Ученые записки

Ульяновского
государственного
университета

Серия

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ И
МЕХАНИКИ

Министерство образования Российской Федерации

Ульяновский государственный университет

Ученые записки Ульяновского государственного университета

Серия

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Выпуск 1(6)

Ульяновск 1999

ББК 22.1+22.2

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Ульяновского государственного университета

Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып.1(6) /Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. - Ульяновск: УлГУ. 1999. - 94 с.

В сборнике публикуются статьи преподавателей и аспирантов механико-математического факультета по фундаментальным проблемам математики и механики.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся проблемами алгебры и математической логики, математической кибернетики и теории вероятности, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ [1]

А.С.Андреев, Д.Хусанов

В работе исследуется задача о предельном поведении решений и устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа с периодической правой частью. Выводится модификация принципа инвариантности для такого уравнения. Доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости, в основе которых предполагается существование знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной, функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Разумихина.

Пусть R^p есть линейное действительное пространство p-векторов x с нормой $|x|$, $R =]-\infty, +\infty[$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$. Для непрерывной функции $x : [\alpha - h, \beta[\to R^p$ $(\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta)$ и каждого $t \in [\alpha, \beta[$ функцию $x_t \in C$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s)$ $(-h \le s \le 0)$, $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H, 0 < H \le +\infty\}$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^p$ есть вполне непрерывное отображение, периодическое по $t \in R^+$, т.е. $f(t+T, \varphi) = f(t, \varphi)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_H$, удовлетворяющее условию Липшица по φ

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \le L\|\varphi_2 - \varphi_1\|, \qquad L = L(t) \tag{1.2}$$

для всех $(t, \varphi_2), (t, \varphi_1) \in R^+ \times K$ для каждого компакта $K \subset C_H$.

При этих предположениях согласно [1] решение уравнения (1.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ является единственным, удовлетворяющим начальному условию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005) и программы "Университеты России-Фундаментальные исследования" (проект N3769)

Важнейшим свойством положительного предельного множества $w^+(\alpha, \varphi)$ решения автономного или периодического уравнения является свойство его инвариантности. Подробно этот вопрос исследован в [1]. Ниже представлено некоторое видоизменение свойства инвариантности в случае периодического уравнения.

Пусть правая часть уравнения (1.1) есть периодическая функция по t, при некотором $T > 0$, т.е. выполняется равенство $f(t + T, \varphi) = f(t, \varphi)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_H$. Несложно вывести, что решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ такого уравнения имеют зависимость

$$x(t + nT, \alpha + nT, \varphi) = x(t, \alpha, \varphi), (t \geq \alpha) \tag{1.3}$$

для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_H$ и каждого числа $n \in N$. Отсюда, решения $x(t, \alpha, \varphi)$, задаваемые начальными значениями $(\alpha, \varphi) \in [0, T[\times C_H$, определяют совокупность всех решений уравнения (1.1).

Определение 1.3. Множество $M \subset C_H$ называется инвариантным, если для любой точки $\psi \in M$ существует момент $\alpha \in [0, T[$, такой что решение $x(t, \alpha, \psi)$ определено и содержится в M, $x_t(\alpha, \psi) \in M$, для всех $t \in R$.

Теорема 1.1. Пусть решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1) с периодической правой частью ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$ для всех $t \geq \alpha$. Тогда положительное предельное множество $w^+(\alpha, \varphi)$ этого решения связно, компактно и инвариантно.

Доказательство.

Связность и компактность множества $w^+(\alpha, \varphi)$ следуют из лемм 1.1 и 1.2. Покажем его инвариантность.

Пусть $\psi \in w^+(\alpha, \varphi)$, так что существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что $\varphi_n = x_{t_n}(\alpha, \varphi) \to \psi$ при $n \to \infty$. Выберем подпоследовательность $t_{n_j} \to +\infty$, (в дальнейшем переобозначим как $t_j \to +\infty$), такую чтобы для некоторой последовательности натуральных чисел $n_j \to +\infty$ имела место сходимость $t_j - n_jT \to \alpha^*$, $0 \leq \alpha^* < T$, при $j \to \infty$. По определению решения и из равенства (1.3) получаем соотношения

$$x(t + t_j, \alpha, \varphi) = x(t + t_j, t_j, \varphi_j) = x(t + t_j - n_jT, t_j - n_jT, \varphi_j). \tag{1.4}$$

Последовательность решений $x_j(t) = x(t + t_j - n_jT, t_j - n_jT, \varphi_j)$ будет сходиться к решению $x = x(\alpha^* + t, \alpha^*, \psi)$ при $j \to \infty$ равномерно по $t \in [-h, \gamma]$ для произвольного $\gamma = const > 0$. Поэтому для каждого

$t \in R^+$ имеем

$$\lim_{j\to\infty} x_{t_j+t}(\alpha,\varphi) = x_{\alpha^*+t}(\alpha^*,\psi).$$

Откуда следует, что $x_t(\alpha^*,\psi) \in w^+(\alpha,\varphi)$ для всех $t \geq \alpha^*$.

Соотношения (1.4) имеют место для всех t, $t \geq \alpha - t_j$, где $t_j \to +\infty$ при $j \to \infty$. Поэтому решения $x_j(t)$ продолжимы и для $t \leq 0$, а решение $x = x(t,\alpha^*,\psi)$ продолжимо для всех $t < \alpha^*$. При этом, и для этих значений t аналогичным образом имеем $x_t(\alpha^*,\psi) \subset w^+(\alpha,\varphi)$.

Теорема доказана.

2. Пусть $f(t,0) \equiv 0$ и уравнение (1.1) имеет нулевое решение $x = 0$.

Как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения [2] имеют место следующие свойства устойчивости.

Теорема 2.1. Пусть функция $f(t,\varphi)$ в уравнении (1.1) не зависит явно от t или является периодической по t, т.е. существует $T > 0$, такое что $f(t+T,\varphi) = f(t,\varphi)$ для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$. Тогда устойчивость и асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1.1) являются равномерными.

3. Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений основан на применении функционалов и функций Ляпунова.

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t,\alpha,\varphi)$ — решение уравнения (1.1). Функция $V(t) = V(t,x_t(\alpha,\varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geq \alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t,\alpha,\varphi)$ называется значение [1,3,4]

$$\dot V^+(t,x_t(\alpha,\varphi) = \lim_{\Delta t\to 0^+}\sup \frac{1}{\Delta t}\left(V(t+\Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha,\varphi)) - V(t,x_t(\alpha,\varphi))\right)$$

Определим множество $\{\dot V^+(t,\varphi) = 0\}$ как множество точек $\varphi \in C_H$, в которых верхняя правосторонняя производная функционала $V(t,\varphi)$ в момент $t \in R^+$ равна нулю.

Определение 3.1. Множество $M \subseteq \{\dot V^+(t,\varphi) = 0\}$ есть инвариантное подмножество множества $\{\dot V^+(t,\varphi) = 0\}$, если из условия $\varphi \in \{\dot V^+(\alpha,\varphi) = 0\}$ следует, что решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ будет таким, что $x_t(\alpha,\varphi) \in M$ на всем интервале определения этого решения.

Теорема 3.1. Пусть для уравнения (1.1) с периодической правой частью существует функционал Ляпунова $V = V(t,\varphi)$, периодический по t с периодом T, $V(t+T,\varphi) = V(t,\varphi)$ для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$, производная которого $\dot V^+(t,\varphi) \leq 0$.

Тогда для каждого ограниченного решения $x = x(t,\alpha,\varphi)$, $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq H_1 < H$ при всех $t \geq \alpha$, множество предельных точек $w^+(\alpha,\varphi) \subset M$, где M - максимально инвариантное подмножество множества $\{\dot V^+(\alpha,\varphi) = 0\}$.

Доказательство.

Пусть $\psi \in w^+(\alpha,\varphi)$ и существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $x_{t_n}(\alpha,\varphi) \to \psi$ при $n \to \infty$. Как и в теореме 1.1 определим последовательность $n_j \to \infty$ и число α^*, так что $t_{n_j} - n_jT \to \alpha^*$. Последовательность $x = x(t_{n_j}+t,\alpha,\varphi)$ будет сходиться к решению $x = x(t,\alpha^*,\psi)$ равномерно по $t \in [-\gamma,\gamma]$ для каждого числа $\gamma > 0$.

Функция $V(t) = V(t,x_t(\alpha,\varphi))$ в силу условия $\dot V^+(t,x_t) \leq 0$ есть монотонно убывающая функция t. Функционал $V(t,\varphi)$ в силу периодичности по t ограничен в области $\bar C_{H_1} = \{\varphi : ||\varphi|| \leq H_1\}$. Поэтому функция $V(t)$ ограничена снизу, и значит существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(t,x_t(\alpha,\varphi)) = c_0 \tag{3.1}$$

Для каждого $t \in [-\gamma,\gamma]$ для достаточно больших n_j из периодичности $V(t,\varphi)$ имеем

$$V(\tau,x_\tau(\alpha,\varphi))|_{\tau=t_{n_j}+t} = V(t_{n_j}+t-n_jT, x_\tau(\alpha,\varphi))|_{\tau=t_{n_j}+t}$$

Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ по непрерывности $V(t,\varphi)$ в силу сходимости $x(t_{n_j}+t,\alpha,\varphi)$ к $x(t,\alpha^*,\varphi^*)$ и предела (3.1) получаем

$$V(\tau,x_\tau(\alpha^*,\psi))|_{\tau=\alpha^*+t} = c_0 = const$$

для всех $t \in R$. Отсюда производная $V(t,\varphi)$ вдоль решения $x = x(t,\alpha^*,\psi)$, такого $x_t(\alpha^*,\psi) \in w^+(\alpha,\varphi)$ для всех $t \in R$, равна нулю, $\dot V^+(t,x_t(\alpha,\psi)) \equiv 0$ для всех $t \in R$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема является развитием теоремы Дж. Хейла из [1,4], доказанной для автономного уравнения и теоремы Ж.П. Ла-Салля для обыкновенного дифференциального уравнения с периодической правой частью. Существенным отличием от последней является определения свойства инвариантности $w^+(\alpha,\varphi)$. А именно, оно определяется без перехода к дискретным динамическим системам. Из доказанной теоремы несложно вывести соответствующие теоремы Н.Н.Красовского об асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной [3].

Допустим, что периодическая по t функция $f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию $f(t,0) = 0$, и таким образом уравнение (1.1) имеет нулевое решение.

Рассмотрим применение знакопостоянного функционала Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости автономного или периодического по времени уравнения. Для такого исследования введем определения.

Определение 3.2. Пусть $M \subset C_H$ есть некоторое открытое множество, содержащее точку $\varphi = 0$. Решение $x = 0$ устойчиво относительно M, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $\alpha \in R^+$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что для всех $\varphi \in \{\|\varphi\| < \delta\} \cap M$ и всех $t \geq \alpha$ выполняется неравенство $| x(t, \alpha, \varphi) | < \varepsilon$.

Определение 3.3. Решение $x = 0$ равномерно устойчиво относительно множества M, если в определении 3.2. число δ зависит только от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение 3.4. Решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества M, если оно устойчиво относительно M и для каждого $\alpha \in R^+$ существует $\eta = \eta(\alpha) > 0$ такое, что для всех $\varphi \in \{\|\varphi\| < \eta\} \cap M$ выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, \alpha, \varphi) = 0$.

Определение 3.5. Решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества M, если оно равномерно устойчиво относительно M и существует $\eta > 0$ такое, что для любого малого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, при котором для каждого $\alpha \in R^+$, всех $\varphi \in \{\|\varphi\| < \eta\} \cap M$ и всех $t \geq \alpha + \sigma$ выполняется неравенство $| x(t, \alpha, \varphi) | < \varepsilon$.

Замечание. Следуя доказательству теоремы 2.1, несложно показать, что для периодического по t уравнения (1.1) устойчивость и асимптотическая устойчивость $x = 0$ относительно M являются равномерными.

Теорема 3.2. Предположим, что :
1) правая часть уравнения (1.1) $f = f(t, \varphi)$ периодична по t, $f(t + T, \varphi) = f(t, \varphi)$ $(T > 0)$;
2) существует функционал Ляпунова, $V = V(t, \varphi) \geq 0$, периодический по t, $V(t + T, \varphi) = V(t, \varphi)$, с производной $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq 0$;
3) решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $M = \{V(t, \varphi) = 0\}$.

Тогда решение $x = 0$ равномерно устойчиво.

Доказательство.

Согласно теореме 2.1 для доказательства теоремы достаточно доказать устойчивость $x = 0$.

Допустим противное, что $x = 0$ не является устойчивым, так что для некоторого α, $0 \leq \alpha < T$, существуют $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\varphi_n \to 0$ при $n \to +\infty$ и последовательность $\{\beta_n\}$, такие, что $| x(\alpha + \beta_n, \alpha, \varphi_n) | = \varepsilon_0$.

Пусть $\eta > 0$ есть число, определяемое условием 3) теоремы. Положим $l = \frac{1}{2} min(\eta, \varepsilon_0)$. Для решения $x = x(t, \alpha, \varphi_n)$ найдется последовательность моментов $\{\gamma_n \leq \beta_n\}$, такая что при $\alpha \leq t < \alpha + \gamma_n$

$$| x(t, \alpha, \varphi_n) | < l, | x(\alpha + \gamma_n, \alpha, \varphi_n) | = l \tag{3.2}$$

При этом из непрерывности решения $x = 0$ следует, что $\gamma_n \to +\infty$. Из непрерывности $V = V(t, \varphi)$ в точке $\varphi = 0$ следует, что $V(\alpha, \varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Из монотонного убывания $V = V(t, x(t, \alpha, \varphi_n))$ по t получаем, что для каждого фиксированного $t \geq \alpha$

$$\lim_{n \to \infty} V(t, x_t(\alpha, \varphi_n)) = 0. \tag{3.3}$$

Пусть $\sigma = \sigma(l)$ есть число, определяемое из условия 3) теоремы согласно определениям 3.4-3.5. Положим $\theta_n = \alpha + \gamma_n - \sigma$, составим последовательность $\{\psi_n = x(\theta_n, \alpha, \varphi_n)\}$ и выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\psi_{n_k} \to \psi^*$ при $n_k \to \infty$. Учитывая, что $x(\theta_{n_k} + t, \alpha, \varphi_{n_k}) = x(\theta_{n_k} + t, \theta_{n_k}, \psi_{n_k})$, из соотношений (3.2) и (3.3) находим, что $\|\psi^*\| \leq l$, а также

$$| x(\theta_{n_k} + \sigma, \theta_{n_k}, \psi_{n_k}) | = l$$

$$\lim_{n \to \infty} V(\theta_{n_k} + t, x_{\tau+t}(\theta_{n_k}, \psi_{n_k}) |_{\tau = \theta_{n_k}}) = 0 \tag{3.4}$$

для каждого фиксированного $t \in R$.

Определим подпоследовательность $n_{k_l} \to \infty$, такую что для некоторой последовательности натуральных чисел $j_l \to \infty$ последовательность $\theta_{n_{k_l}} - j_l T \to \alpha^*$, $0 \leq \alpha^* < T$. Тогда по свойству непрерывности решений периодического по t уравнения $x(\theta_{n_{k_l}} + t, \theta_{n_{k_l}}, \psi_{n_{k_l}}) = x(\theta_{n_{k_l}} - j_l T + t, \theta_{n_{k_l}} - j_l T, \psi_{n_{k_l}}) \to x^*(\alpha^* + t, \alpha^*, \psi^*)$ при $l \to \infty$, где

$x^*(t,\alpha^*,\psi^*)$ есть решение уравнения (2.1), при этом как указано выше $\|\psi^*\| \le l$.

Предельным переходом $n_{k_l} \to +\infty$ из первого соотношения (3.4) получаем $| x^*(\alpha^*+\sigma,\alpha^*,\psi) |= l$. Из второго соотношения, учитывая, что функционал $V(t,\phi)$ периодичен по t, $V(\theta_{n_{k_l}}+t, x_{\tau+t}(\theta_{n_{k_l}},\psi_{n_{k_l}})) |_{\tau=\theta_{n_{k_l}}} = V(\theta_{n_{k_l}} - j_l T + t, x_{\tau+t}(\tau,\psi_{n_{k_l}}) |_{\tau=\theta_{n_{k_l}}-j_l T})$ и непрерывен, предельным переходом при $l \to \infty$ имеем

$$V(\alpha^*+t, x^*_{\alpha*+t}(\alpha^*,\psi^*)) = 0$$

для всех $t \in R^+$, а это противоречит условию 3) теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2, а также :

4) множество $\{V(t,\varphi) > 0\}$ не содержит решений, вдоль которых $\dot{V}^+(t,\varphi) = 0$.

Тогда решение уравнения (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство.

Пусть $\eta > 0$ и $\sigma > 0$ есть числа, определяемые условием 3) теоремы, $\Gamma_0 = \{\|\varphi\| < \eta_0 > 0\}$ есть область, решения из которой ограничены, так что из того что $\varphi \in \Gamma_0$ следует $| x(t,\alpha,\varphi) |< \eta/2$ для всех $t \ge \alpha - h$. Такая область существует в силу равномерной устойчивости $x = 0$ (теорема 3.2).

Покажем, что область Γ_0 является областью притяжения нулевого решения уравнения (1.1).

Допустим противное, что для некоторого числа $\epsilon_0 > 0$ и произвольной последовательности $\sigma_n \to +\infty$ можно найти последовательность начальных значений $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \le \eta_0\}$, такую что для решения $x(t,\alpha,\varphi_n)$ уравнения (1.1) имеют место соотношения

$$| x(\alpha+\sigma_n,\alpha,\varphi_n) |= \varepsilon_0. \tag{3.5}$$

Вдоль каждого решения $x(t,\alpha,\varphi_n)$ функция $V(t, x_t(\alpha,\varphi_n))$ есть убывающая функция t в силу условия 2) теоремы. Из теоремы 3.1 и условия 4) теоремы следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t,x_t(\alpha,\varphi_n)) = 0$. Отсюда для последовательности моментов времени $\tau_n = \alpha+\sigma_n-\sigma$ и последовательности точек $\psi_n = x_{\tau_n}(\alpha,\varphi_n)$ находим, что

$$\lim_{n\to\infty} V(\tau_n,\psi_n) = 0. \tag{3.6}$$

Будем считать (при необходимости выберем подпоследовательность и ее переобозначим), что $\psi_n \to \psi^*$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность решений $x = x(t,\tau_n,\psi_n) = x(t,\alpha,\varphi_n)$ $(t \ge \tau_n)$. Из равенств (3.5) находим, что для этих решений

$$| x(\tau_n+\sigma,\tau_n,\psi_n) |= \varepsilon_0 \tag{3.7}$$

Определим последовательность натуральных чисел $j_n \to \infty$, такую, чтобы имела место сходимость

$$\tau_n - j_n T \to \alpha^*, 0 \le \alpha^* < T. (n\to\infty)$$

Тогда из (3.6) в силу периодичности V и по ее непрерывности следует, что в точке (α^*,ψ^*)

$$V(\alpha^*,\psi^*) = \lim_{n\to\infty} V(\tau_n - j_n T,\psi_n) = \lim_{n\to\infty} V(\tau_n,\psi_n) = 0$$

Из периодичности $f = f(t,\varphi)$ по φ и непрерывной зависимости решений от начальных условий получаем, что последовательность решений $x = x(t,\tau_n,\psi_n) = x(t-j_nT,\tau_n-j_nT,\psi_n)$ сходится при $n \to \infty$ к решению $x(t,\alpha^*,\psi^*)$, $(t \ge \alpha^*)$. При этом согласно (3.7) имеем $| x(\alpha^*+\sigma,\alpha^*,\psi^*) |= \varepsilon_0 > 0$. Но это противоречит условию 3), что и доказывает теорему.

Теоремы 3.2 и 3.3 развивают и обобщают для функционально-дифференциальных уравнений результаты работ [5,6], полученных для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t) = -a_3(t)x_2(t) + a_4(t)x_1^3(t-h) \end{cases} \tag{3.8}$$

где $a_i(t) (i = 1,4)$ есть функции периодические по t с периодом T, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1(t) \ge a_0 > 0, |a_2(t)| \le a_0, a_3(t) \ge a_0 > 0 \tag{3.9}$$

Для функционала Ляпунова

$$V = \frac{\varphi_1^2(0)}{2} + \frac{a_0}{2}\int_{-h}^{0} \varphi_1^2(\tau)d\tau$$

находим, что его производная

$$\dot{V} = -\frac{a_1(t)}{2}\varphi_1^2(0) + a_2(t)\varphi_1(0)\varphi_1(-h) + \frac{a_0}{2}(\varphi_1^2(0) - \varphi_1^2(-h)) \le$$

$$\leq -\frac{a_0}{2}(|\varphi_1(0)| - |\varphi_1(-h)|)^2 \leq 0$$

Решение $x_1 = x_2 = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V = 0\} = \{\varphi_1 = 0\}$, так как на этом множестве система обращается в уравнение $\dot{x}_2(t) = -a_3(t)x_2(t)$ с коэффициентом $a_3(t) \geq a_0 > 0$.

На основании теоремы 3.2 получаем, что нулевое решение (3.8) при условиях (3.9) равномерно устойчиво. Усилим условия (3.9) добавив, что $|a_2(t)| < a_1(t)$ для всех $t \in [0, T)$. Тогда производная $\dot{V}(\varphi)$ обращается в нуль на множестве $\{\varphi_1 = 0\}$, и следовательно множество $\{V > 0\} \cap \{\dot{V} = 0\} \equiv \{||\varphi_1|| > 0\} \cap \{\varphi_1 = 0\} = 0$. На основании теоремы 3.3 получаем, что при добавлении этого условия нулевое решение (3.8) будет равномерно асимптотически устойчивым.

4. Рассмотрим задачу об использования функции Ляпунова для определения устойчивости периодического по t уравнения.

Пусть $V : R^+ \times D_H \to R$, $D_H = \{x \in R^p : |x| < H\}$ есть непрерывная функция Ляпунова. Ее верхняя правосторонняя производная вдоль решения $x(t)$ уравнения (1.1) определяется формулой

$$\dot{V}(t, x_t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(V(t+h, x(t) + hf(t, x_t)) - V(t, x(t)))$$

Таким образом, производная функции $V(t, x)$ в силу уравнения (1.1) есть функционал $V : R^+ \times C_H \to R$.

Если функция $V = V(t, x)$ является непрерывно дифференцируемой в области $R^+ \times D_H$, то ее производная вычисляется по формуле

$$\dot{V}(t, x_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x(t)) f_i(t, x_t)$$

Видоизменение условий на производную от функции $V(t, x)$ вдоль решения уравнения (1.1) основана на том, что нет необходимости требовать, чтобы производная была неположительной при всех значениях (t, x_t). Достаточно, чтобы неравенство $\dot{V}(t, x_t) \leq 0$ выполнялось при значениях (t, x_t), таких, что $V(t+s, x(t+s)) \leq V(t, x(t))$ для $s \in [-h, 0]$.

Это условие определяет следующую оценку изменения функции $V = V(t, x)$ вдоль решения.

Лемма 4.1. Пусть функция $V = V(t, x)$ непрерывная в области $R^+ \times D_H$, а ее производная $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq 0$ если

$$V(t+s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0))$$

для всех $s \in [-h, 0]$. Тогда функционал

$$V_0(t, \varphi) = \sup(V(t+s, \varphi(s)), -h \leq s \leq 0)$$

на каждом решении $x = x(t)$ уравнения (1.1) есть невозрастающая функция t.

Доказательство.

Пусть $x = x(t)$ есть решение уравнения (1.1), определенное на отрезке $[\alpha - h, \beta)$ $(\beta > \alpha)$. Определим функции $V(t) = V(t, x(t))$ и $V_0(t) = \sup(V(t+s), -h \leq s \leq 0)$.

Допустим, что $V_0(t)$не является невозрастающей по $t \in [\alpha, \beta)$ и при некотором $\tau > \alpha$ для всех значений $t \in (\tau - \delta, \tau)$, где $\delta > 0$ — достаточно мало, выполняется неравенство $V_0(\tau) > V_0(t)$. Это возможно, если имеют место соотношения

$$V_0(\tau) = \sup(V(\tau + s, x(\tau + s)), -h \leq s \leq 0) = V(\tau, x(\tau)), \quad V(t) < V(\tau)$$

для $t \in (\tau - \sigma, \tau)$. Из первого соотношения по условию $\dot{V}(\tau) \leq 0$, а это противоречит второму соотношению.

Лемма доказана.

Пусть $V \in C^1(R^+ \times D_H \to R)$ есть функция Ляпунова, периодическая по t с периодом T, $V(t+T, x) = V(t, x)$ для всех $(t, x) \in R^+ \times D_H$. Обозначим через $N_t(c)$ $(0 \leq t < T)$ подмножество функций $\varphi \in C_H$, таких что

$$\sup(V(t+s, \varphi(s)), -h \leq s \leq 0) = c = const.$$

Через $L_t(c) \subset N_t(c)$ обозначим подмножество функций $\varphi \in N_t(c)$, таких, что

$$\sup(V(t+s, \varphi(s)), -h \leq s \leq 0) = V(t, \varphi(0)) = c = const.$$

Теорема 4.1. Пусть уравнение (1.1) есть периодическое по t с периодом $T > 0$, $f(t+T, \varphi) = f(t, \varphi)$ для всех $(t, x) \in R^+ \times C_H$, и выполнены условия :

1) существует функция Ляпунова, периодическая по t, $V(t+T, x) = V(t, x)$ для всех $(t, x) \in R^+ \times \Gamma_H$, производная которой

$\dot{V}(t,\varphi) \le 0$ для каждой функции $\varphi \in C_H$, такой что $V(t+s,\varphi(s)) \le V(t,\varphi(0))$ при $-h \le s \le 0$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \le H_1 < H$ для всех $t \ge \alpha$.

Тогда существует значение $c = c_0$, такое что для каждой точки $\psi \in w^+(\alpha,\varphi)$ найдется значение $\beta, 0 \le \beta < T$, при котором $\psi \in N_\beta(c_0)$. При этом для каждого отрезка $[\tau,\tau+h]$, $\tau \in R$-любое, существуют значение $\beta \in [\tau,\tau+h]$ и точка $\psi \in w^+(\alpha,\varphi)$, такие что $\psi \in L_\beta(c_0)$ и $\dot{V}(\beta,\psi) = 0$.

Доказательство.

Пусть $x = x(t,\alpha,\varphi)$ есть рассматриваемое решение, $V(t) = V(t,x(t,\alpha,\varphi))$ и $V_0(t) = \sup(V(\tau), t-h \le \tau \le t)$ - функции на этом решении. В силу леммы 2.1 существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V_0(t) = c_0. \tag{4.1}$$

Пусть $\psi \in w^+(\alpha,\varphi)$ есть предельная точка, $x_{t_n}(\alpha,\varphi) \to \psi$ при $n \to \infty$. Как и в лемме 1.5 определим последовательность $n_j \to \infty$ и α^*, $0 \le \alpha^* < T$, для которых $t_{n_j} - n_j T \to \alpha^*$.

Последовательность решений $x_{n_j}(t) = x(t_{n_j}+t,\alpha,\varphi)$ будет сходиться равномерно по $t \in [-\gamma,\gamma]$ для каждого $\gamma > 0$ к решению $x = x(t,\alpha^*,\psi)$ при $n_j \to \infty$. При этом из непрерывности и периодичности V по t имеем

$$\lim_{j\to\infty} V(t_{n_j}+t) = \lim_{j\to\infty} V(t_{n_j}+t, x(t_{n_j}+t,\alpha,\varphi)) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} V(t_{n_j}+t-n_jT, x(t_{n_j}+t,\alpha,\varphi)) = V(t,x(\alpha^*,\psi))$$

И соответственно из (4.1) получаем

$$c_0 = \lim_{j\to\infty} V_0(t_{n_j}+t) = \lim_{j\to\infty} sup V(t_{n_j}+t+s, x(t_{n_j}+t+s,\alpha,\varphi)), -h \le s \le 0) =$$

$$= sup(V(t+s, x(t+s,\alpha^*,\psi)), -h \le s \le 0)$$

Отсюда следует, что $\psi \in N_{\alpha^*}(c_0)$ и для каждого $t \in R$ функция $x_t(\alpha^*,\psi) \in N_t(c_0)$, а также что вдоль решения $x(t,\alpha^*,\psi)$ функция $V_0(t) = V_0(t,x(t,\alpha^*,\psi)) = c_0$ при всех $t \in R$. И следовательно $\dot{V}_0(t) \equiv 0$.

Это возможно, если для каждого $\tau \in R$ существует $\beta \in [\tau,\tau+h]$ такое что

$$V(\beta, x(\beta,\alpha^*,\psi)) = sup(V(\beta+s, x(\beta+s,\alpha^*,\psi)),$$

и значит $x_\beta(\alpha^*,\psi) \in L_\beta(c_0)$, при этом $\dot{V}(\beta,\psi) = 0$.

Теорема доказана.

Итак для всех $t \in R$ выполняется соотношение.

$$sup(V(\alpha^*+t+s, x(\alpha^*+t+s,\alpha^*,\psi)), -h \le s \le 0) = c_0 \tag{4.2}$$

Полагая $t = 0$, имеем $sup(V(\alpha^*+s, x(\alpha^*+s,\alpha^*,\psi)), -h \le s \le 0) = c_0$. Откуда следует, что $\psi \in N_{\alpha^*}(c_0)$.

По свойству инвариантности $x_t(\alpha^*,\psi) \in w^+(\alpha,\varphi)$ для $t \in R$. Из (4.2) следует также, что для любого $\tau \in R$ существует $\beta \in [\tau-h,\tau]$ такое что

$$V(\beta, x(\beta,\alpha^*,\psi)) = sup(V(\beta+s, x(\beta+s,\alpha^*,\psi)), -h \le s \le 0) = c_0$$

Это возможно, если только $\dot{V}(\beta, x_\beta(\alpha^*,\psi)) = 0$.

Таким образом, для каждого $\tau \in R$ существует $\beta \in [\tau-h,\tau]$, такое что $\Theta = x_\beta(\alpha^*,\psi) \in w^+(\alpha,\varphi)$, $\Theta \in N_\beta(c_0)$, $\dot{V}(\beta,\Theta) = 0$.

Теорема доказана.

Допустим, что $f(t,0) \equiv 0$, так что уравнение (1.1) имеет нулевое решение. Исследуем задачу об асимптотической устойчивости и неустойчивости этого решения на основе функции Ляпунова.

Предварительно заметим, что если периодическая по t функция $V \in C^1(R^+ \times D_H \to R)$ такова, что $V(t,0) = 0$, $V(t,x) > 0$ для $(t,x) \in R^+ \times \{0 < |x| < H_1 < H\}$, то она является определенно-положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, или удовлетворяет оценкам

$$a_1(||x||) \le V(t,x) \le a_2(||x||).$$

Теорема 4.2. Предположим, что существует функция Ляпунова $V \in C^1$, периодическая по t, $V(t+T,x) = V(t,x)$, $V(t,0) \equiv 0$, $V(t,x) > 0$ при $(t,x) \in R^+ \times \{0 < |x| < H_1 < H\}$ с производной $\dot{V}(t,\varphi)$, удовлетворяющей неравенству $\dot{V}(t,\varphi) < 0$ относительно каждой функции $\varphi \in C_{H_1}$, такой

$$sup(V(t+s,\varphi(s)), -h \le s \le 0) \le V(t,\varphi(0)), \varphi \ne 0$$

Тогда нулевое решение уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство.

Из условий теоремы следует устойчивость нулевого решения уравнения (1.1) [1,3,4].

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть какое либо решение, ограниченное областью $\bar{D}_r$, $|x(t, \alpha, \varphi)| \le r < H_1$ для всех $t \ge \alpha$. В силу теоремы 2.5 вдоль этого решения имеем

$$\lim_{t \to +\infty} sup(V(t+s, x(t+s, \alpha, \varphi)), -h \le s \le 0) = c_0 = const \ge 0 \quad (4.3)$$

Согласно теореме 4.1 для каждого $\tau \in R$ существует значение $\beta \in [\tau - h, \tau]$ и точка $\psi \in w^+(\alpha, v)$, при которых

$$sup(V(\beta + s, \psi(s)), -h \le s \le 0) = V(\beta, \psi(0)) = c_0, \dot{V}(\beta, \psi) = 0.$$

Но тогда из условий теоремы $\psi = 0$, и следовательно $c_0 = V(\beta, \psi(0)) = V(\beta, 0) = 0$.

Учитывая, что $V(t, \varphi) \ge 0$ из соотношения (4.3) получаем

$$0 = \lim_{t \to +\infty} V(t, x(t, \alpha, \varphi)) \ge \lim_{t \to +\infty} a_1(|x(t, \alpha, \varphi)|) \ge 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, \alpha, \varphi) = 0$$

Теорема доказана.

Теоремы 4.1 и 4.2 развивают для периодических уравнений результаты работы [7,8]

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau(t))), \quad (4.4)$$

где $f : [-h, +\infty) \times R \to R$, $f(t, 0) \equiv 0$, есть непрерывно дифференцируемая периодическая по t , $f(t + T, x) = f(t, x)$, $T > 0$ функция, такая что для всех $(t, x) \in R^+ \times R$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \le L = const \quad (4.5)$$

$\tau = \tau(t), 0 \le \tau(t) \le h = const > 0$, есть непрерывная, периодическая по t функция , $\tau(t + T) = \tau(t)$, при этом

$$\frac{f(t, x)}{x} + L^2\tau(t) < 0 \text{ при } x \neq 0 \quad (4.6)$$

Уравнение (4.4) можно преобразовать к виду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + (f(t, x(t - \tau(t)) - f(t, x)) =$$

$$f(t, x(t)) - \int_{-\tau(t)}^{0} \frac{\partial f(t, x(s)}{\partial x} f(t + s, x(s - \tau(t + s)))ds$$

Это уравнение имеет область определения $[-h, +\infty) \times C$, $C_0 = \{\varphi : [-2h, 0] \to R\}$.

Из условия (4.5) имеем $|f(t, x)| \le L|x|$ для всех $(t, x) \in [-h, +\infty) \times R$. С учетом этого соотношения из условий (4.5) и (4.6) находим, что для производной функции $V = x^2$ на множестве $\{\varphi \in C_0 : \varphi^2(s) \le \varphi^2(0) > 0$ при $-2h \le s \le 0\}$ имеет место оценка

$$\dot{V}(t, \varphi) = 2\varphi(0)f(t, \varphi(0)) - 2\varphi(0) \int_{-\tau(t)}^{0} \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(s)) \cdot f(t+s, \varphi(s - \tau(t+s)))ds \le$$

$$\le 2\varphi(0)f(t, \varphi(0)) + 2L^2\tau(t)|\varphi(0)|sup(|\varphi(s)|, -2h \le s \le 0) \le$$

$$\le 2\varphi^2(0)\left(\frac{f(t, \varphi(0))}{\varphi(0)} + L^2\tau(t)\right) < 0$$

На основании теоремы 4.2 получаем, что при условиях (4.5) и (4.6) нулевое решение (4.4) равномерно асимптотически устойчиво.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

2. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

4. Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992, 142 с.

5. Самойленко А.М. Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Укр. мат. журн., 1972. Т.24. N3. С.374-386.

6. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Минск. 1984, 80 с.

7. Jakobowitz H.J., Akcausu A.Z., Snokin L.M. Stability considerations with convection time delays // Trans. Amer. Nucl. Soc. 1966. V.9, N1 P.272-273.

8. Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral equations. 1985. V.10. P.123-136.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РОССИЙСКОГО ФИНАНСОВОГО РЫНКА [2]

К.Г.Арбеев

1. Введение. Проблема адекватного описания динамики стоимостей финансовых активов имеет давнюю историю и занимает заметное место в работах по финансовой математике. За время, прошедшее с появления первой публикации в данной области, [1], появилось большое количество математических моделей, от достаточно простых, ([2], [4] и др.), до более общих, ([3], [7] и др.), использующих различные классы случайных процессов и современный аппарат стохастического исчисления.

Предлагаемая в п. 2 модель эволюции стоимостей финансовых активов является обобщением широко известной модели Блэка-Шоулса, [2]. С одной стороны, она достаточно проста и ее параметры имеют ясный экономический смысл. С другой стороны, как показали проведенные практические эксперименты, эта модель хорошо описывает процессы изменения стоимостей различных ценных бумаг (акций, опционов и фьючерсов) на российском финансовом рынке.

Применение результатов, приведенных в п. 3, позволяет получать оценки неизвестных параметров, основываясь лишь на "истории" изменений стоимостей активов до момента наблюдения, что дает возможность строить оценки для реальных ценных бумаг. Соответствующие эксперименты описываются в п. 4.

2. Описание модели. Предположим, что на финансовом рынке непрерывно во времени происходит торговля некоторым активом. Обозначим $s = (s_t)_{0\le t\le T}$ – процесс изменения его стоимости. Назовем "мгновенной доходностью" данного актива процесс $x = (x_t)_{0\le t\le T}$, где
$$dx_t = \frac{ds_t}{s_t}.$$
Будем считать, что динамика изменения "мгновенной доходности" задается системой уравнений:
$$\begin{cases} dx_t = v_t dt + \sigma dW_t, \\ dv_t = (a_v + \lambda_v v_t + \lambda_x x_t)dt + dW_t, \end{cases} \tag{1}$$

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 99-01-00185)

с начальными условиями $x_0 = x \in \mathbb{R}, v_0 = 0$. Здесь a_v, λ_v, λ_x, σ – неизвестные параметры, $W = (W_t)_{0\le t\le T}$ – винеровский процесс.

В данной модели, аналогично [4], предполагается постоянная волатильность (параметр σ), значение которой неизвестно. Но, в отличие от модели Блэка-Шоулса, коэффициент сноса v_t (или "скорость изменения мгновенной доходности" активов) не является постоянным во времени, а представляет собой ненаблюдаемый случайный процесс с линейной зависимостью от x_t, линейной обратной связью и коэффициентом линейного роста (параметры $\lambda_x, \lambda_v, a_v$, соответственно), значения которых неизвестны.

Значения параметров $\lambda_x, \lambda_v, a_v, \sigma$ и начальные состояния x_0 и v_0 полностью определяют процесс x (и, следовательно, процесс s). Поэтому необходимо оценить эти неизвестные параметры, причем для практических приложений важно, чтобы оценки зависели только от "истории" изменения стоимости актива s до текущего момента наблюдения. Соответствующие выражения можно получить на основании результатов, которые приводятся в следующем пункте.

3. Оценки параметров модели. В качестве оценок параметров a_v, λ_x, λ_v возьмем, соответственно,
$$\hat{a}_v(T) = \frac{3}{T^3}\int_0^T t[dx_t - (\lambda_x \bar{x}_t + \lambda_v(x_t - x_0))dt], \tag{2}$$
где $\bar{x}_t = \int_0^t x_s ds$;
$$\hat{\lambda}_x(T) = \left(\int_0^T \bar{x}_t^2 dt\right)^{-1} \int_0^T \bar{x}_t[dx_t - (a_v t + \lambda_v(x_t - x_0))dt]; \tag{3}$$
$$\hat{\lambda}_v(T) = \left(\int_0^T (x_t - x_0)^2 dt\right)^{-1} \int_0^T (x_t - x_0)[dx_t - (a_v t + \lambda_x \bar{x}_t)dt]. \tag{4}$$

Для получения данных оценок использовалось представление процесса "мгновенной доходности" x системы в виде, эквивалентном исходной системе (1):
$$dx_t = (a_v t + \lambda_x \bar{x}_t + \lambda_v(x_t - x_0))dt + (1 - \lambda_v \sigma)W_t dt + \sigma dW_t.$$

Для оценок (2) - (4) справедливы следующие результаты, доказательство которых основано на свойствах винеровских процессов и сходимостей для непрерывных мартингалов ([5], [6]).

Теорема 1. *Оценка параметра a_v (2) состоятельна и несмещенна.*

Теорема 2. *Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$1)\lambda_v > 0,\ \ 2)a_v \neq 0,\ \ 3)\lambda_x > 0,$$

то оценка параметра λ_x (3) состоятельна и асимптотически несмещенна.

Теорема 3. *Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$1)\lambda_v > 0,\ \ 2)\lambda_x > 0,\ \ 3)\lambda_x = 0, a_v \neq 0,$$

то оценка параметра λ_v (4) состоятельна и асимптотически несмещенна.

Оценки $\hat{a}_v(T), \hat{\lambda}_x(T), \hat{\lambda}_v(T)$ зависят от неизвестных значений a_v, λ_x, λ_v. Можно получить выражения, в которые не входят значения этих неизвестных параметров. Для этого подставим в (2) - (4) вместо оценок соответствующие параметры, считая выполненными условия состоятельности и предполагая время наблюдения T достаточно большим. В этом случае, по определению состоятельности, можно считать разницу между оценкой и значением параметра сколь угодно малой. Из образовавшейся системы линейных уравнений относительно $a_v, \lambda_x, \lambda_v$ получаем:

$$\hat{\hat{a}}_v(T) = \frac{d_1(T)}{d(T)}, \hat{\hat{\lambda}}_x(T) = \frac{d_2(T)}{d(T)}, \hat{\hat{\lambda}}_v(T) = \frac{d_3(T)}{d(T)}, \tag{5}$$

где

$$d(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12}(T) & \alpha_{13}(T) \\ \alpha_{21}(T) & 1 & \alpha_{23}(T) \\ \alpha_{31}(T) & \alpha_{32}(T) & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_1(T) = \det\begin{pmatrix} \beta_1(T) & \alpha_{12}(T) & \alpha_{13}(T) \\ \beta_2(T) & 1 & \alpha_{23}(T) \\ \beta_3(T) & \alpha_{32}(T) & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_2(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & \beta_1(T) & \alpha_{13}(T) \\ \alpha_{21}(T) & \beta_2(T) & \alpha_{23}(T) \\ \alpha_{31}(T) & \beta_3(T) & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_3(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12}(T) & \beta_1(T) \\ \alpha_{21}(T) & 1 & \beta_2(T) \\ \alpha_{31}(T) & \alpha_{32}(T) & \beta_3(T) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{12}(T) = \frac{3\int_0^T t x_t dt}{T^3},\ \ \alpha_{13}(T) = \frac{3\int_0^T t(x_t - x_0)dt}{T^3},\ \ \alpha_{21}(T) = \frac{\int_0^T x_t t dt}{\int_0^T x_t^2 dt},$$

$$\alpha_{23}(T) = \frac{\int_0^T x_t(x_t - x_0)dt}{\int_0^T x_t^2 dt},\ \ \alpha_{31}(T) = \frac{\int_0^T (x_t - x_0)t dt}{\int_0^T (x_t - x_0)^2 dt},\ \ \alpha_{32}(T) = \frac{\int_0^T (x_t - x_0)x_t dt}{\int_0^T (x_t - x_0)^2 dt},$$

$$\beta_1(T) = \frac{3\int_0^T t dx_t}{T^3},\ \ \beta_2(T) = \frac{\int_0^T x_t dx_t}{\int_0^T x_t^2 dt},\ \ \beta_3(T) = \frac{\int_0^T (x_t - x_0)dx_t}{\int_0^T (x_t - x_0)^2 dt}.$$

Оценку волатильности $\hat{\sigma}(T)$ можно получить из первого уравнения системы (1) с помощью свойств квадратических вариаций процессов (см. [6]):

$$\hat{\sigma}(T) = \sqrt{\frac{[x, x]_T}{T}}, \tag{6}$$

где $[\cdot, \cdot]$ – квадратическая вариация процесса "мгновенных доходностей" активов.

Таким образом, выражения (5), (6) задают оценки неизвестных параметров, зависящие только от значений процесса x на отрезке $[0, T]$, где T – текущий момент наблюдения. Следовательно, это дает возможность на основании "истории" изменения стоимости актива s до момента T получать оценки параметров модели (1), которые при выполнении условий состоятельности из **Теорем 2 и 3** сходятся по вероятности к истинным значениям соответствующих неизвестных параметров.

4. Результаты моделирования. Предложенная модель, как отмечалось в п. 1, оказалась адекватной для описания изменения стоимости различных ценных бумаг, обращающихся на российском финансовом рынке. В результате проведенного моделирования оценок (5), (6) для достаточно большого числа активов (10 первичных ценных бумаг (акций) и 23 вторичных (опционов и фьючерсов)) выявлена общая закономерность – все оценки сходятся с увеличением времени наблюдения к некоторым значениям. Следовательно, данные активы действительно могут иметь динамику, задаваемую системой вида (1), т.е. постоянную волатильность и коэффициент сноса, представляющий собой случайный процесс с линейной зависимостью от x_t, линейной обратной связью и коэффициентом линейного роста.

Следует отметить, что сходимость оценок для различных активов не одинакова, есть активы с "быстрой" сходимостью (например, фьючерс USD_D/15окт98, опцион cLUK/май98/110.0) и те, у которых оценки параметров имеют колебания (например, оценка $\hat{\lambda}_v(T)$ для акций Лукойла, фьючерсов GAZP/15июн98, EESR/15июл98). Последний случай может объясняться, во-первых, тем, что данные активы в действительности имеют более сложную динамику, чем система (1), которая в этом случае является лишь линейным приближением реальной модели. Во-вторых, поскольку колебания оценок при приближении к сроку истечения контракта обнаружены у всех исследованных вторичных ценных бумаг, можно предположить, что их динамика описывается моделью (1) лишь до некоторого определенного момента, предшествующего окончанию контракта.

Проведенные исследования выявили также интересную закономерность в поведении оценок параметров модели (1) в связи с известными событиями на финансовом рынке России в августе 1998 г. Для многих активов (например, акций ВАЗа, фьючерсов USD/15сен98, USD/15дек98) при приближении к 17 августа 1998 г. характерно резкое, иногда скачкообразное, изменение оценок, причем у многих из них при этом менялись знаки. Из данных наблюдений можно сделать вывод, что в этот период происходило качественное изменение моделей, т.е. их параметров, и, следовательно, динамики стоимости соответствующих активов.

Литература

1. *Bachelier L.* Théorie de la spéculation. - Ann. Ecole Norm. Sup., 1900, v. 17, p. 21-86.

2. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities. - J. Polit. Economy, 1973, v. 3, p. 637-659.

3. *Karatzas I.* Lectures on the Mathematics of Finance. - Providence, RI: AMS, 1997.

4. *Samuelson P.A.* Rational Theory of Warrant Pricing. - Industrial Management Review, 1965, 6 (Spring), p. 13-31.

5. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974.

6. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. - М.: Наука, 1986.

7. *Мельников А.В.* О стохастическом анализе в современной математике финансов и страхования. - Обозр. прикл. и пром. матем., 1995, т. 2, в. 4, стр. 514-526.

УДК 519.622

ДИАГОНАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ-ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[3]

Н.А. Андрианова, Г.Ю. Куликов

Основная идея для построения диагонально оптимальных методов Рунге-Кутты-простых-итераций (Р.К.п.и.-метод) предложена еще в [1]. В [2] она получила дальнейшее развитие при разработке диагонально оптимального метода Эйлера-простых итераций для систем дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1. Обобщим теперь эти результаты на произвольные Р.К.п.и.-методы.

Рассмотрим следующую систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$x'(t) = g(x(t), y(t)), \tag{1а}$$

$$y(t) = y(t) - \Lambda(t) h(x(t), y(t)), \tag{1б}$$

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \tag{1в}$$

где $t \in [0,T]$, $x(t) \in \mathbf{R}^m$, $y(t) \in \mathbf{R}^n$, $g : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^m$, $h(x,y) = y - f(x,y)$, $f : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$ и начальные условия (1в) заданы корректно, т. е. $y^0 = f(x^0, y^0)$, а диагональная матрица $\Lambda(t)$ размера n невырождена при всех $t \in [0,T]$.

Аналогично [3] перейдем от непрерывной задачи (1) к дискретной, полученной с помощью неявного l-стадийного Р.К.-метода,

$$x_{ki} = x_k + \tau_k \sum_{j=1}^{l} a_{ij} g(x_{kj}, y_{kj}), \tag{2а}$$

$$y_{ki} = y_{ki} - \Lambda_{ki} h(x_{ki}, y_{ki}), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \tag{2б}$$

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \sum_{i=1}^{l} b_i g(x_{ki}, y_{ki}), \tag{2в}$$

$$y_{k+1} = y_{k+1} - \Lambda_{k+1} h(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1, \tag{2г}$$

$$x_0 = x^0, \quad y_0 = y^0, \tag{2д}$$

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Министерства общего и профессионального образования России (научная программа "Университеты России — фундаментальные исследования", проект № 230) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00006).

где $\Lambda_{ki} = \Lambda(t_k + c_i \tau_k)$, а $\Lambda_{k+1} = \Lambda(t_{k+1})$.

Обозначим через $z(t)$ вектор, составленный из компонент векторов $x(t)$ и $y(t)$ ($z(t) = (x(t)^T, y(t)^T)^T \in \mathbf{R}^{m+n}$), а через G отображение, полученное объединением отображений g и f ($G = (g^T, f^T)^T : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^{m+n}$). Пусть $z(t_k)$ — значение точного решения задачи (1) в точке t_k, $\tilde{z}_k$ — значение точного решения задачи (2) в точке t_k и $\bar{z}_k = \bar{z}_k(N)$ — значение приближенного решения задачи (2) в точке t_k, полученное после N итераций некоторого итерационного метода.

Дополнительно введем вектор $Z_{k+1} = ((z_{k1})^T, \ldots, (z_{kl})^T, (z_{k+1})^T)^T \in \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)}$ и определим отображение $\bar{G}_k^\tau : D \subset \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)} \to \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$, следующим образом:

$$\bar{G}_k^\tau Z_{k+1} = \Big(\big(\bar{x}_k + \tau_k \sum_{j=1}^{l} a_{1j} g(z_{kj})\big)^T,\ f(z_{k1})^T,\ \ldots, \big(\bar{x}_k + \tau_k \sum_{j=1}^{l} a_{lj} g(z_{kj})\big)^T,$$
$$f(z_{kl})^T, \big(\bar{x}_k + \tau_k \sum_{i=1}^{l} b_i g(z_{ki})\big)^T, f(z_{k+1})^T \Big)^T.$$

Далее введем отображение $\bar{F}_k^\tau = E_{(m+n)(l+1)} - \bar{G}_k^\tau$ ($E_{(m+n)(l+1)}$ — единичная матрица размера $(m+n)(l+1)$) и перепишем дискретную задачу (2) более компактно

$$Z_{k+1} = Z_{k+1} - \bar{\Lambda}_{k+1} \bar{F}_k^\tau (Z_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1, \tag{3а}$$

$$\bar{Z}_0 = Z^0 = ((z^0)^T, \ldots, (z^0)^T)^T \in \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)}, \tag{3б}$$

где $\bar{\Lambda}_{k+1} = \operatorname{diag}\{E_m, \Lambda_{k1}, E_m, \Lambda_{k2}, \ldots, E_m, \Lambda_{k+1}\}$ — диагональная матрица размера $(m+n)(l+1)$. Затем, применяя метод простых итераций для решения задачи (3), приходим к однопараметрическому семейству Р.К.п.и.-методов

$$Z_{k+1}^i = Z_{k+1}^{i-1} - \bar{\Lambda}_{k+1} \bar{F}_k^\tau (Z_{k+1}^{i-1}), \tag{4а}$$

$$Z_{k+1}^0 = (\bar{z}_k^T, \ldots, \bar{z}_k^T)^T \in \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)}, \tag{4б}$$

$$\bar{z}_k = z_k^N, \quad k = 0, 1, \ldots, K-1, \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{4в}$$

$$\bar{Z}_0 = Z^0 = ((z^0)^T, \ldots, (z^0)^T)^T \in \mathbf{R}^{(m+n)(l+1)}. \tag{4г}$$

Среди множества всех невырожденых диагональных матриц $\Lambda(t)$ нас интересуют только такие, при которых для задачи (1) выполнены следующие условия.

I. *Условие гладкости.* Отображение $G : D_1 \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^{m+n}$ имеет на множестве D_1 непрерывные частные производные до порядка $s+2$ включительно, где s – порядок Р.К.-формулы, положенной в основу задачи (1).

II. *Условие ограниченности*[4].

$$\|E_{n\times(m+n)} - \Lambda(t)\partial h(z)\| \le d < 1 \quad \forall z \in D_1, \quad \forall t \in [0,T], \tag{5}$$

где $E_{n\times(m+n)}$ — прямоугольная матрица, первые m столбцов которой нулевые, а последние n столбцов образуют единичную матрицу.

III. *Условие включения*[5]. Существует выпуклое множество D_0 такое, что $z^0 \in D_0 \subset D_1$. В этом случае, как следует из [3], метод (4) является сходящимся.

Таким образом, в дальнейшем нас интересуют только невырожденные на отрезке $[0,T]$ диагональные матрицы $\Lambda(t)$, для которых выполнено условие (5). Такие матрицы будем называть *допустимыми параметрами задачи (1)*, а соотвествующие им методы (4) — *допустимыми Р.К.п.и.-методами*.

Итак, нашей первой проблемой является нахождение условий, позволяющих гарантировать существование допустимых параметров на множестве диагональных матриц, и, следовательно, — существование допустимых Р.К.п.и.-методов. Однако в силу строгости неравенства (5) допустимый параметр будет определяться неоднозначно, т. е. реально мы будем иметь достаточно широкий набор допустимых Р.К.п.и.-методов. Поэтому естественно попытаться найти среди них в том или ином смысле оптимальный метод. В качестве критерия оптимальности удобно использовать ошибку Р.К.п.и.-метода. Известно, что скорость сходимости Р.К.п.и.-метода существенным образом зависит от величины константы d в условии (5). Очевидно, все результаты сходимости остаются справедливыми, если потребовать, чтобы условие (5) выполнялось локально, т. е. при каждом t из отрезка $[0,T]$ в некоторой выпуклой окрестности точного решения $z(t)$. Поэтому наилучшим для нас будет тот допустимый Р.К.п.и.-метод, который минимизирует $d = d(t)$, т. е. фактически норму $\|E_{n\times(m+n)} - \Lambda(t)\partial h(z(t))\|$, в каждой точке сетки, так как в этом случае потребуется наименьшее число итераций для достижения максимального порядка сходимости. Такой метод в дальнейшем будем называть *диагонально оптимальным Р.К.п.и.-методом*, а соответствующую диагональную матрицу $\Lambda(t)$ — *диагонально оптимальным параметром задачи (1)*. Таким образом, нашей следующей проблемой будет исследование вопроса о существовании, единственности и нахождении диагонально оптимального Р.К.п.и.-метода.

[4]Здесь и далее норма вектора в $\mathbb{R}^{m+n}$ понимается в смысле $\|z\| = \max\limits_{1\le i\le m+n} |z_i|$, а для матриц используется соответствующая подчиненная норма $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le m+n} \sum\limits_{j=1}^{m+n} |a_{ij}|$.

[5]Включение $D_0 \subset D_1$ означает, что множество D_0 содержится в D_1 вместе с некоторой окрестностью.

Перейдем к решению первой проблемы. Предположим, что на компактном множестве D_1 задача (1) удовлетворяет условию диагонального преобладания:

IV. *Условие диагонального преобладания.*

$$\left|\frac{\partial h_i(z)}{\partial z_{m+i}}\right| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne m+i}}^{m+n} \left|\frac{\partial h_i(z)}{\partial z_j}\right|, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad \forall z \in D_1, \tag{6}$$

где $h(x,y) = y - f(x,y)$. Тогда следующие две теоремы показывают, что условие (6) является необходимым и достаточным для существования допустимых Р.К.п.и.-методов.

Теорема 1. *Пусть задача (1) удовлетворяет на компактном множестве D_1 условиям гладкости и диагонального преобладания. Тогда существует допустимый параметр $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\}$, т. е. такая невырожденная диагональная матрица $\Lambda(t)$, при которой задача (1) удовлетворяет условию ограниченности (5) на множестве D_1.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть задача (1) удовлетворяет условию гладкости на компактном множестве D_1. Тогда если существует допустимый параметр $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\}$, — невырожденная диагональная матрица, для которой выполняется условие ограниченности (5) на множестве D_1, то задача (1) удовлетворяет условию диагонального преобладания на D_1.*

Итак, мы доказали, что условие диагонального преобладания является необходимым и достаточным для существования целого семейства допустимых Р.К.п.и.-методов. При этом легко видеть, что условие диагонального преобладания (6) является более слабым, чем условие ограниченности (5).

Из теоремы 1 следует, что либо существует бесконечно много допустимых параметров для задачи (1) , либо таких параметров вообще нет.

Теорема 3. *Пусть задача (1) удовлетворяет на компактном множестве D_1 условиям гладкости и диагонального преобладания. Тогда существует единственный диагонально оптимальный параметр*

$\Lambda(t)$ *с элементами*

$$\lambda_i(t) = \left(1 - \frac{\partial f_i(z(t))}{\partial y_i}\right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Тем самым, мы нашли диагонально оптимальный Р.К.п.и.-метод для решения задачи (1). Для этого достаточно в каждой точке сетки диагональные элементы матрицы $\bar{\Lambda}_{k+1}$ в (4) вычислять в соответствии с формулой (7).

Литература

[1] *Куликов Г.Ю.* Численное решение автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. № 4. С. 522–540.

[2] *Куликов Г.Ю., Андрианова Н.А.* Об оптимальном методе Эйлера-простых итераций для решения дифференциально-алгебраических уравнений. Сб. трудов "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып. 3. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1997. С. 98–102.

[3] *Куликов Г.Ю.* Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 8. С. 73–89.

УДК 531.36:62-50

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПО НЕКОНТРОЛИРУЕМЫМ КООРДИНАТАМ.

С.П.Безгласный

В этой работе для управляемой системы исследуются задачи о стабилизации по части переменных (частичной или y-стабилизации) с гарантированной оценкой качества управления. На основе прямого метода Ляпунова мы используем предложенный в [1, 2] метод исследования свойств частичной устойчивости с помощью предельных уравнений. Применяются знакоопределенные функции Ляпунова, имеющие знакопостоянные производные. Полученные результаты предполагают неограниченность решений по неконтролируемым координатам.

0.1. Постановка задачи.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, u), \tag{0.1}$$

где $x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_s)$ $(m > 0, s \geq 0, n = m + s)$ — $n-$вектор действительного пространства R^n с нормой $\|x\|$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; $u = (u_1, \ldots, u_r) \in R^r$ - вектор управления. Правая часть (0.1) $X(t, x, u)$ $(X(t, 0, 0) = 0)$ определена для некоторого класса $U = \{u(t, x) : u(t, 0) = 0\}$ управляющих воздействий $u(t, x) \in C(G)$, $G = R^+ \times \Gamma$ $(R^+ = [0, +\infty[$, $\Gamma = \{\|y\| < H, H = const > 0, \|z\| < +\infty\})$, непрерывна и удовлетворяет в G условиям существования, единственности и $z-$продолжимости решений.

Пусть [3] оценкой качества управления этой системы служит значение интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x[t], u[t])\, dt \tag{0.2}$$

для переходного процесса при управлении $u[t]$ на соответствующей траектории $x[t]$ системы (0.1). Подынтегральная функция $W(t, x, u)$

в (0.2) представляет собой в общем случае некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области G при $u \in U$.

Приведем постановки задач о стабилизации и оптимальной стабилизации по отношению к части переменных $(x_1, ..., x_m) = (y_1, ..., y_m)$ $(m < n)$ ($y-$стабилизации), данные и исследованные в работах [3, 4, 5].

Задача об $y-$стабилизации. Требуется найти такое управляющее воздействие $u = u(t,x)$ среди всех $u(t,x) \in U$, которое обеспечивает асимптотическую $y-$устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ в силу системы (0.1).

Задачу об $y-$стабилизации системы (0.1) при условии минимума критерия качества (0.2) принято называть задачей об оптимальной $y-$стабилизации.

Задача об оптимальной $y-$стабилизации, как и задача об оптимальной стабилизации движения по всем переменным, представляет собой довольно трудную проблему. Она не решена в общем случае и требует больших усилий при исследовании многих прикладных задач.

В данной работе предлагается путем ослабления требования к ценовому функционалу поставить задачу о стабилизации системы (0.1) относительно части переменных с гарантированной оценкой качества управления. Она естественно следует из задачи о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления [12] согласно следующему определению.

Определение 1. Управляющее воздействие $u = u^0(t,x)$ называется $y-$стабилизирующим с гарантированной оценкой качества управления $P(t,x)$, если оно обеспечивает асимптотическую $y-$устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (0.1), при этом на каждом управляемом движении $x^0(t)$, $x^0(t_0) = x_0$ справедливо неравенство:

$$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} W(t, x^0[t], u^0[t])\, dt \le P(t_0, x_0). \qquad (0.3)$$

Задача об $y-$стабилизации с гарантированной оценкой качества управления. Требуется найти управляющее воздействие $u = u^0(t,x)$ среди всех $u(t,x) \in U$, которое обеспечивает асимптотическую $y-$устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ в силу системы (0.1), при котором на каждом управляемом движении $x^0(t)$, $x^0(t_0) = x_0$ справедливо неравенство (0.3).

Такая постановка задачи за счет ослабления требования минимизации функционала (0.2) позволяет расширить класс прикладных решаемых задач об $y-$стабилизации с указанием оценки качества переходного процесса.

0.2. Дополнительные предложения и построения.

Пусть правая часть (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ для некоторого $u^0(t,x) \in U$ ограничена на каждом компакте и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x относительно t, то есть для любого компакта $K \subset \Gamma$ существуют две константы $\lambda_K = \lambda(K)$ и $\nu_K = \nu(K)$, такие, что справедливы неравенства:

$$\|X^0(t,x)\| \le \lambda_K, \qquad \|X^0(t,x_2) - X^0(t,x_1)\| \le \nu_K \|x_2 - x_1\|. \qquad (0.4)$$

Тогда функция $X^0(t,x)$ удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве F_Φ [6]; и системе уравнений (0.1) $\dot{x} = X^0(t,x)$ сопоставляется [6] семейство предельных систем $\dot{x} = \Phi(t,x)$, для которых функции $\Phi(t,x)$ вычисляются по формуле:

$$\Phi(t,x) = \frac{d}{dt}\Big(\lim_{t_n \to \infty} \int\limits_0^t X^0(t_n + \tau, x)\, d\tau\Big).$$

Пусть подынтегральная функция в (0.2) $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ для управления $u^0(t,x) \in U$ удовлетворяет аналогичным условиям:

$$\|W^0(t,x)\| \le \eta_K, \qquad \|W^0(t,x_2) - W^0(t,x_1)\| \le \mu_K \|x_2 - x_1\|, \qquad (0.5)$$

где $\eta_K = \eta(K)$, $\mu_K = \mu(K)$ – константы, существующие для любого компакта $K \subset \Gamma$, при которых выполняются неравенства (0.5). Тогда функция $W^0(t,x)$ аналогичным образом удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве F_Ω, и ей сопоставляется семейство предельных функций $\Omega(t,x)$ по формуле:

$$\Omega(t,x) = \frac{d}{dt}\Big(\lim_{t_n \to \infty} \int\limits_0^t W^0(t_n + \tau, x)\, d\tau\Big).$$

Следуя [7], введем

$$B[V,t,x,u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^{\top} X(t,x,u) + W(t,x,u).$$

Через $\alpha(\|x\|)$ будем обозначать непрерывные строго возрастающие на отрезке $[0, H]$ функции, $\alpha(0) = 0$, то есть функции типа Хана [8].

Приведем необходимые определения из [9].

Определение 1.2. Пусть $t_k \to +\infty$ есть некоторая последовательность, $t \in R$ и $c \in R$ — некоторые значения. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ есть множество точек $x \in \Gamma$, для каждой из которых существует последовательность $x_k \to x$, такая что

$$\lim_{k\to\infty} V(t_k + t, x_k) = c$$

Определение 1.3. Значения функции $x = \phi(t) :]\alpha, \beta[\to \Gamma$ содержатся в множестве $\{\Omega(t, x) = 0\}$, определяемом функцией $\Omega \in F_\Omega$, $\Omega : G \to R$, если для любого отрезка $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$

$$\int_a^b \Omega(\tau, \phi(\tau))\, d\tau = 0.$$

Определение 1.4. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ называется соответствующим к предельной паре (Φ_0, Ω_0), если это множество и предельные к X^0, W^0 функции соответственно Φ_0, Ω_0 определены при помощи одной и той же последовательности $t_k \to +\infty$.

Определение 1.5. Пусть $V = V(t, x)$ – функция Ляпунова, $c \in R$ – некоторое число. Точка $y = (x_1, ..., x_m) \in R^{(m)}$ принадлежит множеству $L_\infty(c)$, если существуют последовательности $t_k \to +\infty$, $y_k \to y$, $\|z_k\| \to +\infty$ такие, что: $V(t_k, y, z) \to c$ при $k \to \infty$.

Определение 1.6. Точка $y^* \in R^{(m)}$ называется y-предельной точкой решения (0.1) $x = x(t, t_0, x_0)$, определенного для всех $t \geq t_0$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая что $y_{t_k}(t_0, x_0) \to y^*$ при $k \to \infty$.

0.3. Основные результаты.

Используя способ и результаты из [10, 2], приведем решение поставленной задачи об y-стабилизации с гарантированной оценкой качества управления на основе прямого метода Ляпунова при допущении неограниченности решений по неконтролируемым координатам.

Теорема 1. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2) существуют функция Ляпунова $V(t, x) \in C^1(G)$, $V(t, 0) = 0$ и управление $u = u^0(t, x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) существует число $Q > 0$. такое, что $\lim V(t, y, z) \geq Q$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$.

2) функция $V(t, x)$ – определенно-положительная по y,

$$V(t, x) \geq \alpha_1(\|y\|);$$

3) существует число H_1 $(H_0 < H_1 < H)$,такое, что $\sup(V(t, x)$ при $t \geq 0$, $\|x\| \leq H_0) < \alpha_1(H_1)$;

4) функция $B[V, t, x, u^0(t, x)] \leq 0$;

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x))$ и функция $W^0(t, x) = W(t, x, u^0(t, x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) каждая предельная к (X^0, W^0) пара (Φ_0, Ω_0) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ таковы, что для любого $c = c_0 = const \geq 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0\} \cap \{\Omega_0(t, x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t, x)$, кроме решений $x = x(t) = (y(t), z(t))$ таких, что $y = 0$.

Тогда $u^0(t, x)$ – y-стабилизирующее управление для системы (0.1) с гарантированной оценкой качества управления $P(t_0, x_0) = V(t_0, x_0) - c_0$, где $c_0 = \lim V(t, x(t, t_0, x_0))$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Для производной функции $V(t, x)$ в силу системы (0.1) из условия 4 теоремы имеем:

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t, x, u^0(t, x)) \leq 0. \tag{0.6}$$

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Из условия 2 и (0.6) следует, что существует $c = c_0 = const$, такое что $V(t, x(t_0, x_0)) \to c_0$ при $t \to +\infty$.

Пусть $y^* \in R^{(m)}$ есть y-предельная точка для последовательности $t_k \to +\infty$, то есть $y_{t_k}(t_0, x_0) \to y^*$ при $k \to \infty$.

Если последовательность z_k ограничена, тогда имеем, что для решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (0.1) и для последовательности $t_n \to +\infty$, определяющей пару (Φ_0, Ω_0) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, для которой $x(t_n) \to x^*$ при $t_n \to \infty$, некоторая подпоследовательность функций $\{x_{n_k} = x(t_{n_k} + t, t_0, x_0)\}$, определяемая для значений $t_{n_k} \geq 0$, будет сходиться к некоторому решению $x = (y^*, z^*) = \varphi(t) :] - \infty, +\infty[\to$

Γ системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ равномерно на каждом отрезке $[-T,T]$. В пределе при $t_{n_k} \to +\infty$, как и в [10], получаем, что

$$\varphi(t) \in \{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\}.$$

Но по условию 6 теоремы это возможно, если только $\varphi(t) = (0,\ldots,0, \varphi_{m+1}(t),\ldots,\varphi_n(t))$, то есть

$$\{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \subset \{\varphi_{(y)} = 0\},$$

или для каждого решения системы (0.1) $x(t,t_0,x_0) : x_0 \in \Gamma_0$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) = 0. \tag{0.7}$$

Тем самым имеем для системы (0.1) асимптотическую y-устойчивость решения $x = 0$.

Если $z_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\varphi_{(y)} \in \{L_\infty(c) : c = c_0\}$ по определению множества $L_\infty(c)$.

Из дополнительного условия относительно V для каждого числа $c_0 = const$, меньшего Q, следовательно для всех малых $c_0 \geq 0$, множество $\{L_\infty(c) : c = c_0\} \subset \{\varphi_{(y)} = 0\}$, что и доказывает асимптотическую y- устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Проинтегрировав неравенство (0.8) от t_0 до T, получим в пределе:

$$\int_{t_0}^{\infty} W(t,x(t),u^0(t))\,dt \leq V(t_0,x(t_0) - c_0).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2) существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$, $V(t,0) = 0$ и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\lim V(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$;

2) функция $V(t,x)$ – определенно-положительная по y,

$$V(t,x) \geq \alpha_1(\|y\|);$$

3) существует число H_1 $(H_0 < H_1 < H)$,такое, что $\sup(V(t,x)$ при $t \geq 0$, $\|x\| \leq H_0) < \alpha_1(H_1)$;

4) функция $B[V,t,x,u^0(t,x)] \leq 0$;

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ и функция $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) существует хотя бы одна последовательность, для которой каждая предельная к (X^0, W^0) пара (Φ_0, Ω_0) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ таковы, что для любого $c = c_0 = const > 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \bigcap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$.

Тогда $u^0(t,x)$ – y-стабилизирующее управление для системы (0.1) с гарантированной оценкой качества управления $P(t_0,x_0) = V(t_0,x_0)$. При этом движение $x = 0$ системы (0.1) асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0.

Доказательство. Пусть $t_k \to +\infty$ есть последовательность, определяющая пару (Φ_0, Ω_0).

Если последовательность $z(t_k,t_0,x_0)$ ограничена, тогда покажем, что $V(t,x(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для производной функции $V(t,x)$ в силу системы (0.1) из условия 4 теоремы имеем:

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t,x,u^0(t,x)) \leq 0. \tag{0.8}$$

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Пусть $x = x(t,t_0,x_0)$ – решение системы (0.1) из области Γ_0. Согласно условию 2 теоремы и неравенству (0.8) функция $V(t,x) = V(t,x(t,t_0,x_0)) \to c_0$ при $t \to +\infty$. Пусть $t_n \to +\infty$ есть последовательность, определяющая пару (Φ_0,Ω_0) и множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, и для которой $x(t_n) \to x^*$ при $t_n \to \infty$. Составим последовательность функций $x_n = x(t_n+t,t_0,x_0)$. Согласно [6] и условию 1 теоремы, существует подпоследовательность функций $\{x_{n_k} = x(t_{n_k}+t,t_0,x_0)\}$, определяемая для значений $t_{n_k} \geq 0$, которая будет сходиться к некоторому решению $x = \varphi(t) :]-\infty,+\infty[\to \Gamma$ системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ равномерно на каждом отрезке $[-T,T]$. Переходя к пределу при $t_{n_k} \to +\infty$, как и в [10], получаем, что

$$\varphi(t) \in \{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\}.$$

Но по условию 6 теоремы это возможно, если только $c_0 = 0$. Итак, вдоль каждого решения системы (0.1) $x(t,t_0,x_0) : x_0 \in \Gamma_0$, функция

$$V(t,x(t_0,x_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{0.9}$$

Если $z(t_k,t_0,x_0) \to \infty, k \to \infty$, то $V(t_k,x_k(t_0,x_0)) \to 0$, $k \to \infty$ из условия 1 теоремы, и значит $V(t,x(t,t_0,x_0)) \to 0$, $t \to \infty$.

Тем самым имеем для системы (0.1) асимптотическую y-устойчивость решения $x = 0$, равномерную по x_0 [11]. Проинтегрировав неравенство (0.8) от t_0 до T и учитывая (0.9), получим:

$$\int_{t_0}^{\infty} W(t, x(t), u^0(t))\, dt \leq V(t_0, x(t_0)).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2) существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$, $V(t,0) = 0$ и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\lim V(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$;

2) функция $V(t,x)$ — определенно-положительная по y,

$$\alpha_1(\|y\|) \leq V(t,x);$$

3) функция $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел по всем переменным,

$$V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|);$$

4) функция $B[V, t, x, u^0(t,x)] \leq 0$;

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ и функция $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) каждая предельная совокупность (Φ_0, V^*, Ω_0) такова, что $\{V^*(t,x) = c : c > 0\} \cap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$.

Тогда $u^0(t,x)$ - y-стабилизирующее управление для системы (0.1) с гарантированной оценкой качества управления $P(t_0,x_0) = V(t_0,x_0)$. При этом движение $x = 0$ системы (0.1) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Из условия 1 получаем, что предельная к $V(t,x)$ функция $V^*(t,x)$ имеет свойство: $V^*(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $(t,y) \in R^+ \times \{\|y\| < H_0,\ H_0 < H\}$.

Если решение $x^* = x^*(t,t_0,x_0)$ уравнения $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ ограничено по z для некоторой последовательности $t_k \to +\infty$, то есть $\|z(t_k,t_0,x_0)\| \leq l < +\infty$, то соотношение $V^*(t, x^*(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$ следует из того, что совокупность $(\Phi_0^*, V^{**}, \Omega_0^*)$, предельная к (Φ_0, V^*, Ω_0) является предельной к (X, V, W).

Если $x^* = x^*(t,t_0,x_0)$ такое, что $z(t,t_0,x_0) \to \infty$ при $t \to \infty$, то соотношение $V^*(t, x^*(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$, следует из условия 1 теоремы.

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует равномерная y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Проинтегрировав неравенство (0.8) от t_0 до T, при переходе к пределу при $T \to \infty$ получим:

$$\int_{t_0}^{\infty} W(t, x(t), u^0(t))\, dt \leq V(t_0, x(t_0)).$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы отличаются от предыдущих теорем о стабилизации по части переменных [11, 12, 13] отсутствием z−ограниченности и развивают также результаты теорем из работ [3, 4, 5, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 99-01 01005).

Литература

[1] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений// ПММ. – 1987. – Т.51. Вып.2. – С.253-260.

[2] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости// ПММ. – 1991. – Т.55. Вып.4. – 539-547.

[3] Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем// ПММ. – 1970. – Т.34. Вып.3. – С 440-456.

[4] Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления// ПММ. – 1997. – Т.61. Вып.1. – С.44-51.

[5] Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations// J. Differ. Equat. 1977. V.23. N.2. P.216-223.

[6] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И.Г. "Теория устойчивости движения", доп.4. М.: Наука, 1966. С. 475-514.

[7] Руш Н., Абетс Р., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем// ПММ. – 1979. – Т.43. Вып.5. – С.796-805.

[9] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

[10] Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных// ПММ. – 1973. – Т.37. Вып.4. – С.659-665.

[11] Безгласный С.П. О стабилизации по части переменных программных движений управляемых механических систем.//Тезисы докладов студентов и аспирантов на пятой ежегодной научно-практической конференции УлГУ.- Ульяновск: УлГУ, 27 апреля 1996 г. – С.3.

[12] Безгласный С.П. О стабилизации по части переменных с гарантированной оценкой качества управления//Тезисы докладов 11-ой Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики. – Ульяновск: УлГУ, 10-14 июня 1996 г. – С.20-21.

[13] Безгласный С.П. К задаче об оптимальной стабилизации по части переменных.// Труды Второй международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов".- Ульяновск: УлГУ, 10-13 сентября 1999 г. – С.44-45.

[14] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука. 1987. – 235 с.

[15] Озиранер А.С. Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных//ПММ.– 1978. – Т.42. Вып.2. – С.272-276.

[16] Oziraner A.S. Some theorems on the partial stability and stabilization// Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged (Hungary). – 1979. – P.811-825.

УДК 531.36:62-50

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПО НЕКОНТРОЛИРУЕМЫМ КООРДИНАТАМ

С.П.Безгласный

В этой работе для управляемой системы исследуется задача об оптимальной стабилизации по части переменных (частичной или y-стабилизации). На основе прямого метода Ляпунова мы используем предложенный в [1, 2] метод исследования свойств частичной устойчивости с помощью предельных уравнений. Применяются знакоопределенные функции Ляпунова, имеющие знакопостоянные производные. Полученные результаты предполагают неограниченность решений по неконтролируемым координатам.

0.1. Постановка задачи.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, u), \tag{0.1}$$

где $x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_s)$ $(m > 0, s \geq 0, n = m + s)$ — n−вектор действительного пространства R^n с нормой $\|x\|$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; $u = (u_1, \dots, u_r) \in R^r$ - вектор управления. Правая часть (0.1) $X(t, x, u)$ $(X(t, 0, 0) = 0)$ определена для некоторого класса $U = \{u(t, x) : u(t, 0) = 0\}$ управляющих воздействий $u(t, x) \in C(G)$, $G = R^+ \times \Gamma$ $(R^+ = [0, +\infty[$, $\Gamma = \{\|y\| < H, H = const > 0, \|z\| < +\infty\})$, непрерывна и удовлетворяет в G условиям существования, единственности и z−продолжимости решений.

Пусть [3] оценкой качества управления этой системы служит значение интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x[t], u[t])\, dt \tag{0.2}$$

для переходного процесса при управлении $u[t]$ на соответствующей траектории $x[t]$ системы (0.1). Подынтегральная функция $W(t, x, u)$

в (0.2) представляет собой в общем случае некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области G при $u \in U$.

Приведем постановки задач о стабилизации и оптимальной стабилизации по отношению к части переменных $(x_1, ..., x_m) = (y_1, ..., y_m)$ $(m < n)$ (y−стабилизации), данные и исследованные в работах [3, 4, 5].

Задача об y−стабилизации. Требуется найти такое управляющее воздействие $u = u(t, x)$ среди всех $u(t, x) \in U$, которое обеспечивает асимптотическую y−устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ в силу системы (0.1).

Задачу об y−стабилизации системы (0.1) при условии минимума критерия качества (0.2) принято называть задачей об оптимальной y−стабилизации. Эта проблема формулируется так.

Задача об оптимальной y−стабилизации. Требуется найти управляющее воздействие $u = u^0(t, x)$ среди всех $u(t, x) \in U$, которое обеспечивает асимптотическую y−устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ в силу системы (0.1), при этом для любого другого такого управления $u = u^*(t, x) \in U$, решающего задачу об y−стабилизации системы (0.1), справедливо неравенство:

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x^0[t], u^0[t])\, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} W(t, x^*[t], u^*[t])\, dt = I^* \tag{0.3}$$

при $t_0 \geq 0$, $x^0[t_0] = x^*(t_0) = x_0$, $\|x_0\| \leq H_0 < H$.

Задача об оптимальной y−стабилизации, как и задача об оптимальной стабилизации движения по всем переменным, представляет собой довольно трудную проблему. Она не решена в общем случае и требует больших усилий при исследовании многих прикладных задач.

0.2. Дополнительные предложения и построения.

Пусть правая часть (0.1) $X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x))$ для некоторого $u^0(t, x) \in U$ ограничена на каждом компакте и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x относительно t, то есть для любого компакта $K \subset \Gamma$ существуют две константы $\lambda_K = \lambda(K)$ и $\nu_K = \nu(K)$, такие, что справедливы неравенства:

$$\|X^0(t, x)\| \leq \lambda_K, \qquad \|X^0(t, x_2) - X^0(t, x_1)\| \leq \nu_K \|x_2 - x_1\|. \tag{0.4}$$

Тогда функция $X^0(t,x)$ удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве F_Φ [6]; и системе уравнений (0.1) $\dot{x} = X^0(t,x)$ сопоставляется [6] семейство предельных систем $\dot{x} = \Phi(t,x)$, для которых функции $\Phi(t,x)$ вычисляются по формуле:

$$\Phi(t,x) = \frac{d}{dt}\Big(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t X^0(t_n+\tau,x)\,d\tau\Big).$$

Пусть подынтегральная функция в (0.2) $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ для управления $u^0(t,x) \in U$ удовлетворяет аналогичным условиям:

$$\|W^0(t,x)\| \le \eta_K, \qquad \|W^0(t,x_2) - W^0(t,x_1)\| \le \mu_K\|x_2 - x_1\|, \qquad (0.5)$$

где $\eta_K = \eta(K)$, $\mu_K = \mu(K)$ – константы, существующие для любого компакта $K \subset \Gamma$, при которых выполняются неравенства (0.5). Тогда функция $W^0(t,x)$ аналогичным образом удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве F_Ω, и ей сопоставляется семейство предельных функций $\Omega(t,x)$ по формуле:

$$\Omega(t,x) = \frac{d}{dt}\Big(\lim_{t_n\to\infty}\int_0^t W^0(t_n+\tau,x)\,d\tau\Big).$$

Следуя [7], введем

$$B[V,t,x,u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\top} X(t,x,u) + W(t,x,u).$$

Через $\alpha(\|x\|)$ будем обозначать непрерывные строго возрастающие на отрезке $[0,H]$ функции, $\alpha(0) = 0$, то есть функции типа Хана [8].

Приведем необходимые определения из [9].

Определение 1.2. Пусть $t_k \to +\infty$ есть некоторая последовательность, $t \in R$ и $c \in R$ — некоторые значения. Множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ есть множество точек $x \in \Gamma$, для каждой из которых существует последовательность $x_k \to x$, такая что

$$\lim_{k\to\infty} V(t_k+t,x_k) = c$$

Определение 1.3. Значения функции $x = \phi(t) :]\alpha,\beta[\to \Gamma$ содержатся в множестве $\{\Omega(t,x) = 0\}$, определяемом функцией $\Omega \in$

F_Ω, $\Omega : G \to R$, если для любого отрезка $[a,b] \subset]\alpha,\beta[$

$$\int_a^b \Omega(\tau,\phi(\tau))\,d\tau = 0.$$

Определение 1.4. Множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ называется соответствующим к предельной паре (Φ_0,Ω_0), если это множество и предельные к X^0, W^0 функции соответственно Φ_0, Ω_0 определены при помощи одной и той же последовательности $t_k \to +\infty$.

Определение 1.5. Пусть $V = V(t,x)$ – функция Ляпунова, $c \in R$ – некоторое число. Точка $y = (x_1,\dots,x_m) \in R^{(m)}$ принадлежит множеству $L_\infty(c)$, если существуют последовательности $t_k \to +\infty$, $y_k \to y$, $\|z_k\| \to +\infty$ такие, что: $V(t_k,y,z) \to c$ при $k \to \infty$.

Определение 1.6. Точка $y^* \in R^{(m)}$ называется y-предельной точкой решения (0.1) $x = x(t,t_0,x_0)$, определенного для всех $t \ge t_0$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая что $y_{t_k}(t_0,x_0) \to y^*$ при $k \to \infty$.

0.3. Основные результаты.

Используя способ и результаты из [10, 2], приведем решение поставленной задачи об оптимальной y-стабилизации на основе прямого метода Ляпунова при допущении неограниченности решений по неконтролируемым координатам.

Теорема 1. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2), $\min I$ по $u \in U$, существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$, $V(t,0) = 0$, и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) существует число $Q > 0$, такое, что $\lim V(t,y,z) \ge Q$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$.

2) функция $V(t,x)$ – определенно-положительная по y,

$$V(t,x) \ge \alpha_1(\|y\|);$$

3) существует число H_1 ($H_0 < H_1 < H$),такое, что $\sup(V(t,x)$ при $t \ge 0$, $\|x\| \le H_0) < \alpha_1(H_1)$;

4.1) функция $B[V,t,x,u^0(t,x)] \equiv 0$;

4.2) $B[V,t,x,u^0(t,x)] \le B[V,t,x,u^*(t,x)]$ для любого другого управления $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об y–стабилизации для системы (0.1);

4.3) $V^0 = \lim V(t, x^0(t, t_0, x_0)) \geq V^* = \lim V(t, x^*(t, t_0, x_0))$ при $t \to +\infty$;

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ и функция $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) каждая предельная к (X^0, W^0) пара (Φ_0, Ω_0) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ таковы, что для любого $c = c_0 = const \geq 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$, кроме решений $x = x(t) = (y(t), z(t))$ таких, что $y = 0$.

Тогда $u^0(t,x)$ — управление, решающее задачу об оптимальной $y-$стабилизации для системы (0.1). При этом выполняется соотношение

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^0(t,x))\,dt = \min_{u\in U} \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^*(t,x))\,dt = V(t_0,x_0) - V^0,$$

для любого $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об $y-$стабилизации невозмущенного движения $x = 0$ системы (0.1).

Доказательство. Для производной функции $V(t,x)$ в силу системы (0.1) из условия 4.1 теоремы имеем:

$$\frac{dV}{dt} = -W(t,x,u^0(t,x)) \leq 0. \tag{0.6}$$

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Из условия 2 и (0.6) следует, что существует $c = c_0 = const$, такое что $V(t, x(t_0,x_0)) \to c_0$ при $t \to +\infty$.

Пусть $y^* \in R^{(m)}$ есть y-предельная точка для последовательности $t_k \to +\infty$, то есть $y_{t_k}(t_0,x_0) \to y^*$ при $k \to \infty$.

Если последовательность z_k ограничена, тогда имеем, что для решения $x = x(t,t_0,x_0)$ системы (0.1) и для последовательности $t_n \to +\infty$, определяющей пару (Φ_0,Ω_0) и множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, для которой $x(t_n) \to x^*$ при $t_n \to \infty$, некоторая подпоследовательность функций $\{x_{n_k} = x(t_{n_k} + t, t_0, x_0)\}$, определяемая для значений $t_{n_k} \geq 0$, будет $\{x_{n_k} = x(t_{n_k}+t,t_0,x_0)\}$, определяемая для значений $t_{n_k} \geq 0$, будет сходиться к некоторому решению $x = (y^*, z^*) = \varphi(t) :]-\infty, +\infty[\to \Gamma$ системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ равномерно на каждом отрезке $[-T,T]$. В пределе при $t_{n_k} \to +\infty$, как и в [10], получаем, что

$$\varphi(t) \in \{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\}.$$

Но по условию 6 теоремы это возможно, если только $\varphi(t) = (0,\ldots,0, \varphi_{m+1}(t),\ldots,\varphi_n(t))$, то есть

$$\{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \subset \{\varphi_{(y)} = 0\},$$

или для каждого решения системы (0.1) $x(t,t_0,x_0) : x_0 \in \Gamma_0$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) = 0. \tag{0.7}$$

Тем самым имеем для системы (0.1) асимптотическую y-устойчивость решения $x = 0$.

Если $z_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\varphi_{(y)} \in \{L_\infty(c) : c = c_0\}$ по определению множества $L_\infty(c)$.

Из дополнительного условия относительно V для каждого числа $c_0 = const$, меньшего Q, следовательно для всех малых $c_0 \geq 0$, множество $\{L_\infty(c) : c = c_0\} \subset \{\varphi_{(y)} = 0\}$, что и доказывает асимптотическую y- устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Проинтегрировав неравенство (0.6) от t_0 до T, учитывая условия 4.2 и 4.3 теоремы, получим в пределе:

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^0(t,x))\,dt = \min_{u\in U} \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^*(t,x))\,dt = V(t_0,x_0) - V^0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2), $\min I$ по $u \in U$, существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$, $V(t,0) = 0$, и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\lim V(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$;

2) функция $V(t,x)$ – определенно-положительная по y,

$$V(t,x) \geq \alpha_1(\|y\|);$$

3) существует число H_1 $(H_0 < H_1 < H)$,такое, что $\sup(V(t,x)$ при $t \geq 0$, $\|x\| \leq H_0) < \alpha_1(H_1)$;

4.1) функция $B[V,t,x,u^0(t,x)] \equiv 0$;

4.2) $B[V,t,x,u^0(t,x)] \leq B[V,t,x,u^*(t,x)]$ для любого другого управления $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об $y-$стабилизации для системы (0.1);

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ и функция $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) существует хотя бы одна последовательность, для которой каждая предельная к (X^0, W^0) пара (Φ_0, Ω_0) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ таковы, что для любого $c = c_0 = const > 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$.

Тогда $u^0(t,x)$ — управление, решающее задачу об оптимальной y—стабилизации для системы (0.1). При этом движение $x = 0$ системы (0.1) асимптотически y—устойчиво равномерно по x_0, и выполняется соотношение

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^0(t,x))\,dt = \min_{u \in U} \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^*(t,x))\,dt = V(t_0,x_0)$$

для любого $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об y—стабилизации невозмущенного движения $x = 0$ системы (0.1).

Доказательство. Пусть $t_k \to +\infty$ есть последовательность, определяющая пару (Φ_0, Ω_0).

Если последовательность $z(t_k, t_0, x_0)$ ограничена, тогда покажем, что $V(t, x(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для производной функции $V(t,x)$ в силу системы (0.1) из условия 4.1 теоремы имеем:

$$\frac{dV}{dt} = -W(t,x,u^0(t,x)) \leq 0. \tag{0.8}$$

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Пусть $x = x(t,t_0,x_0)$ – решение системы (0.1) из области Γ_0. Согласно условию 2 теоремы и неравенству (0.8) функция $V(t,x) = V(t,x(t,t_0,x_0)) \to c_0$ при $t \to +\infty$. Пусть $t_n \to +\infty$ есть последовательность, определяющая пару (Φ_0, Ω_0) и множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, и для которой $x(t_n) \to x^*$ при $t_n \to \infty$. Составим последовательность функций $x_n = x(t_n + t, t_0, x_0)$. Согласно [6] и условию 1 теоремы, существует подпоследовательность функций $\{x_{n_k} = x(t_{n_k} + t, t_0, x_0)\}$, определяемая для значений $t_{n_k} \geq 0$, которая будет сходиться к некоторому решению $x = \varphi(t) :]-\infty, +\infty[\to \Gamma$ системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ равномерно на каждом отрезке $[-T,T]$. Переходя к пределу при $t_{n_k} \to +\infty$, как и в [10], получаем, что

$$\varphi(t) \in \{\Omega_0(t,x) = 0\} \bigcap \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\}.$$

Но по условию 6 теоремы это возможно, если только $c_0 = 0$. Итак, вдоль каждого решения системы (0.1) $x(t,t_0,x_0) : x_0 \in \Gamma_0$, функция

$$V(t, x(t_0,x_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{0.9}$$

Если $z(t_k,t_0,x_0) \to \infty$, $k \to \infty$, то $V(t_k, x_k(t_0,x_0)) \to 0$, $k \to \infty$ из условия 1 теоремы, и значит $V(t, x(t,t_0,x_0)) \to 0$, $t \to \infty$.

Тем самым имеем для системы (0.1) асимптотическую y-устойчивость решения $x = 0$, равномерную по x_0 [11]. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть для системы (0.1) с оценкой качества управления (0.2), $\min I$ по $u \in U$, существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$, $V(t,0) = 0$, и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) $\lim V(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, y \in \{\|y\| < H_0, H_0 < H\}$;

2) функция $V(t,x)$ — определенно-положительная по y,

$$\alpha_1(\|y\|) \leq V(t,x);$$

3) функция $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел по всем переменным,

$$V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|);$$

4.1) функция $B[V,t,x,u^0(t,x)] \equiv 0$;

4.2) $B[V,t,x,u^0(t,x)] \leq B[V,t,x,u^*(t,x)]$ для любого другого управления $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об y—стабилизации для системы (0.1);

5) правая часть системы (0.1) $X^0(t,x) = X(t,x,u^0(t,x))$ и функция $W^0(t,x) = W(t,x,u^0(t,x))$ удовлетворяют условиям (0.4) и (0.5);

6) каждая предельная совокупность (Φ_0, V^*, Ω_0) такова, что $\{V^*(t,x) = c : c > 0\} \cap \{\Omega_0(t,x) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$.

Тогда $u^0(t,x)$ — управление, решающее задачу об оптимальной y—стабилизации для системы (0.1). При этом движение $x = 0$ системы (0.1) равномерно асимптотически y—устойчиво, и выполняется соотношение

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^0(t,x))\,dt = \min_{u \in U} \int_{t_0}^{\infty} W(t,x,u^*(t,x))\,dt = V(t_0,x_0)$$

для любого $u^*(t,x) \in U$, решающего задачу об $y-$стабилизации невозмущенного движения $x = 0$ системы (??).

Доказательство. Из условия 1 получаем, что предельная к $V(t,x)$ функция $V^*(t,x)$ имеет свойство: $V^*(t,y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по $(t,y) \in R^+ \times \{\|y\| < H_0,\ H_0 < H\}$.

Если решение $x^* = x^*(t,t_0,x_0)$ уравнения $\dot{x} = \Phi_0(t,x)$ ограничено по z для некоторой последовательности $t_k \to +\infty$, то есть $\|z(t_k,t_0,x_0)\| \le l < +\infty$, то соотношение $V^*(t,x^*(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$ следует из того, что совокупность $(\Phi_0^*, V^{**}, \Omega_0^*)$, предельная к (Φ_0, V^*, Ω_0) является предельной к (X, V, W).

Если $x^* = x^*(t,t_0,x_0)$ такое, что $z(t,t_0,x_0) \to \infty$ при $t \to \infty$, то соотношение $V^*(t,x^*(t,t_0,x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$, следует из условия 1 теоремы.

Из этого и условий 2, 3 теоремы следует равномерная y-устойчивость решения $x = 0$ системы (0.1).

Окончание доказательства аналогично как и в теореме 1.

Теорема доказана.

Полученные теоремы развивают и обобщают результаты работ [3, 4, 5] использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными для решения задачи об оптимальной $y-$стабилизации. Одновременно они отличаются от теорем об оптимальной стабилизации по части переменных из [12, 13] отсутствием $z-$ограниченности решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 99-01 01005).

Литература

[1] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений// ПММ. – 1987. – Т.51. Вып.2. – С.253-260.

[2] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости// ПММ. – 1991. – Т.55. Вып.4. – 539-547.

[3] Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем// ПММ. – 1970. – Т.34. Вып.3. – С.440-456.

[4] Озиранер А.С. Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных//ПММ.– 1978. – Т.42. Вып.2. – С.272-276.

[5] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука. 1987. – 235 с.

[6] Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations// J. Differ. Equat. 1977. V.23. N.2. P.216-223.

[7] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И.Г. "Теория устойчивости движения", доп.4. М.: Наука, 1966. С. 475-514.

[8] Руш Н., Абетс Р., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[9] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем// ПММ. – 1979. – Т.43. Вып.5. – С.796-805.

[10] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

[11] Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных// ПММ. – 1973. – Т.37. Вып.4. – С.659-665.

[12] Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления// ПММ. – 1997. – Т.61. Вып.1. – С.44-51.

[13] Безгласный С.П. К задаче об оптимальной стабилизации по части переменных.// Труды Второй международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов".– Ульяновск: УлГУ, 10-13 сентября 1999 г. – С.44-45.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЯВНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ[6]

Г.Я. Бендерская, Г.Ю. Куликов

В настоящее время экстраполяционные методы являются наиболее эффективными для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Они позволяют автоматически выбирать наилучшие шаг интегрирования и порядок метода во время решения задачи.

С точки зрения экстраполяционного процесса особый интерес представляют одношаговые методы, обладающие квадратичным разложением глобальной погрешности, т.е. разложением, которое содержит только члены четных порядков относительно шага численного интегрирования. Это означает, что каждая строка экстраполяционной таблицы увеличивает порядок метода на 2. Таким образом, применение квадратичной экстраполяции значительно снижает затраты машинного времени.

Использование метода прямых для решения уравнений в частных производных позволяет сводить их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Поэтому область применения экстраполяционных методов не ограничивается только обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти методы вполне применимы и для решения уравнений в частных производных.

Рассмотрим следующую задачу с малым парамером ϵ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g(u)\frac{\partial u}{\partial x}), \tag{1а}$$

$$f(u) = \frac{u^3}{u^3 + \frac{2}{3}(1-u)^3}, \quad g(u) = \frac{(1-u)^3}{\frac{2}{3}u^3 + (1-u)^3}, \tag{1б}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,0.4]$, а $\epsilon = 0.03$. Дополнительно известно, что $u(0,t) = u(0.4,t) = 1$ при $t \in [0,0.4]$ и $u(x,0) = 0$ для всех x из отрезка $[0,1]$ за исключением концевых точек. Требуется вычислить решение уравнения (1) в конечной временной точке, т.е. найти $u(x,0.4)$.

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Министерства общего и профессионального образования России (научная программа "Университеты России — фундаментальные исследования", проект № 230) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00006).

Для этого, во-первых, необходимо свести данное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода прямых. Для реализации метода прямых введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку по x с шагом h, т.е.

$$w_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N,\ x_N = 1\}.$$

Пусть $N = 100$ и, соответственно, $h = 0.01$. Тогда заменим все дифференциальные выражения, входящие в уравнение (1a), за исключением производной по времени, соответствующими разностными аппроксимациями [2], [3]. В результате получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} u_i' = -\frac{1}{h}[f(u_i) - f(u_{i-1})] + \epsilon \cdot \frac{1}{2h^2}\{[g(u_{i+1}) + g(u_i)](u_{i+1} - u_i) - \\ -[g(u_{i-1}) + g(u_i)](u_i - u_{i-1})\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 99, \end{aligned} \tag{2a}$$

$$f(u_i) = \frac{u_i^3}{u_i^3 + \frac{2}{3}(1-u_i)^3}, \quad g(u_i) = \frac{(1-u_i)^3}{\frac{2}{3}u_i^3 + (1-u_i)^3}, \tag{2б}$$

где $h = 0.01$, $\epsilon = 0.03$, $u_0 = 1$, $u_{100} = 1$, $u_i = 0$, $i = 1, \ldots, 99$, $t \in [0, 0.4]$.

Задача (2) представляет теперь собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения построим экстраполяционный алгоритм, использующий в качестве базового метода неявное правило средней точки.

Итак, (2) есть задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) = v(t, u(t)), \quad t \in [0, 0.4], \tag{3a}$$

$$u(0) = 0, \tag{3б}$$

где $u(t) = (u_1(t), ..., u_{99}(t))^T$, $u_0 = 1$, $u_{100} = 1$. Для численного решения задачи (3) введем на отрезке $[0, 0.4]$ равномерную сетку

$$w_\tau = \{t_{k+1} = k\tau,\ k = 0, 1, ..., K,\ t_K = 0.4\}$$

с шагом τ и применим неявное правило средней точки [1]

$$t_{k+1/2} = t_k + \tau/2, \tag{4a}$$

$$u_{k+1} = u_k + \tau v(t_{k+1/2}, (u_k + u_{k+1})/2), \quad k = 0, 1, ..., K-1. \tag{4б}$$

Известно, что глобальная ошибка метода (4) имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) - x_{k+1} = \phi_{2s}(t_{k+1})\tau_k^{2s} + \phi_{2s+2}(t_{k+1})\tau_k^{2s+2} + \ldots \\ + \phi_{2S}(t_{k+1})\tau_k^{2S} + O(\tau_k^{2S+2}), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1. \end{aligned} \tag{5}$$

где $\phi_i(t)$, $i = 2s, 2s+2, \ldots, 2S$, являются решениями задач Коши вида

$$\phi_i'(t) = \partial_u v(t, u(t))\phi_i(t) + \check{\psi}_{i+1}(t), \quad \phi_i(0) = 0,$$

в которых $\check{\psi}_{i+1}(t)$ означает коэффициент главного члена локальной ошибки некоторого одношагового метода [1], [4].

Асимптотическое разложение (5) является основным для квадратичной экстраполяции. Предположим, что мы находимся к k-ой точке сетки w_τ и должны найти численное решение в следующей точке t_{k+1} с базовым шагом τ. Возьмем монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_q$ и построим монотонно убывающую последовательность шагов $\tau^1 > \tau^2 > \ldots > \tau^q$, где $\tau^i = \tau/n_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Проинтегрировав теперь исходную задачу (3) на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ неявным методом средней точки (4) q раз с шагом τ^1, τ^2 и т.д., получим q приближенных решений u_{k+1}^1, u_{k+1}^2, ..., u_{k+1}^q в точке t_{k+1}, которые в дальнейшем будем обозначать соответственно $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, ..., $T_{q,1}$. Для этих приближенных решений справедливы разложения

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}) - T_{i,1} = \phi_{2s}(t_{k+1})(\tau^i)^{2s} + \phi_{2s+2}(t_{k+1})(\tau^i)^{2s+2} + \ldots \\ + \phi_{2S}(t_{k+1})(\tau^i)^{2S} + O((\tau^i)^{2S+2}), \quad i = 1, 2, \ldots, q. \end{aligned} \tag{6}$$

Отбрасывая в (6) члены порядка $O(\tau^{2S+2})$, получаем 99 систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n_1^{2s}} & \cdots & -\frac{1}{n_1^{2S}} \\ 1 & -\frac{1}{n_2^{2s}} & \cdots & -\frac{1}{n_2^{2S}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\frac{1}{n_q^{2s}} & \cdots & -\frac{1}{n_q^{2S}} \end{pmatrix} Y(j) = \begin{pmatrix} T_{1,1}^j \\ T_{2,1}^j \\ \vdots \\ T_{q,1}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, 99, \tag{7}$$

относительно вектора неизвестных

$$Y(j) = ((\bar{x}(t_{k+1}))^j, (\phi_{2s}(t_{k+1})\tau_k^{2s})^j, \ldots, (\phi_{2S}(t_{k+1})\tau_k^{2S})^j)^T,$$

где верхний индекс j означает j-ую компоненту соответствующего вектора. Решив (7) 99 раз, находим приближенное решение задачи (3) $\bar{u}(t_{k+1})$ с точностью $O(\tau^{2S+2})$ (см. теорему 9.1 в [1]).

Таблица 1. Затраты машинного времени на решение задачи (2)

Базовый шаг	Число экстраполяций	С методом Гаусса	С алгоритмом прогонки
10^{-3}	0	00:38:00	00:01:02
	1	03:10:03	00:05:06
	2	05:42:15	00:09:29
10^{-4}	0	06:20:12	00:10:59
	1	31:40:22	00:51:18
	2	57:00:00	01:33:06

Описанный выше алгоритм был применен для решению задачи (2). Эта задача решалась при базовых шагах $\tau = 0.001$ и $\tau = 0.0001$. В каждом случае было получено решение в условиях отсутствия экстраполяционного процесса, а также при проведении одной и двух экстраполяций. Таким образом, были получены приближенные решения с точностью $O(\tau^2)$, $O(\tau^4)$ и $O(\tau^6)$. Как показали данные этого вычислительного эксперимента, графически два последних численных решения полностью совпадают. Это означает, что задача (1) решена с достаточной точностью.

Отметим также, что сначала процесс решения задачи (2) с помощью предложенного выше экстраполяционного алгоритма был организован без учета специфической структуры системы (4), т.е. трехдиагональности матрицы Якоби этой системы. Поэтому при использовании метода Ньютона возникающие при этом линейные системы решались обычным методом Гаусса с выбором главного элемента по активной подматрице. Впоследствие эта особенность была принята во внимание, что позволило реализовать механизм прогонки для решения таких систем. Указанная модификация привела к значительному сокращению затрат машинного времени, что и отражено в таблице 1.

Литература

[1] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

[2] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

[3] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы.М.: Наука, 1989.

[4] *Kulikov G.Yu.* Revision of the theory of symmetric one-step methods for ordinary differential equations// Korean J. Comput. & Appl. Math. 1998. V. 5. № 3. P. 579–600.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРШИН ЗЕРЕН АБРАЗИВНОГО ИНСТРУМЕНТА С УЧЕТОМ ЕГО МЕХАНИЧЕСКОГО ИЗНОСА И ЗАГРЯЗНЕНИЯ [7]

Богданов В.В. (УлГТУ), Богданов А.Ю.

1. Вероятностная модель рабочей поверхности абразивного круга

Рассмотрим геометрическую модель рабочей поверхности круга, представленную на рис. 1.

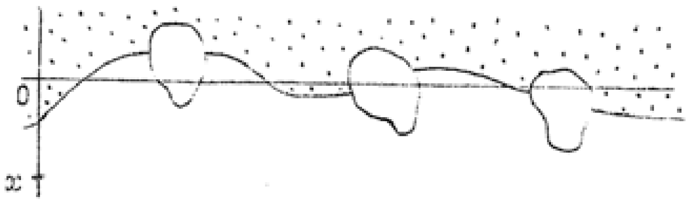

Рис. 1.

Ось Ox здесь направлена по нормали к торцевому сечению круга. За нулевой уровень здесь принято среднее (математическое ожидание) уровня связки [2], при известной плотности распределения уровня связки $f_c(x)$ и соответствующей функции распределения (ф.р.) $F_c(x)$. В первом приближении можно считать, что

$$F_c(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_c}\right) - \text{ф.р. уровня связки,}$$

$$F_a(x) = \Phi\left(\frac{\ln\ x - d_a}{s_a}\right) - \text{ф.р. эквивалентных диаметров зерен круга,}$$

причем истинные математическое ожидание и дисперсия диаметров абразивных зерен равны

$$m_a = e^{d_a + s_a^2/2}, \qquad \sigma_a^2 = e^{2d_a + s_a^2}(e^{s_a^2} - 1) \ ;$$

$f_a(x) = const$ — плотность выступания вершин зерен над уровнем связки; здесь и далее

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt - \text{функция Лапласа.}$$

[7]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант N 98-01-03284.

Таким образом, распределение уровня связки можно считать нормальным (гауссовским), распределение эквивалентных диаметров абразивных зерен круга можно считать логарифмически-нормальным [1], а распределение величины выступания вершин зерен над уравнем связки можно считать равномерным (по крайней мере сразу после правки круга [2]). Более подробно, для произвольной частицы диаметра d_0 плотность выступания

$$f_s^{d_0}(x) = \begin{cases} 1/d_0, & 0 \le x \le d_0 \ ; \\ 0 - \text{иначе.} \end{cases}$$

Однако уже на начальном этапе работы абразивного круга этот закон выступания резко меняется, так как начинается процесс износа круга. Кроме того, межзерновое пространство может забиваться частицами шлама. В итоге это приводит под действием процесса износа или засаливания круга к тому, что наиболее вероятным становится максимальное "заглубление" зерна в связку, а наименее вероятным изначальное закрепление зерна в связке. С другой стороны, при работе круга в режиме самозатачивания будет наблюдаться прямо противоположная картина. Поэтому на первом этапе решения задачи мы не будем конкретизировать закон выступания $f_s(x)$ и получим соответствующие выражения в общем виде.

Чтобы получить выражение для ф.р. $F_{вер}(x) = P\{\text{Вершина зерна} < x\}$ рассмотрим произвольное фиксированное абразивное зерно диаметра d_0. Тогда вероятность выступания именно этого зерна над связкой равна $P_1 = f_a(d_0)dd_0$. Вероятность попадания вершины зерна диаметра d_0 на уровень меньше x равна

$$P_2 = \int_{-\infty}^{x} [f_c(s) \int_{0}^{\min(x-s,d_0)} f_s^{d_0}(t)dt]ds \ .$$

Если теперь перемножить вероятности P_1 и P_2 (в силу независимости случайных событий) и проинтегрировать по всем возможным диаметрам абразивных зерен, то получим значение функции распределения вершин зерен круга

$$F_{вер}(x) = \int_{0}^{+\infty} f_a(d_0)[\int_{-\infty}^{x} [f_c(s) \int_{0}^{\min(x-s,d_0)} f_s^{d_0}(t)dt]ds]dd_0 \ . \qquad (1)$$

Так как результирующей характеристикой процессов износа и/или засаливания круга можно считать среднюю степень выступания зерен над уровнем связки, которая меняется со временем, то естественным является рассмотрение динамической плотности распределения $f_s(x)$.

Определение 1. *Введем функцию распределения*

$$B_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} b_\alpha(s)ds \ ,$$

где плотность

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \ ; \\ (\alpha+1)(1-x)^\alpha \ , \quad 0 \le x \le 1 \ , \quad \alpha > -1 \ ; \\ 0, \ x > 0 \ . \end{cases} \qquad (2)$$

Первые два центральных момента случайной величины $\tilde{\alpha}$, распределенной по закону $B_\alpha(x)$ (то есть ф.р. для $\tilde{\alpha}$ есть $B_\alpha(x)$), можно вычислить, применяя формулу интегрирования по частям

$$M\tilde{\alpha} = (\alpha+1)\int_0^1 x(1-x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+2} \ ,$$

$$M\tilde{\alpha}^2 = (\alpha+1)\int_0^1 x^2(1-x)^\alpha dx = \frac{2}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \ ,$$

$$D\tilde{\alpha} = M\tilde{\alpha}^2 - (M\tilde{\alpha})^2 = \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)} \ .$$

Графики плотности распределения $b_\alpha(x)$ для значений динамического параметра $\alpha = 0; 1/2; 1; 2$ представлены на рис. 2

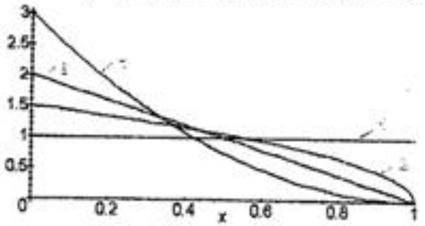

Рис. 2.

Теоретическое исследование величины $\alpha = \alpha(t)$, закон изменения которой может быть описан, например, выражением

$$\alpha(t) = k_1 \ln(1 + t^{k_2}) + \alpha_0 \ ; \quad k_1, \ k_2 \ > \ 0$$

здесь проводиться не будет. График зависимости параметра α от времени обработки, с учетом правки абразивного инструмента,

имеет вид, представленный на рис. 3, где $\alpha_{кр}$ – критическое значение параметра α, при котором необходима правка круга, T – период стойкости круга.

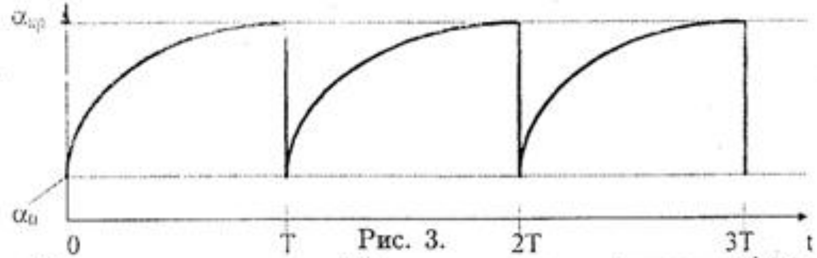

Рис. 3.

Используем выражение (2) для определения функции $f_s^{d_0}(x)$ во внутреннем интеграле формулы (1). В этом случае

$$f_s^{d_0}(x) = \frac{\alpha+1}{d_0}\left(1 - \frac{x}{d_0}\right)^\alpha \ , \qquad (3)$$

где $x \in [0, \ d_0]$, $\ \alpha \in (-1, +\infty)$; причем $\int_0^{d_0} f_s^{d_0}(x)dx = 1$. Тогда внутренний интеграл в выражении (1) можно найти в явном виде :

$$\int_0^{\min(x-s,d_0)} \frac{\alpha+1}{d_0}(1 - \frac{t}{d_0})^\alpha dt = 1 - \left(1 - \frac{\min(x-s,d_0)}{d_0}\right)^{\alpha+1} \ . \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем выражение для динамической функции распределения вершин абразивных зерен круга:

$$F_{вер}^\alpha(x) = \int_0^{+\infty} f_a(d_0)\left[\int_{-\infty}^{x} f_c(s)\left[1 - \left(1 - \frac{\min(x-s,d_0)}{d_0}\right)^{\alpha+1}\right]ds\right]dd_0 \ . \qquad (5)$$

2. Образование нового профиля круга при внедрении абразивных частиц шлама

Вероятностная модель абразивного круга изложена в работах А.В.Королева, Ю.К.Новоселова [2-4]. Однако в этих моделях учитываются в недостаточной степени динамические процессы, происходящие с кругом в процессе эксплуатации (при правке и процессе шлифования). Кроме того, в моделях не учитывается влияние механических примесей, попадающих вместе с СОЖ в зону резания, на изменение вероятностных характеристик абразивного круга.

Примем справедливой гипотезу о том, что механические примеси попадают в зону резания, размещаясь в межзерновом пространстве абразивного круга. В дальнейшем рассмотрении будем учитывать только абразивные частицы, так как пластичные частицы шлама, прилипая к кругу, лишь поднимают уровень связки без образования новых режущих вершин. Это приводит к уменьшению вероятности выступания абразивных зерен на поверхности круга и более интенсивному росту параметра $\alpha = \alpha(t)$ по сравнению со случаем, когда учитывается только износ абразивных зерен круга (см. рис. 3).

Предположим, что нам известны:

1) $F_a(x)$ – ф.р. эквивалентных диаметров абразивных зерен в круге;

2) $F^{\alpha}_{вер}(x)$ – ф.р. вершин зерен на поверхности круга до начала работы;

3) $F_ш(x) = \Phi\left(\dfrac{\ln\ x - d_ш}{s_ш}\right)$ – ф.р. эквивалентных диаметров частиц шлама в СОЖ;

4) $P_з(x) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\ln\ x - d_з}{s_з}\right)$ – вероятность захвата кругом частицы диаметра x .

Наряду с $P_з(x)$ будем также рассматривать функцию $\bar{P}_з(x) = 1 - P_з(x)$, график которой показан на рис. 4 пунктирной линией и имеет вид графика функции распределения (в нашем случае логарифмически-нормального). $\bar{P}_з(x)$ – вероятность частицы шлама диаметра x не попасть в зону резания (не быть захваченной кругом).

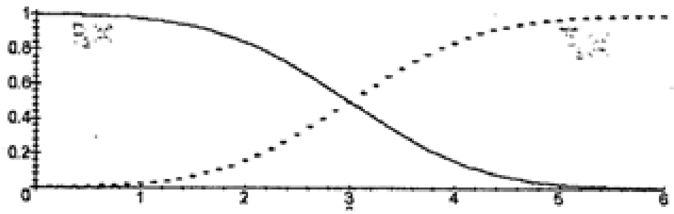

Рис. 4.

Имея приведенные выше исходные данные, определим ряд величин, характеризующих процесс попадания механических примесей в зону резания. Определим среднее значение вероятности размещения частицы механических примесей на поверхности круга

$$\bar{\varepsilon}_в = \int\limits_0^{+\infty} P_з(x)dF_ш(x) = 1 - \Phi\left(\frac{d_ш - d_з}{\sqrt{s_ш^2 + s_з^2}}\right). \qquad (6)$$

Функция распределения частиц шлама, попавших в зону резания имеет вид

$$F_п(x) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_в}\int\limits_0^x P_з(u)dF_ш(u) \ . \qquad (7)$$

Функция распределения частиц шлама, не попавших в зону резания имеет вид

$$F_о(x) = \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_в}\int\limits_0^x \bar{P}_з(u)dF_ш(u) \ . \qquad (8)$$

Используя полученные формулы, можно подсчитать центральные моменты первого и второго порядка: $m_п, \sigma^2_п, m_о, \sigma^2_о$, а также приближенно найти функцию распределения новых вершин абразивного круга.

Схема размещения частицы механических примесей в межзерновом пространстве круга приведена на рис. 5.

Рис. 5.

Введём в рассмотрение случайные величины:

ξ_i – уровни вершин зерен абразивного круга;

d_{0i} – диаметры абразивных зерен круга;

d_i – диаметры внедрившихся в круг частиц шлама, содержащихся в СОЖ.

Будем считать, что соседние абразивные зерна круга выступают над уровнем связки на величины $\tilde{\alpha}_1 \in [0,1]$ и $\tilde{\alpha}_2 \in [0,1]$ от диаметра абразивного зерна, где независимые случайные величины $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ распределены по закону с ф.р. $B_\alpha(x)$. Тогда уровень вершины частицы шлама над связкой круга с учетом двух соседних абразивных частиц круга

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \tilde{\alpha}_1 d_{01} + \xi_2 - \tilde{\alpha}_2 d_{02}) + d_1.$$

Параметр ξ_3 – случайная величина с некоторой функцией распределения $F^{\alpha}_{нов.вер}(x)$. Первые два центральных момента случайной величины ξ_3 находятся следующим образом:

$$m_{нов.вер} = m_{вер} - \frac{m_a}{\alpha+2} + m_n \tag{9}$$

$$\sigma^2_{нов.вер} = \frac{1}{2}\sigma^2_{вер} + \frac{2(\alpha+2)\sigma_a^2 + (\alpha+1)m_a^2}{2(\alpha+2)^2(\alpha+3)} + \sigma_n^2 \tag{10}$$

В первом приближении (вполне достаточном для инженерной практики) можно считать, что новые вершины имеют нормальное распределение с найдеными параметрами. На основе полученных зависимостей можно определить суммарную функцию распределения вершин зерен круга с учетом частиц шлама, размещенных в межзерновом пространстве круга

$$F^{\alpha}_{сум.вер}(x) = \beta \tilde{F}^{\alpha}_{Вер}(x) + (1-\beta)F^{\alpha}_{нов.вер}(x) \tag{11}$$

где $\beta \in (0;\ 1)$ – коэффициент размещения частиц шлама в межзерновом пространстве круга. Математическое ожидание и дисперсию суммарных вершин можно вычислить следующим образом:

$$m_{сум.вер} = \beta m_{вер} + (1-\beta)m_{нов.вер} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{сум.вер} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF^{\alpha}_{сум.вер}(x) - m^2_{сум.вер} = \\ &= \beta \mathrm{M}\xi^2_{вер} + (1-\beta)\mathrm{M}\xi^2_{нов.вер} - (\beta m_{вер} + (1-\beta)m_{нов.вер})^2 = \\ &= \beta\sigma^2_{вер} + (1-\beta)\sigma^2_{нов.вер} + \beta(1-\beta)(m_{вер} - m_{нов.вер})^2\end{aligned} \tag{13}$$

Необходимым и достаточным условием уменьшения шероховатости обработанной поверхности является

$$\sigma^2_{сум.вер} < \sigma^2_{вер}. \tag{14}$$

После подстановки в условие (14) выражения (13) для $\sigma^2_{сум.вер}$ имеем

$$\beta(1-\beta)(m_{вер} - m_{нов.вер})^2 < (1-\beta)(\sigma^2_{вер} - \sigma^2_{нов.вер}).$$

Используя выражения (9) и (10), окончательно получаем условие благоприятного влияния абразивных частиц, содержащихся в СОЖ:

$$\sigma^2_{вер} > 2\beta\left(\frac{m_a}{\alpha+2} - m_n\right)^2 + \frac{2(\alpha+2)\sigma_a^2 + (\alpha+1)m_a^2}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)} + 2\sigma_n^2. \tag{15}$$

Анализ условия (15) показывает, что оно может быть выполнено при введении в СОЖ мелкого однородного шлама с $m_ш \ll m_a$ и $\sigma^2_ш \approx 0$. В этом случае можно прогнозировать *уменьшение шероховатости* обработанной поверхности детали *при загрязнении СОЖ* механическими примесями. Это подтверждается данными экспериментальных исследований, приведенными в работе [5].

В случае невыполнения условия (15), загрязнение СОЖ механическими примесями приводит к ухудшению шероховатости шлифованных поверхностей.

Таким образом, выполненные теоретические исследования опровергают устоявшееся мнение об однозначно отрицательном влиянии загрязняющих СОЖ частиц механических примесей на шероховатость шлифованных поверхностей.

Литература

[1] Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР, 1941, Том XXXI, N 2. С. 99-101.

[2] Королев А.В. Исследование процессов образования поверхностей инструмента и детали при абразивной обработке. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. - 192 с.

[3] Королев А.В., Новоселов Ю.К. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. Часть 1. Состояние рабочей поверхности инструмента. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. - 161 с.

[4] Королев А.В., Новоселов Ю.К. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. Часть 2. Взаимодействие инструмента и заготовки при абразивной обработке. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. - 161 с.

[5] Худобин И.Л. Влияние абразивных порошков-присадок к технологическим жидкостям на эффективность процессов шлифования // Вестник машиностроения, 1986, N 2. С. 54-56.

ON THE SEMIMARTINGALE PRESENTATION PROBLEM FOR THE PROCESSES POSSESSING CORRELATION FUNCTION WITH FINITE SUPPORT [8]

Alexander A. Butov

Let $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ be the stochastic basis generated by the standart Wiener process: $\mathbf{F} = \mathbf{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$.

The problem in general is to state whether $\mathbf{B}$-adapted process $X = (X_t)_{t\geq 0}$ is a semimartingale with respect to the filtration $\mathbf{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ generated by X, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$: $X \in \mathcal{SM}(\mathbf{F}^X, P)$?

Here we present some results concerning this problem.

Let $\mathbf{F} = \mathbf{F}^W = \mathbf{F}^X$ and $X \in \mathcal{SM}(\mathbf{F}, P)$:

$$X_t = X_0 + A_t + m_t,$$

where X_0 is deterministic, $m \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}(\mathbf{F}, P)$ and $A = (A_t)_{t\geq 0}$ is continuous (predictable) process of bounded variation ($A_0 = 0$). Then the process $m = (m_t)_{t\geq 0}$ can be presented as

$$m_t = \int_0^t f_s^* \, dW_s$$

with $\int_0^t (f_s^*)^2 \, ds < \infty$ P-a.s. The following statement (quite obvious) relates first and second variation inequalities for the semimartingale X:

<u>**Statement 1.**</u>

$$\left\{ Var_{(0,T]}(X_\cdot - \int_0^\cdot f_s^* \, dW_s) < \infty \quad P-a.s. \right\} \Rightarrow \left\{ Var^{(2)}_{(0,T]}(X_\cdot - \int_0^\cdot f_s^* \, dW_s) = 0 \quad P-a.s. \right\}.$$

The evident consiquence of this statement is the following

<u>**Statement 2.**</u>

$$\left\{ P\left\{ \inf_{f:\int_0^T f_s^2 ds<\infty} Var^{(2)}_{(0,T]}(X_\cdot - \int_0^\cdot f_s dW_s) > 0 \right\} > 0 \right\} \Rightarrow \left\{ X \notin \mathcal{SM}_{(0,T]}(\mathbf{F}, P) \right\}.$$

[8] The paper is supported by the Russian Fundamental Research Fund (Grant N99-01-00185).

Let $X = (X_t)_{t\geq 0}$ be the Gaussian process of multiplicity one with kernel $\varphi(t,s)$: $X_t = \int\limits_0^t \varphi(t,s)dW_s$ and finite support of correlation function such that $\varphi(t,s) = \Phi(t-s)$, and (for the sake of simplicity) $\Phi(u) = 0$ for all $u \geq 1$:

$$X_t = \int\limits_{t-1}^{t} \Phi(t-s)dW_s, \quad t \geq 1$$

(and $X_t = \int\limits_0^t \Phi(t-s)dW_s$ for $t \in [0,1)$) with $\int\limits_0^1 \Phi^2(s)\,ds < \infty$.

Then the following takes place:

Statement 3.

$$\left\{\int\limits_0^T (Var^{(2)}_{[0,t]}\Phi)\,dt > 0\right\} \Rightarrow \left\{X \notin \mathcal{SM}_{[0,T]}(\mathbf{F},P)\right\}.$$

And finally we present here the analogue of the Girsanov theorem for the process $X = (X_t)_{t\geq 0}$ with $X_t = W_t - W_{t-1}$, $t \geq 1$ ($X_t = W_t$ for $t \in [0,1)$).

Let us denote $\Psi_t(x) = x_t + x_{t-1} + \ldots + x_{t-[t]}$. Then $W_t = \Psi_t(X)$ and for any integrable predictable functionals $b_t(X)$ the following theorem holds:

Theorem.

$$\mathcal{L}_Q\left\{(X_t)_{0<t\leq T}\right\} = \mathcal{L}_{\overline{Q}}\left\{\left(X_t - \int_0^t b_s(X)\,ds\right)_{0\leq t\leq T}\right\} \text{ iff}$$

$$\int_0^T \Psi_s^2(b(X))\,ds < \infty \quad Q- \text{ and } \overline{Q} - a.s.$$

and $d\overline{Q}_t = Z_t(X)dQ_t$ *with*

$$Z_t(X) = \exp\left\{\int\limits_0^t \Psi(b(X))\,d\Psi_s(X) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Psi^2(b(X))\,ds\right\}.$$

О ПОРЯДКАХ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

А.Б.Верёвкин

Пусть G — группа, g — её элемент; *порядком* g называется порядок циклической группы порождённой g, то есть, наименьшее натуральное n, такое что $g^n = e$, где e — единица группы G, это единственный элемент первого порядка. Рассмотрим две последовательности:

$$a_n(G) = \#\{g \in G |\ \text{порядок } g \text{ равен } n\}; \quad b_n(G) = \#\{g \in G |\ g^n = e\}$$

Мы предполагаем в этой работе, что $a_n(G)$ и $b_n(G)$ принимают только конечные целочисленные значения. В этом случае они связаны соотношениями:

$$b_n(G) = \sum_{k|n} a_k(G), \quad a_n(G) = \sum_{k|n} \mu(n/k) b_k(G) \qquad (1)$$

где $\mu(x)$ — функция Мёбиуса. Если G — конечная группа, последовательность $(b_n(G))$ — $|G|$–периодична.

Вопрос: какую информацию о группе G передают $a_n(G)$ и $b_n(G)$?

В данной работе представлены первоначальные соображения по этому поводу, в надежде на то, что они впоследствии смогут привести к исчерпывающему ответу. Я благодарю Е.Е. Демидова за постановку и обсуждение задачи.

Работа частично финансирована программой "Университеты России".

Лемма 1: $b_n(G \times H) = b_n(G) \cdot b_n(H)$

Действительно, $(g,h)^n = (g^n, h^n)$ и тривиальность этого элемента $G \times H$ осуществляется покомпонентно. □

Определим два ряда Дирихле:

$$A(G,s) = \sum_{n\geq 1} a_n(G) n^{-s}, \quad B(G,s) = \sum_{n\geq 1} b_n(G) n^{-s}$$

Лемма 2: $B(G,s) = A(G,s) \cdot \zeta(s)$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Это равенство непосредственно следует из формул (1).

Исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос можно получить, если G — конечная абелева группа. В этом случае G с точностью до изоморфизма определяется своими последовательностями $a_n(G)$ и $b_n(G)$. Это утверждение доказывается ниже методами работы ([M, гл. 2]).

Во-первых, отметим, что в коммутативном случае $b_n(G)$ — порядок подгруппы

$$\mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n} G) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(G,\ \mathbf{Z}(n))$$

здесь $\mathbf{Z}(n)$ — обозначение для циклической группы $\mathbf{Z}/n{\cdot}\mathbf{Z}$.

Лемма 3: Пусть G — абелева группа и n, m взаимно простые натуральные числа: $n \perp m$. Тогда

$$b_n(G) \cdot b_m(G) = b_{nm}(G)$$

то есть, $b_n(G)$ — мультипликативная арифметическая функция n.

Приведу категорное доказательство этой леммы. Для взаимно простых n и m имеется изоморфизм $\mathbf{Z}(nm) \cong \mathbf{Z}(n) \oplus \mathbf{Z}(m)$ (называемый *Китайской Теоремой об остатках*), получаем:

$$\begin{aligned} b_{nm}(G) &= |\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(G,\ \mathbf{Z}(nm))| = |\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(G,\ \mathbf{Z}(n) \oplus \mathbf{Z}(m))| = \\ &= |\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(G,\ \mathbf{Z}(n)) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(G,\ \mathbf{Z}(m))| = b_n(G) \cdot b_m(G) \qquad \square \end{aligned}$$

Если G — конечная абелева группа, тогда

$$b_{p^k}(G) = b_{p^k}(G_p)$$

где G_p — p–примарная компонента G. Она имеет циклическое разложение

$$G_p \cong \bigoplus_{i=1}^{r(p)} \mathbf{Z}(p^{\lambda_i})$$

и определяется диаграммой Юнга $\lambda(p) = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{r(p)} > 0) \vdash \log_p(|G_p|)$ с точностью до изоморфизма. Осталось указать — как по числам $b_n(G)$ вычисляется разбиение $\lambda(p)$.

Прежде найдём b–последовательность для конечной циклической группы:

$$b_n(\mathbf{Z}(m)) = |\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(m),\ \mathbf{Z}(n))| = |\mathbf{Z}(m) \otimes \mathbf{Z}(n)| = |\mathbf{Z}((m,n))| = (m,n)$$

Следовательно,

$$b_{p^i}(\mathbf{Z}(p^m)) = p^{\min(i,m)} \quad \text{и} \quad b_{p^i}(G)/b_{p^{i-1}}(G) = p^{\lambda'_i} \qquad (2)$$

где невозрастающая последовательность $\lambda'_i = \#\{\lambda_j \in \lambda |\ \lambda_j \geq i\}$ образует диаграмму λ' сопряжённую к $\lambda(p)$. Поэтому из второго равенства (2) мы можем выразить $\lambda(p)$. Таким образом, в коммутативном

случае значения $b_n(G)$ на индексах, имеющих различные простые делители, являются избыточными, определяясь по Лемме 3. Видимо, они играют существенную роль, когда G — неабелева группа.

Пример:

Вычислим порядковые характеристики бесконечных групп $\mathbf{Z}(p^\infty) := \varinjlim \mathbf{Z}(p^n)$ и $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong \oplus_p \mathbf{Z}(p^\infty)$. Имеем

$$a_{p^m}(\mathbf{Z}(p^\infty)) = \varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}, \quad a_n(\mathbf{Z}(p^\infty)) = 0, \text{ при } n \neq p^m$$

$$a_n(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \varphi(n)$$

Следовательно, можно получить выражения:

$$A(\mathbf{Z}(p^\infty), s) = (1-p^{-s})/(1-p^{1-s}),\ B(\mathbf{Z}(p^\infty), s) = \zeta(s){\cdot}(1-p^{-s})/(1-p^{1-s})$$

$$A(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, s) = \zeta(s-1)/\zeta(s),\ B(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, s) = \zeta(s-1)$$

ЛИТЕРАТУРА

[M] Макдональд И. *Симметрические функции и многочлены Холла.*– М.:Мир, 1985, 222 с.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНО ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ [9]

Горбунов В.К.

1. Однородные функции полезности. В моделях рационального потребления [1, 2, 3, 4] важное значение играет класс положительно однородных (гомотетичных) индикаторов бинарного отношения предпочтения, или же порядковых функций полезности. Это неотрицательные, непрерывные, монотонно возрастающие, вогнутые функции $u(x)$, определенные на неотрицательном ортанте R^n_+, для которых выполняется свойство:

$$u(tx) = t^{\mu} u(x), \qquad \forall t > 0. \tag{1}$$

Здесь степень однородности $\mu \in (0, 1]$. В случае $\mu = 1$ функции $u(x)$ называются линейно однородными.

В неоклассическом экономическом анализе [1, 2] функции полезности предполагались непрерывно дифференцируемыми и строго выпуклыми, а свойство однородности в тот период явно не использовалось. Это свойство оказалось ключевым в проблеме построения корректных (по И.Фишеру) экономических индексов [5, 6, 7, 8, 9].

Известно, что порядковые функции полезности инвариантны относительно монотонных преобразований. Именно, если $\varphi(t)$ - положительная строго возрастающая непрерывная функция переменной $t \geq 0$ и $u(x)$ - индикатор некоторого отношения предпочтения $\succeq$, то $\varphi(u(x))$ будет индикатором этого же отношения. Из этой инвариантности индикаторов $u(x)$ относительно монотонных преобразований следует, что степень однородности μ в (1) может быть назначена произвольно (в пределах $0 < \mu \leq 1$). В зависимости от целей анализа индикатор $u(x)$ одного и того же отношения предпочтения может выбираться как строго вогнутым ($0 < \mu < 1$), так и линейно однородным ($\mu = 1$), уже нестрого вогнутым. Однако линейно однородные индикаторы $u(x)$ важны для проблемы агрегирования экономической информации.

Известно также, что для дифференцируемых положительно однородных $u(x)$ выполняется соотношение Эйлера:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i = \mu u(x). \tag{2}$$

[9]Работа поддержана грантами РГНФ ($N^{\circ}98-04-02219$) и РФФИ ($N^{\circ}98-06-03360$)

Наиболее известный класс положительно однородных производственных функций, а значит и функций полезности, составляют функции постоянной эластичности замещения (одного фактора другим) [10, 11, 12]. В математике соответствующие функции называются степенными средними. Их удобно представлять в безразмерных относительных величинах $\xi_i = x_i/x_i^0$, где числа x_i^0 представляют типичные значения затрат производственных факторов или уровней продаж. Эти функции имеют вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i^{-\rho} \right)^{\mu/\rho}, \tag{3}$$

и их основные математические свойства обеспечиваются при условиях $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, $\beta_i > 0$, $-1 < \rho \neq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Эластичность замещения одного фактора другим (в произвольно выбранной паре) равна величине $\sigma = 1/(1+\rho)$.

Известно [10], что предельными случаями функции (3) по параметру $\rho \to 0, -1, \infty$ (или $\sigma \to 1, \infty, 0$) являются функции: степенная мультипликативная (Кобба-Дугласа), линейная (товары с абсолютным замещением) и постоянных пропорций (товары со свойством дополнительности).

Более общим классом функций полезности, интересных для анализа проблем потребления, являются квазиоднородные функции, т.е. такие, которые сводятся к однородным степенной заменой переменных [12, 13]. Обобщением функции (3) в этом классе является функция Солоу

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i^{\alpha_i} \right)^{c}.$$

Экономические свойства такой производственной функции хорошо изучены [13] и могут интерпретироваться в терминах теории потребления.

2. Общий вид линейно однородных индикаторов. Для моделирования конкретных рынков и, в особенности, для построения корректных экономических индексов требуется удобное представление всего класса линейно однородных индикаторов предпочтений, т.е. неотрицательных вогнутых линейно однородных функций, определенных в R^n_+. Для теории потребления этот класс эквивалентен всем гомотетичным функциям полезности.

В выпуклом анализе известны такие представления в виде опорных или индикаторных функций выпуклых множеств [15, 14]. Однако они не удобны для целей моделирования и решения обратных задач. Желательно иметь базовый аналитический класс функций, порождающий все однородные индикаторы.

Обозначим

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

и для каждой функции $v(x)$, определенной на симплексе

$$S_n = \{x \geq 0 : \langle x \rangle = 1\}, \tag{4}$$

поставим в соответствие функцию

$$u(x) = \langle x \rangle \cdot v\left(\frac{x}{\langle x \rangle}\right), \tag{5}$$

определенную на всем ортанте R^n_+.

Утверждение. *Любая вогнутая линейно однородная неотрицательная функция $u(x)$, определенная на ортанте R^n_+, может быть представлена в виде (5), где $v(x)$ – некоторая вогнутая неотрицательная функция, определенная на симплексе (4).*

Доказательство. Очевидно, представление (5) справедливо при $v(x) = u(x)$, и функция $v(x)$ как сужение (след) функции $u(x)$ на выпуклое множество S_n сохраняет свойства неотрицательности и вогнутости последней. Остается доказать, что произвольная неотрицательная и вогнутая на S_n функция $v(x)$ порождает в соответствии с (5) вогнутую, неотрицательную и линейно однородную функцию $u(x)$.

Линейная однородность и неотрицательность функции (5) очевидна и требуется доказать, что вогнутость $v(x)$ влечет вогнутость $u(x)$. Для этого будем использовать известные в выпуклом анализе свойства надграфиков выпуклых линейно однородных функций и представления конусов своими сечениями [15, 14]. Поскольку мы исследуем вогнутость неотрицательной функции (5), то вместо ее надграфика требуется рассмотреть неотрицательную часть "подграфика", т.е. множество из R^{n+1}_+

$$K_u = \{(x, \xi) : x \geq 0,\ 0 \leq \xi \leq u(x)\}.$$

Из линейной однородности $u(x)$ следует, что это множество является конусом. С другой стороны, конус K_u можно представить как коническую оболочку некоторого определяющего множества C_u:

$$K_u = \{t(x, \xi) : (x, \xi) \in C_u,\ t \geq 0\}.$$

В качестве C_u можно взять сечение этого конуса – его пересечение с S_n, т.е.

$$C_u = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq u(x),\ x \in S_n\} = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq v(x),\ x \in S_n\}.$$

Это множество, очевидно, выпукло тогда и только тогда, когда функция $v(x)$ вогнута. Утверждение доказано.

Таким образом, формула (5) позволяет представить любой однородный индикатор предпочтений через некоторую вогнутую функцию, определенную и неотрицательную в общем случае лишь на симплексе (4). Это представление также облегчает построение дифференцируемых индикаторов. Действительно, для этого достаточно брать в (5) дифференцируемые порождающие функции $v(x)$. При этом нетрудно убедиться в справедливости формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = v\left(\frac{x}{\langle x \rangle}\right) + \frac{\partial v(x/\langle x \rangle)}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle x \rangle} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v(x/\langle x \rangle)}{\partial x_k} x_k. \tag{6}$$

В представлении (5), очевидно, можно положить $v(x) = u(x)$. При этом применение соотношения Эйлера (2) с $\mu = 1$ для последнего терма равенства (6), дает формулу

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x/\langle x \rangle)}{\partial x_i}.$$

Это соотношение означает инвариантность градиента линейно однородных функций относительно гомотетии.

Литература

[1] Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели: Теоретические вопросы потребления. Изд-во АН СССР, 1963г. С.241-277 (переиздание статьи 1915 г.).

[2] Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.

[3] Шананин А.А. Об агрегации функций спроса // Экономика и математические методы. 1989. Т.25. N6. С.1095-1105.

[4] Горбунов В.К. Индексы рационального потребления //Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер."Финансовая и страховая математика". - М.: Изд. "ТВП". Т.4. Вып.1. 1997. С.66-85.

[5] Аллен Р. Экономические индексы. - М.: Статистика, 1980.

[6] Кевеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. - М.: Финансы и статистика, 1990.

[7] Конюс А.А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономика и математические методы. Т.25. 1989. N3. С.435-444 (переиздание статьи 1924 г.).

[8] Конюс А.А. Метод индексов цен в построении моделей потребления // Статистические методы в исследованиях труда, доходов и потребления. - М.: Наука, 1981. С.144-172.

[9] Samuelson P.A., Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survay and synthesis // The American Economic Review. 1974. V64. N4. P.566-593.

[10] Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математическое моделирование в экономике. -М.: Наука, 1979.

[11] Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование - М.: Наука, 1984.

[12] Клейнер Г.Б. Производственные функции. М.: Финансы и статистика, 1986.

[13] Клейнер Г.Б. Пионтковский Д.И. О характеризации производственных функций Солоу // Экономика и матем. методы. 1999. Т.35. N2. С.124-137.

[14] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.- М.: Наука, 1980.

[15] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М: Мир, 1973.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОМПАКТНЫМ МНОЖЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЙ

Горбунов В.К., Лутошкин И.В.

1. В [1, 2] В.К.Горбуновым был предложен метод параметризации задач ОУ, заключающийся в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции, например, константы или полинома. Функционалы исходной задачи становятся, таким образом, функциями конечного числа параметров, включая переменные узлы разбиения. Для задач с дифференцируемыми функциями были получены формулы вычисления первых производных параметризованных функционалов с помощью сопряженных систем. В [2] с помощью матричных импульсов получены вторые производные по узлам сетки параметризации и полностью проблема вторых производных была решена в работе авторов [3]. Отметим, что проблема численного интегрирования исходной и сопряженных систем здесь разделена с параметризацией управления, что позволяет решать задачу более гибко, чем при обычной конечно-разностной аппроксимации исходной задачи, и во многих случаях иметь аппроксимирующую задачу нелинейного программирования небольшой размерности [4].

В данной статье обосновывается сходимость метода параметризации по числу точек разбиения временного промежутка для случая, когда множество значений параметров управления компактно. Допустимые управления - кусочно непрерывные функции. Они аппроксимируются кусочно постоянными функциями. Сходимость таких аппроксимаций, очевидно, влечет сходимость для более общих классов параметризованных управлений. Отметим, что сходимость разностных аппроксимаций задач ОУ изучена достаточно полно в работе Б.М.Будака, Е.М.Беркович и Е.Н. Соловьевой [5].

2. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \le t \le T; \tag{1}$$

$$u(t) \in U; \tag{2}$$

$$g_l(x(T)) \le 0, \qquad l = 1,\dots,m; \tag{3}$$

$$J = g_0(x(T)) \to \min. \tag{4}$$

Фазовая переменная $x \in R^n$, вектор параметров управления $u \in R^r$. Функции $f: R^n \times R^r \to R^n$, и $g_l: R^n \to R$, $0 \le l \le m$, будем считать непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по всем переменным в некоторых областях соответствующих пространств R^{n+r} или R^n. При этом область дифференцируемости $f(x,u)$ должна охватывать множество допустимых значений управлений U, которое считается компактом. Время окончания процесса T фиксировано или ограничено некоторой величиной T^* сверху. Предполагается, задача (1)-(4) разрешима в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$. Наименьшее значение функционала (4) (значение задачи) обозначим J^*.

Обоснование реализуемости и сходимости метода параметризации требует выполнения следующего условия.

Условие ограниченности (УО). *Каждому допустимому управлению* (2) *отвечает ограниченная траектория* $x(t)$ *системы* (1), *определенная на* $[0,T]$, *и семейство возможных траекторий равномерно ограниченно.*

Этому условию, очевидно, удовлетворяют системы (1), (2), линейные по фазовой переменной и с компактным множеством U. Для нелинейных систем достаточным условием, обеспечивающим выполнение УО, является существование таких чисел A и B, что

$$\|f(x,u)\| \le A\|x\| + B, \quad \forall u \in U. \tag{5}$$

См., например, [6, п.4.1]. Классом управляемых систем, удовлетворяющих УО, но не удовлетворяющих неравенству (5), являются уравнения экономической динамики с вогнутыми по x производственными функциями [7].

3. Метод параметризации [1, 2] заключается в следующем. Введем некоторое разбиение промежутка $[0,T]$ $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N = T$, и на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k)$ фиксируем постоянное управление v^k, т.е. переходим к управлениям вида

$$u^N(t) = v^k \in U, \quad t_{k-1} \le t \le t_k, \quad 1 \le k \le N. \tag{6}$$

При подстановке параметризованного таким образом управления мы получим траекторию $x^N(t)$, зависящую от $M = N(r+1)$ параметров управления $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_0^k, w_1^k, \dots, w_r^k)$:

$$x^N(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \le t < t_k. \tag{7}$$

Каждое допустимое кусочно непрерывное управление $u(t)$ может быть аппроксимировано параметризованным управлением (6) так, что разность $\delta u^N(t) = u(t) - u^N(t)$ будет сколь угодно равномерно малой на отрезке $[0,T]$ за исключением конечного числа интервалов, покрывающих точки разрыва $u(t)$, и сколь угодно малых по суммарной длине. На этих отрезках вариация $\delta u^N(t)$ имеет "игольчатый" характер. Используя теорию возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений [8] и свойства игольчатых вариаций [9], нетрудно показать, что такая аппроксимация управления обеспечивает равномерную аппроксимацию траектории $x(t)$, соответствующей управлению $u(t)$, траекторией вида (7).

Условие ограниченности предполагает интегрируемость задачи Коши (1) для любого допустимого кусочно непрерывного управления. Класс параметризованных управлений (6) является сужением допустимого класса, следовательно, траектории (7) определены на $[0,T]$ для любых наборов параметров $\{w^k\}$ из компактного множества

$$W = \{w^k : w_0^{k-1} \le w_0^k, v^k \in U, k = 1, ..., N; w_0^0 = 0, w_0^N \equiv T \le T^*\}. \quad (8)$$

При этом непрерывная дифференцируемость $f(x,u)$ по всем переменным обеспечивает это же свойство для функций (7).

Введем функции от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$\varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)), \qquad l = 0, 1, \dots, m. \quad (9)$$

Эти функции определены в некоторой области пространства параметров R^M, содержащей компакт (8). Они непрерывны вместе с первыми производными. Исходная задача (1)-(4) с параметризованным управлением (6) переходит в задачу нелинейного программирования (НП): определить

$$\varphi_0^N = \min \varphi_0(w^1, \dots, w^N) \quad (10)$$

при условиях

$$\varphi_l(w^1, \dots, w^N) \le 0, \quad 1 \le l \le m, \quad (w^1, \dots, w^N) \in W. \quad (11)$$

Естественно ожидать, что в силу отмеченной выше возможности аппроксимации допустимых процессов $\{u(t), x(t)\}$ праметризованными процессами $\{u^N(t), x^N(t)\}$ (при достаточно больших N) задача (10),(11) должна аппроксимировать исходную задачу (1)-(4) по крайней мере по функционалу (4). Это действительно так, если отсутствуют терминальные условия (3). Задача минимизации непрерывной

функции (10) на компактном множестве (8) разрешима, и оптимальный процесс $\{u^*(t), x^*(t)\}$ может быть сколь угодно точно аппроксимирован в метрике $L_2[0,T]$ по управлению и равномерно по траектории, откуда следует сходимость по функционалу $\lim_{N\to\infty} \varphi_0^N = J^*$.

Однако при наличии терминальных условий (3) система (11) может оказаться несовместной при любом N.

4. Ослабим терминальные ограничения (3) исходной задачи:

$$g_l(x(T)) \le r, \qquad l = 1, \dots, m, \qquad r \ge 0. \quad (12)$$

Введем следующие обозначения: K_T - множество достижимости системы (1),(2), $\bar{K}_T$ - его замыкание, и

$$S_T(r) = \{x \in K_T : (12)\} \quad (13)$$

- достижимая часть расширенного терминального множества. Очевидно, что замыкание последнего можно представить как

$$\bar{S}_T(r) = \{x \in \bar{K}_T : (12)\}. \quad (14)$$

Условие ограниченности системы (1),(2) обеспечивает ограниченность множества достижимости K_T. Это влечет равномерную компактность семейства (14) при $r \ge 0$. Нам потребуются топологические свойства многозначного отображения $\bar{S}_T$, действующего из R_+ в множество компактных подмножеств из R^n.

Предположение разрешимости задачи (1)-(4) подразумевает непустоту терминального множества $S_T(0)$. Очевидно, из этого следует непустота множеств (14) при любом $r > 0$. Кроме того, если $0 \le r' < r$, то $S_T(r') \subset S_T(r)$. Это свойство называется неубывающей по включению монотонностью отображения S_T. Очевидно, это же имеет место и для отображения $\bar{S}_T$.

Введем величину отклонения множества A от множества B некоторого метрического пространства [10]

$$\beta(A,B) = \sup\{\rho(u,B) : u \in A\}.$$

Из вложения $\bar{S}_T(r') \subset \bar{S}_T(r)$ следует, что $\beta(\bar{S}_T(r'), \bar{S}_T(r)) = 0$. Отсюда следует, что для любого $r_0 \ge 0$

$$\lim_{r \downarrow r_0} \beta(\bar{S}_T(r_0), \bar{S}_T(r)) = 0.$$

Это равенство означает [10] полунепрерывность снизу многозначного отображения $\bar{S}_T(r)$ в точке r_0 справа. С другой стороны, из непрерывности функций $g_l, 1 \le l \le m$, и компактности множества $\bar{K}_T$ следует [10, лемма 1.3] полунепрерывность сверху отображения $\bar{S}_T$, т.е. выполнение симметричного предела

$$\lim_{r\to r_0} \beta(\bar{S}_T(r), \bar{S}_T(r_0)) = 0.$$

Одновременная полунепрерывность многозначного отображения снизу и сверху означает непрерывность по Хаусдорфу, т.е. непрерывность в метрике $\max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$. Следовательно, отображение $\bar{S}_T(\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу в точке r_0 справа.

Приближенным решением исходной задачи будем считать поиск при достаточно малом значении $r > 0$ допустимого управления, приближающего с заданной точностью величину

$$J(r) = \inf\{g_0(x(T)) : x(T) \in S_T(r)\}. \qquad (15)$$

Такое понятие приближенного решения корректно, если значения $J(r)$ конечны при достаточно малых $r > 0$ и

$$\lim_{r\downarrow 0} J(r) = J^*. \qquad (16)$$

В соответствии с терминологией [5] (где рассмотрена проблема конечно-разностной аппроксимации задач ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями) будем называть задачу (1)-(4), для которой справедливо (16), *устойчивой по расширению терминального множества.*

Теорема 1. *Если задача ОУ* (1) – (4) *удовлетворяет условию ограниченности, то функция* $J(r)$ *определена для всех* $r \ge 0$ *и является невозрастающей и непрерывной справа.*

Доказательство. Очевидно, инфимум числового множества совпадает с инфимумом его замыкания, поэтому величина (15) может быть определена как

$$J(r) = \inf\{g_0(x(T)) : x(T) \in \bar{S}_T(r)\}. \qquad (*)$$

В силу компактности множеств $\bar{S}_T(r)$ эта величина определена и конечна при любых $r \ge 0$. Из свойства неубывающей по включению монотонности отображения $\bar{S}_T$ следует невозрастание функции $J(r)$.

В [11, гл.3,1,пр.21] показано, что для задачи максимизации полунепрерывной сверху функции на значениях компактного и полунепрерывного сверху многозначного отображения ее экстремальное значение является полунепрерывной сверху функцией. Повторяя соответствующее доказательство, нетрудно показать, что экстремальное значение (*) задачи минимизации непрерывной функции $g_0(x)$ на значениях полунепрерывного сверху отображения $\bar{S}_T$ является полунепрерывной снизу функцией. Это значит, что для любых значений $r_0 \ge 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых $r \ge 0$ и $|r - r_0| \le \delta$ будет выполнено

$$J(r) \ge J(r_0) - \varepsilon.$$

Легко видеть, что это свойство в силу установленного невозрастания $J(r)$ влечет непрерывность справа в r_0. Теорема доказана.

Неравенство (16) означает непрерывность справа в точке $r = 0$. Таким образом, в силу теоремы 1 задача ОУ (1)-(4), удовлетворяющая условию ограниченности, устойчива по расширению терминального множества.

5. Аналогично расширим ограничения (11) редуцированной задачи (10),(11). Будем рассматривать задачу минимизации (10) на множестве параметров управления

$$Q^N(r) = \{(w^1, \dots, w^N) \in W : \varphi_l(w^1, \dots, w^N) \le r, 1 \le l \le m\}, \qquad (17)$$

$r \ge 0$. Значение этой задачи

$$\varphi_0^N(r) = \min_{Q^N(r)} \varphi_0(w^1, \dots, w^N). \qquad (18)$$

Эта задача при любом $r > 0$ и достаточно большом $N(r)$ разрешима.

Если для исходной задачи (1)-(4) выполнено УО, то определена конечная величина (18), аппроксимирующая при достаточно малом $r > 0$ значение J^*. При этом для любого числа $\varepsilon > 0$ существует процесс $\{u^{r\varepsilon}(t), x^{r\varepsilon}(t)\}$, удовлетворяющий условию

$$0 \le g_0(x^{r\varepsilon}(T)) - J(r) \le \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19)$$

Для такого процесса при достаточно большом $N(r,\varepsilon) > N(r)$ существует параметризованный процесс $\{u^{N\varepsilon}(t), x^{N\varepsilon}(t)\}$, определяемый набором параметров $\{w^{1\varepsilon}, \dots, w^{N\varepsilon}\}$ из множества (17), для которого

$$|g_0(x^{N\varepsilon}(T)) - g_0(x^{r\varepsilon}(T))| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это неравенство вместе с (19) дает оценку

$$g_0(x^{N\varepsilon}(T)) \leq J(r) + \varepsilon. \tag{20}$$

Левая часть здесь не меньше значения задачи (18), которое, в свою очередь, не превосходит значения (15), т.е.

$$J(r) \leq \varphi_0^N(r) \leq g_0(x^{N\varepsilon}(T)).$$

Учитывая (20), получаем оценку

$$J(r) \leq \varphi_0^N(r) \leq J(r) + \varepsilon. \tag{21}$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Если задача* (1) – (4) *удовлетворяет условию ограниченности, то для любых положительных чисел r и ε существует такое число $N = N(r, \varepsilon)$, что параметризованная задача* (17), (18) *разрешима и ее значение $\varphi_0^N(r)$ удовлетворяет неравенствам* (21).

Таким образом, условие ограниченности задачи ОУ (1)-(4) обеспечивает ее устойчивость по расширению терминального множества (теорема 1) и возможность сколь угодно точной аппроксимации разрешимой задачи параметризованной конечномерной задачей (17),(18) как по терминальным условиям (3), так и по функционалу (4). Другими словами, при выполнении УО метод параметризации позволяет получить приближенное решение исходной задачи оптимального управления. Для этого в общем случае следует решать расширенную задачу НП (17),(18).

Остановимся на проблеме выбора параметра расширения r. Если терминальные условия (3) не слишком стеснительны, то естественно ожидать разрешимость задачи НП (10),(11), соответствующей $r = 0$. Но если априорно трудно выбрать умеренное число N, определяющее размерность аппроксимирующей задачи, и допустимую точку системы ограничений (11), то можно применить релаксационно-штрафной метод [12]. Для этого переменная $r \geq 0$ назначается дополнительным параметром оптимизации и вместо задачи (18) ставится задача минимизации на множестве (17) "штрафного" функционала $\tilde{\varphi}_{0C}(w^1, \ldots, w^N, r) = \varphi_0(w^1, \ldots, w^N) + Cr^2$ при достаточно большом $C > 0$. Этот прием позволяет избежать необоснованного загрубления исходной задачи и упростить выбор допустимой точки системы ограничений (17).

Литература

[1] Горбунов В.К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // ЖВМиМФ 1978. Т.18. N5. С. 1083-1095.

[2] Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // ЖВМиМФ 1979. Т.19. N2. С. 292-303.

[3] Горбунов В.К., Лутошкин И.В. Вторые производные параметризованной задачи оптимального управления// Ученые записки УлГУ. Фунд. пробл. матем. и механ. Выпуск 3, 1997, С.17-24.

[4] Лутошкин И.В. Численное решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями// Ученые записки УлГУ. Фунд. пробл. матем. и механ. Выпуск 5, 1998, С.85-91.

[5] Будак Б.М., Беркович Е.М., Соловьева Е.П. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // ЖВМиМФ 1969. Т.9. N3. С. 522-547.

[6] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.:Наука,1972.

[7] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

[8] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

[9] Алекссев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.:Наука, 1979.

[10] Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

[11] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.:Мир,1988.

[12] Горбунов В.К. Релаксационно-штрафной метод решения систем неравенств// Проблемы технической кибернетики: Тезисы докл. XII межд.конф. Часть I. М.: Изд.Моск.унив., 1999, С.57.

О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

Е.В. Дулов

Будем рассматривать задачу решения матричного полиномиального уравнения в классической записи:

$$AX + AX^2 + \ldots + AX^n = C, \; A, C \in \mathbf{R}^{m\times n}, \; X \in \mathbf{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

которая может быть представлена в виде системы

$$\begin{bmatrix} AX \\ AX^2 \\ \vdots \\ AX^{n-1} \\ AX^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$A\hat{X}^i = C_i \;, \; i = 1, 2, \cdots, n \;, \; \sum_{i=1}^{n} C_i = C \;, \tag{3}$$

а $\hat{X}$ — некоторое точное решение уравнения (1) в действительных числах

Определение. *Набор матриц $\{C_1, \cdots, C_n\} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ будем называть разбиением для уравнения (1), если для них выполняется $\sum_{i=1}^{n} C_i = C$.*

Представление (2) полностью определяется разбиением (3). Иными словами, произвольное решение (2) будет являться корнем уравнения (1), в то время как обратное утверждение верно только для соответствующего разбиения. Будем рассматривать задачи, в которых задано некоторое начальное приближение X_0, а алгоритмы решения задач с некоторым начальным разбиением рассматриваются в [1].

При выполнении разбиения естественно строить его таким образом, чтобы ошибка приближения к C была минимальна. Для этого разумно варьировать либо первый член (пропорциональный AX_0), либо последний (пропорциональный AX_0^n). Пусть Δ_1 — ошибка замены AX_0, равная

$$\Delta_1 = C - A\sum_{i=2}^{n} X_0^i \;,$$

а Δ_n — ошибка замены AX_0^n, равная

$$\Delta_n = C - A\sum_{i=1}^{n-1} X_0^i \;.$$

Тогда, сравнивая $\|\Delta_1\|$ и $\|\Delta_n\|$ будем выбирать

$$\begin{cases} \{\Delta_1, AX_0^2, \ldots, AX_0^n\}, & \text{при } \|\Delta_1\| < \|\Delta_n\| \\ \{AX_0, \ldots, AX_0^{n-1}, \Delta_n\}, & \text{при } \|\Delta_1\| \geq \|\Delta_n\| \end{cases} \tag{4}$$

Вычислим разность $\Delta_n - \Delta_1$ и оценим ее норму:

$$\|\Delta_n - \Delta_1\| = \|A(X_0^n - X_0)\| \leq \|AX_0\| \cdot |\|X_0^{n-1}\| - \|I\|| \;.$$

Для теоретической оценки воспользуемся спектральной матричной нормой, для которой верно $\|I\|_2 = 1$:

$$\|\Delta_n - \Delta_1\|_2 \leq \|AX_0\|_2 \cdot |\|(X_0^{n-1}\|_2 - 1| \;.$$

Так как $\rho(a) \leq \|A\|_2$ и квадратичная функция возрастает на положительной полуоси, то при $\rho(X_0) < 1$ верно

$$|\|(X_0^{n-1}\|_2 - 1| = 1 - \|(X_0^{n-1}\|_2$$

и $\|\Delta_n\| < \|\Delta_1\|$. Если же $\rho(X_0) \geq 1$, то

$$|\|(X_0^{n-1}\|_2 - 1| = \|(X_0^{n-1}\|_2 - 1$$

и $\|\Delta_1\| < \|\Delta_n\|$.

Данный вывод хорошо согласуется с очевидным фактом, что при $\rho(X_0) < 1$ погрешность вносимая элементом разбиения при степени n минимальна. И наоборот, если $\rho(X_0) \geq 1$, то наименьшую погрешность вносит член с наименьшей степенью.

Кроме того, чтобы решение системы с задаваемым (4) разбиением совпадало с решением исходного уравнения (1), левая часть матричного уравнения должна формироваться без учета того, какой из элементов вносит наибольшую погрешность, то есть:

$$\begin{bmatrix} A \\ AX_0 \\ \vdots \\ X_0^{n-1} \end{bmatrix} \times \hat{X} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Близость решения к истинному корню ограничивается самим разбиением, то есть начальным значением X_0. Предлагается использовать итеративный алгоритм, в котором на каждой итерации построение нового разбиения будет производиться по схеме (4). При этом для решения системы (5) с разбиением (4) необходимо выполнение следующих условий:

1) $\operatorname{rank}[A^T|X^TA^T|\dots|X^{n-1^T}A^T]^T = n$.

2) $\operatorname{rank}\left(X^TC_1 + \sum_{i=2}^{n} C_{i-1}^T C_i\right) = n$.

Оценим ошибки уравнения (5) для некоторого начального приближения и решения по методу наименьших квадратов. Выражение (5) с учетом разбиения (4) соответствует исходному представлению

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_0^i\right)\hat{X} = C + \Delta_{MHK},$$

где Δ_{MHK} — ошибка МНК, включающая в себя (фактически) ошибку численного метода.

Преобразуем это выражение:

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_0^i\right)(\hat{X} - X_0 + X_0) = C + \Delta_{MHK}$$

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_0^i\right)(\hat{X} - X_0) = C - A\sum_{i=1}^{n} X_0^i + \Delta_{MHK}$$

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_0^i\right)(\hat{X} - X_0) = \Delta_{Pa\text{з}\delta} + \Delta_{MHK} \ . \tag{6}$$

Здесь $\Delta_{Pa\text{з}\delta} = C - A\sum_{i=1}^{n} X_0^i$ — ошибка разбиения, определяемая выбором начального приближения X_0.

Очевидно, что если предлагаемый итерационный процесс сходится к решению X, то $\lim_{\hat{X}\to X}\Delta_{Pa\text{з}\delta} = 0$. В любом случае, формула (6) означает следующее:

Утверждение 1. *Если итерационный процесс (5), (4) сходится, то он имеет линейную скорость сходимости*

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_0^i\right)(\hat{X} - X_0) = \Delta_{Pa\text{з}\delta} + \Delta_{MHK} \ .$$

Замечание. *Так как разность решений на двух соседних шагах $\hat{X} - X_0$ является функцией ошибки итерационного метода, то контролируя ее, мы имеем однозначный критерий, позволяющий оценить точность нашего решения $\varepsilon = \|\Delta_{Pa\text{з}\delta} + \Delta_{MHK}\|$.*

Проверка сходимости итерационного процесса выполнена для различных невырожденных X_0, однако число итераций, необходимых для достижения приемлемой точности (порядка 10^{-3}), варьировалось

в очень широком интервале, что делает крайне важным дальнейшее теоретическое исследование вопросов сходимости предложенного метода.

Если $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}C = m$, то решение (1) можно заменить решением эквивалентной задачи, а именно:

$$X + X^2 + \dots + X^n = S, \quad S = A^+C \ , \tag{7}$$

где X и S — квадратные $n \times n$ матрицы. Так как нас интересует получение невырожденных решений данного уравнения, то для его невырожденности необходимо выполнение условие невырожденности матрицы $S = A^+C$. В условиях задачи это неверно, так как $\operatorname{rank}A^+C = m$.

Чтобы преодолеть это ограничение, воспользуемся [2] обобщенным решением $S = A^+C + (I - A^+A)E$, E— некоторая матрица. Это выражение можно записать в другом виде

$$S = [A^+|I - A^+A] \times \begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix} .$$

Учитывая свойства ранга и то, что $\operatorname{rank}[A^+|I - A^+A] = n$, получаем, что для невырожденности S необходимо и достаточно выбрать матрицу E так, чтобы $\operatorname{rank}[C^T|E^T]^T = n$.

Данное условие легко выполнить, если рассматривать E как блочную матрицу (по строкам), один из блоков которой, размером $n - m \times n$ является базисом нуль-пространства матрицы (линейного оператора) C, а второй блок, размера $m \times n$, может быть произвольным.

В частности, этому условию удовлетворяет матрица Q из разложения $QR = C^T$.

Более того, переход к невырожденной системе позволяет описать все семейство решений уравнения (7), используя спектральное разложение матрицы S, а именно

Утверждение 2. *Невырожденное решение уравнения*

$$X + X^2 + \dots + X^n = S \ ,$$

где матрицы X, S – квадратные $n \times n$, $\operatorname{rank}S = n$, описывается уравнением $X = T\hat{\Lambda}T^{-1}$, где T — матрица из собственных векторов S, $\hat{\Lambda}$ — диагональная матрица. Величины $\lambda_i, i = 1 \dots n$ являются *решениями уравнения* $\lambda_i+\lambda_i^2+\cdots+\lambda_i^n - \lambda_{Si}$. *Здесь* λ_{Si} — *собственные значения матрицы* S.

Замечание. *Утверждение 2 описывает семейство решений (1) над полем комплексных чисел для некоторого матричного параметра* E, *выбираемого так, что в (1) матрица* $S(E)$ *невырождена.*

Предметом дальнейшего исследования является выбор такого матричного параметра E, чтобы все собственные значения $S(E)$ были вещественны.

Список литературы

[1] *E.V. Dulov* Algorithms for solving matrix polynomial equations of a special form// Korean Journal of Comp.and App. Math., будет опубликована в 2000г.

[2] *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. -М.:Наука, 1986, -232 с.

[3] *Хорн Р., Джонсон К.* Матричный анализ. -М.:Мир ,1989. - 655с.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЕ КАЛМАНА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ФИЗИЧЕСКИМ БЕЛЫМ ШУМОМ.

Д.А.Жданов

1. Пусть в схеме серий для $n = 1, 2, \ldots$ на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{0\le t\le T}, \mathbf{P})$, $T \in \mathbf{R}^+$ определен двумерный частично наблюдаемый процесс (x^n, y^n), где $x^n = (x_t^n)_{0\le t\le T}$ ненаблюдаемая, а $y^n = (y_t^n)_{0\le t\le T}$ -наблюдаемая компоненты. Задача оптимальной фильтрации для частично наблюдаемого процесса (x^n, y^n) состоит в построении для каждого момента t, $0 \le t \le T$, оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки некоторой $\mathcal{F}_t^n$ - измеримой функции h_t, зависящей от (x^n, y^n), по результатам наблюдений y_s^n, $s \le t$ (для фиксированного параметра n).

Классическими являются результаты, когда процессы x^n и y^n – процессы диффузионного типа (см., например, [1]). В данной заметке рассматривается задача построения асимптотически оптимальной (то есть сходящейся к оптимальной в среднеквадратическом смысле при $n \to \infty$) оценки для ненаблюдаемой компоненты x^n в схеме, порождаемой процессами случайного блуждания в случайных средах функционального типа. Ранее такого рода задача рассматривалась для процессов случайного блуждания в случайной среде $\{\lambda(i), \mu(i), i \in \mathbf{Z}\}$, [2].

2. Перейдем к описанию схемы Калмана для процессов случайного блуждания в случайных средах функционального типа. Пусть $F(x,y) = F(x,y;\omega)$ и $G(x,y) = G(x,y;\omega)$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$, ограниченные стационарные в узком смысле эргодические измеримые процессы. Будем считать выполненными для процессов F и G следующие условия:

$$\mathbf{E}F(0,0) = \mathbf{E}G(0,0) = 0, \tag{1}$$

и для любого $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ с $\beta_i \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ такого, что $|\beta| \le 3$ ($|\beta| = \beta_1 + \beta_2$)

$$\mathbf{E}\left\{\left|\sup_{|x|\le M} |D^\beta G(x,y,\omega)|\right|^{max(|\beta|,d)}\right\} < \infty, \tag{2}$$

где $M < \infty$, $M \in \mathbf{R}_+$, $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1}x\partial^{\beta_2}y}$. Кроме того будем предполагать, что

$$\int_0^\infty \alpha(t,M)^{\frac{1}{16}}dt < \infty \tag{3}$$

с $\alpha(t,M) = \sup|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A\cap B)|$, $t \geq 0$, где sup берется по всем множествам $A \in \sigma\{(F(u),G(u)), -\infty < u \leq 0\}$ и $B \in \sigma\{(F(u),G(u)), u \geq t\}$ (подробнее об этом см. стр. 100 – 101 [3]).

Для $n = 1,2,\ldots$ определим процессы $x^n = (x_t^n)_{0\leq t\leq T}$ и $y^n = (y_t^n)_{0\leq t\leq T}$ с

$$\begin{cases} x_t^n = \sqrt{n}\int_0^t F(ns+x_s^n, ns+y_s^n)ds + \int_0^t x_s^n a_s ds + \int_0^t y_s^n h_s ds, \\ y_t^n = \sqrt{n}\int_0^t G(ns+x_s^n, ns+y_s^n)ds + \int_0^t x_s^n A_s ds + \int_0^t y_s^n H_s ds, \end{cases} \tag{4}$$

где a_s, A_s, h_s, H_s – детерминированные функции такие, что

$$\int_0^T \left[a_t + A_t^2 + h_t + H_t^2\right]dt < \infty. \tag{5}$$

Условия (1)-(3) определяют существование слабого предела для процесса (x^n, y^n), условие (5) является "классическим" при выводе уравнений оптимальной нелинейной фильтрации.

Определим также процессы $x = (x_t)_{0\leq t\leq T}$ и $y = (y_t)_{0\leq t\leq T}$ с

$$\begin{cases} x_t = \sum_{i=1}^2 c_i^x + b^x t + \int_0^t x_s a_s ds + \int_0^t y_s h_s ds, \\ y_t = \sum_{i=1}^2 c_i^y + b^y t + \int_0^t x_s A_s ds + \int_0^t y_s H_s ds, \end{cases} \tag{6}$$

где c_i^x, c_i^y, b^x, b^y – константы такие, что

$$\begin{pmatrix} c_1^x & c_2^x \\ c_1^y & c_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}^{1/2}, \tag{7}$$

с

$$\lambda_{11} = \int_0^\infty \mathbf{E}F(u,u)F(0,0)du, \qquad \lambda_{22} = \int_0^\infty \mathbf{E}G(u,u)G(0,0)du,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \int_0^\infty \left[\mathbf{E}F(u,u)G(0,0) + \mathbf{E}F(0,0)\mathbf{E}G(u,u)\right]du$$

$$\begin{aligned} b^x &= \int_0^\infty \left[\mathbf{E}F(0,0)\tfrac{\partial F}{\partial x}(u,u) + \mathbf{E}G(0,0)\tfrac{\partial F}{\partial y}(u,u)\right]du, \\ b^y &= \int_0^\infty \left[\mathbf{E}F(0,0)\tfrac{\partial G}{\partial x}(u,u) + \mathbf{E}G(0,0)\tfrac{\partial G}{\partial y}(u,u)\right]du. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\pi(y^n) = (\pi_t(y^n))_{0\leq t\leq T}$ с

$$\pi_t(y^n) = \int_0^t [b^x + a_s\pi_s + h_s y_s^n]ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{c_1^x c_1^y + c_2^x c_2^y + \gamma_s A_s}{(c_1^y)^2 + (c_1^y)^2}\left[dy_s^n - (b^y + A_s\pi_s + H_s y_s^n)ds\right], \tag{9}$$

$$\dot{\gamma}_t = 2a_t\gamma_t - \frac{\left[c_1^x c_1^y + c_2^x c_2^y + \gamma_t A_t\right]^2}{(c_1^y)^2 + (c_1^y)^2} + (c_1^x)^2 + (c_1^x)^2, \quad \gamma_0 = 0. \tag{10}$$

3. Основной результат этой заметки формулируется следующим образом.

Теорема. *При $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость распределений*

$$(x^n, y^n, \pi(y^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (x, y, \pi(y)), \tag{11}$$

где $\pi(y)$ – оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка для $x = (x_t)_{0\leq t\leq T}$ (то есть $\pi_t(y) = \mathbf{E}(x_t|\mathcal{F}_t^y)$).

Заметим, что $\pi(y) = (\pi_t(y))_{0\leq t\leq T}$ определяется аналогично формуле (9).

Доказательство. Сходимость (11) по теореме 5.1 [4] следует из слабой сходимости распределений при $n \to \infty$

$$(x^n, y^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (x, y), \tag{12}$$

Докажем сходимость (12). Обозначим

$$X_t^n = \begin{pmatrix} x_t^n \\ y_t^n \end{pmatrix}; \qquad R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix}; \qquad P(s) = \begin{pmatrix} a_s & h_s \\ A_s & H_s \end{pmatrix}$$

$$\overline{W}_s = \sqrt{n}\begin{pmatrix} F(ns+x_s^n, ns+y_s^n) \\ G(ns+x_s^n, ns+y_s^n) \end{pmatrix}.$$

Тогда (4) эквивалентно уравнению

$$dX_t^n = d\overline{W}_t + P(t)X_t^n dt, \qquad X_0^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Уравнение (13) имеет решение

$$X_t^n = e^{\int_0^t P(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^s P(u)du}\sqrt{n}R(X_s^n + nls)ds, \tag{14}$$

где l – единичный вектор. Определим процесс $Y^n = (Y^n_t)_{0\le t\le T}$ с

$$Y^t_n = \left(\exp\left\{\int\limits_0^t P(s)ds\right\}\right)^{-1} \cdot X^n_t$$

Тогда

$$Y^n_t = \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t P(u)du} \sqrt{n} R\left(\left(e^{\int\limits_0^s P(u)du}\right)^{-1} \cdot Y^n_s + nls\right) ds. \qquad (15)$$

Пусть $\{a^k_s\}_{k=1,2,\dots}$, $\{A^k_s\}_{k=1,2,\dots}$, $\{h^k_s\}_{k=1,2,\dots}$ и $\{H^k_s\}_{k=1,2,\dots}$, $0 \le s \le T$ – последовательности кусочно-постоянных функций (принимающих значения где $\overline{a}^k_i$, $\overline{A}^k_i$, $\overline{h}^k_i$, $\overline{H}^k_i$, $i = 1, 2, \dots, k+1$ на интервалах разбиения $0 = t_0 \le \dots \le t_k = T$ отрезка $[0, T]$), аппроксимирующих соответствующие функции a_s, A_s, h_s и H_s. Обозначим

$$P^k_i = \begin{pmatrix} \overline{a}^k_i & \overline{h}^k_i \\ \overline{A}^k_i & \overline{H}^k_i \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Delta Y^{t_i}_n = Y^{t_i+1}_n - Y^{t_i}_n$. Тогда

$$Y^t_n = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta Y^{t_i}_n. \qquad (16)$$

Обозначим $\Delta Y^{t_i}_{n,k} = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-P^k_i \cdot lt_i} \sqrt{n} R\left(\left(e^{P^k_i \cdot lt_i}\right)^{-1} \cdot Y^n_s + nls\right) ds$. Определим процесс $Y^{n,k} = (Y^{n,k}_t)_{0\le t\le T}$ с $Y^{n,k}_t = \sum\limits_{i=1} k - 1\Delta Y^{t_i}_{n,k}$. Очевидно, что

$$\sup_{0\le t\le T} |Y^{n,k}_t - Y^n_t| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \qquad k \to \infty. \qquad (17)$$

Пусть $Z^n_{t_i} = \left(e^{P^k_i \cdot lt_i}\right)^{-1} \cdot Y^{n,k}_{t_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда процесс $Z^n = (Z^n_t)_{0\le t\le T}$ можем определить следующим образом $Z^t_n = \sqrt{n} \int\limits_0^t R(Z^n_s + nls)ds$. По теореме 1 [3] в силу условий (1)-(3) имеет место слабая сходимость распределений при $n \to \infty$

$$Z^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \qquad (18)$$

где $Z = (Z_t)_{0\le t\le T}$ с $Z_t = \Lambda^{1/2} W_t + B \cdot t$, где $W = (W_t)_{t\ge 0}$ – двумерный винеровский процесс с независимыми компонентами. Из (17) - (18) получаем

$$(Y^n_t)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_t)_{0\le t\le T}, \qquad (19)$$

Оглавление

Ученые записки
Ульяновского государственного университета

Серия
Фундаментальные проблемы математики и механики

Выпуск 1(6)

Под редакцией академика РАЕН, проф. *А.С.Андреева*

Оформление обложки *Р.А.Воденина*

Подписано в печать 17.11.99. Формат 60x84/16.
Усл.печ.л. 5,45. Уч.-изд.л. 5,5. Тираж 100 экз. Заказ №136/ 672

Отпечатано с оригинал-макета
в подразделении оперативной полиграфии
Ульяновского государственного университета
432700, г.Ульяновск, ул.Л.Толстого, 42