



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2017, № 1., с.61-69.

Поступила: 09.06.2017

Окончательный вариант: 23.09.2017

© УлГУ

УДК 519.218.5

## Математическая и компьютерная модель многоканальной СМО с дообслуживанием заявок

Савинов. Ю. Г.<sup>1,\*</sup>, Чурова А.А.<sup>1</sup>

[\\*uras@aport.ru](mailto:uras@aport.ru)

<sup>1</sup>УлГУ, Ульяновск, Россия

---

В работе представлена математическая и компьютерная модель СМО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием заявок в терминах точечных процессов и их компенсаторов. Проведен анализ сложности графа состояний в марковском описании рассматриваемой СМО и продемонстрировано преимущество семимартингального описания над марковским. В отличие от марковского описания, модель в семимартингальных терминах позволяет моделировать СМО при любом разумном числе обслуживающих приборов, не увеличивая при этом сложности как математической, так и компьютерной модели.

**Ключевые слова:** абсолютный приоритет, дообслуживание, семимартингальное описание, точечный процесс, компенсатор.

---

### Введение

В работе [1] построены семимартингальные аналоги классических моделей систем массового обслуживания (СМО) типа  $M/M/n/N$ ,  $1 \leq n \leq \infty, 0 \leq N \leq \infty$ . Также семимартингальные модели СМО, в том числе модели с диффузионной аппроксимацией можно найти, например, в [2-8]. В данной работе показана возможность использовать семимартингальное описание для СМО с приоритетами, кроме этого продемонстрировано преимущество такого описания над марковским для СМО с приоритетами.

Рассмотрим многоканальную СМО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием заявок, в которую поступают заявки двух типов/классов. Заявки 1 типа имеют абсолютный приоритет: если нет свободных приборов, но есть заявки 2 типа на обслуживании, то заявка 1 типа вытесняет заявку 2 типа, и эта заявка 2 типа встаёт в очередь на дообслуживание (и становится 3 «типом»). Если все приборы заняты, то поступающая заявка 2 типа

теряется. Если все приборы заняты заявками 1 типа или 3 типа, то поступившая заявка 1 типа теряется. Обслуживание заявок 3 типа уже не прерывается.

#### **Предположения и допущения модели.**

поступающие в систему заявки 1 и 2 типа образуют простейшие потоки с интенсивностями  $\lambda_1 \geq 0$  и  $\lambda_2 \geq 0$ ;

длительность обслуживания заявок 1 и 2 типа распределена по экспоненциальному закону с интенсивностями  $\mu_1 \geq 0$  и  $\mu_2 \geq 0$ ;

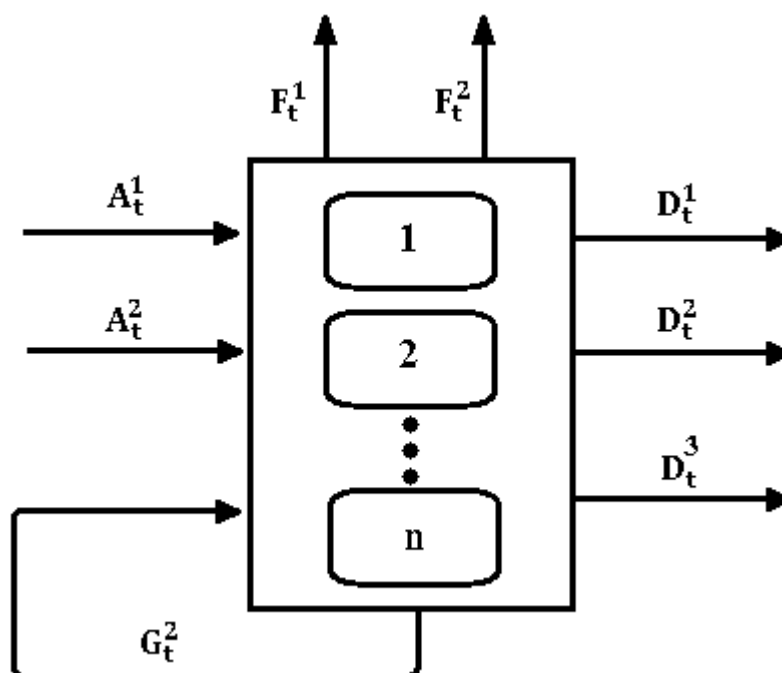
дисциплина буферизации – с отказами: заявка, поступившая в систему и заставшая все приборы занятыми обслуживанием других заявок, теряется;

дисциплина обслуживания – в естественном порядке: заявка, поступившая в систему, принимается на обслуживание, если есть хотя бы один свободный прибор. Если заявка застала свободными несколько приборов, то она направляется в один из них случайным образом.

прерванный запрос возвращается в очередь и начинает обслуживание заново после ухода из системы заявок с более высоким приоритетом.

### **1. Математическая модель**

Опишем модель СМО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием заявок для  $n$  приборов (см. рис.1).



**Рис.1.** Схема многоканальной СМО с дообслуживанием для  $n$  приборов.

Существует два основных способа описания системы массового обслуживания: марковский и семимартингальный. Проведем обоснование выбора семимартингального опи-

сания для данной СМО. Рассмотрим граф для одного обслуживающего прибора (см. рис.2).

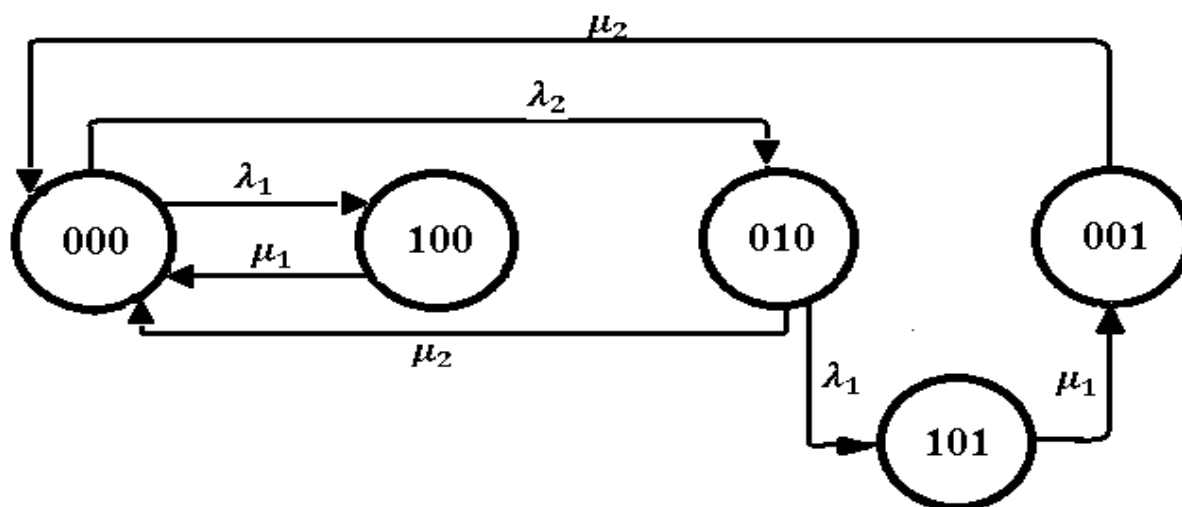


Рис.2. Граф СМО для одного прибора ( $n=1$ ).

- состояние 000 – обозначает, что наша система пустая;
- состояние 100 – показывает, что в нашей системе обслуживается заявка первого типа;
- состояние 010 – показывает, что в нашей системе нет заявок первого типа, и обслуживается заявка второго типа;
- состояние 001 – показывает, что в нашей системе нет заявок 1 и 2 типов, и обслуживается заявка 3 типа.
- состояние 101 – показывает, что в нашей системе обслуживаются заявки 1 и 3 типов, и нет заявок 2 типа.

Для двух приборов граф состояний системы будет состоять уже из 14 узлов (см. рис.3). Здесь аналогично предыдущему случаю состояние «ABC» – обозначает, что в СМО «А» заявок 1-го типа, «В» заявок 2-го типа, «С» заявок 3-го типа. Можно показать (это отдельная комбинаторная задача), что для  $n$  приборов марковское представление требует рассмотрения  $\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{6} + n^2$  различных состояний системы и столько же узлов в графе СМО. Как видно из последней формулы для марковского описания и последующего моделирования потребуется не менее  $\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{6} + n^2$  уравнений (соответственно при  $n = 1, 2$  формула дает 5 и 14 узлов), что является существенным ограничением для моделирования уже при  $n$  больше 10.

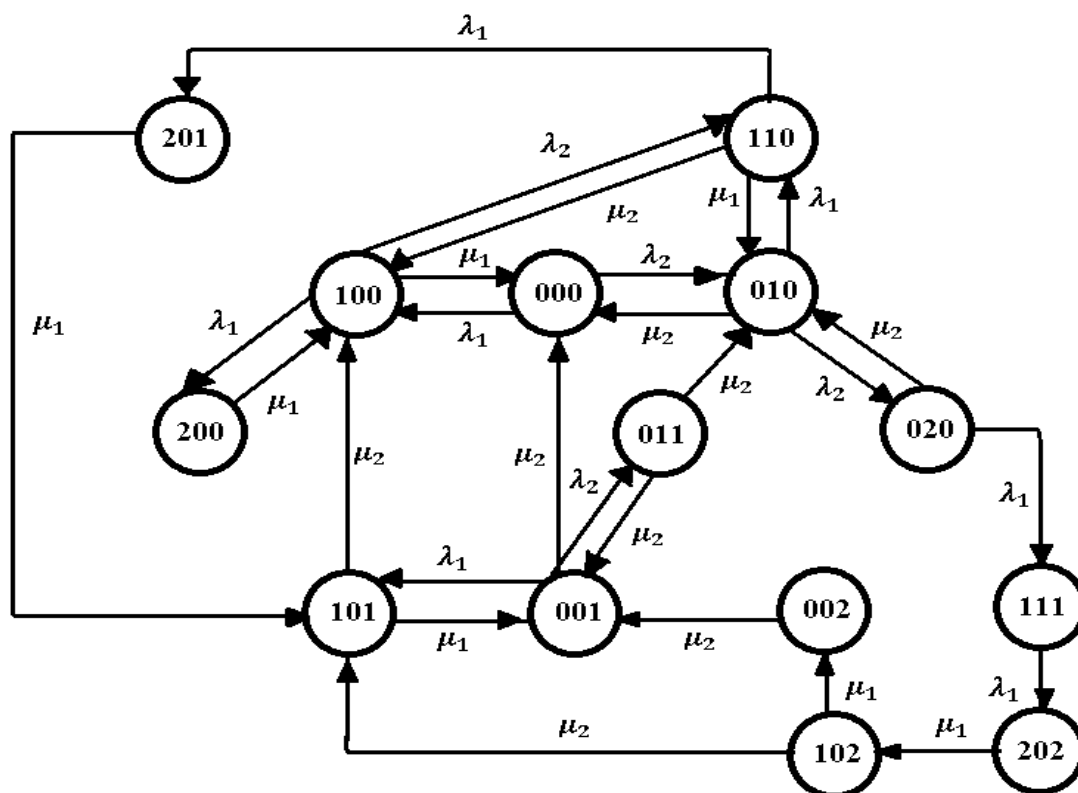


Рис.3. Граф СМО для двух приборов ( $n=2$ ).

Семимартингальное описание, как будет показано ниже, свободно от таких ограничений и позволяет моделировать СМО при любых разумных  $n$ , не увеличивая сложности как математической, так и компьютерной модели. Выбор в пользу семимартингального описания подкрепляется еще и тем фактом, что любой случайный процесс в дискретном времени является семимартингалом [9]. Поэтому в данной работе выбрано семимартингальное описание СМО в терминах точечных (считающих) процессов и их компенсаторов [9].

Для семимартингального описания СМО введем считающие процессы:

$A_t^i$  – считающий процесс числа заявок  $i$ -го типа, поступивших в СМО за время  $t \geq 0$ ,  $A_0^i = 0$ ,  $i=1, 2$ ;

$D_t^i$  – считающий процесс числа заявок  $i$ -го типа, обслуженных за время  $t \geq 0$ ,  $D_0^i = 0$ ,  $i=1, 2$ ;

$G_t^2$  – считающий процесс числа заявок 2 типа, отправленных на дообслуживание за время  $t \geq 0$ ,  $G_0^2 = 0$ ;

$D_t^3$  – считающий процесс числа обслуженных заявок с прерванным обслуживанием за время  $t \geq 0$ ,  $D_0^3 = 0$ ;

$F_t^i$  – считающий процесс числа заявок  $i$ -го типа, получивших отказ в обслуживании за время  $t \geq 0$ ,  $F_0^i = 0$ ,  $i=1, 2$ .

В описываемой модели для  $n$  приборов есть три типа заявок:

$\xi_t^1$  – число заявок 1 типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$ ,  $\xi_0^1 = 0$ ;

$\xi_t^2$  – число заявок 2 типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$ ,  $\xi_0^2 = 0$ ;

$\xi_t^3$  – число заявок 2 типа в СМО с прерванным обслуживанием («3 тип») в момент времени  $t \geq 0, \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\xi_0^3 = 0$ .

Для  $\xi_t^1$  – числа заявок 1 типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$  можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t^1 = \xi_0^1 + A_t^1 - D_t^1 - F_t^1, \quad (1)$$

где  $\xi_0^1 \geq 0$  – число заявок в СМО в момент времени  $t = 0$ ,  $A_0^1 = D_0^1 = F_0^1 = 0$ .

Аналогично,  $\xi_t^2$  – число заявок 2 типа в СМО в момент времени  $t \geq 0$  можно описать балансовым соотношением

$$\xi_t^2 = \xi_0^2 + A_t^2 - D_t^2 - F_t^2 - G_t^2. \quad (2)$$

Для  $\xi_t^3$  – числа заявок 3 типа в СМО с прерванным обслуживанием в момент времени  $t \geq 0$  можно определить следующее соотношение:

$$\xi_t^3 = \xi_0^3 + G_t^2 - D_t^3. \quad (3)$$

Точечные (считающие) процессы  $A^1, A^2, D^1, D^2, D^3$  характеризуются своими компенсаторами и в соответствии с разложением Дуба-Мейера для субмартингалов [9]:

$$A_t^i = \widetilde{A}_t^i + m_t^{A^i}, \quad (4)$$

$$D_t^j = \widetilde{D}_t^j + m_t^{D^j}, \quad (5)$$

где  $\widetilde{A}_t^i$  и  $\widetilde{D}_t^j$  – неубывающие предсказуемые процессы,  $m_t^{A^i}$  и  $m_t^{D^j}$  – мартингалы,  $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ .

В частности, для рассматриваемой СМО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием  $A^i = (A_t^i)_{t \geq 0}$  – пуассоновские процессы с компенсаторами

$$\widetilde{A}_t^i = \lambda_i \cdot t \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

где  $\lambda_i > 0$  – постоянные интенсивности поступления заявок  $i$ -го типа, аналогично для  $D^i = (D_t^i)_{t \geq 0}$ :

$$\widetilde{D}_t^i = \int_0^t \mu_i \cdot \xi_s^i ds \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

$$\widetilde{D}_t^3 = \int_0^t \mu_2 \cdot \min(\xi_s^3, n - \xi_s^1 - \xi_s^2) \cdot I(\xi_s^3 > 0) ds, \quad (8)$$

где  $\mu_i > 0$ ,  $I(\cdot)$  – индикаторная функция. Отказы  $F^1, F^2$  определяются соотношениями:

$$F_t^1 = \int_0^t I(\xi_s^1 + \xi_s^3 \geq n) dA_s^1, \quad (9)$$

$$F_t^2 = \int_0^t I(\xi_s^1 + \xi_s^2 + \xi_s^3 \geq n) dA_s^2. \quad (10)$$

Считающий процесс числа заявок 2 типа, отправленных на дообслуживание за время  $t \geq 0$ , в случае, когда все приборы заняты и есть на обслуживание заявка 2 типа, а пришла 1 типа, имеющая больший приоритет, можно описать следующим соотношением:

$$G_t^2 = \int_0^t I(\xi_s^1 + \xi_s^2 + \xi_s^3 \geq n) \cdot I(\xi_s^2 > 0) dA_s^1. \quad (11)$$

## 2. Компьютерная модель

Выведем формулы, позволяющие произвести имитационное моделирование. На стохастическом базисе  $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  из формул (1)-(11) нетрудно получить следующие инфинитезимальные соотношения (12)-(19):

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (12)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^1 - D_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \xi_t^1 \cdot \mu_1 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (13)$$

$$P\{F_{t+\Delta}^1 - F_t^1 = 1 | \mathcal{F}_t\} = I(\xi_t^1 + \xi_t^3 = n) \cdot \Delta A_t^1 + o(\Delta), \quad (14)$$

$$P\{A_{t+\Delta}^2 - A_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda_2 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (15)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^2 - D_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \xi_t^2 \cdot \mu_2 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (16)$$

$$P\{D_{t+\Delta}^3 - D_t^3 = 1 | \mathcal{F}_t\} = \min(\xi_t^3, n - \xi_t^1 - \xi_t^2) \cdot I(\xi_t^3 > 0) \cdot \mu_2 \cdot \Delta + o(\Delta), \quad (17)$$

$$P\{F_{t+\Delta}^2 - F_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = I(\xi_t^1 + \xi_t^2 + \xi_t^3 \geq n) \cdot \Delta A_t^2 + o(\Delta), \quad (18)$$

$$P\{G_{t+\Delta}^2 - G_t^2 = 1 | \mathcal{F}_t\} = I(\xi_t^1 + \xi_t^2 + \xi_t^3 \geq n) \cdot I(\xi_t^2 > 0) \cdot \Delta A_t^1 + o(\Delta), \quad (19)$$

где  $\Delta A_t^1 = A_{t+\Delta}^1 - A_t^1$ , а  $\Delta A_t^2 = A_{t+\Delta}^2 - A_t^2$ .

Формулы (12)-(19) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени)  $\Delta$  из условия  $\lambda_i \cdot \Delta \ll 1$ ,  $n\mu_i \cdot \Delta \ll 1$ , ( $i=1,2$ ) получим следующие итерационные формулы (для вычисления последующих значений через предыдущие):

$$A_{t+\Delta}^1 = A_t^1 + \xi(\lambda_1), \quad (20)$$

$$D_{t+\Delta}^1 = D_t^1 + I(\xi_t^1 > 0) \cdot \xi(\mu_1), \quad (21)$$

$$F_{t+\Delta}^1 = F_t^1 + I(\xi_t^1 + \xi_t^3 \geq n) \Delta A_t^1, \quad (22)$$

$$A_{t+\Delta}^2 = A_t^2 + \xi(\lambda_2), \quad (23)$$

$$D_{t+\Delta}^2 = D_t^2 + I(\xi_t^2 > 0) \cdot \xi(\mu_2), \quad (24)$$

$$F_{t+\Delta}^2 = F_t^2 + I(\xi_t^1 + \xi_t^2 + \xi_t^3 \geq n) \Delta A_t^2, \quad (25)$$

$$G_{t+\Delta}^2 = G_t^2 + I(\xi_t^1 + \xi_t^2 + \xi_t^3 \geq n) \cdot I(\xi_t^2 > 0) \Delta A_t^1, \quad (27)$$

где  $\xi(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \alpha \cdot \Delta \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \alpha \cdot \Delta \end{cases}$ .

Это позволяет получить значения процессов  $A^1, A^2, D^1, D^2, D^3, \xi^1, \xi^2, \xi^3, F^1, F^2, G^2$  в произвольный момент времени (от 0 до времени моделирования  $T$ ).

Для построения данной модели использовался язык программирования Delphi, построены графики входящих/исходящих потоков, числа заявок в СМО, отказов, а так же графики модельных оценок основных характеристик СМО (см. рис.4).

### Параметры

$T=10$   
 $N=10$   
 $\Delta=0,001$   
 $\text{Lymda1}=7$   
 $\text{Lymda2}=3$   
 $\text{YmaxD}(t)=70$   
 $\text{YmaxF}(t)=25$   
 $\text{YmaxG}(t)=25$   
 $\text{YmaxP}(t)=1,5$   
 $\mu_1=9$   
 $\mu_2=7$   
 $n=3$

Start  
 Clear  
 Exit

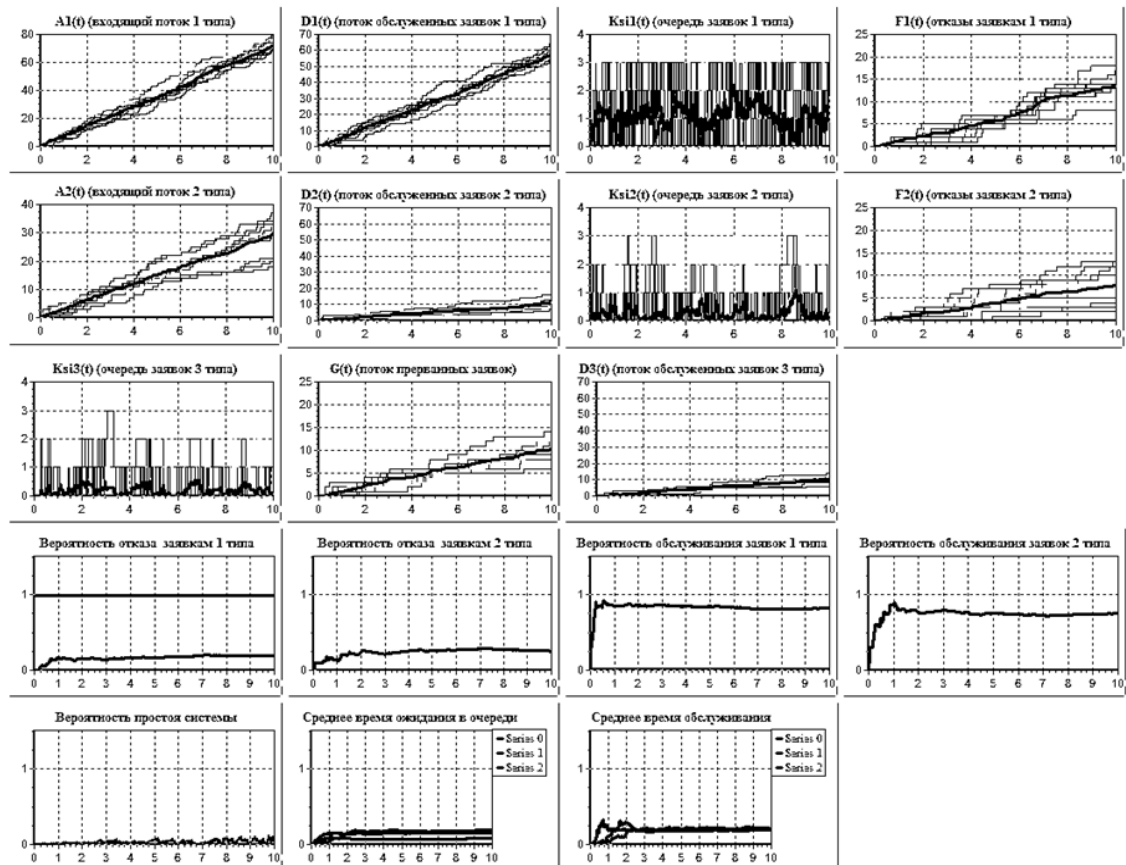


Рис.4. Форма программы с выводом всех графиков для параметров:  $T=10$ ,  $N=10$ ,  $\lambda_1=7$ ,  $\lambda_2=3$ ,  $\mu_1=9$ ,  $\mu_2=7$ ,  $\Delta=0,001$ ,  $n=3$ .

Используемые входные параметры:

- $T(>0)$  – время моделирования;
- $N$  – число траекторий, диапазон значений:  $1 \dots 500$  (целые числа);
- $\Delta (>0)$  – дискретность, диапазон значений зависит от выполнения условия  $\lambda \cdot \Delta \ll 1$ ,  $n \cdot \mu \cdot \Delta \ll 1$ ;
- $\text{Lymda1}(>0)$  – интенсивность поступления заявок 1 типа;
- $\text{Lymda2}(>0)$  – интенсивность поступления заявок 2 типа;
- $\text{YMaxD}(t)$  – параметр для графиков  $D1(t)$ ,  $D2(t)$  и  $D3(t)$ , вводимые значения должны быть  $\geq \mu_1 \cdot T$  (если  $\mu_1 > \mu_2$ ) или  $\geq \mu_2 \cdot T$  (если  $\mu_2 > \mu_1$ );
- $\text{YMaxF}(t)$  – параметр для графиков  $F1(t)$  и  $F2(t)$ , вводимые значения должны быть  $\geq \text{Lymda1} \cdot T$  (если  $\text{Lymda1} > \text{Lymda2}$ ) или  $\geq \text{Lymda2} \cdot T$  (если  $\text{Lymda2} > \text{Lymda1}$ );
- $\text{YMaxG}(t)$  – параметр для графика  $G(t)$ ;
- $\text{YMaxP}(t)$  – параметр для графиков *Вероятность отказа 1* и *Вероятность отказа 2*, *Вероятность обслуживания 1* и *Вероятность обслуживания 2*, *Вероятность простоя системы*, *Среднее время ожидания в очереди*, *Среднее время обслуживания*, вводимое значение рекомендуется взять равным 1;

- $\mu_1(>0)$  – интенсивность обслуживания заявок 1 типа;
- $\mu_2(>0)$  – интенсивность обслуживания заявок 2 типа;
- $n(>0)$  – число обслуживающих приборов.

При запуске программы выводятся 18 графиков:

- $A_1(t)$  – процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda_1$ ;
- $A_2(t)$  – процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda_2$ ;
- $D_1(t)$  – процесс с интенсивностью  $\mu_1$ ;
- $D_2(t)$  – процесс с интенсивностью  $\mu_2$ ;
- $D_3(t)$  – процесс, показывающий число обслуженных заявок с прерванным обслуживанием;
- $K_{s1}(t)$  – число заявок 1 типа в СМО;
- $K_{s2}(t)$  – число заявок 2 типа в СМО;
- $K_{s3}(t)$  – число заявок 3 типа в СМО;
- $F_1(t)$  – отказы для заявок 1 типа;
- $F_2(t)$  – отказы для заявок 2 типа;
- $G(t)$  – процесс, показывающий число заявок 2 типа, отправленных на дообслуживание;
- *Вероятность отказа заявкам 1 типа* – вероятность отказа в обслуживании заявок 1 типа;
- *Вероятность отказа заявкам 2 типа* – вероятность отказа в обслуживании заявок 2 типа;
- *Вероятность обслуживания заявок 1 типа* – вероятность обслуживания заявок 1 типа;
- *Вероятность обслуживания заявок 2 типа* – вероятность обслуживания заявок 2 типа;
- *Вероятность простоя системы* – вероятность простоя системы, когда в системе не оказалось ни одной заявки из всех трёх типов;
- *Среднее время ожидания в очереди* – среднее время ожидания обслуживания для заявок 1 типа и 2 типа (красная траектория – для заявок 1 типа, синяя траектория – для заявок 2 типа);
- *Среднее время обслуживания* – среднее время обслуживания заявок трёх типов (красная траектория – для заявок 1 типа, синяя траектория – для заявок 2 типа, зелёная траектория – для заявок 3 типа).

Таким образом, показано, что семимартингальное описание СМО является удобным и эффективным способом описания для СМО с приоритетами. При этом расчет характеристик СМО, таких как среднего времени ожидания в очередях и других, сводится к нахождению интегралов от кусочно-постоянных функций, которые точно считаются по квадратурной формуле левых прямоугольников и не добавляют погрешности вычислений (подробнее см. в [1]).

## Список литературы

1. Савинов Ю. Г., Медведева А. Н., Петров И. В., Иванов. А. М. Семимартингальные аналоги классических моделей СМО // *Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: сб. ст. по материалам XL Международной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии»*. № 4(32). М.: Изд. «Интернаука», 2016. С. 68-74.
2. Бажанова Т.В., Бутов А.А. Имитационная стохастическая модель канцерогенеза в терминах СМО // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2007, т. 14, № 5, с. 855.
3. Биктимиров, Т. З., Бутов А.А., Савинов Ю.Г. Оптимальное управление моментом спонтанной регрессии опухоли // *Автоматика и телемеханика*, 2005, № 4, С. 170-175.
4. Бутов А.А., Галимов Л.А. Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах // *Современные проблемы науки и образования*, 2015, № 2, С. 758.
5. Бутов А.А., Волков М.А., Раводин К.О., Зорин М.В. Диффузионная аппроксимация для процесса с множественной разладкой // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2007, т. 14, № 6, с. 1073-1074.
6. Бурмистрова В.Г., Савинов Ю.Г. Математическая модель влияния ликопена на фазы клеточного цикла и рост опухоли простаты // *Ученые записки Российского государственного социального университета*, 2011, № 9-2, с. 66-69.
7. Савинов Ю. Г. Модель множественных разладок в росте опухоли при облучении // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2007, т. 14, № 6, с. 1134.
8. Савинов Ю. Г. Пороговые эффекты в моделях накопления повреждений // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2005, т. 12, № 4, с. 1076-1077.
9. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: Учебное пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2009.