Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2017, № 1, с.54-60.

Поступила: 09.06.2017
Окончательный вариант: 05.08.2017

УДК 519.218.5

Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с относительным приоритетом в обслуживании

Савинов Ю. Г. [1,*]***, Исмаилова М.В.*** [1]

[*] uras@aport.ru
[1] УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с относительным приоритетом в обслуживании заявок в терминах точечных процессов и их компенсаторов. Показана сходимость модельных оценок основных характеристик СМО к известным в частных случаях теоретическим значениям.

Ключевые слова: *относительный приоритет, система массового обслуживания, семимартингальное описание, точечный процесс, компенсатор.*

Введение

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из n одинаковых приборов, в которую поступают заявки двух типов. Заявки первого типа имеют относительный приоритет. То есть, если нет свободных приборов, но есть заявка второго типа на обслуживании, то заявка первого типа ожидает окончания обслуживания этой заявки и после этого встает на приоритетное обслуживание. Если все приборы заняты, то поступившая заявка второго типа теряется. Заявка первого типа теряется, если в момент поступления этой заявки в СМО все приборы заняты обслуживанием заявками этого же типа. Заявка первого типа теряется так же, если в СМО уже n заявок первого типа ожидают окончания обслуживания.

Предположения и допущения модели.

1) поступающие в систему заявки 1 и 2 типа образуют простейшие потоки с интенсивностями $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$;

2) длительность обслуживания заявок 1 и 2 типа распределена по экспоненциальному закону с интенсивностями $\mu_1 \geq 0$ и $\mu_2 \geq 0$;
3) приборы – идентичные, то есть распределение времени обслуживания заявок в приборах одинаково;
4) дисциплина обслуживания – в естественном порядке: заявка, поступившая в систему, принимается на обслуживание, если есть хотя бы один свободный прибор. Если заявка застала свободными несколько приборов, то она направляется в один из них случайным образом.

1. Математическая модель

Опишем модель СМО с относительным приоритетом в обслуживании заявок для *n* приборов (см. рис.1).

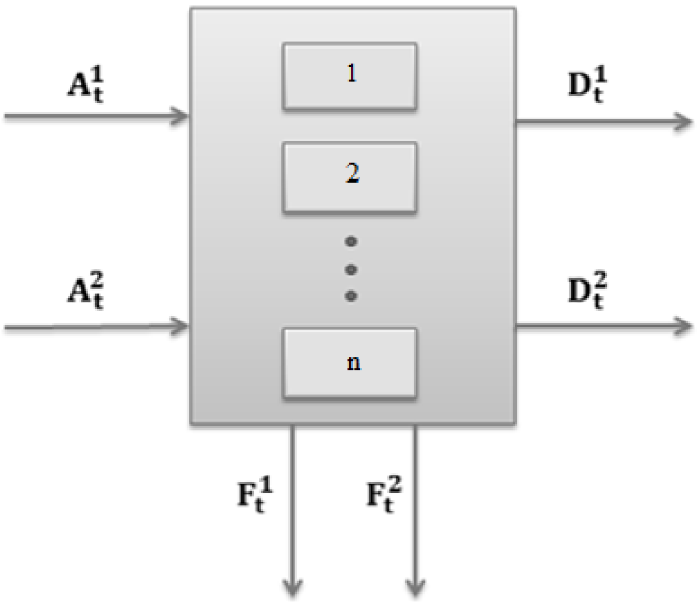

Рис.1. Схема многоканальной СМО с дообслуживанием для **n** приборов.

Для описания СМО с относительным приоритетом введем считающие процессы:

$A^i = (A_t^i)_{t\geq 0}$ - число заявок *i-го* типа (*i*=1,2), поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0^i = 0$,

$D^i = (D_t^i)_{t\geq 0}$- число обслуженных заявок *i-го* типа (*i*=1,2) за время $t \geq 0$, $D_0^i = 0$,

$F^i = (F_t^i)_{t\geq 0}$- число заявок *i-го* типа (*i*=1,2), получивших отказ в обслуживании за время $t \geq 0$, $F_0^i = 0$.

Тогда для ξ_t^i - числа заявок *i-го* типа (*i*=1,2) в СМО в момент времени $t \geq 0$ можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t^i = \xi_0^i + A_t^i - D_t^i - F_t^i, \tag{1}$$

где $\xi_0^i \geq 0$ - число заявок *i-го* типа (i=1,2) в СМО при $t = 0$ и $A_0^i = D_0^i = F_0^i = 0$, A^1, A^2, D^1, D^2 – точечные процессы, определяемые своими компенсаторами $\tilde{A}^i = (\tilde{A}_t^i)_{t\geq 0}$и $\widetilde{D}^i = (\widetilde{D}_t^i)_{t\geq 0}$в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [1]:

$$A_t^i = \tilde{A}_t^i + m_t^{A^i}, \tag{2}$$

$$D_t^i = \widetilde{D}_t^i + m_t^{D^i}, \tag{3}$$

где $\tilde{A}^i$ и $\widetilde{D}^i$- неубывающие предсказуемые процессы, m^{A^i} и m^{D^i} - мартингалы, i=1,2.

Для рассматриваемой в данной работе СМО с относительным приоритетом $A^i = (A_t^i)_{t\geq 0}$- пуассоновский процесс с компенсатором:

$$\widetilde{A_t^i} = \lambda_i \cdot t,\ \lambda_i > 0. \tag{4}$$

Компенсатор для процесса $D^1 = (D_t^1)_{t\geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D_t^1} = \int_0^t \mu_1 \cdot \propto_s ds, \tag{5}$$

где $\propto_s = \begin{cases} \xi_s^1,\ \text{если}\ \xi_s^1 + \xi_s^2 \leq n, \\ \left(n - \xi_s^2\right),\ \text{если}\ \xi_s^1 + \xi_s^2 > n, \end{cases}$ то есть интенсивность обслуживания заявок первого типа определяется числом заявок первого и второго типа, находящихся в СМО. Заявки первого типа обслуживаются, если есть свободные приборы, если свободных приборов нет, но есть заявки второго типа на обслуживании, то заявка первого типа ожидает окончания обслуживания этой заявки и после этого встает на обслуживание. Поэтому если в СМО $\xi^1 + \xi^2 > n$, то обслуживаются лишь $n - \xi^2$ заявок первого типа, а остальные ожидают окончания обслуживания заявок второго типа. Иначе обслуживаются все находящиеся в СМО заявки первого типа (то есть ξ^1).

Компенсатор для процесса $D^2 = (D_t^2)_{t\geq 0}$ определяется следующим соотношением:

$$\widetilde{D_t^2} = \int_0^t \xi_s^2 \cdot \mu_2\, ds, \tag{6}$$

то есть мгновенная интенсивность обслуживания заявок второго типа определяется числом заявок второго типа, находящихся в СМО, поскольку в СМО отсутствует очередь для заявок второго типа, и, следовательно, все заявки второго типа, находящиеся в СМО, обслуживаются.

Число заявок первого типа, получивших отказ в обслуживании за время t, определяется по формуле:

$$F_t^1 = \int_0^t I(\xi_s^1 = n) dA_s^1, \tag{7}$$

то есть заявка первого типа теряется, если в момент её поступления (когда $\mathrm{dA_s^1} = 1$) все приборы заняты обслуживанием заявками этого же типа или в системе уже n заявок первого типа ожидают окончания обслуживания (соответственно $I(\xi_s^1 = n) = 1$).

Число заявок второго типа, получивших отказ в обслуживании за время t, определяется по формуле:

$$F_t^2 = \int_0^t I(\xi_s^1 + \xi_s^2 \geq n) dA_s^2, \tag{8}$$

то есть заявка второго типа теряется, если в момент её поступления (когда $dA_s^2 = 1$) все приборы заняты обслуживанием заявками первого или второго типа но $I(\xi_s^1 + \xi_s^2 \geq n)$).

2. Компьютерная модель

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. На стохастическом базисе $\boldsymbol{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$ из формул (1)-(8) нетрудно получить следующие инфинитезимальные соотношения (9)-(14):

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda_1 \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{9}$$

$$P\{D_{t+\Delta}^1 - D_t^1 = 1|\mathcal{F}_t\} = \mu_1 \cdot \alpha_s \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{10}$$

$$P\{F_{t+\Delta}^1 - F_t^1 = 1|\mathcal{F}_t\} = I(\xi_s^1 = n) \cdot \Delta A_t^1 + o(\Delta), \tag{11}$$

$$P\{A_{t+\Delta}^2 - A_t^2 = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda_2 \cdot \Delta + o(\Delta) \tag{12}$$

$$P\{D_{t+\Delta}^2 - D_t^2 = 1|\mathcal{F}_t\} = \xi_s^2 \cdot \mu_2 \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{13}$$

$$P\{F_{t+\Delta}^2 - F_t^2 = 1|\mathcal{F}_t\} = I(\xi_s^1 + \xi_s^2 \geq n) \cdot \Delta A_t^2 + o(\Delta), \tag{14}$$

Формулы (9)-(14) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda_i \cdot \Delta \ll 1, n\mu_i \cdot \Delta \ll 1$, *i=1,2* получим следующие итерационные формулы (для вычисления последующих значений через предыдущие) [2]:

$$A_{t+\Delta}^1 = A_t^1 + \delta(\lambda_1), \tag{15}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta, \end{cases}$

$$D_{t+\Delta}^1 = D_t^1 + \alpha_s \cdot \delta(\mu_1), \tag{16}$$

$$F_{t+\Delta}^1 = F_t^1 + I(\xi_t^1 = n)\Delta A_t^1, \tag{17}$$

где $\Delta A_t^1 = A_{t+\Delta}^1 - A_t^1$,

$$A_{t+\Delta}^2 = A_t^2 + \delta(\lambda_2), \tag{18}$$

$$D_{t+\Delta}^2 = D_t^2 + \delta(\mu_2), \tag{19}$$

$$F_{t+\Delta}^2 = F_t^2 + I(\xi_t^1 + \xi_t^2 \geq n)\Delta A_t^2, \tag{20}$$

где $\Delta A_t^2 = A_{t+\Delta}^2 - A_t^2$.

Для построения данной модели использовался язык программирования Delphi, построены графики входящих/исходящих потоков, числа заявок в СМО, отказов, а так же графики модельных оценок основных характеристик СМО (см. рис.2).

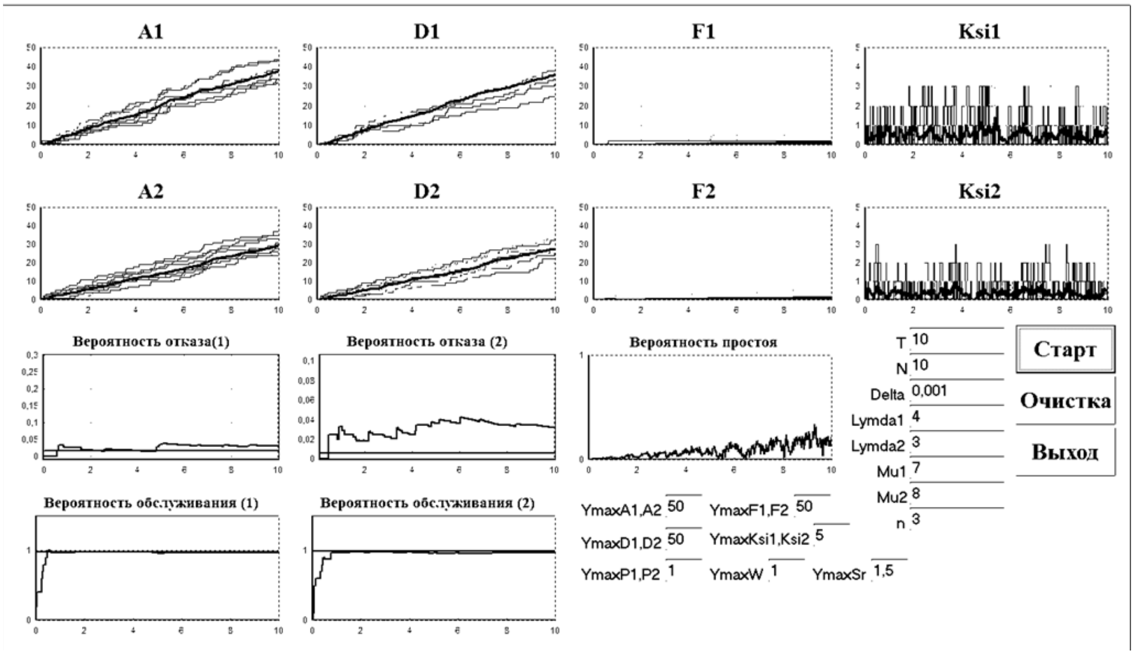

Рис.2. Форма программы с выводом всех графиков для параметров: T=10, N=10, λ_1=4, λ_2=3, μ_1=7, μ_2=8, Δ=0,001, n=3.

Используемые входные параметры:

- *T(>0)*– время моделирования;
- *N* – число реализаций работы СМО;
- *Delta (>0)*– дискретность, проверяется выполнение условий $\lambda \cdot \Delta << 1$, $n \cdot \mu \cdot \Delta << 1$;
- *Lymda1(>0)* – интенсивность поступления заявок 1 типа;
- *Lymda2(>0)* – интенсивность поступления заявок 2 типа;
- *mu1(>0)*– интенсивность обслуживания заявок 1 типа;
- *mu2(>0)*– интенсивность обслуживания заявок 2 типа;
- *n(>0)*– число обслуживающих приборов.

3. Оценка характеристик СМО

Наиболее важными характеристиками для рассматриваемой СМО являются вероятности отказа для заявок 1 и 2 типа. В качестве о*ценок* для этих вероятностей естественно принять частоту отказов, то есть, усредненное по числу реализаций, отношение числа заявок, получивших отказ F_t^i $(i = 1{,}2)$ к числу поступивших заявок A_t^i $(i = 1{,}2)$:

$$\bar{\pi}_1(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{F_t^1(\omega_i)}{A_t^1(\omega_i)}\right), \tag{21}$$

$$\bar{\pi}_2(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{F_t^2(\omega_i)}{A_t^2(\omega_i)}\right), \tag{22}$$

В частном случае, в отсутствии заявок 2 типа (при $\lambda_2 = 0$) в стационарном режиме (который реализуется при нагрузке $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1$) вероятность отказа заявок 1 типа, рассчитывается по формуле Эрланга (23):

$$\pi_1 = \frac{\frac{1}{n!} \cdot \rho_1^n}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \rho_1^k}, \tag{23}$$

где $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$. Сходимость модельной оценки (21) в отсутствии заявок 2 типа (при $\lambda_2 = 0$) к теоретической (23) показана на рис. 3.

Рис.3. Сходимость модельной оценки (21) в отсутствии заявок 2 типа (при $\lambda_2 = 0$) к теоретической (23): $T = 10, N = 50, \Delta = 0{,}001, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0, \mu_1 = 6, \mu_2 = 0, n = 2$.

Аналогичная сходимость в стационарном режиме (при $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$) модельной оценки (22) для заявок 2 типа к теоретической оценке (24) в отсутствии заявок 1 типа также имеет место:

$$\pi_2 = \frac{\frac{1}{n!} \cdot \rho_2^n}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \rho_2^k}, \tag{24}$$

где $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$. Сравнение смоделированных по формулам (21)-(22) характеристик с теоретическими значениями, рассчитанными по формулам (23)-(24), верными в частных случаях (в отсутствии заявок одного из типов), производится для проверки корректности моделирования системы.

Вероятность простоя, то есть вероятность того, что в системе все обслуживающие приборы свободны, можно оценить средней долей времени, когда в СМО не было ни одной заявки:

$$\hat{p}(T) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{T}{\Delta}\right]} \Delta \cdot I\left(\xi_{k\Delta}^1(\omega_i) + \xi_{k\Delta}^2(\omega_i) = 0\right)}{T}, \tag{25}$$

Если сумма числа заявок 1 и 2 типа в СМО равно 0, т.е. в системе нет заявок, то происходит суммирование этих промежутков времени. Далее суммарные временные простои усредняются по числу траекторий (реализаций работы СМО) и делятся на время работы

СМО Т. На рис. 4 представлен график модельной оценки вероятности простоя, рассчитанной по формуле (25).

Рис.4. Вероятность простоя системы с параметрами: $T = 10$, $N = 15$, $\Delta = 0{,}001$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$, $n = 3$.

Список литературы

1. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: Учебное пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2009.
2. Савинов Ю. Г., Медведева А. Н., Петров И. В., Иванов. А. М. Семимартингальные аналоги классических моделей СМО // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: сб. ст. по материалам XL Международной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии». № 4(32). М.: Изд. «Интернаука», 2016, с. 68-74.