Тогда условие U_1 запишем так: $U_1 : ((R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})) \Rightarrow$
$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow ((R(v_j) = v_i)(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = \text{nil}))$
$(L(v_i) \leftarrow \text{nil})(R(v_j) \leftarrow v_i)$.

Произведем замену в пост-условии

$U_1 : ((R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})) \Rightarrow$
$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow ((v_i = v_i)(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(\text{nil} = \text{nil}))$.

3-ий этап: доказательство истинности условий корректности $U_1 - U_4$. Докажем истинность каждой конъюнкции заключения U_1.

Первая и шестая конъюнкции после замены превратились в тождества, истинность остальных конъюнкций следует из пред-условия P. Из истинности всех конъюнкций заключения U_1 следует истинность условия U_1. Аналогичным образом доказывается истинность всех четырех условий корректности $U_1 - U_4$.

Вывод: программа Prgm частично корректна относительно спецификации (инвариантных утверждений) входа и выхода.

Внесем в программу Prgm ошибку и проверим условие корректности. Пусть в операторах $A1$ вместо p1^.right:= p записано p^.right:= p.

Тогда операторы программы $p1 :=$ p^.left p^.left := p1^.right p^.right := p $p := p1$ соответствуют функциям языка спецификации $L(v_i) \leftarrow$ nil $R(v_i) \leftarrow v_i$.

Условие корректности U_1 примет вид:

U_1 : $((R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})) \Rightarrow$

$(\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow ((R(v_j) = v_i)(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})(R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = \text{nil}))$

$(L(v_i) \leftarrow \text{nil})(R(v_i) \leftarrow v_i)$.

После замены в пост-условии получим:

U_1 : $((R(v_i) = \text{nil})(L(v_i) = v_j)(R(v_j) = \text{nil})(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})) \Rightarrow \quad (\alpha 1 \wedge \alpha 2 \Rightarrow ((R(v_j) = v_i)(L(v_j) = v_k)(R(v_k) = \text{nil})(L(v_k) = \text{nil})(v_i = \text{nil})(\text{nil} = \text{nil}))$.

Докажем истинность каждой конъюнкции заключения U_1.

Шестая конъюнкция после замены превратилась в тождество, а пятая конъюнкция приняла значение ложь, что сделало все заключение условия U_1 ложным. Следовательно, корректность условия U_1 не доказана,и программа Prgm не соответствует спецификации входа-выхода.

Литература

1) Непомнящий В.А., Рякин О.М. Прикладные методы верификации программ / Под ред. А.П.Ершова.- М.: Радио и связь, 1988. 256 с.

2) Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы :Пер. с англ. -М.: Мир, 1985. 406 с.

ОБ АССИСТИРУЮЩИХ ПРОГРАММАХ В ИГРАХ

Радионов А.Н.

Для оценивания позиций в дереве перебора, а также для повышения качества игры в игровых программах применяется множество эвристик, призванных сколь-нибудь сократить количество перебираемых вариантов,сохраняя при этом качество игры. Обычно эвристики закладываются в программу на стадии ее разработки и остаются неизменными на протяжении всей «жизни» программы. Многие эвристики способны видоизменяться, приспосабливаясь к стилю и качеству игры соперника. Это относится к так называемым самообучающимся системам. Однако эти эвристики сохраняют свой «общий вид», а меняются в них в основном только некоторые коэффициенты. А что будет, если в процесс поиска оптимального хода включить непосредственно человека, с его набором эвристических правил, интуицией и богатым опытом? Вряд ли подобное применимо в играх, требующих быстрого принятия решения. Однако, когда имеется возможность посидеть и подумать над некоторой проблемой, подобный подход может себя оправдать. Это может пригодиться при анализе шахматных задач, решении тригонометрических задач, дифференциальных уравнений и др. Во многом работа такого симбиоза программы и человека напоминает работу экспертной системы. Коротко об основных идеях:

Предлагается концепция игровых программ, в которых процесс выбора оптимального хода управляется пользователем. Реализация подобного подхода состоит в визуализации «активной» части дерева перебора и предоставлении средств управления процессом выбора оптимального хода. Такая тактика позволяет (с помощью пользователя и его критериев оценивания) сократить объем перебора, нужного для выбора оптимального хода.

В качестве примера, показывающего рост дерева перебора, здесь приводится таблица, построенная по дереву перебора в про-

грамме игры в русские шашки.

Уровень	Количество вершин (глубина перебора = 6, ход 1-го игрока)	Количество вершин (глубина перебора = 6, ход 2-го игрока)	Количество вершин (глубина перебора = 8, ход 1-го игрока)
1	1	1	1
2	7	7	7
3	15	13	15
4	61	54	61
5	140	136	140
6	440	417	440
7	1116	1071	1135
8	310	263	3467
9	775	589	7554
10	1005	982	4109
11	1968	1682	9296
12	469	510	16033
13	948	1182	25207
14	723	1272	10446
15	1448	1920	20295
16	715	940	18251
17	1029	1394	30018
18	630	1068	18272
19	977	1527	27137
20	372	447	21924
21	374	638	29176
22	197	313	16470
23	174	378	21251
24	32	135	12841
25	2	174	14546
26	8	92	6796
27	7	28	6513
28	0	12	3819
29	0	4	2628
30	0	16	1096
31	0	0	294
32	0	0	220
33	0	0	133
34	0	0	18

Нетрудно видеть, что количество вершин очень быстро растет с ростом глубины. Экспоненциальный рост приводит к соответствующему увеличению времени поиска оптимального хода. Как уже замечалось ранее, для сокращения времени вычислений вводятся различные эвристики. В данном случае стоит заметить, что количество вершин в дереве перебора было бы еще больше в случае отказа от альфа-бета эвристики. В приводимом примере глубина полного перебора (с использованием альфа-бета эвристики) составляла только шесть (и, как пример, приведен столбец с глубиной перебора 8 полуходов) полуходов. В таблице видно, что до уровня с номером 7 включительно происходит примерно экспоненциальный рост количества вершин. Приближенная зависимость имеет вид: $N = 1.12 \cdot e^{0.981 \cdot n}$, где N - количество вершин на уровне n. На более глубоких уровнях, как это видно из таблицы, эта закономерность исчезает. Происходит это из-за присутствия еще одной эвристики в переборном алгоритме вычисления хорошего хода. Суть ее в следующем: в сериях последовательных взятий фигур «погружение» в дерево перебора продолжается до тех пор, пока взятия не прекратятся. Далее расчет проводится на оставшуюся с начала «погружения» глубину. Поэтому на уровнях глубже седьмого отсутствует монотонность роста вариантов в зависимости от глубины уровня. Такая тактика программы достаточна для более чем посредственной игры, даже несмотря на то, что она не может гарантировать нахождение всех особо опасных ветвей. Вмешательство в процесс выбора хода пользователя должно сделать поиск более избирательным, что приведет к более глубокому анализу возникшей ситуации.

Итак, имея несколько вариантов хода из конкретной позиции, пользователь указывает на любой из них, наиболее приемлемый с его точки зрения. Программа акцентирует расчет именно на указанной позиции и производит для нее более детальный анализ. Таким образом производится «управление» процессом выбора псевдооптимального хода. Такой подход должен наиболее оправдываться при совместной работе программы-ассистента и эксперта. В этом случае пользователь получает в качестве инструмента переборные способности машины и гарантии того, что в пределах заданного (правда, не очень большого) количества полуходов проигрыш не станет больше

некоторой, заранее вычисленной величины. Машина, со своей стороны, «получает» гибкие эвристические правила пользователя и уже готовую «реализацию» интеллекта.

Приведенная концепция распространима на другие задачи. В настоящее время проектируется ассистирующая программа для решения задач в шахматах тригонометрии. Вершинами дерева перебора в тригонометрических задачах являются тригонометрические выражения, а в качестве ребер выступают их эквивалентные преобразования. В этом случае окончательную оценку некоторой позиции задает пользователь, руководствуясь «понятностью» и «простотой» вновь полученного выражения.

Литература

1. Радионов А.Н. Критерии риска в программных моделях игр с нулевой суммой в сборнике // Уч. зап. УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып. 1. Часть 2. Ульяновск: УлГУ, 1996. С. 56-58.

2. Радионов А.Н. Некоторые критерии риска в играх с неполной информацией в сборнике// Тез. докл. на XI Междунар. конф. по пробл. теоретической кибернетики. Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. С. 168.

3. Адельсон-Вельский Г.М., Арлазаров В.Л., Донской М.В. Программирование игр. М.: Наука, 1978.

СМЕШАННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО ТЕЛА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю.Н. Санкин

В предложенной работе обсуждаются вариационные подходы при решении нестационарных задач динамики вязко-упругого тела, основанные на отыскании условия стационарности смешанного функционала, аргументами которого являются преобразованные по Лапласу обобщенные перемещения и обобщенные силы. Уравнения динамики линейной вязко-упругой системы в операторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} D\sigma + R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\frac{\partial u}{\partial t} - f = 0, \\ CD^*u + C_1 D^*\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь σ — вектор обобщенных сил или тензор напряжений; u — вектор обобщенных смещений; R — матрица инерционных характеристик или удельная масса; T — матрица внешнего рассеяния энергии; f — вектор-функция внешних нагрузок; C и C_1 — соответственно матрицы или тензоры упругих постоянных и коэффициентов внутреннего трения.

Граничные условия

$$\begin{aligned} n_\sigma \sigma = f_S \quad &\text{на} \quad S_1, \\ n_u u = u_S \quad &\text{на} \quad S_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где n_σ и n_u соответствующие операторы статической и геометрической совместности на поверхности тела; f_S — нагрузка на участке поверхности S_1; u_S — граничное перемещение на S_2.

Условие совместности на границах конечных элементов

$$\begin{aligned} n_{\sigma^+}\sigma_+ + n_{\sigma^-}\sigma_- = 0 \quad &\text{на} \quad S_1', \\ n_{u^+}u_+ = n_{u^-}u_- \quad &\text{на} \quad S_2'. \end{aligned} \tag{3}$$

Знаки "+" и "-" соответствуют различным сторонам границы сопряжения элементов $S' = S_1' \cap S_2'$.

Начальные условия

$$n|_{t=0} = a_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = a_1 . \tag{4}$$

Операторы D и D^* сопряженные в смысле Лагранжа:

$$\int\limits_{v} (D\sigma)^T u dV = \int\limits_{nu} \sigma^T D^* u dV - \int\limits_{S} \sigma_S u_S dS, \tag{5}$$

где $\sigma_S = n_\sigma, u_S = n_u u$; V — объем конечного элемента.

В общем случае граница элемента $S = S_1 \cup S_2 \cup S_1' \cup S_2'$.

Для пространственного тела

$$D = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k}; D^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial}{\partial}\partial\alpha_i\right),$$

где α_k — пространственные координаты; $\sigma = \sigma_{ij}$; $u = u_i$; $n = n_i$; $c = c_{ijkl}$.

Условие (5) может быть записано в следующем виде:

$$-\int\limits_{V} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\sigma_{ij} u_i dV = \int\limits_{V} \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j}\right) dV - \int\limits_{S} n_i \sigma_{ij} u_j ds.$$

Тогда $n_i\sigma_{ij} = f_j$ на S_1, $u_i = u_{si}$ на S_2 — граничные условия; $n_{i^+}\sigma_{ij^+} + n_{i^-}\sigma_{ij^-} = n_i\sigma_{ij} = 0$ на S_1', где $n_{i^+} = -n_{i^-}$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij^+} - \sigma_{ij^-}$, $u_+ = u_-$ или $u' = u_+ - u_- = 0$ на S_2' — условия совместности на границах элементов.

Операторные уравнения (1), граничные условия (2) и условие совместности (3) справедливы для стержней, пластин и оболочек. Поэтому обсуждаемые здесь методы универсальны для всех прикладных задач линейной вязко-упругости. Например, при продольных колебаниях прямых стержней: $\sigma = N$ — продольная сила; u — продольное смещение; $R = \mu$ — масса единицы длины стержня; $C = EF$ — жесткость стержня при растяжении и сжатии;

$$D = -\frac{\partial}{\partial x}; D = -D^*,$$

$\int\limits_{l}(D\sigma u - \sigma D^* u)dx = \int\limits_{0}^{1}\left(-\frac{\partial N}{\partial x}u - N\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = -(N_l u_l - N_0 u_0) = -\sigma_l u_l + \sigma_0 u_0)$, где l — длина стержня; $\sigma_l = N_l$; $u_l = u_l$, $\sigma_0 = -N_0$; $u_0 = u_0$.

При поперечных колебаниях прямолинейных тонких стержней: $\sigma = M\mathrm{n}$ — изгибающий момент; $R = \mu$ — масса единицы длины; $u = w$ — прогиб стержня; $f = q(x,t)$ —интенсивность распределенной нагрузки; $C = EJ$ — жесткость при изгибе;

$$D = D^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\int\limits_l (D\sigma u - \sigma D^* u)dx = \int\limits_0^l \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}w - M\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\partial M_l}{\partial x}w_l - \frac{\partial M_0}{\partial x}w_0 - M_l\frac{\partial w_l}{\partial x} + M_0\frac{\partial w_0}{\partial x} =$$

$$= -(\sigma_l u_l + \sigma_0 u_0),$$

где $\sigma_l = (-Q_l, M_l)$, $\sigma_0 = (Q_0, M_0)$ — соответственно векторы усилий в конце и начале стержня; $Q_l = \frac{\partial M_l}{\partial x}$, $Q_0 = \frac{\partial M_0}{\partial x}$ — соответствующие перерезывающие силы; $u_l^T = \left(w_l; \frac{\partial w_l}{\partial x}\right)$, $u_0^T = \left(w_0; \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$ — векторы обобщенных перемещений, компонентами которых являются прогиб и угол поворота в конце и начале стержня.

Преобразуем по Лапласу уравнение (1), граничные условия (2) и условия совместности (3):

$$\begin{aligned} &D\sigma + R(p^2 - pa_0 - a_1) + T(pu - a_0) - f = 0;\\ &(C + C_1 p)D^* u - C_1 D^* a_0 = \sigma, \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} n_\sigma \sigma &= f_s \quad \text{на} \quad S_1\\ n_u u &= u_s \quad \text{на} \quad S_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &n_{\sigma^+}\sigma_+ + n_{\sigma^-}\sigma_- = n_\sigma \sigma' \qquad \text{на} \quad S_1',\\ &n_{u^+}u_+ - n_{u^-}u_- = n_u u' = 0 \quad \text{на} \quad S_2', \end{aligned} \qquad (8)$$

где

$$u = u(p), u(p) = \int\limits_0^\infty u(t)e^{-pt}dt,$$

$$\sigma = \sigma(p), \sigma(p) = \int\limits_0^\infty \sigma(t)e^{-pt}dt\,.$$

Справедлива следующая Теорема:

Уравнения (6), граничные условия (7) и условия совместности (8) для обобщенных перемещений и обобщенных сил вязко-упругого тела, преобразованных по Лапласу, эквивалентны условию стационарности следующего функционала:

$$e(p) = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[D\sigma + p^2 Ru + pTu - 2(f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)\right]^T udV +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma^T(D^* - C^{*-1}\sigma - 2C^{*-1}C_1 D^* a_0)dV + \frac{1}{2}\int\limits_{S_1}(n_\sigma\sigma - 2f_s)^T n_u udS_1 - \qquad (9)$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S_2}(n_\sigma\sigma)^T(n_u u - 2u_s)dS_2 + \frac{1}{2}\int\limits_{S_1'}(n_\sigma\sigma')^T n_u udS_1' - \frac{1}{2}\int\limits_{S_2'}(n_\sigma\sigma)^T n_u u' dS_2',$$

где $C^* = C + C_1 p$; V - объемы элементов, на которые разбито тело. Функционал (9) обобщает результаты работы [1] на задачи вязкоупругости. Кроме того , здесь символ суммирования по элементам, следуя Прагеру [2], опущен. Вариация функционала (9) имеет вид:

$$\delta e(p) = \int\limits_V \left[D\sigma + p^2 Ru + pTu - (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)\right]^T \delta udV +$$

$$+\int\limits_V \delta\sigma^T(D^* u - C^{*-1}\sigma - C^{*-1}D^* a_0)dV +$$

$$+\int\limits_{S_1}(n_\sigma\sigma - f_s)^T n_u \delta udS_1 - \int\limits_{S_2}(n_\sigma\delta\sigma)^T(n_u u - u_s)dS_2 + \qquad (10)$$

$$+\int\limits_{S_1'}(n_\sigma\sigma')^T n_u \delta udS_1' - \int\limits_{S_2'}(n_\sigma\delta\sigma)^T n_u u' dS_2 = 0\,.$$

Принимая во внимание, что вариации δu и $\delta\sigma$ в области V, на поверхностях S_1, S_2, S_1' и S_2' независимы, получаем преобразованные по Лапласу уравнения (1), граничные условия (2) и условия сопряжения (3) или соответственно уравнения (6), условия (7) и (8).

Будем искать решение вариационной проблемы в виде рядов

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \eta_i\sigma_i, \sum_{j=1}^m \mu_j u_j, \qquad (11)$$

где

$$\eta_i = \eta_i(p), \mu_j = \mu_j(p),$$

$$\sigma_i = \sigma_i(\alpha), u_j = u_j(\alpha),$$

α — пространственная координата.

Число рядов (11) меньше или равно числу областей V, на которые разбито тело, так как они могут перекрывать одна другую. Подставляя вариации

$$\delta\sigma = \sum_{i=1}^{n} \delta\eta_i \sigma_i, \delta u = \sum_{j=1}^{m} \delta\mu_j \eta_j$$

в выражение $\delta e(p)$, получим следующие вариационные уравнения:

$$\int_V \left[D\sigma + p^2 Ru + pTu - (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)\right]^T u_j dV +$$

$$+ \int_{S_1} (n_\sigma \sigma - f_s) n_u u_j dS_1 + \int_{S_1'} (n_\sigma \sigma')^T n_u u_j dS_1' = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\int_V \sigma_i^T (D^* u - C^{*-1}\sigma - C^{*-1} C_1 D^* a_0) dV - \int_{S_2} (n_\sigma \sigma_i)^T (n_u u - u_s) dS_2 - \qquad (12)$$

$$- \int_{S_2'} (n_\sigma \sigma_i)^T n_u u' dS_2' = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Полагая $p = i\omega$, $i = \sqrt{-1}$, вычисляем таблицы комплексных функций $\eta_i = \eta_i(i\omega)$ и $\mu_i = \mu_i(i\omega)$. Затем численно интегрируя, находим оригиналы $\eta_i(t)$ и $\mu_i(t)$, после чего по формулам (11) получаем σ и u как функции времени:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t)\sigma_i, \quad u = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(t) u_j.$$

Рассмотрим случай одного независимого поля. Подставляя $\sigma = C^* Du - C_1 D^* a_0$ в вариацию функционала (10), получим $\delta e(p)$ для одного независимого аргумента $u = u(p)$

$$\delta e(p) = \int_V \left[D\sigma + p^2 Ru + pTu - (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)\right]^T \delta u dV +$$

$$+ \int_{S_1} (n_\sigma \sigma - f_s)^T n_u \delta u dS_1 - \int_{S_2} (n_\sigma \delta\sigma)^T (n_u u - u_s) dS_2 + \qquad (13)$$

$$\int_{S_1'} (n_{\sigma'})^T n_u \delta u dS_1' - \int_{S_2'} (n_\sigma \sigma)^T n_u u' dS_2' = 0.$$

Следуя вариационному методу, будем искать решение в форме:

$$u = \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j, \quad \sigma = \sum_{j=1}^{m} \mu_j C^* D^* u_j + C_1 D^* a_0. \qquad (14)$$

Вариации u и σ будут:

$$\delta u = \sum_{j=1}^{m} \delta\mu_j u_j, \quad \delta\sigma = \sum_{j=1}^{m} \delta\mu_i C^* D^* u_j. \qquad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в вариацию $\delta e(p)$ (13), получим следующие уравнения:

$$\int_V \left[DC^* D^* u - DC_1 D^* a_0 + p^2 Ru + pTu - (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)\right]^T u_j dV +$$

$$+ \int_{S_1} (n_\sigma C^* D^* u - f_s + n_\sigma C_1 D^* a_0)^T u_j dS_1 - \int_{S_2} (n_\sigma C^* D^* u_j)^T (n_u u - u_s) dS_2 + \qquad (16)$$

$$+ \int_{S_1'} (n_\sigma C^* D^* u')^T n_u u_j dS_1' - \int_{S_2'} (n_\sigma C^* D^* u_j)^T n_u u' dS_2' = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Удовлетворяя условиям совместности на границе между элементами и принимая во внимание условие (5), уравнение (16) переписываем в виде:

$$\int_V \left\{(C^* D^* u - C_1 D^* a_0)^T D^* u_j + [p^2 Ru + +pTu -\right.$$

$$\left. -(f + pRa_0 + R_1 + Ta_0)]^T u_j \right\} dV - \int_{S_1} f_s^T n_u u_j dS_1 = 0, \quad j = \overline{1,m}. \quad (17)$$

Уравнения (17) — обобщенная форма уравнений метода конечных элементов, основанного на узловых перемещениях. Число таких уравнений равно числу узловых перемещений или, иными словами, числу степеней свободы N дискретной модели. Из уравнения (17) получаем соответствующие выражения для матриц жесткостей, рассеяния энергии, масс и нагрузочных членов:

$$C_{ij} = \int_V (CD^* u_i)^T D^* u_j dV,$$

$$b_{ij} = \int_V (C_1 D^* u_i)^T D^* u_j dV,$$

$$b^*_{ij} = \int\limits_V (Tu)^T u_j dV,$$

$$m_{ij} = \int\limits_V (Ru_i)^T u_j dV \tag{18}$$

$$f_j = \int\limits_V (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)^T u_j dV + \int\limits_V (C_1 D^* a_0)^T D^* u_j dV +$$

$$+ \int\limits_{S_1} f_s^T u_j dS_1 = f_j(p) + f_{1j} + f_{2j} p.$$

Уравнения движения (17) могут быть записаны в виде одного матричного уравнения:

$$(Mp^2 + Bp + C)q = f(p) + f_1 + f_2 p, \tag{19}$$

где $M = \|m_{r,s}\|_{r,s=\overline{1,N}}$, $B = \|b_{r,s}\|_{r,s=\overline{1,N}}$, $C = \|c_{r,s}\|_{r,s=\overline{1,N}} \subset R^{N\times N}$ соответственно матрицы масс, рассеяния энергии и жесткостей. Причем элементы этих матриц m_{rs}, l_{rs}, c_{rs} равны нулю, если индексы rs принадлежат разным элементам. При $r = s$ осуществляется суммирование по всем элементам, сходящимся в узле. Сказанное относится и к выражению $f(p)$, f_1 и f_2. $q \in C^{N\times 1}$ — вектор преобразованных по Лапласу узловых перемещений;

$f(p) = \int\limits_V f^T u_j dV + \int\limits_{S_1} f_s^T u_{sj} dS_1 \in C^{N\times 1}$, $j = \overline{1,N}$ — преобразованный вектор возмущающих сил;

$f_1 = \int\limits_V (Ra_1 + Ta_0)^T u_j dV + \int\limits_V (C_1 D^* a_0) D^* u_j dV$, $f_2 = \int\limits_V (Ra_0)^T u_j dV \in R^{N\times 1}$, $j = \overline{1,N}$ — векторы возмущений, вызванные полем начальных смещений a_0 и полем начальных скоростей a_1. Знаки суммирования в выражениях $f(p)$, f_1 и f_2 по элементам, сходящимся в узле, опущены.

Рассмотрим решение задачи о соударении упругой системы с жестким препятствием. Для этого предположим, что $f(p) = 0$, и, кроме того, выполнены следующие условия:

$$B = l_1 C + l_2 M + B_1; \quad l_1, l_2 = \text{const}\ , \ \|B\| \gg \|B_1\|. \tag{20}$$

Результат решения системы уравнений (19) для r-й обобщенной координаты ($r = \overline{1,N}$) может быть записан в следующей форме [3,4]:

$$W_r(p) = \sum_{j=1}^{N} \frac{K_{rj1} + K_{rj2} p}{T_{2j}^2 p^2 + T_{1j} + 1} = W_{r1}(p) + pW_{r2}(p). \tag{21}$$

Здесь T_2 — инерционные постоянные j-ого колебательного звена; T_{1j} — постоянные рассеяния энергии; K_{rj1}, K_{rj2} — постоянные коэффициенты, которые определяются начальными условиями. Положим в уравнении (19) $p = i\omega$. Решая уравнение (19) для множества значений $\omega_K = \omega_0 + K\Delta\omega$, $K = \overline{0, K-1}$,строим в комплексной плоскости кривые $q_r - q_r(i\omega)$. Эти кривые называются амплитудо-фазо-частотными характеристиками (АФЧХ). АФЧХ может быть отдельно построена для $W_{r1}(i\omega)$ и $W_{r2}(i\omega)$.

Постоянные в (21) определяются, используя экстремальные точки (АФЧХ) при помощи формул:

$$T_{2j} = 1/\omega_j, \quad T_{1j} = T_{2j}(1 - T_{2j}^2 \omega_j^2 \text{max}),$$

$$K_{rj1} = -(T_{1j}/T_{2j}) D\text{Im}W_{r1}(\omega_j), \tag{22}$$

$$K_{rj2} = -(T_{1j}/T_{2j}) D\text{Im}W_{r2}(\omega_j).$$

Здесь $\omega_j\text{max}$ — первый экстремум $\text{Re}W_{r1}(\omega)$ для j-ого члена в ряду (21); ω_j — собственная частота, которая может быть определена как экстремум $\text{Im}W_{r1}(\omega)$, $D\text{Im}W_{r1}(\omega_j)$ и $D\text{Im}W_{r2}(\omega_j)$ — вертикальный размер j-ой петли соответствующей АФЧХ.

Как правило, число N_r существенно проявляющих себя петель АФЧХ намного меньше чем N.

Обратное преобразование Лапласа согласно формулам (21), когда $N_r < N$, может дать высокую точность, не прибегая к численному обратному преобразованию, использующем табличные значения АФЧХ.

Если условие (20) не выполняется, то формула (21) не может быть получена. Тогда для получения переходного процесса по r-ой обращенной координате может быть использовано дискретное преобразование Фурье [5]:

$$q_r(t_k) = \frac{\Delta t \Delta\omega}{\pi} \text{Re} \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_r(\omega_l) \left[\sum_{s=0}^{S-1} f(t_s) e^{-i\omega_l t_s} \right] e^{i\omega_l t_k} \right\}_{k=\overline{0,S-1}},$$

где $W_r(\omega_l)$ — берется согласно графику АФЧХ; $f(t_s)$ — возмущающая сила; $q_r(t_k)$ — реакция r-ой обращенной координаты в дискретные моменты времени t_k; Δt и $\Delta\omega$ — дискретные приращения времени и частоты.

Разработанные методы послужили основой, например, для решения задачи динамики сваи при забивке [6] и при соударении стержня с препятствием [7], причем формулы для динамических жесткостей стержня были получены точным интегрированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reissner F. On Some Variational Theorems in Elasticity. Problem in Continuum Mechanics.— SIAM, 1961.
2. Prager U. Variational Principles of Linear Elastostatics for Discontinuous Displacements, Strains, and Stresses.— Recent Progress in Applied Mechanics. The F. Odquist Volume . N.Y.,1967.
3. Санкин Ю.Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами.— Саратов: Изд-во СГУ, 1977. — 309с.
4. Санкин Ю.Н. Динамика несущих систем металлорежущих станков . — М.: Машиностроение , 1986 . — 96 с.
5. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. — N.Y.,1975.
6. Каталымов Ю.В., Санкин Ю.Н. Определение напряжений в сваях при ударном погружении в грунт / Механика и процессы управления . — Ульяновск : Изд -во УГТУ,1996.— С.38 — 43.
7. Санкин Ю.Н., Лебедева Н.А. Продольные колебания стержней ступенчато- переменного сечения при соударении с жестким препятствием / Новые методы , средства и технологии в науке , промышленности и экономике. — Ульяновск : Изд-во УГТУ, 1997. — С.20—23.

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н.О.[9]

Уравнением с запаздыванием называется уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$ и её производных, в котором значение старшей производной в момент времени t зависит от значений младших производных в моменты $t+s$, $s \le 0$. При этом запаздывание может быть как ограниченным (существует $h : 0 < h < \infty$ такое, что $s \in [-h, 0]$), так и неограниченным. Эти уравнения представляют интерес с точки зрения как теоретического исследования, так и многочисленных приложений, и одной из наиболее актуальных проблем является изучение устойчивости.

Для уравнений с неограниченным запаздыванием значительную роль в построении теории играет выбор фазового пространства, от которого существенно зависят даже результаты существования и единственности решений (см. обзор [9]). В статье [11] был разработан аксиоматический подход к этой проблеме, то есть определён ряд аксиом, касающихся фазового пространства и правой части уравнения, таких, что любое конкретное пространство и функционал, удовлетворяющие этим аксиомам, автоматически обладают определёнными свойствами, в частности, удовлетворяют условиям существования и единственности решений. Этот подход (в дальнейшем используемый во многих работах, связанных с изучением различных свойств таких уравнений (см., например, [12–16,21])) позволяет определить условия, при которых возможно построение предельных уравнений со свойствами, аналогичными полученным для обыкновенных [6–8] и функционально-дифференциальных с конечным запаздыванием [15] уравнений.

Исследование на устойчивость в смысле Ляпунова нелинейных или нестационарных уравнений с запаздыванием основано на вто-

[9] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (№96-01-01067).

ром методе Ляпунова. Обобщение этого метода на уравнения с конечным запаздыванием развивается в двух основных направлениях. Первое (см. [2]) основано на идее обобщения метода Ляпунова путём использования знакоопределённых функционалов, определённых на отрезках интегральных линий. Другой подход заключается в использовании знакоопределённых функций в качестве меры возмущений. Конструктивные результаты в этом направлении были получены, как правило, на основе введённых Б.С.Разумихиным условий относительно производной функции Ляпунова (см. [3]). Идеи этих двух подходов развиваются и обобщаются для уравнений с неограниченным запаздыванием [10],[13],[16],[18] и др. Метод предельных уравнений позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову в терминах конечномерных функций, более общие для некоторого класса неавтономных уравнений с неограниченным запаздыванием, чем известные результаты типа Ляпунова-Разумихина для таких уравнений [19],[21].

1. Основные определения, предположения и вспомогательные утверждения. Пусть B — действительное векторное пространство либо

(i) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо

(ii) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

Обозначим норму в пространстве R^n через $|\cdot|$. Предположим также, что в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что пространство $(B, |\cdot|_B)$ является банаховым.

Для функции $x : (-\infty, A) \to R^n$, $0 < A \leq +\infty$, для каждого $t \in [0, A)$ функция $x_t : (-\infty, 0] \to R^n$ определяется формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leq 0$.

Определение 1 [13]. Пространство B назовём допустимым, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такие, что выполняются следующие условия. Пусть

$0 \leq a < A \leq \infty$. Если $x : (-\infty, A) \to R^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$

(B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $|\cdot|_B$;

(B2) $|x_t|_B \leq K \max\limits_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t-a)|x_a|_B$;

(B3) $|\varphi(0)| \leq J|\varphi|_B$ для всех $\varphi \in B$;

(B4) $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть B — допустимое пространство, $B_H = \{\varphi \in B : |\varphi|_B < H\}$. Предположим, что если φ ограничена и непрерывна на $(-\infty, 0]$, то $\varphi \in B$ и для каждого $t \geq 0$ $|\varphi_{-t}|_B \leq L$ для некоторого $L > 0$ [12], где $\varphi_{-t}(s) = \varphi(-t+s)$, $s \in (-\infty, 0]$.

Рассмотрим систему уравнений с неограниченным запаздыванием:

$$\dot{x} = X(t, x_t), \tag{SI}$$

где $X : R^+ \times B_H \to R^n$ есть непрерывное отображение, $|X(t, \varphi)| \leq m(D')$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times D'$, где D' — произвольное ограниченное подмножество B_H. Тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \subset R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ системы (SI), определённое для $t \in [-\infty, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$, то есть непрерывное и удовлетворяющее уравнению (SI) на $[\alpha, \beta)$, и $x_\alpha = \varphi$, и если x — непродолжаемое решение (SI) на $[\alpha, \beta)$ такое, что $\{x_t : \alpha < t < \beta\}$ содержится в замкнутом и ограниченном подмножестве B_H, то $\beta = \infty$ [13]. Допустим, что имеет место следующее предположение:

Предположение 1. Функционал $X(t, \varphi)$ удовлетворяет локальному условию Липшица и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset B_H$ — компакт.

В этом случае для каждого компакта $K \subset B_H$ семейство сдвигов $\{X_\tau(t, \varphi) = X(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в пространстве непрерывных функций, определённых на $R^+ \times K$, и системе (SI) можно сопоставить семейство предельных систем [11],[17]:

$$\dot{x} = X^*(t, x_t), \tag{1}$$

где $X^*(t,\varphi)$ есть предельный к X функционал, определяемый компактом $K \subset B_H$ и последовательностью $t_k \to +\infty$, $X^*(t,\varphi) = \lim_{k\to\infty} X(t+t_k,\varphi)$, $(t,\varphi) \in R^+ \times K$ (при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0,T]\times K$, $T>0$). В силу условия Липшица решения уравнений (SI) и (1) для каждой точки $(\alpha,\varphi) \in R^+ \times B_H$ и $(\alpha,\varphi)\in R^+\times K$ соответственно, будут единственны.

Для решения $x(t) = x(t;\alpha,\varphi)$ системы (SI) положительное предельное множество $\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ определяется как

$$\omega^+(x_t(\alpha,\varphi)) = \bigcap_{t\geq\alpha} \mathrm{Cl}\{x_s : s\geq t\}$$

и состоит из пределов последовательностей $\{x_{t_k}\}$ при $t_k\to+\infty$. Из [11] следует непустота и компактность предельного множества $\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ для ограниченного решения $x(t;\alpha,\varphi)$.

Пусть $V \in C^1(R^+\times G_H, R^+)$ есть функция Ляпунова, где $G_H = \{x\in R^n : |x| < H\}$. Её производная в силу уравнения (SI) есть функционал $V' : R^+\times B_H \to R$ [13]:

$$V'(t,x_t) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} X_i(t,x_t).$$

На множестве $R^+\times B_H$ определим непрерывный функционал W со значениями в R^+. Используем следующее обобщение определения из [13].

Определение 2. Пара (V,W) называется парой Ляпунова-Разумихина, если:

Для каждого $\rho>0$ $t\geq\rho$ и $\varphi\in B_H$ такой, что $\varphi_{-\rho}\in B_H$ и φ непрерывна на $[-\rho,0]$, выполняется

$$V(t,\varphi(0)) \leq W(t,\varphi) \leq \max\{\max_{-\rho\leq s\leq 0} V(t+s,\varphi(s)), W(t-\rho,\varphi_{-\rho})\}, \quad \text{(LR1)}$$

$$\text{если } 0 < V(t,\varphi(0)) = W(t,\varphi), \text{ то } V'(t,\varphi)\leq 0. \qquad \text{(LR2)}$$

Предположение 2. Функция $V(t,x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $R^+\times\bar G_r$, $\bar G_r = \{x\in R^n : |x|\leq r < H\}$, $0<r<H$.

Предположение 3. Функционалы $W(t,\varphi)$ и $U(t,\varphi) = V'(t,\varphi)$ равномерно непрерывны и ограничены на каждом множестве $R^+\times K$.

В данных предположениях семейства сдвигов $\{V_\tau(t,x) = V(\tau+t,x),\ \tau\in R^+\}$, $\{U_\tau(t,\varphi) = U(\tau+t,\varphi),\ \tau\in R^+\}$ и $\{W_\tau(t,\varphi) = W(\tau+t,\varphi),\ \tau\in R^+\}$ предкомпактны.

По аналогии с $X^*(t,\varphi)$ определим функционалы, предельные к $W(t,\varphi)$ и $U(t,\varphi)$, и функцию $V^*(t,x)$, предельную к функции V.

Определение 3. Функционалы X^*, V^*, W^*, U^* образуют предельную совокупность, обозначаемую далее (K,X^*,V^*,W^*,U^*), если они являются предельными для одной и той же последовательности $t_n\to+\infty$ и компакта $K\subset B_H$.

Далее будем предполагать, что для V и W выполняется следующее предположение [13]:

Предположение 4. Для любого $c>0$ существует $T=T(c)>0$ такое, что для каждой равномерно непрерывной функции $\varphi\in K$ и $t\in R$, таких, что $\sup_{s\leq 0} V^*(t+s,\varphi(s)) \leq W^*(t,\varphi) = c$ (где W^* определён на $R^+\times K$), выполняется условие $W^*(t,\varphi) = \sup_{T\leq s\leq 0} V^*(t+s,\varphi(s))$.

Для $c_0\in R$, последовательности $t_n\to+\infty$ и компакта $K\subset B_H$ определим множества:

$$N(t,c_0,T) = \{\varphi\in B_H : \sup_{-T\leq s\leq 0} V^*(t+s,\varphi(s)) = c_0\},$$

$$M(t,c_0,T) = \{\varphi\in N(t,c_0,T) : V^*(t,\varphi(0)) = c_0\},$$

$$L(t,0,K) = \{\varphi\in K : U^*(t,\varphi) = 0\}.$$

Замечание. Если фазовое пространство B сепарабельно, то функционалы, предельные к X, W и U (а также множество $L(t,0,K)$), не зависят от компакта $K\subset B_H$, то есть определяются лишь последовательностью $t_k\to+\infty$ на всём пространстве $R^+\times B_H$.

2. Теорема о неустойчивости. Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества ограниченного решения системы (SI), используя как предельные уравнения, так и функции Ляпунова.

Пусть для системы (SI) существует пара Ляпунова-Разумихина (V, W). Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим, что*

1) решение системы (SI) *определено и ограничено при всех* $t \geq \alpha$, $|x(t;\alpha,\varphi)| \leq r$.

2) выполняются Предположения 1–4.

Тогда существует значение $c = c_0 = const$, *такое, что для любой* $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *существует предельная совокупность* (K, X^*, V^*, W^*, U^*), *и решение* $x^*(t,0,\psi)$ *предельной системы* $\dot{x} = X^*(t,x_t)$ *такие, что* $x_t^* \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$, $x_t^* \in N(t,c_0,T)$ *для всех* t, *при этом для каждого* $t \in R^+$, *при котором* $x_t^* \in M(t,c_0,T)$, *выполнено* $U^*(t,x_t^*) = 0$, *то есть* $x_t^* \in L(t,0,K)$.

Полученный результат обобщает теорему о локализации положительного предельного множества для автономного уравнения с бесконечным запаздыванием [13].

Предположим, что $X(t,0) \equiv 0$, так что система (SI) имеет нулевое решение. Рассмотрим задачу о неустойчивости нулевого решения системы (SI) в смысле Ляпунова.

Пусть для системы (SI) существует пара (V, W), удовлетворяющая предположениям 2,3. Будем также считать, что выполняется

Предположение 5. $V(t,0) = 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что $V(t,x) \geq a(|x|)$ на $R^+ \times G_\delta$, где $a(u) \in \mathcal{K}$, и для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times B_\delta$ справедливо Предположение 4 (здесь $\mathcal{K} = \{\sigma \in C[R^+, R^+],\ \sigma(u)$ строго возрастает и $\sigma(0) = 0\})$.

Будем говорить, что множество $M(t,c_0,T) \cap L(t,0,K)$ не содержит решений системы, если для каждого решения $x(t;\alpha,\varphi)$ этой системы, содержащегося в компакте $K \subset B_H$, существует $t^* \geq \alpha$ такое, что $x_t(\alpha,\varphi) \notin M(t,c_0,T) \cap L(t,0,K)$ для всех $t \in [t^*, t^* + T]$, где $T = T(c_0)$ — число, определяемое Предположением 4. Для функции V и функционала W обозначим $P(V)$ подмножество из $R^+ \times B_H$ такое, что $(t,\varphi) \in P(V) \Leftrightarrow 0 < V(t,\varphi(0)) = W(t,\varphi)$.

Теорема 2. *Предположим, что существует пара* (V, W), *удовлетворяющая условию* (LR1) *и такая, что:*

1) существует $\alpha_0 \geq 0$ *такое, что для каждого малого* $\delta > 0$ *найдётся* $\varphi_0 \in B_\delta$, $(\alpha_0, \varphi_0) \in P(V)$;

2) $V'(t,\varphi) = U(t,\varphi) \geq 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in P(V) \cap G$, $G = R^+ \times B_\varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$;

3) существует последовательность $t_k \to +\infty$ *такая, что для каждого компакта* $K \subset B_H$ *множество* $M(t,c_0,T) \cap L(t,0,K) \cap B_\varepsilon$ *не содержит решений соответствующей предельной системы* $\dot{x} = X^*(t,x_t)$ *при достаточно малых* $c_0 > 0$.

Тогда нулевое решение системы (SI) *неустойчиво.*

Теорема о неустойчивости из [4], доказанная для предкомпактного уравнения с конечным запаздыванием (когда в качестве функционала $W(t,\varphi)$ рассматривается $\sup_{-h \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s))$), является частным случаем приведённого утверждения. Отметим, что в качестве начальных возмущений здесь предполагаются произвольные элементы допустимого пространства. При исследовании конкретных систем класс реально допустимых возмущений может быть уже, и решение, неустойчивое в смысле Ляпунова, будет устойчивым относительно более узкого класса реально допустимых возмущений (см., например, [20]).

Автор благодарит проф. А.С.Андреева за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Андреев А.С.* Об устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Доклады Российской Академии наук. Сент. 1997. Т.356. №2.

2. *Красовский Н.Н.* Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т.20. №4.С.513–518.

3. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. №4.С.500–512.

4. *Седова Н.О.* Метод функций Ляпунова и предельных уравнений в задаче об устойчивости ФДУ с конечным запаздыванием // Фунда-

ментальные проблемы математики и механики. Уч. записки УлГУ. Вып.4. 1997.С.86-90.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.:Мир, 1984. 421 с.

6. *Artstein Z.* Topological dinamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations **23** (1977), p.216–223.

7. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations **25** (1977), p.184–202.

8. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations, **27** (1978), p.172–189.

9. *Corduneanu C. and Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey // Nonlinear Analysis, Theory, Methods &Applications, **4** (1980), p.831–877.

10. *Grimmer R. and Seifert G.* Stability properties of Volterra integrid-ifferential equations // J. Differential equations **19** (1975), p.147–166.

11. *Hale J. and Kato J.* Phase space for retarted equations with infinite delay // Funkcialai Ekvacioj, **21**(1978), p.11–41.

12. *Haddock J. and Hornor W.* Precompactness and convergence in norm of positive orbits in a sertain fading memory space // Funkcial.Ekvac., **31** (1988), p.349–361.

13. *Haddock J. and Terjéki J.* On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential equations, **86** (1990), p.1–32.

14. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Math. J., **35** 1983, p.597–605.

15. *Hornor W.E.* Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoku Math.J., **42**(1990), p.217–229.

16. *Kato J.* Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funkcial. Ekvac., **21** (1978), p.63–80.

17. *Murakami S.* Perturbation Theorem for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differential equations,

59 (1985), p.314–335.

18. *Parrott M.* Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space of continuous functions // in «Lecture Notes in Mathematics». Vol.846. Springer-Verlag. New-York, 1981.

19. *Seifert G.* Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations **16** (1974), p.289–297.

20. *Shimbell A.* Contributions to the mathmatical biophysics of the central nervous system with special reference to learning // Bull. Math. Biophys. 1950. №12, p.241-275.

21. *Terjéki J.* On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // Annalea Polonici Mathematici, **36** (1979), p.299–314.

О МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР ЛИ КОНЕЧНОЙ КОДЛИНЫ В СЛУЧАЕ ПОЛЯ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Ханина И.Р.

В данной статье речь пойдет о многообразиях алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

Основные обозначения и понятия читатель может найти в монографии [1]. Нам также понадобятся некоторые факты из теории представления симметрических групп и из теории многообразий алгебр над полем нулевой характеристики (см. [2]).

Введем некоторые определения. Пусть V - многообразие алгебр Ли над полем K характеристики 0. В относительно-свободной алгебре многообразия V можно выделить подпространство полилинейных элементов степени n, обозначим его через $P_n(V)$. Данное пространство естественным образом превращается в KS_n- модуль и раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей по теореме Машке. Число слагаемых в данном разложении назовем кодлиной многообразия и обозначим $l_n(V)$. Если число слагаемых ограничено константой, не зависящей от n, то будем говорить о многообразии конечной кодлины. Будем говорить, что многообразие алгебр Ли обладает обобщенно дистрибутивной решеткой, если кратности всех неизоморфных подмодулей из разложения полилинейной части многообразия на неприводимые ограничены константой, не зависящей от n.

При доказательстве всех утверждений используется левонормированная расстановка скобок, то есть под лиевским словом xyz подразумевается слово $((xy)z)$.

Нам также понадобятся следующие многообразия:

N_cA – многообразие алгебр Ли с нильпотентным коммутантом ступени нильпотентности не выше c. Оно определяется тождеством

$$(x_1x_2)\dots(x_{2c+1}x_{2c+2}) \equiv 0.$$

В частности, многообразие N_2A определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0.$$

U_2 - многообразие алгебр Ли, в котором выполняются все тождества вида $f_\lambda \equiv 0$, где полином f_λ соответствует разбиению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ числа n, $\Sigma_{i=1}^t \lambda_i = n, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$, удовлетворяющему условию $n - \lambda_1 > 2$.

Сформулируем два предложения о многообразии U_2.

П р е д л о ж е н и е 1. Многообразие U_2 имеет следующее строение полилинейной части

$$P_n(U_2) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3,$$

где $V_1 = KS_n lin\, xy^{n-1}$, $V_2 = \bigoplus\limits_{i=1}^{[\frac{n-2}{2}]} KS_n lin\, xy^i(zy^i)y^{n-2-2i}$,
$V_3 = \bigoplus\limits_{i=1}^{[\frac{n-3}{2}]} KS_n lin\, xy^{2i}(xy)y^{n-3-2i}$.

Запись $M = \bigoplus\limits_i KS_n lin f_i$ означает, что модуль M является прямой суммой изоморфных KS_n-подмодулей, каждый из которых порождается элементом, полученным из элемента f_i в результате полной линеаризации.

П р е д л о ж е н и е 2. Кодлина многообразия U_2 равна $n-2$

$$l_n(U_2) = n - 2.$$

Основной результат выражен в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть V - многообразие алгебр Ли конечной кодлины. Тогда существует такое натуральное число s, что выполняется условие

$$U_2 \not\subset V \subset N_sA.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Для каждого натурального числа n строится семейство M_n полиоднородных многочленов f_k степени n, где

$$f_k(x_1,\dots,x_{t_k},y) = (x_1x_2)\dots(x_{2t_k-1}x_{2t_k})y^{n-2t_k},$$

$$t_k = 2^k - 1,\ k = 1,\dots a_n,\ a_n = \frac{n}{2} - 1.$$

Затем доказывается, что из конечности кодлины следует выполнение в V тождества вида

$$f_{k_0}(x_1,\dots,x_{t_{k_0}},y) = (x_1x_2)\dots(x_{2t_{k_0}-1}x_{2t_{k_0}})y^{n-2t_{k_0}} \equiv 0,$$

из которого согласно результату работы [3] следует выполнение в V тождества

$$(x_1x_2)\dots(x_{2t_{k_0}-1}x_{2t_{k_0}})y_1\dots y_m \equiv 0,$$

где m - некоторое натуральное число. Отсюда видно, что для V выполнено условие $V \subset N_sA$, где $s = t_{k_0} + m - 1$. Поскольку согласно Предложению 2 рост кодлин многообразия U_2 не ограничен константой, то верно $U_2 \not\subset V$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Рост многообразия конечной кодлины является полиномиальным.

При доказательстве Теоремы 1 и Следствия использовались результаты работ [5] и [6].

Т е о р е м а 2. Если многообразие полиномиального роста обладает обобщенно дистрибутивной решеткой, тогда оно является многообразием конечной кодлины.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полиномиальность роста некоторого многообразия алгебр Ли означает, что в разложении полилинейной части данного многообразия на неприводимые подмодули участвует конечное число неизоморфных подмодулей, не зависящее от числа n ([4]). Обозначим это число через k.

Из определения многообразий с обобщенно дистрибутивной решеткой следует, что кратности вхождения данных подмодулей также ограничены константой, не зависящей от n. Отсюда общее число слагаемых, участвующих в разложении,не превосходит произведения

данной константы на число k и не зависит от n. То есть многообразие обладает конечной кодлиной. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть многообразие полиномиального роста обладает обобщенно дистрибутивной решеткой. Тогда рост данного многообразия эквивалентен росту последовательности n^r, где r - некоторая целочисленная константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предыдущей теоремы следует, что наше многообразие имеет конечную кодлину, то есть число ненулевых модулей в разложении полилинейной части многообразия на неприводимые равно некоторой целочисленной константе t.

Из полиномиальности роста нашего многообразия следует, что существует натуральное число r, такое,что модули, соответствующие диаграммам с более чем r клетками вне первой строки, являются нулевыми в многообразии V. ([4]). И размерности ненулевых подмодулей не превосходят числа n^r, где r - целое число.

Таким образом, мы получили, что рост многообразия V эквивалентен росту числовой последовательности tn^r, где t и r - некоторые целочисленные константы. Теорема доказана.

Вопрос о достаточном условии конечности кодлины многообразий алгебр Ли пока остается открытым.

Работа частично поддержана грантом "Университеты России - фундаментальные исследования" 1998 года.

Литература

[1] Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. - М.: Наука, 1985.

[2] Джеймс Г. Теория представления симметрических групп. - М.: Наука, 1982.

[3] Зельманов Е.И. Глобальная нильпотентность энгелевых алгебр Ли ограниченного индекса над полем нулевой характеристики// ДАН СССР. - 1987. - Т. 292. - N 2. - С. 265 - 268.

[4] Мищенко С.П. О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль// Матем. заметки. 1986.Т.40.- N 6.- С.713 - 721.

[5] Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двухступенно нильпотентным коммутантом// Весці АН БССР. 1987. - N6. -С. 39-43.

[6] Мищенко С.П. Цветные диаграммы Юнга// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993.- N 1.- С.90-91.

ОБ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Юрьева О.Д.

1. Рассмотрим класс непрерывных нестационарных систем вида

$$\dot{x} = A(t,x)x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \in R^+$, $A(t,x) \in R^{n\times n}$.

Допустим, что для системы (1) определена функция Ляпунова вида

$$V(t,x) = x^T G(t,x)x,$$

где $G(t,x) \in C^1$, $g_0E \leq G(t,x)$, $\|G(t,x)\| \leq g_1$; g_0, g_1 const> 0, E — единичная матрица размерности $n \times n$. Таким образом, по определению, функция $V(x,t)$ является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел.

Оценку сверху для производной функции Ляпунова примем в виде квадратичной формы

$$\dot{V}(t,x) \leq -x^T B(t,x)x = -W(t,x) \leq 0, \tag{2}$$

здесь $B(t,x) \geq 0$ — неотрицательная функциональная матрица размерности $n \times n$ имеет следующий вид $B(t,x) = A^T(t,x)G(t,x) + G(t,x)A(t,x) + \dfrac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial G(t,x)}{\partial x}\right)^T A(t,x)x + \dfrac{1}{2}x^T A^T(t,x)\dfrac{\partial G(t,x)}{\partial x}$.

Допустим, что матрицы $A(t,x)$ и $B(t,x)$ непрерывно дифференцируемы до порядка n включительно и ограничены вместе со своими частными производными.

Тогда можем определить предельную к (1) систему и предельную к $\dot{V}$ функцию [1]

$$\dot{x} = A^*(t,x)x, \qquad A^*(t,x) = \frac{d}{dt}\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t A(t_n+\tau,x)d\tau,$$

$$\Omega(t,x)=x^TB^*(t,x)x,\qquad B^*(t,x)=\frac{d}{dt}\lim_{t_n\to\infty}\int\limits_0^t B(t_n+\tau,x)d\tau.$$

Введем следующее определение.

Определение 1. Пусть $U(t,x),\ V(t,x)\in R^{n\times n}$ — две матрицы, имеющие непрерывные частные производные до порядка n включительно в интервале $(\tau-\delta,\tau+\delta)$, $\tau\in R$, $\delta>0$. Пусть $K_1=U(\tau,0)$, $K_i=K_{i-1}(\tau,0)V(\tau,0)+\dfrac{\partial K_{i-1}(\tau,0)}{\partial\tau}$, $(2\le i\le n)$.
Будем говорить, что пара матриц $(U(t,x),V(t,x))$ наблюдаема в точке $x=0$, если для некоторого τ выполнено $rk[K_1\ K_2\ \dots\ K_n]^T=n$.

Таким образом, матрица наблюдаемости K пары $(U(t,x),V(t,x))$ в точке $x=0$ имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} U(t,0)\\ \left(U(t,0)V(t,0)+\dfrac{\partial U(t,0)}{\partial t}\right)\\ \left(U(t,0)V(t,0)+\dfrac{\partial U(t,0)}{\partial t}\right)V(t,0)+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(U(t,0)V(t,0)+\dfrac{\partial U(t,0)}{\partial t}\right)\\ \dots\end{bmatrix}.$$

Допустим, что для каждой предельной пары $(A^*(t,x),B^*(t,x))$ существует точка $\tau\in R$, в окрестности $(\tau-\delta,\tau+\delta)$ которой матрицы $B^*(t,x)$ и $A^*(t,x)$ имеют непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно. Тогда имеет место следующая теорема об асимптотической устойчивости.

Теорема 1. Пусть каждая предельная пара матриц $(B^*(t,x),A^*(t,x))$ наблюдаема в точке $x=0$.
Тогда тривиальное решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим множество $M=\{\Omega(x,t)=0\}=\{x^TB^*(t,x)x=0\}=\{B^*(t,x)x=0\}$. Пусть M_1 — наибольшее инвариантное относительно $\dot x=A^*(t,x)$ подмножество множества M,

и пусть решение $x(t)$ принадлежит M_1. Тогда имеем $B^*(t,x)x(t)\equiv0$. Дифференцируя это соотношение $n-1$ раз, получим следующую систему соотношений

$$\begin{aligned}
0&=\left[\frac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial t}+\frac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial x}A^*(t,x)x\right]x+B^*(t,x)A^*(t,x)x\\
0&=\frac{\partial^2B^*(t,x(t))}{\partial t^2}x+\frac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial t}A^*(t,x)x+\\
&+\left[\frac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial t}+\frac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial x}A^*(t,x)x\right]A^*(t,x)x+\\
&+B^*(t,x)\left(\frac{\partial A^*(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial A^*(t,x)}{\partial x}A^*(t,x)x\right)x+\\
&+B^*(t,x)A^*(t,x)A^*(t,x)x=\left[\frac{\partial^2B^*(t,x)}{\partial t^2}+2\frac{\partial B^*(t,x)}{\partial t}A^*(t,x)+\right.\\
&\left.+B^*(t,x)\frac{\partial A^*(t,x)}{\partial t}+B^*(t,x)A^{*2}(t,x)\right]x\,.\\
&\dots
\end{aligned}\qquad(3)$$

Выделяя линейную часть относительно x, имеем следующую систему $Kx=0$, где K — матрица наблюдаемости пары $(B^*(t,x),A^*(t,x))$ — имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} B^*(t,x)\\ \dfrac{\partial B^*(t,x(t))}{\partial t}+B^*(t,x)A^*(t,x)\\ \dfrac{\partial^2B^*(t,x)}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial B^*(t,x)}{\partial t}A^*(t,x)+B^*(t,x)\dfrac{\partial A^*(t,x)}{\partial t}+B^*(t,x)A^{*2}(t,x)\\ \dots\\ \dfrac{\partial^{(n-1)}B^*(t,x)}{\partial t^{n-1}}+\dots\end{bmatrix}.$$

В соответствии с определением 1, требуя существование ненулевого определителя порядка n, то есть наблюдаемость пары $(B^*(t,x),A^*(t,x))$ в точке $x=0$ на некотором интервале времени $(\tau-\delta,\tau+\delta)$ $(\delta>0)$, получим, что линейная система будет иметь тот же ранг n, что и полная, и, следовательно, допускать только нулевое решение. Следовательно, полная система (3) в силу малости x также будет допускать только нулевое решение.

Очевидно, справедлив и следующий результат.

Теорема 2. Если существует хотя бы одна наблюдаемая пара $(B^*(t,x), A^*(t,x))$ в точке $x = 0$, тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0.

Следующее определение позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) в предположениях относительно исходных матриц $(B(t,x), A(t,x))$.

Определение 2. Пару матриц $(B(t,x), A(t,x))$ назовем строго наблюдаемой в точке $x = 0$, если:

1) существует число $T > 0$, такое, что для любого момента $\alpha \geq 0$ существует точка $t^*(\alpha) \in (\alpha, \alpha + T)$ и ее окрестность $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, в которой матрицы $B(t,x)$ и $A(t,x)$ непрерывно дифференцируемы до порядка n включительно;

2) ранг матрицы наблюдаемости $K(t,x)$ пары $(B(t,x), A(t,x))$ равен n (в той же окрестности t^*). При этом, этот ранг определяется одним и тем же минором $\triangle(t,0)$, $|\triangle(t,0)| \geq \delta > 0$ матрицы $K(t,x)$.

Заметим, что тогда существует интервал $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$, на котором $|\triangle^*(t,0)| \geq \delta > 0$ в предельном случае, и для наблюдаемости каждой пары $(B^*(t,x), A^*(t,x))$ достаточна строгая наблюдаемость пары $(B(t,x), A(t,x))$.

Отсюда имеем следующий результат.

Теорема 3. Если пара матриц $(B(t,x), A(t,x))$ строго наблюдаема в точке $x = 0$, тогда нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{4}$$

правая часть которой $X(t,x): \ R^+ \times \Gamma \to \Gamma$ есть вектор-функция, определенная в области $G = R^+ \times \Gamma$, где $R^+ = [0, +\infty)$, $\Gamma = \{x \in R^n : \|x\| \leq h, \ 0 < h \leq +\infty\}$.

Предположим, что для этой системы существует определенно положительная, допускающая бесконечно малый высший предел, функция Ляпунова

$$V = V(t,x) \quad \omega_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \omega_2(\|x\|),$$

непрерывная, локально удовлетворяющая условию Липшица по x равномерно относительно t. Для производной функции Ляпунова в силу системы (4) примем следующую оценку

$$\dot{V}(t,x) \leq W(t,x) \leq 0,$$

где функция $W(t,x): \ G \to R^+$ непрерывна по x при любом $t \in R^+$.

Предполагая, что $X(t,x)$ и $W(t,x)$ удовлетворяют условиям предкомпактности, определим семейство предельных пар $\{(\Phi(t,x), \Omega(t,x))\}$.

Исследуем на устойчивость нулевое решение системы (4), основываясь на результатах предыдущего раздела.

Предположим, что $\Phi(t,x) \in C^{n+1}(G)$, $\Omega \in C^{n+2}(G)$, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}(t,0) \equiv 0$. Представим эти функции следующим образом

$$\Phi(t,x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, \alpha x) d\alpha \cdot x = A^*(t,x)x$$

$$\Omega(t,x) = x^T \int_0^1 \alpha \int_0^1 \frac{\partial^2 \Omega}{(\partial x)^2}(t, \alpha\beta x) d\beta d\alpha \cdot x = x^T B^*(t,x)x.$$

Таким образом, исследование общей нелинейной системы дифференциальных уравнений свели к исследованию уже известной системы специального вида (1).

Запишем матрицу наблюдаемости S пары $\left(\int\limits_0^1 \alpha \int\limits_0^1 \frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,\alpha\beta x)d\beta d\alpha, \int\limits_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,\alpha x)d\alpha\right)$ в точке $x=0$.

Матрицы $A^*(t,x)$ и $B^*(t,x)$ в точке $x=0$ имеют следующий вид

$$A^*(t,0) = \int\limits_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,0)d\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,0)$$

$$B^*(t,0) = \int\limits_0^1 \alpha \int\limits_0^1 \frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,0)d\beta d\alpha = \int\limits_0^1 \frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,0)\alpha d\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,0)$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,0) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^3\Omega}{(\partial x)^2\partial t}(t,0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,0) \\ \dots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^{(n+1)}\Omega}{\partial t^{n-1}(\partial x^2)}(t,0) + \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем следующий результат, являющийся следствием теоремы 1.

Пусть на некотором интервале времени $\mathrm{rk}S = n$, то есть каждая предельная пара матриц $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{(\partial x)^2}(t,x), \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x)\right)$ наблюдаема в точке $x=0$.

Тогда тривиальное решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво.

Аналогично теоремам 2 и 3 формулируются условия асимптотической устойчивости,равномерной по x_0,и условие равномерной асимптотической устойчивости на основе строгой наблюдаемости пары матриц в точке $x=0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-01067).

Литература

1. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

3. *Юрьева О.Д.* Об устойчивости линейных систем // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Фундаментальные проблемы мат-ки и механики. Часть 2. Вып.1. Ульяновск, 1996.

4. *Miller R.K., Michel A.N.* Asymptotic stability of system: results involving the system topology // SIAM J. Control and optimization. 1980. Vol.18. No.2.

О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ КАНОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ КРАТЕОДОРИ

Г.М.Ильмушкин

С каждой проблемой моментов Кратеодори естественным образом ассоциируется гильбертово пространство H и действующий в нем регулярный изометрический оператор V с индексами дефекта (1,1), множество спектральных функций которого описывает все решения указанной проблемы. При этом особую роль играют так называемые ортогональные или канонические решения проблемы моментов, которые соответствуют спектральным функциям унитарных в H расширений оператора V. Предварительно исследуются спектральные свойства выпуклой оболочки ортогональных спектральных функций произвольного регулярного изометрического оператора с дефектными числами (1,1). В дальнейшем полученные результаты используются для исследования выпуклой оболочки канонических решений проблемы моментов Кратеодори. Отметим, что характеристики выпуклых оболочек регулярных симметрических дифференциальных и интегральных операторов с дефектными числами равными единице были даны в работах [1,2], а также ряд спектральных свойств выпуклых оболочек канонических решений моментов Кратеодори исследован нами в [4,5].

§1. Выпуклая оболочка ортогональных спектральных функций регулярного изометрического оператора

1. Введем необходимые понятия и обозначения.

Пусть T — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, D_T —его область определения. Напомним, что точка Z называется точкой регулярного типа оператора T, если существует такое $k = k(z)$, что при всех $f \in D_T : \|(T-zE)f\|$, где E — единичный оператор, $\|\cdot\|$ — норма в пространстве H. Оператор T

называется регулярным, если все точки комплексной плоскости являются точками регулярного типа этого оператора. Изометрический оператор будет регулярным, если все точки единичной окружности являются для него точками регулярного типа.

Итак, пусть V —регулярный изометрический оператор в H, с индексами дефекта (1,1). Как установлено в [3], такие операторы существуют только в конечномерных пространствах, так что всюду в дальнейшем будем полагать, что H — гильбертово пространство размерности m.

При любом ζ положим:

$$M_\zeta = (E - \zeta V)D_V, \quad N_\zeta = H\Theta M - \zeta,$$

где D_V — область определения оператора V. В частности, при $\zeta = 0$:

$$M_0 = D_V, \quad M_\infty = \Delta_V, \quad N_0 = H\Theta D_V, \quad N_\infty\Theta\Delta_V,$$

Δ_V — область значений оператора V.

Обозначим через $\mathring{U}$ некоторое унитарное расширение в H оператора V.

Введем оператор

$$\mathring{U}_\zeta = \mathring{U}\,(E - \zeta\,\mathring{U})^{-1}, \quad |\zeta| \neq 1.$$

Оператор $\mathring{U}_\zeta$ обладает свойствами (см. [3]):

$$\mathring{U}_\zeta\, N_0 = N_{\frac{1}{\zeta}}, \quad \mathring{U}_\zeta\, M_\zeta = \Delta_V. \tag{1}$$

Пусть g_0 — некоторый элемент из N_0 и $\|g_0\| = 1$.

Положим:

$$g_\infty = \mathring{U}\, g_0, \quad g(\overline{\zeta} = \mathring{U}_\zeta\, g_0.$$

В силу свойств (1) $g_\infty \in N_\infty$, $g(\overline{\zeta}) \in N_{\frac{1}{\zeta}}$.

Обозначим через $x_1, \ldots, x_m$ ($|\chi_k| = 1, k = 1, \ldots, m$) собственные значения , а через $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ соответствующие им нормированные собственные векторы оператора $\overset{\circ}{U}$. Характеристическая функция оператора V имеет вид (см. [3])

$$\chi(\zeta) = \frac{\zeta(g(\overline{\zeta}), g_0)}{(g(\overline{\zeta}), g_\infty)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta |a_k|^2}{\overline{x}_k - \zeta} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|^2}{1 - x_k \zeta} \right)^{-1}, \tag{2}$$

где $a_k = (g_0, \varphi_k)$, $k = 1, \ldots, m$. Напомним [3], что для $\chi(\zeta)$ справедливы свойства:

1°. $\chi(\zeta)$ —регулярная в круге $|\zeta| \leq 1$ функция;

2°. для любого ζ, $|\zeta| = 1$, $|\chi(\zeta)| = 1$, при этом

$$\chi(\overline{x}_k) = 1, \ k = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\varphi(\zeta)$ — произвольная регулярная в круге $|\zeta| < 1$ функция, не превосходящая по модулю единицы, а $E_t (0 \leq t \leq 2\pi)$ — определяемая ею спектральная функция оператора V. Для любого $\Theta \in [0, 2\pi]$ определим функцию $S(\Theta)$ формулой

$$S(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1-0} \int_0^{\Theta} \mathrm{Re} \left[\frac{1 + \chi(\zeta)\varphi(\zeta)}{1 - \chi(\zeta)\varphi(\zeta)} \right] dt \quad (\zeta = re^{it}). \tag{3}$$

Как известно [3], $S(t)$ — неубывающая функция с полным изменением, равным единице. Функция $S(t)$ называется спектральной функцией распределения оператора V. Будем полагать, что $S(t)$ непрерывна.

Для любого $f \in H$ справедливы равенства (см.[3]):

$$\begin{aligned} f &= \int_0^{2\pi} \frac{(f, g(t))g(t)}{|(g(t), g_\infty)|^2} ds(t), \\ \|f\|^2 &= \int_0^{2\pi} \frac{(f, g(t))g(t)}{|(g(t), g_\infty)|^2} ds(t) \end{aligned} \tag{4}$$

здесь под $g(t)$ понимаются $g(e^{it})$.

Как установлено в [3], существует биективное соответствие между множеством всех спектральных функций E_t оператора V и множеством F всех его спектральных функций распределения $S(\Theta)$.

Следует напомнить, что при этом формула (3) также устанавливает биективное соответствие между множеством N регулярных в единичном круге $K = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ функций $\varphi(\zeta)$, не превосходящих по модулю единицу и множеством F всех спектральных функций распределения оператора V. Известно также, что множество F выпукло.

Спектральная функция распределения $S(t)$ называется ортогональной, если она соответствует по формуле (3) постоянной $\varphi(\zeta) \equiv x$, $|x| = 1$.

Замкнутой выпуклой оболочкой M ортогональных спектральных функций распределения называется замыкание множества M_0 функций $S(t)$ вида

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{z_k}(t), \tag{5}$$

$$\alpha_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \quad k = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $S_{z_k}(t)$ — ортогональные спектральные функции распределения оператора V, соответствующие $\varphi(\zeta) \equiv z_k = \mathrm{const}$.

Теперь установим некоторые свойства спектра функций распределения $S(t)$, принадлежащих классу M, где под спектром функции $S(t)$ будем понимать множество ее точек роста.

Как нам установлено в [3], спектр унитарного расширения $\overset{\circ}{U}$ — простой, следовательно, числа $x_1, \ldots, x_m$ — отличны друг от друга. Положим: $\overline{x}_k = e^{it_k}$. Можно считать, что числа $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$ занумерованы так, что $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq 2\pi$. Обозначим: $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, m-1$ и $\Delta_k = [0, t_1] \cup [t_m, 2\pi]$.

Известно (см. [4]), что функция $\chi(\zeta)$ устанавливает биективное соответствие между сегментами $\Delta_k (k = 1, \ldots, m)$ следующим образом: точке $\zeta \in \Delta_k$ соответствует точка $\eta \in \Delta_p$ так, что $\chi(e^{i\zeta}) = \chi(e^{i\eta})$.

Если $S_x(t)$ — ортогональная спектральная функция распределения, отвечающая по формуле (3) функции $\varphi(\zeta) \equiv x$, $|x| = 1$, то спектр соответствующего унитарного расширения U_z состоит из корней уравнения $\chi(\zeta) = \overline{z}$. Пусть это множество будет $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, $\omega_k = e^{i\delta_k}$, $k = 1, \dots, m$. Тогда спектр функции $S_x(t)$ составляют точки $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$.

Обозначим через J спектр функции распределения $S(t)$ и положим $J(\Delta_k) = J \cap \Delta_k$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть T — любое замкнутое непустое множество в Δ_p. Тогда существует $S(t) \in M$ такая, что ее спектр $J(\Delta_p)$ совпадает с T.

Доказательство. Возьмем счетное множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Ясно, что $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Положим $\chi(e^{ia_k}) = \overline{Z}_k$. Каждой комплексной константе z_k соответствует ортогональная спектральная функция распределения $S_{z_k}(t)$, спектр которой в Δ_p совпадает с точкой a_k. Мы намерены определить сходящуюся в основном последовательность $S_n(t) \in M_0$. Определим для этого последовательность положительных чисел следующим образом:

$$\alpha_1^{(0)} = 1,\ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 1,\ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 1,$$

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \ldots + \alpha_n^{(n)} + \alpha_{n+1}^{(n)} = 1\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(k)} S_{z_k}(t) + \alpha_n^{(n-1)} S_{z_n}(t).$$

Очевидно, что $S_n(t) \in M_0$ и $S_n(t)$ сходится в каждой точке t. Это следует из оценки

$$|S_{n+n_0}(t) - S_n(t)| = \left| \sum_{k=n}^{n+n_0-1} \alpha_k^{(k)} S_{z_k}(t) + \alpha_{n+n_0}^{(n+n_0-1)} S_{n+n_0}(t) - \right.$$

$$\left. - \alpha_n^{(n-1)} S_{z_n}(t) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+n_0-1} \alpha_k^{(k)} + \alpha_{n+n_0}^{(n+n_0-1)} + \alpha_n^{(n-1)}$$

и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^n$.

Далее заметим, что спектр функции $S_n(t)$ состоит из n точек $a_1, \dots, a_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что спектр

предельной функции $S(t) \in M$ совпадает на Δ_p с множеством A, так как $\overline{A} = T$, то, следовательно, и с множеством T. Теорема доказана.

Теорема 2. Для всякой спектральной функции распределения $S(t) \in M_0$ представление

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{z_k}(t) \quad (\alpha_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ |z_k| = 1) \tag{6}$$

единственно. Постоянные z_k и α_k определяются по функции $S(t)$.

Доказательство. Пусть $J(\Delta_1) = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ $(\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n)$ — спектр функции распределения $S(t)$ в Δ_1. Положим: $\omega_k = e^{i\eta_k}$ $(k = 1, \dots, n)$. В силу теоремы 4 (см. [4]) имеем

$$\{\zeta :\ \zeta = e^{i\delta},\ \delta \in J\} - \{e^{i\eta_1}, \dots, e^{i\eta_n}\}.$$

Постоянные $\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n$ есть множество $\{e^{i\eta_1}, \dots, e^{i\eta_n}\}$. Для определения чисел α_k запишем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{z_k}(\eta_j) = S(\eta_j) \quad (j = 1, \dots, n). \tag{7}$$

Замечая, что функция распределения $S_{z_k}(t)$ — кусочно постоянная с единственным в Δ_1 скачком $\gamma_k > 0$ в точке η_k, нетрудно вычислить определитель системы (7). Он равен $\alpha_1 \ldots \alpha_n \gamma_1 \ldots \gamma_k > 0$. Следовательно, система (7) имеет единственное решение. А так как $S(t) \in M_0$, то решение системы (7) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такое, что $\alpha_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, существует. Теорема доказана.

§2. Выпуклая оболочка канонических решений проблемы моментов Кратеодори

1. Под проблемой моментов Кратеодори понимается следующая задача: дана конечная последовательность комплексных чисел $\{S_k\}_{-n}^{n}$, отыскивается функция распределения $t \to p(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющие условиям

$$S_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dp(t) \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm n). \tag{8}$$

Как известно, проблема моментов (8) разрешима тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_k\}_{-n}^{n}$ позитивна; при этом, не нарушая общности рассуждений, положим $S_0 = 1$.

2. Обозначим через H гильбертово пространство полиномов относительно $z(|z| = 1)$ степени не выше n со скалярным произведением

$$(P(z), Q(z)) = \sum_{j,k=0}^{n} S_{j-k} x_j \overline{y}_k,$$

где

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} x_j z^j, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{n} y_k z^k.$$

Пусть $P_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — тригонометрические полиномы первого рода, отвечающие данной проблеме моментов. Обозначим через V оператор умножения на независимую переменную $z(|z|) = 1$ в H, этот оператор называется оператором, ассоциированным с данной проблемой моментов Каратеодори. Известно, что V является замкнутым регулярным изометрическим оператором с дефектными числами, равными единице.

Как установлено в [3], совокупность всех решений $p(t)$ $t \in [0, 2\pi]$ проблемы моментов (8) определяется формулой

$$p(t) = \int_0^t \frac{dS(\lambda)}{|p_n(e^{i\lambda})|^2}, \tag{9}$$

где $S(\lambda)$ — спектральная функция распределения изометрического оператора V, ассоциированного с данной проблемой моментов, при этом

$$S(\lambda) = \lim_{r \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\lambda} \operatorname{Re}\left[\frac{1 + \chi(\zeta)\varphi(\zeta)}{1 - \chi(\zeta)\varphi(\zeta)}\right] d\theta \quad (\zeta = re^{i\theta}). \tag{10}$$

Здесь $\varphi(\zeta) \in N$, а характеристическая функция $\chi(\zeta)$ определяется равенством [3]

$$\chi(\zeta) = \zeta \frac{\sum_{j=0}^{n} \overline{p_j(0)} p_j(\frac{1}{\zeta}}{p_n(\frac{1}{\zeta})\sqrt{\sum_{j=0}^{n} |p_j(0)|^2}}.$$

Формула (9) устанавливает биективное соответствие между множеством всех решений проблемы моментов (8) и множеством всех спектральных функций распределения оператора V, а формулы (9), (10) устанавливают биективное соответствие между множеством F и множеством N регулярных в единичном круге K функций $\varphi(\zeta)$, отображающих K в себя.

3. Определение. Решение $\rho(t)$ проблемы моментов (8), отвечающее постоянной $\varphi(\zeta) = x(|x| = 1)$ или ортогональной спектральной функции распределения $S_x(t)$), называется каноническим.

Обозначим через $\widetilde{M}_0$ выпуклую оболочку канонических решений проблемы моментов (8), а через $\widetilde{M}$-ее замыкание. Из теоремы 3 [4] следует следующее утверждение.

Теорема 3. Замкнутая выпуклая оболочка $\widetilde{M}$ канонических решений $\rho(t)$ проблемы моментов (8) описывается множеством функций $\varphi(\zeta)$ класса N, представимых в виде $\varphi(\zeta) = f(\chi(\zeta))$, где $f(\zeta)$ - произвольная функция из N.

С учетом теоремы 1 из предыдущего параграфа сформулируем следующее заключение.

Теорема 4. Для произвольного замкнутого непустого множества $T \in \Delta_p$ существует такое решение $\rho(t) \in \widetilde{M}_0$ проблемы моментов Каратеодори, что его спектр $J(\Delta_p)$ совпадает с T.

В заключение отметим некоторые свойства спектральных решений $\rho(t) \in \widetilde{M_0}$ проблемы моментов (8), которые легко следуют из рассуждений, проводимых в §1.

1^0. Спектр канонического решения $\rho(t)$, отвечающего постоянной $\varphi(\zeta) = z, |z| = 1$, состоит из $n+1$ точек $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$, которые определяются из уравнения

$$\chi(e^{i\xi_k}) = \bar{z}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

2^0. Обозначим $t_0, t_1, ..., t_n (t_0 < t_1 < ... < t_n)$ точки спектра канонического решения $\rho_0(t)$, отвечающего постоянной $\varphi(\zeta) \equiv 1, \Delta_k = [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$ $\Delta_n = [0, t_0] \cup [t_n, 2\pi]$. Пусть $p(t) \in \widetilde{M}_0$,

$\rho(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \rho_{z_k}(t)$ $|z_k| = 1$, $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, тогда для любого p, $p = 0, 1, \ldots, n$ спектр $J(\Delta_p)$ решения $\rho(t)$ в Δ_p состоит из m точек $\eta_1, \ldots, \eta_m$, определяемых из уравнения $\chi(e^{i\eta_j}) = \bar{z}_j$ $j = 1, 2, \ldots, m$, а, следовательно, спектр J решения $\rho(t)$ состоит из $(n+1)m$ точек.

И, наконец, отметим, что теорема 2 остается в силе и для решений рассматриваемой проблемы моментов (8).

Литература

1. Глазман И.М., Нейман М.Б. О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций // ДАН СССР. Т. 102. 1955. №3.

2. Александров Е.Л. О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций одного интегрального оператора Карлемана // Труды молодых ученых. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1969.

3. Александров Е.Л., Ильмушкин Г.М. О спектральных функциях распределения регулярного изометрического оператора // Сибирский матем. журнал. Т. 15. 1974. Вып. 5. С. 972-984.

4. Александров Е.Л., Ильмушкин Г.М. О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций регулярного изометрического оператора // Функциональный анализ: Межвуз. сб. Ульяновск, 1990. С. 21-28.

5. Ильмушкин Г.М. О решениях проблемы моментов Каратеодори // Тез. докл. междунар. конф. по теории характеристических функций линейных операторов. Ульяновск, 1997. С. 14-15.

Ортогональные финитные базисные функции, связанные с треугольной сеткой [9]

В.Л.Леонтьев, Н.Ч.Лукашанец

Строятся двумерные финитные функции, имеющие такие же конечные носители, как и классические B-сплайны первой степени. Функции связаны с треугольной сеткой общего вида и являются взаимоортогональными. Получена оценка точности аппроксимации непрерывных функций линейными комбинациями предлагаемых функций.

На многоугольной области $\Omega \subset R^2$ вводится разбиение на треугольники T_k так, чтобы каждая пара треугольников имела либо одну общую вершину, либо одну общую сторону, либо не пересекалась. Объединение треугольников составляет Ω. $(P_0, P_1, \ldots, P_N)$ – множество вершин треугольников. $h_{ij} = |P_i P_j|$ – длины сторон треугольников, $h = \max_{i,j} h_{ij}$ – максимальная из них. ϑ_0 – минимальный из углов треугольников T_k. На каждой из сторон $P_i P_j$ берутся точки $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ и $P_{ji} = (x_{ji}, y_{ji})$, удаленные на расстояние $h_{ij}/3$ от вершин P_i и P_j соответственно.

Каждой точке P_i ставится в соответствие функция $\varphi_i(x, y)$, отличная от нуля лишь на треугольниках с вершиной в точке P_i.

На треугольнике T_k^* с вершинами в точках P_i, P_n и P_m строятся отрезки $P_{in}P_{im}$, $P_{ni}P_{mi}$, $P_{ni}P_{nm}$, $P_{in}P_{mn}$, $P_{mn}P_{mi}$, $P_{nm}P_{im}$ (рис.1). Отрезки $P_{ni}P_{mi}$, $P_{in}P_{mn}$ и $P_{nm}P_{im}$ пересекаются в точке пересечения медиан треугольника T_k, обозначаемой через $P_k^* = (x_k^*, y_k^*)$. T_k разбивается на девять подобных ему и равных между собой треугольников. Рассмотрим на треугольнике T_k^* функцию

[9] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (№96-01-01067).

$$
\varphi_i(x,y)=\begin{cases}
1+\alpha-\alpha\left(1-\dfrac{x_i-x_{in}}{x_{im}-x_{in}}-\dfrac{y_i-y_{im}}{y_{in}-y_{im}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{in}}{x_{im}-x_{in}}-\dfrac{y-y_{im}}{y_{in}-y_{im}}\right), & (x,y)\in\Delta P_iP_{in}P_{im},\\
1+\alpha-(\alpha+2/3)\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{in}}{x_{im}-x_{in}}-\dfrac{y_k^*-y_{im}}{y_{in}-y_{im}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{in}}{x_{im}-x_{in}}-\dfrac{y-y_{im}}{y_{in}-y_{im}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{in}P_{im},\\
\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{nm}}{x_{mn}-x_{nm}}-\dfrac{y_k^*-y_{mn}}{y_{nm}-y_{mn}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{nm}}{x_{mn}-x_{nm}}-\dfrac{y-y_{mn}}{y_{nm}-y_{mn}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{nm}P_{mn},\\
-\alpha\left(1-\dfrac{x_{ni}-x_n}{x_{nm}-x_n}-\dfrac{y_{ni}-y_{nm}}{y_n-y_{nm}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_n}{x_{nm}-x_n}-\dfrac{y-y_{nm}}{y_n-y_{nm}}\right), & (x,y)\in\Delta P_nP_{ni}P_{nm},\\
-\alpha\left(1-\dfrac{x_{mi}-x_m}{x_{mn}-x_m}-\dfrac{y_{mi}-y_{mn}}{y_m-y_{mn}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_m}{x_{mn}-x_m}-\dfrac{y-y_{mn}}{y_m-y_{mn}}\right), & (x,y)\in\Delta P_mP_{mi}P_{mn},\\
\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{ni}}{x_{nm}-x_{ni}}-\dfrac{y_k^*-y_{nm}}{y_{ni}-y_{nm}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{ni}}{x_{nm}-x_{ni}}-\dfrac{y-y_{nm}}{y_{ni}-y_{nm}}\right)- & \\
-\alpha\left(1-\dfrac{x_{ni}-x_k^*}{x_{nm}-x_k^*}-\dfrac{y_{ni}-y_{nm}}{y_k^*-y_{nm}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_k^*}{x_{nm}-x_k^*}-\dfrac{y-y_{nm}}{y_k^*-y_{nm}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{ni}P_{nm},\\
\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{mi}}{x_{mn}-x_{mi}}-\dfrac{y_k^*-y_{mn}}{y_{mi}-y_{mn}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{mi}}{x_{mn}-x_{mi}}-\dfrac{y-y_{mn}}{y_{mi}-y_{mn}}\right)- & \\
-\alpha\left(1-\dfrac{x_{mi}-x_k^*}{x_{mn}-x_k^*}-\dfrac{y_{mi}-y_{mn}}{y_k^*-y_{mn}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_k^*}{x_{mn}-x_k^*}-\dfrac{y-y_{mn}}{y_k^*-y_{mn}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{mi}P_{mn},\\
-\alpha+(2\alpha+1)\left(1-\dfrac{x_{in}-x_k^*}{x_{ni}-x_k^*}-\dfrac{y_{in}-y_{ni}}{y_k^*-y_{ni}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_k^*}{x_{ni}-x_k^*}-\dfrac{y-y_{ni}}{y_k^*-y_{ni}}\right)+ & \\
+(\alpha+1/3)\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{in}}{x_{ni}-x_{in}}-\dfrac{y_k^*-y_{ni}}{y_{in}-y_{ni}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{in}}{x_{ni}-x_{in}}-\dfrac{y-y_{ni}}{y_{in}-y_{ni}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{in}P_{ni},\\
-\alpha+(2\alpha+1)\left(1-\dfrac{x_{im}-x_k^*}{x_{mi}-x_k^*}-\dfrac{y_{im}-y_{mi}}{y_k^*-y_{mi}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_k^*}{x_{mi}-x_k^*}-\dfrac{y-y_{mi}}{y_k^*-y_{mi}}\right)+ & \\
+(\alpha+1/3)\left(1-\dfrac{x_k^*-x_{im}}{x_{mi}-x_{im}}-\dfrac{y_k^*-y_{mi}}{y_{im}-y_{mi}}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{x-x_{im}}{x_{mi}-x_{im}}-\dfrac{y-y_{mi}}{y_{im}-y_{mi}}\right), & (x,y)\in\Delta P_k^*P_{im}P_{mi},
\end{cases}
$$

где $\alpha>0$.

Нетрудно заметить, что $\varphi_i(P_i)=1$, $\varphi_i(P_{in})=\varphi_i(P_{im})=1+\alpha$, $\varphi_i(P_{ni})=\varphi_i(P_{mi})=-\alpha$, $\varphi_i(P_k^*)=1/3$, на стороне P_nP_m функция $\varphi_i(x,y)$ равна нулю. На каждом из треугольников, образующих треугольник T_k, функция φ_i представлена соответствующей плоскостью (рис.1).

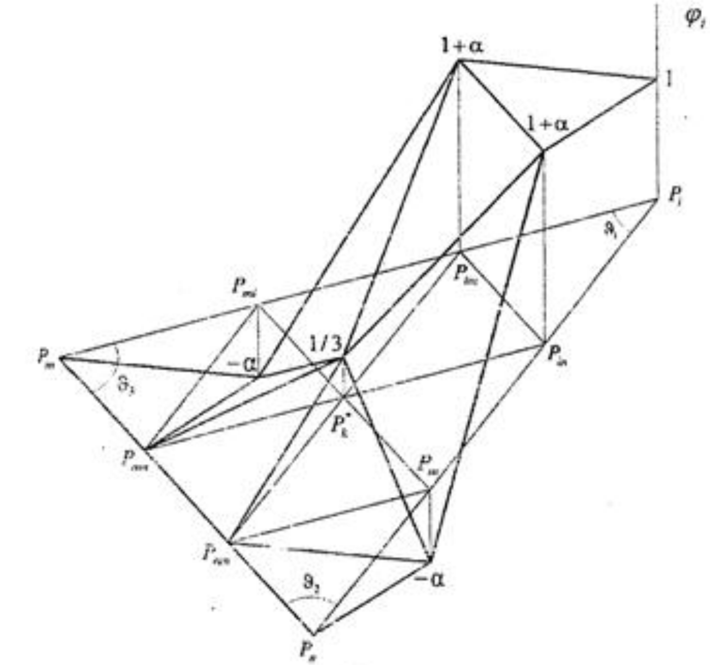


Рисунок 1

Базисные функции $\varphi_i(x,y)$ ортогональны на Ω, если

$$\alpha=(\sqrt{31}-4)/6.$$

Через $W_2^{1,h}$ обозначается множество функций вида

$$u^h(x,y)=\sum_{i=0}^{N}a_i\varphi_i(x,y),$$

где a_i (i=0, ..., N) — всевозможные наборы чисел. Очевидно, что $W_2^{1,h}\subset C(\Omega)\bigcap W_2^1(\Omega)$.

Теорема. Для любой функции $u(x,y)\in C^{(1)}(\Omega)$ существует такая функция $u^h\in W_2^{1,h}$, что

$$\left\|u-u^h\right\|_{C(\Omega)}\le\frac{ch}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^{|\gamma|}u\right\|_{C(\Omega)},$$

причем постоянная c не зависит от параметров сетки и от функции $u(x,y)$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{s} = (s_1, s_2)$ произвольный единичный вектор, $|\bar{s}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 1$. $(\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) = s_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + s_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ – производная по направлению $\bar{s}$. Очевидно, что для любой точки $\widetilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T_k$ справедливо неравенство

$$\left|(\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) u(\widetilde{P})\right| \le |s_1| \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\widetilde{P})\right| + |s_2| \left|\frac{\partial u}{\partial y}(\widetilde{P})\right| \le \sum_{|\gamma|=1} \left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Определим единичные векторы $\bar{s}^{(1)}$, $\bar{s}^{(2)}$ вида

$$\bar{s}^{(1)} = \frac{\overline{P_i P_n}}{\left|\overline{P_i P_n}\right|}, \quad \bar{s}^{(2)} = \frac{\overline{P_i P_m}}{\left|\overline{P_i P_m}\right|}.$$

В [1, с.117] показано, что любой единичный вектор $\bar{s}$, лежащий в плоскости треугольника T_k, может быть представлен в виде

$$\bar{s} = d_1 \bar{s}^{(1)} + d_2 \bar{s}^{(2)},$$

где

$$|d_1| \le 1/\sin \vartheta_0, \quad |d_2| \le 1/\sin \vartheta_0.$$

Пусть ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 – углы треугольника T_k (рис. 2).

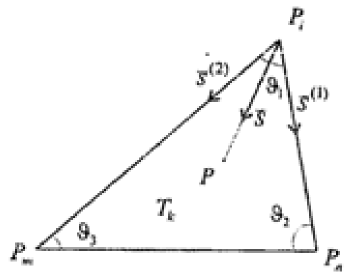


Рисунок 2.

В качестве $u^h(x, y)$ выберем функцию вида

$$u^h(x, y) = \sum_{i=0}^{N} u(P_i) \varphi_i(x, y).$$

Рассмотрим разность $u - u^h$ в произвольной точке $P=(x,y)$ треугольника T_k с вершинами в точках P_i, P_n, P_m.

В зависимости от положения точки P возможны три варианта оценки функции $u - u^h$.

1) Допустим, что точка P принадлежит любому из треугольников: $\Delta P_i P_{in} P_{im}$, $\Delta P_n P_{nm} P_{ni}$, $\Delta P_m P_{mi} P_{mn}$. Пусть для определенности $P \in \Delta P_i P_{in} P_{im}$. Определим единичный вектор $\bar{s}$

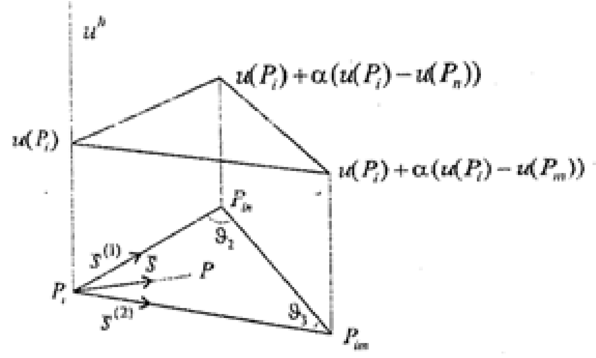
$$\bar{s} = \frac{\overline{P_i P}}{\left|\overline{P_i P}\right|}.$$

Разложим $(u - u^h)(P)$ в ряд Тейлора:

$$(u - u^h)(P) = (u - u^h)(P_i) + (\bar{s} \cdot \bar{\nabla})(u - u^h)(\widetilde{P}) \cdot |P - P_i|,$$

где $\widetilde{P}$ – некоторая точка на линии $P_i P$, отличная от P и P_i.

Функция u^h линейна на $\Delta P_i P_{in} P_{im}$ и принимает значения $u(P_i)$, $u(P_i) + \alpha(u(P_i) - u(P_n))$, $u(P_i) + \alpha(u(P_i) - u(P_m))$ в точках P_i, P_{in}, P_{im} соответственно (рис. 3).



$$|P_{in} - P_i| = h_{in}/3,$$
$$|P_{im} - P_i| = h_{im}/3.$$

Рисунок 3.

Поскольку u^h линейна на $\Delta P_i P_{in} P_{im}$, то

$$(\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) u^h(\widetilde{P}) = (\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) u^h(P_i) = const \quad \text{для любой точки } \widetilde{P} \in P_i P.$$

Кроме того, $u^h(P_i) = u(P_i)$, следовательно, ряд Тейлора функции $u - u^h$ можно записать в виде

$$(u - u^h)(P) = \left((\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) u(\widetilde{P}) - (\bar{s} \cdot \bar{\nabla}) u^h(P_i)\right) \cdot |P - P_i|.$$

Представив $(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)$ через производные по направлениям $\bar{s}^{(1)}$ и $\bar{s}^{(2)}$, получим

$$(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)=d_1(\bar{s}^{(1)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)+d_2(\bar{s}^{(2)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)=$$

$$=d_1\frac{3\alpha}{h_{in}}(u(P_i)-u(P_n))+d_2\frac{3\alpha}{h_{im}}(u(P_i)-u(P_m))=$$

$$=d_1\frac{3\alpha}{h_{in}}\int_{P_n}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(1)}+d_2\frac{3\alpha}{h_{im}}\int_{P_m}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(2)}.$$

По теореме о среднем

$$\left|\int_{P_n}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(1)}\right|=\left|\overline{\nabla}u(\tilde{\bar{P}})\right|\cdot|P_i-P_n|\le h_{in}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Здесь $\tilde{\bar{P}}$ – некоторая точка на линии P_iP_n, отличная от P_i и P_n.

Аналогично

$$\left|\int_{P_m}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(2)}\right|\le h_{im}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Следовательно,

$$(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)\le(|d_1|+|d_2|)3\alpha\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}\le\frac{6\alpha}{\sin\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Учитывая, что $|P-P_i|=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\le h/3$ для любой точки $P\in\Delta P_iP_{in}P_{im}$, получаем оценку для $(u-u^h)(P)$:

$$\left|(u-u^h)(P)\right|\le\left(\left|(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u(\tilde{P})\right|+\left|(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i)\right|\right)\cdot|P-P_i|\le$$

$$\le\frac{h}{3}\left(1+\frac{6\alpha}{\sin\vartheta_0}\right)\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}\le\frac{(2\alpha+1/3)h}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(\Omega)}.$$

Случаи, когда $P\in\Delta P_nP_{nm}P_{ni}$ или $P\in\Delta P_mP_{mi}P_{mn}$, рассматриваются аналогично. При этом получаются такие же оценки аппроксимации для $(u-u^h)(P)$.

2) Пусть точка P принадлежит какому-либо из треугольников $\Delta P_k^*P_{im}P_{in}$, $\Delta P_k^*P_{ni}P_{nm}$, $\Delta P_k^*P_{mi}P_{mn}$. Для определенности будем считать, что $P\in\Delta P_k^*P_{im}P_{in}$.

Определим единичные векторы $\bar{s}$, $\bar{s}_{(i)}$, $\bar{s}_{(n)}$, $\bar{s}_{(m)}$

$$\bar{s}=\frac{\overline{P_k^*P}}{\left|\overline{P_k^*P}\right|},\quad \bar{s}_{(i)}=\frac{\overline{P_k^*P_i}}{\left|\overline{P_k^*P_i}\right|},\quad \bar{s}_{(n)}=\frac{\overline{P_k^*P_n}}{\left|\overline{P_k^*P_n}\right|},\quad \bar{s}_{(m)}=\frac{\overline{P_k^*P_m}}{\left|\overline{P_k^*P_m}\right|}.$$

Функция u^h характеризуется на $\Delta P_k^*P_{im}P_{in}$ рисунком 4.

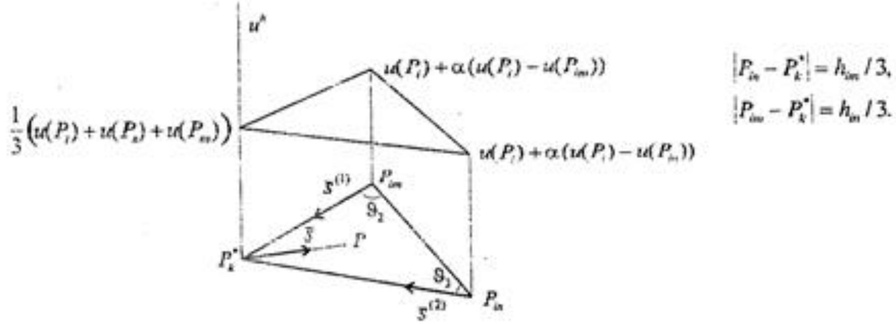


Рисунок 4.

Учитывая, в силу линейности функции u^h на $\Delta P_iP_{in}P_{im}$, что

$$(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(\tilde{P})=(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)=const,$$

разложим $(u-u^h)(P)$ в ряд Тейлора

$$(u-u^h)(P)=(u-u^h)(P_k^*)+(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})(u-u^h)(\tilde{P})\cdot\left|P-P_k^*\right|=$$

$$=(u-u^h)(P_k^*)+\left((\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u(\tilde{P})-(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)\right)\cdot\left|P-P_k^*\right|.$$

Здесь $\tilde{P}$ – некоторая точка на линии P_k^*P, отличная от P и P_k^*.

Так как $u^h(P_k^*)=(u(P_i)+u(P_n)+u(P_m))/3$, то

$$(u-u^h)(P_k^*)=(u(P_k^*)-u(P_i))/3+(u(P_k^*)-u(P_n))/3+(u(P_k^*)-u(P_m))/3=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{P_i}^{P_k^*}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}_{(i)}+\int_{P_n}^{P_k^*}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}_{(n)}+\int_{P_m}^{P_k^*}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}_{(m)}\right).$$

Для любой точки $\tilde{P}\in T_k$ справедливо неравенство

$$\left|\tilde{P}-P_k^*\right|\le 2h/3,$$

следовательно,

$$\left|(u-u^h)(P_k^*)\right|\le\frac{2h}{3}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Очевидно, что $(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)$ раскладывается на сумму

$$(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*) = d_1(\bar{s}^{(1)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*) + d_2(\bar{s}^{(2)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*).$$

Рассмотрим производную по направлению $\bar{s}^{(1)}$ функции u^h на линии $P_{in}P_k^*$.

$$(\bar{s}^{(1)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*) = (u^h(P_{im}) - u^h(P_k^*))/(h_{in}/3) =$$

$$= \left[(u(P_i) - u(P_n))/3 + (\alpha + 1/3)(u(P_i) - u(P_m))\right]/(h_{in}/3) =$$

$$= \frac{1}{h_{in}}\int_{P_n}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(2)} + \frac{3\alpha+1}{h_{in}}\int_{P_m}^{P_i}\overline{\nabla}u\cdot d\bar{s}^{(1)}.$$

Следовательно,

$$\left|(\bar{s}^{(1)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)\right| \le \sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)} + (3\alpha+1)\frac{h_{im}}{h_{in}}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Согласно теореме синусов

$$h_{im}/h_{in} = \sin\vartheta_2/\sin\vartheta_3 \le 1/\sin\vartheta_0,$$

поэтому

$$\left|(\bar{s}^{(1)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)\right| \le (1+\frac{3\alpha+1}{\sin\vartheta_0})\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)} \le \frac{3\alpha+2}{\sin\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Аналогично показывается, что на стороне $P_{im}P_k^*$

$$\left|(\bar{s}^{(2)}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_k^*)\right| \le \frac{3\alpha+2}{\sin\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Следовательно

$$(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u^h(P_i) \le (|d_1|+|d_2|)\frac{3\alpha+2}{\sin\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)} \le \frac{6\alpha+4}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left\|D^\gamma u\right\|_{C(T_k)}.$$

Учитывая, что $\left|P - P_k^*\right| \le h/3$ для любой точки $P \in \Delta P_k^* P_{im} P_{in}$, получаем оценку для $(u-u^h)(P)$:

$$\left|(u-u^h)(P)\right| \le \left|(u-u^h)(P_k^*)\right| + (\left|(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u(\widetilde{P})\right| + \left|(\bar{s}\cdot\overline{\nabla})u(P_k^*)\right|)\cdot\left|P-P_k^*\right| \le$$

$$\le \frac{2h}{3}\sum_{|\gamma|=1}\left|D^\gamma u\right|_{C(T_k)} + \frac{h}{3}(1+\frac{6\alpha+4}{\sin^2\vartheta_0})\sum_{|\gamma|=1}\left|D^\gamma u\right|_{C(\Omega)} \le \frac{(2\alpha+7/3)h}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left|D^\gamma u\right|_{C(\Omega)}.$$

Случаи, когда $P \in \Delta P_k^* P_{ni} P_{nm}$ или $P \in \Delta P_k^* P_{mi} P_{mn}$, рассматриваются аналогично. При этом получаются такие же оценки аппроксимации для $(u-u^h)(P)$.

3) Точка P принадлежит какому-либо из треугольников $\Delta P_k^* P_{nm} P_{mn}$, $\Delta P_k^* P_{mi} P_{im}$, $\Delta P_k^* P_{in} P_{ni}$. Считаем для определенности, что $P \in \Delta P_k^* P_{nm} P_{mn}$.

Функция u^h характеризуется на $\Delta P_k^* P_{nm} P_{mn}$ рисунком 5.

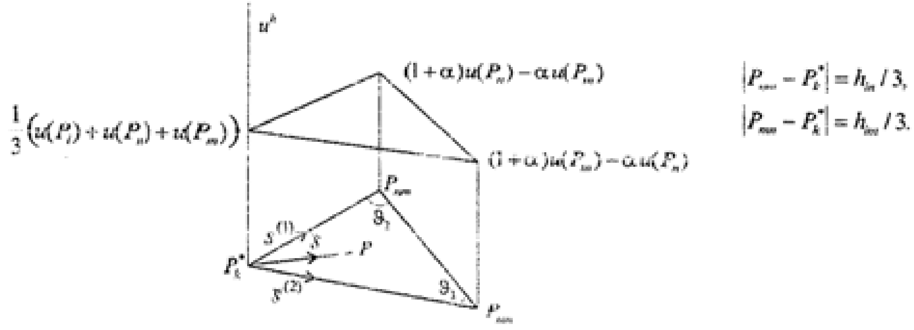


Рисунок 5.

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, проведенным в случае 2. В результате получаем, что для любой точки $P \in \Delta P_k^* P_{nm} P_{mn}$

$$\left|(u-u^h)(P)\right| < \frac{(4\alpha+3)h}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left|D^\gamma u\right|_{C(\Omega)}.$$

Это неравенство справедливо также и для $P \in \Delta P_k^* P_{mi} P_{im} \bigcup \Delta P_k^* P_{in} P_{ni}$.

Итак, для любой точки $P=(x,y)$ треугольника T_k справедлива оценка

$$\left|(u-u^h)(P)\right| \le \frac{ch}{\sin^2\vartheta_0}\sum_{|\gamma|=1}\left|D^\gamma u\right|_{C(\Omega)},$$

где $c = 4\alpha+3$.

В силу произвольности точки P и треугольника T_k следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Литература

1. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

Кусочно-линейные ортогональные финитные функции на неравномерной сетке

Н.Ч.Лукашанец

Исследуются аппроксимирующие свойства системы ортогональных финитных функций, связанной с неравномерной сеткой. Получена оценка точности аппроксимации по норме в пространстве L_p функций Соболева пространства W_p^1 линейными комбинациями таких функций.

Рассматривается случай одной независимой переменной. В области $\Omega=[a,b]\subset R$ вводится сетка $a=x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<x_N=b$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $h=\max\limits_i h_i$ (i=1,2, …, N).

Каждому узлу сетки ставится в соответствие функция вида

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} -\dfrac{\alpha}{\Theta}\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}\right), & x\in[x_{i-1},x_{i-1}+\Theta h_i],\\ \dfrac{2\alpha+1}{1-2\Theta}\left(\dfrac{x-(x_{i-1}+x_i)/2}{h_i}\right)+\dfrac{1}{2}, & x\in[x_{i-1}+\Theta h_i,x_i-\Theta h_i],\\ -\dfrac{\alpha}{\Theta}\left(\dfrac{x-x_i}{h_i}\right)+1, & x\in[x_i-\Theta h_i,x_i],\\ \dfrac{\alpha}{\Theta}\left(\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)+1, & x\in[x_i,x_i+\Theta h_{i+1}],\\ -\dfrac{2\alpha+1}{1-2\Theta}\left(\dfrac{x-(x_i+x_{i+1})/2}{h_{i+1}}\right)+\dfrac{1}{2}, & x\in[x_i+\Theta h_{i+1},x_{i+1}-\Theta h_{i+1}],\\ \dfrac{\alpha}{\Theta}\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}\right), & x\in[x_{i+1}-\Theta h_{i+1},x_{i+1}],\\ 0, & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\bigcap\Omega, \end{cases}$$

где $0<\Theta<1/2$, $\alpha>0$.

Эти функции линейно-независимы, каждая из них отлична от нуля лишь в интервале порядка 2*h*. Кроме того, они являются ортогональными, если

$$0<\Theta=\Theta_1<1/2,\quad \alpha=\alpha_1=-(\Theta_1+1)/2+\sqrt{(\Theta_1^2-2\Theta_1+3)/4}\,.$$

Линейная оболочка $\{\varphi_i\}$ обозначается через H_N. Если взять функцию $v_N=\sum\limits_{i=0}^{N}a_i\varphi_i(x)\in H_N$, то $v_N(x_i)=a_i$, т.е. коэффициент a_i при $\varphi_i(x)$ равен значению функции $v_N(x)$ в точке $x=x_i$.

Аппроксимирующие свойства базисных функций описываются следующей теоремой:

Теорема. Если $u(x)\in W_p^1(\Omega)$, то существует такая функция $u_I\in H_N$, что

$$\|u-u_I\|_{L_p(\Omega)}\le ch\|u\|_{W_p^1(\Omega)}\quad (p\ge 1),$$

где постоянная c не зависит от h и от $u(x)$, а норма в W_p^1 задается выражением

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)}=\|u\|_{L_p(\Omega)}+\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Доказательство. Выберем в качестве u_I функцию вида

$$u_I(x)=\sum_{i=0}^{N}u(x_i)\varphi_i(x)\,.$$

Середину отрезка $[x_{i-1},x_i]$ обозначим через $x_i^*=(x_{i-1}+x_i)/2$. Вид функции u_I на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ приведен на рис. 1.

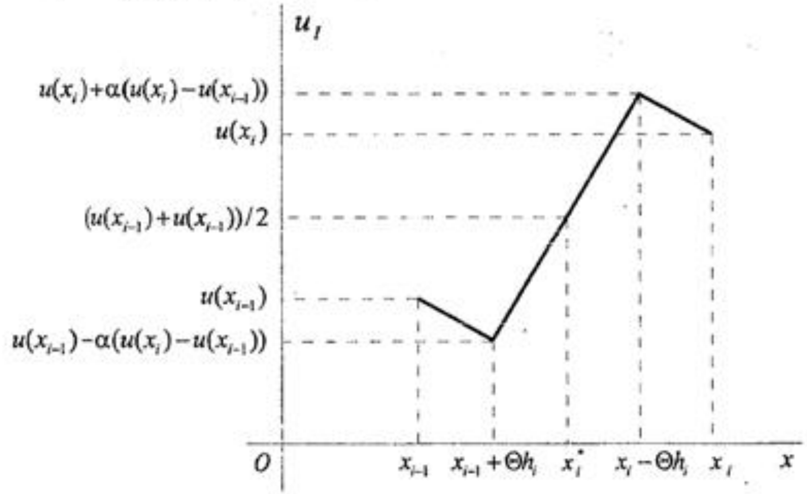


Рисунок 1.

Ниже при оценке неравенств используются неравенство Гельдера

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p\ge 1, \quad 1/p+1/q=1$$

и неравенство Минковского

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Модуль разности функций $u-u_I$ оценивается в произвольной точке $x\in[x_{i-1},x_i]$. В зависимости от положения точки x, возможны четыре случая.

1) Пусть $x\in[x_{i-1},x_{i-1}+\Theta h_i]$. Тогда, используя неравенства Гельдера и Минковского и расширяя, где требуется, пределы интегрирования, получаем:

$$|u(x)-u_I(x)| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\frac{du(x')}{dx'}-\frac{du_I(x')}{dx'}\right)dx'\right| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\frac{du(x')}{dx'}+\frac{\alpha}{\Theta h_i}\big(u(x_i)-u(x_{i-1})\big)\right)dx'\right| \le$$

$$\le \left(\int_{x_{i-1}}^{x} 1^q dx'\right)^{1/q}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\left|\frac{du(x')}{dx'}+\frac{\alpha}{\Theta h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{du(x'')}{dx''}dx''\right|^p dx'\right)^{1/p} \le$$

$$\le (\Theta h_i)^{1/q}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\left|\frac{du(x')}{dx'}\right|^p dx'\right)^{1/p} + \frac{\alpha}{(\Theta h_i)^{1/p}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{du(x'')}{dx''}dx''\right|^p dx'\right)^{1/p} \le$$

$$\le (\Theta h_i)^{1/q}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\left|\frac{du(x')}{dx'}\right|^p dx'\right)^{1/p} + \frac{\alpha}{(\Theta h_i)^{1/p}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\Big(h_i^{p-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x'')}{dx''}\right|^p dx''\Big)dx'\right)^{1/p} \le$$

$$\le (\Theta h_i)^{1-1/p}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x')}{dx'}\right|^p dx'\right)^{1/p} + \alpha h_i^{1-1/p}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x'')}{dx''}\right|^p dx''\right)^{1/p} =$$

$$= (\alpha+\Theta^{1-1/p})h_i^{1-1/p}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

2) Аналогичным образом можно показать, что в случае $x\in[x_i-\Theta h_i, x_i]$ выполняется неравенство

$$|u(x)-u_I(x)| \le (\alpha+\Theta^{1-1/p})h_i^{1-1/p}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

3) Пусть $x\in[x_{i-1}+\Theta h_i, x_i^*]$. Разность функций $u-u_I$ может быть представлена в виде

$$u(x)-u_I(x) = u(x_i^*)-u_I(x_i^*) - \int_{x}^{x_i^*}\left(\frac{du(x')}{dx'}-\frac{du_I(x')}{dx'}\right)dx'.$$

Следовательно,

$$|u(x)-u_I(x)| \le |u(x_i^*)-u_I(x_i^*)| + \left|\int_{x}^{x_i^*}\left(\frac{du(x')}{dx'}-\frac{du_I(x')}{dx'}\right)dx'\right|.$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства. Учитывая, что в точке x_i^* имеет место равенство: $u_I(x_i^*)=(u(x_{i-1})+u(x_i))/2$, получим

$$|u(x_i^*)-u_I(x_i^*)| = \left|\frac{u(x_i^*)-u(x_{i-1})}{2}-\frac{u(x_i)-u(x_i^*)}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i^*}\frac{du(x)}{dx}dx - \frac{1}{2}\int_{x_i^*}^{x_i}\frac{du(x)}{dx}dx\right| \le \frac{1}{2}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i^*}\frac{du(x)}{dx}dx\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{x_i^*}^{x_i}\frac{du(x)}{dx}dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i^*}1^q dx\right)^{1/q}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i^*}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^p dx\right)^{1/p} + \frac{1}{2}\left(\int_{x_i^*}^{x_i}1^q dx\right)^{1/q}\left(\int_{x_i^*}^{x_i}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\frac{h_i}{2}\right)^{1-1/p}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\left|\int_{x}^{x_i^*}\left(\frac{du(x')}{dx'}-\frac{du_I(x')}{dx'}\right)dx'\right| \le \left(\int_{x}^{x_i^*}1^q dx'\right)^{1/q}\left(\int_{x}^{x_i^*}\left|\frac{du(x')}{dx'}-\frac{2\alpha+1}{(1-2\Theta)h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{du(x'')}{dx''}dx''\right|^p dx'\right)^{1/p} \le$$

$$\le (1/2-\Theta)^{1/q}h_i^{1/q}\left(\int_{x}^{x_i^*}\left|\frac{du(x')}{dx'}\right|^p dx'\right)^{1/p} + \frac{\alpha+1/2}{(1/2-\Theta)^{1/p}h_i^{1/p}}\left(\int_{x}^{x_i^*}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{du(x'')}{dx''}dx''\right|^p dx'\right)^{1/p} \le$$

$$\leq (1/2-\Theta)^{1/q} h_i^{1/q} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i^*} \left| \frac{du(x')}{dx'} \right|^p dx' \right)^{1/p} + \frac{\alpha+1/2}{(1/2-\Theta)^{1/p} h_i^{1/p}} \left(\int_{x}^{x_i^*} (h_i^{p-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x'')}{dx''} \right|^p dx'') dx' \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq (1/2-\Theta)^{1-1/p} h_i^{1/p} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x')}{dx'} \right|^p dx' \right)^{1/p} + (\alpha+1/2) h_i^{1-1/p} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x'')}{dx''} \right|^p dx'' \right)^{1/p} =$$

$$= (\alpha + 1/2 + (1/2-\Theta)^{1-1/p}) h_i^{1-1/p} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x)}{dx} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Следовательно, если $x \in [x_{i-1} + \Theta h_i, x_i^*]$, то

$$|u(x) - u_I(x)| \leq (\alpha + 1/2 + 1/2^{1-1/p} + (1/2-\Theta)^{1-1/p}) h_i^{1-1/p} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x)}{dx} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

4) Аналогичная оценка имеет место в случае $x \in [x_i^*, x_i - \Theta h_i]$:

$$|u(x) - u_I(x)| \leq (\alpha + 1/2 + 1/2^{1-1/p} + (1/2-\Theta)^{1-1/p}) h_i^{1-1/p} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du(x)}{dx} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Таким образом, для нормы в L_p справедлива следующая оценка:

$$\|u - u_I\|_{L_p(\Omega)}^p = \int_a^b |u-u_I|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u-u_I|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\Theta h_i} |u-u_I|^p dx + \int_{x_{i-1}+\Theta h_i}^{x_i^*} |u-u_I|^p dx + \int_{x_i^*}^{x_i - \Theta h_i} |u-u_I|^p dx + \int_{x_i-\Theta h_i}^{x_i} |u-u_I|^p dx \right) \leq$$

$$\leq c^p \sum_{i=1}^N h_i^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{dx} \right|^p dx \leq c^p h^p \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{dx} \right|^p dx = c^p h^p \int_a^b \left| \frac{du}{dx} \right|^p dx \leq c^p h^p \|u\|_{W_p^1(\Omega)}^p.$$

Здесь

$$c = \left[2\Theta(\alpha + \Theta^{1-1/p})^p + (1-2\Theta)(\alpha + 1/2 + 1/2^{1-1/p} + (1/2-\Theta)^{1-1/p})^p \right]^{1/p}.$$

Теорема доказана.

Оглавление

Ученые записки
Ульяновского государственного университета

Серия
Фундаментальные проблемы
математики и механики

Выпуск 1(5)

Под редакцией академика РАЕН, профессора
А.С. Андреева

Оформление обложки *Р.А. Воденина*
Корректор *Л.Г. Гайтан*

ЛР №021233 от 23.06.97.
Подписано в печать 29.12.98.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 10,4. Уч.-изд. л. 8,9.
Тираж 100 экз. Заказ №130/268

Отпечатано с оригинал-макета
в подразделении оперативной полиграфии
Ульяновского государственного университета
432700, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42