Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Ученые записки Ульяновского государственного университета

Фундаментальные проблемы математики и механики

Часть 2

1996

Выпуск 1

Министерство общего и
профессионального образования РФ

Ученые записки
Ульяновского государственного университета

Фундаментальные проблемы математики и механики.

Часть 2.

Выпуск 1.

Ульяновск, 1996.

ББК 22.19+32.97
УДК 519.6+519.7

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Ульяновского государственного университета.

Фундаментальные проблемы математики и механики: Ученые записки Ульяновского государственного университета.Часть 2 / Под редакцией А.А.Бутова.- Выпуск 1. Ульяновск: УлГУ, 1996,-144с.

Данный сборник является первым из серии, посвященной фундаментальным проблемам математики, прикладной математике и информатике и включает в себя работы преподавателей и аспирантов механико-математического факультета УлГУ и НИИ Информационных Технологий при УлГУ. Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с современными проблемами математики.

ISBN 5-7769-0039-5

Рецензент:
д.ф.-м.н. профессор Логинов Б.В.
(Ульяновский государственный технический университет)

ОГЛАВЛЕНИЕ.

УДК 517.929

К МЕТОДУ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Лысяков В.Н., Хусанов Д.Х., Андреев А.С.

В работе рассматривается задача об исследовании свойств устойчивости ФДУ запаздывающего типа методом функций Ляпунова.

Пусть R^n - действительное евклидово пространство n - векторов с нормой $\|x\|$, $R^+ = [0, \infty)$, $h \geq 0$ - некоторое действительное число, C - банахово пространство непрерывных функций $\phi : [-h, 0] \to R$ с нормой $\|\phi\| = max\{\|\phi(s)\|, -h \leq s \leq 0\}$. Пусть $x : [-h, \infty) \to R^n$ непрерывная функция, для каждого $t \in R^+$ функция $x_t \in C$ определяется как $x_t = x_t(s) = x(t+s), -h \leq s \leq 0$.

Рассмотрим систему ФДУ запаздывающего типа

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^n, C_H = \{\phi \in C : \|\phi\| < H\}$, есть непрерывное отображение, ограниченное на каждом множестве $R^+ \times C_r, \|f(t,\phi)\|) \leq m(r) \forall (t,\phi) \in R^+ \times C_r$, где $C = \{\phi \in C : \|\phi\| \leq r < H\}$. Отсюда для каждой начальной точки $(\alpha, \phi) \in R^+ \times C_H$ существует непродолжаемое решение уравнения (1) $x = x(t, \alpha, \phi)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$ и такое, что $x_\alpha = \phi$. [1].

Допустим также, что имеют место также следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Функция $f(t, \phi)$ удовлетворяет условию Липшица: для каждого компакта $K \subset C_H$ существует $l = l(K) > 0$, такое что $\forall \phi_1, \phi_2 \in K$ выполняется неравенство

$$\|f(t, \phi_2) - f(t, \phi_1)\| \leq l\|\phi_2 - \phi_1\|. \tag{2}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция $f = f(t, \phi)$ равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$,где K-компакт, $K \subset C_H$, т.е. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, K) \forall (t_1, \phi_1), (t_2, \phi_2) \in R^+ \times K, \|t_2 - t_1\| < \delta, \|\phi_2 - \phi_1\| < \delta$ следует $\|f(t_2, \phi_2) - f(t_1, \phi_1)\| < \epsilon$.

При этом предположении семейство сдвигов $\{f_\tau(t,\phi) = f(\tau + t,\phi), \tau \in R^+$, предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций F_f с метризуемой открыто-компактной топологией, и уравнению (1) можно сопоставить семейство предельных уравнений [2]

$$x'(t) = g(t, x_t), \tag{3}$$

где $g(t,\phi)$ - есть предельная к f функция, определенная в области $R \times \Gamma$. $R =]-\infty, +\infty[, \Gamma \subset C_H$. В силу условия (2) решения уравнений (1) и (3) для каждой точки $(\alpha,\phi) \in R^+ \times C_H$ и $(\alpha,\phi) \in R^+ \times \Gamma$ будут единственны.

Пусть $V = V(t,x), V : R^+ \times G_H \to R, G_H = \{x \in R^n : \|x\| < H\}, V \in C^1$, есть функция Ляпунова.

Ее производная в силу уравнения (1)

$$V'(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x_t)$$

есть функционал $V' : R^+ \times C_H \to R$.

Допустим, что относительно V и V' выполнены следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Функция $V(t,x)$ равномерно непрерывна по (t,x) и ограничена ,т.е. $\forall r, 0 < r < H, \exists m = m(r) : \forall t \in R$ и $\forall x \in G_r = \{\|x\| \le r < H\}$ выполнено $\|V(t,x)\| \le m$, и $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall (t_2,x_2),(t_1,x_1) \in R^+ \times G_r, \|t_2 - t_1\| < \delta, \|x_2 - x_1\| < \delta$ выполняется $\|V(t_2,x_2) - V(t_1,x_1)\| < \epsilon$.

Пусть F_U пространство всех непрерывных функций U , определенных на $R \times G_H$. В силу предположения 3 семейство сдвигов $\{V_\tau(t,x) = V(t+\tau,x), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в F_U , в открыто-компактной топологии. [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $U : R \times G_H \to R$, называется предельной к V , если существует последовательность $\{t_n\} : t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, такая что последовательность $\{U_n(t,x) = V(t+t_n,x)\}$ сходится равномерно по $(t,x) \in [0,T] \times \{x \in R^n : \|x\| \le r_1 < H\}$ к функции U в F_U .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Функционал V - ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K, \exists m = m(K), \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon,K) > 0$, такие что $\|V'[t,\phi]\| \le m$ для всех $(t,\phi) \in R^+ \times K, \|V'[t_2,\phi_2] - V'[t_1,\phi_1]\| < \epsilon$ для любых $t_1,t_2 \in R^+ : \|t_2 - t_1\| < \delta$ и $\phi_2,\phi_1 \in K : \|\phi_2 - \phi_1\| < \delta$.

При данном предположении семейство сдвигов $\{V'_\tau[t,\phi] = V'[t+\tau,\phi], \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функционалов F_W с метризуемой компактно-открытой топологией [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.t Функция $W \subset F_W$ называется предельной к V', если существует последовательность $\{t_n\} : t_n \to +\infty, n \to +\infty$, такая что последова- тельность $\{W_n[t,\phi] = V'[t_n + t,\phi]\}$ сходится равномерно по (t,ϕ) к W в F_W .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функции $g \in F, U \in F_U, W \in F_W$ образуют предельную тройку (g,U,W) , если они являются предельными к f, V, V', соответственно, для одной и той же последовательности $\{t_n\}, t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Для каждого $c_0 \in R$ обозначим

$$N(t,c_0) = \{\phi \in C : \sup_{-h \le s \le 0} U(t+s,\phi(s)) = c_0, \forall t \ge 0\},$$

$$M(t,c_0) = \{\phi \in N(t,c_0) : U(t,\phi(0)) = c_0, \forall t \ge 0\},$$

$$W^{-1}(t,0) = \{\phi C : W[t,\phi] = 0 \forall t \ge 0\}.$$

При сделанных предположениях верна следующая теорема о лока- лизации положительного предельного множества $\Omega^+(x_t(\alpha,\phi))$. [1]

ТЕОРЕМА. Пусть существует функция $V = V(t,x)$ такая, что

1) функция $V(t,x)$ ограничена, $\|V(t,x)\| \le m(r) \forall (t,x) \in R \times G_r$;

2) $V'(t,x) \le 0$ для всех $\phi \in C_H$ таких,что $V(t+s,\phi(s)) \le V(t,\phi(0))$,

$-h \le s \le 0$;

3) решение (1) $x(t,\alpha,\phi)$ определено и ограничено $\|x(t,\alpha,\phi)\| \le r < H$ для всех $t \ge \alpha - h$;

тогда существует значение $c = c_0 = const$ такое ,что для любого $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha,\phi))$ существует предельная тройка (g,U,W) и решение $y = y(t,0,\psi)$ предельного уравнения $y' = g(t,y_t)$ такие ,что $y_t(0,\psi) \in N(t,c_0)$, при этом для каждого $t \in R^+$, при котором $y_t \in M(t,c_0)$, выполнено $W(t,y_t) = 0$, т.е. $y_t \in W^{-1}(t,0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий 1), 2) теоремы следует, что $\sup_{-h \le s \le 0} V(t+s, x(t+s))$ не возрастает. Тогда,т.к. $V(t,x)$

ограничена снизу вдоль решений (1),то существует [4]

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-h\le s\le 0} V(t+s, x(t+s)) = c_0 \tag{4}$$

Пусть $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha,\phi))$, т.е. существует последовательность $\{t_n\} : t_n \to \infty, n \to \infty$ такая, что $x_{t_n} \to \psi, n \to \infty$.Из предкомпактности $\{f_\tau, \tau \in R^+\}, \{U_\tau, \tau \in R^+\}, \{W_\tau, \tau \in R^+\}$ можно выбрать подпоследовательность $t_{n_k} \to +\infty$, определяющие предельные (g, U, W) . Т.к. $x(t,\alpha,\phi)$ ограничено , то решение $y = y(t,0,\psi)$ уравнения $y' = g(t, y_t)$ таково , что $\{y_t, t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\phi))$; при этом последовательность функций $x(t+t_n, \alpha, \phi)$ сходится равномерно по $t \in [-T,T]$ к $y(t,0,\psi)$ и $x_{t+t_{n_k}}(\alpha,\phi) \to y_t(0,\psi)$, при $n_k \to \infty$ [2]. Следовательно, в силу (4) получаем , что существует

$$\lim_{n_k\to\infty} \sup_{-h\le s\le 0} V(t_{n_k}+t+s, x(t_{n_k}+t+s,\alpha,\phi)) = c_0$$

В дальнейшем вместо t_{n_k} используем обозначение t_n. Т.к. $V(t_n+t, x)$ сходится равномерно к $U(t,x)$ для $t \ge 0$,то $\sup\limits_{-h\le s\le 0} U(t+s, y_t(s)) = c_0$, в частности при $t = 0$ $\sup\limits_{-h\le s\le 0} U(s,\psi(s)) = c_0$. Следовательно $y \in (0,\psi) \in N(t, c_0)$.

Докажем вторую часть теоремы,а именно, что если $y_t \in N(t,c_0)$,то для любого $t \ge 0$ такого, что $U(t, y(t)) = c_0$ выполнено $W(t, y_t) = 0$. Предположим противное , т.е. существует t^* такое , что $U(t^*, y(t^*)) = c_0, W(t^*, y_{t^*}) = \epsilon > 0$. Тогда , в силу равномерной сходимости V' к W, для всех $n > N_0 = N(\epsilon) : V'(t_n+t^*, y_{t^*}) \ge \epsilon/2 > 0$, отсюда и в силу равномерной непрерывности V, существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое , что $V'(t_n+t,\psi) \ge \epsilon/4 > 0$ для всех $\|t-t^*\| < \delta, \|\psi - y_{t^*} < \delta$. В частности, для всех $n \ge N_1 \ge N(\epsilon)$ имеем $V'(t+t_n, x_{t+t_n}) \ge \epsilon/4 > 0$, следовательно , сущест- вует $\tau > 0$ такое , что $V(t_n+t+\tau, x(t_n+t+\tau)) > V(t_n+t^*, x(t_n+t^*)) + \epsilon\tau/4$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем, что

$$U(t+\tau, y(t+\tau)) > U(t^*, y(t^*)) = c_0,$$

а это противоречит тому, что $c_0 = \sup\limits_{-h\le s\le 0} U(t+s, y_t(s)) =$ для всех $t \ge 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы выполнено также

4) для каждого $c_0 \in R$ множество $M(t,c_0) \bigcap W^{-1}(t,0) \subset \{\phi \in C : U(t+s,\phi(s)) = c_0\}$, то в выводе теоремы $y_t \in \{\phi \in C : U(t+s,\phi(s)) = c_0\}$ и соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} V(t, x(t,\alpha,\phi)) = c_0$.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = a(t)(x(t-h) - x(t)) - x(t)x(t-h)\int_{-h}^{0} b(t,s)(x(t-h)-x(t))^2 ds, \tag{5}$$

где $a(t), b(t,s)$ - ограниченные, равномерно непрерывные по $t \in R^+$ функции , при этом $a(t) \ge 0, b(t,s) \ge b_0 > 0$ для всех $t \in R^+, s \in [-h,0]$. Множество $\{x : x \ge 0\}$ инвариантно относительно уравнения (5), для каждой $\phi \ge 0$ соответствующее решение $x(t,\alpha,\phi) \in \{x : x \ge 0\}$ при всех $t \ge \alpha - h$

Рассмотрим функцию $V(x) = x^2$.Тогда ее производная вдоль решения есть

$$V'[t,\phi] = 2a(t)(\phi(-h) - \phi(0))\phi(0) -$$

$$-2\phi(0)^2\phi(-h)\int_{-h}^{0} b(t,s)(\phi(-h) - \phi(0))^2 ds.$$

Учитывая, что при $\phi(s) \le \phi(0), -h \le s \le 0$ имеем $a(t)(\phi(-h)\phi(0) - \phi^2(0)) \le 0$, получаем оценку для всех $\phi : \phi^2(s) \le \phi^2(0), -h \le s \le 0$.

$$V'[t,\phi] \le -2\phi^2(0)\phi(-h)\int_{-h}^{0} b(t,s)(\phi(s) - \phi(0))^2 ds \le$$

$$\le -2b_0 h\phi^2(0)\phi(-h) \inf_{-h\le s\le 0}(\phi(s) - \phi(0))^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что рассматриваемое решение $x(t,\alpha,\phi)$ ограничено для всех $t \ge \alpha - h$.[1].

Пусть последовательность $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая , что $a(t+t_n)$ сходится равномерно по t к $\alpha(t)$, а $b(t+t_n, s)$ сходится равномерно по t к $\beta(t,s), s \in [-h,0]$.Тогда уравнение

$$x' = \alpha(t)(x(t-h) - x(t)) - x(t)x(t-h)\int_{-h}^{0} \beta(t,s)(x(t+s) - x(t))^2 ds$$

предельное к (5).

Множество $M(t,c_0) = \{\phi \in C : \phi^2(s) \le c_0, \phi^2(s) = c_0\}, W^{-1}(t,0) = \{W(t,\phi) = 0\} == \{\phi \in C : \phi(0) = 0, \phi(-h) = 0, \phi(s) = \phi(0)\}$.

$M(t,c_0) \bigcap W^{-1}(t,0) \subset \{\phi \in C : \phi^2(s) = c_0\}$.

На основании следствия находим,что решение $x(t,\alpha,\phi) \to const$ при $t \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

[1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М:Мир, 1984(монография).

[2] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. О притяжении решений неавтономного функционально-дифференциального уравнения / Межвуз. сборник "Функциональный анализ" Вып.33. Ульяновск. УГПИ. 1992. С.16-23.

[3] Sell G.R. Monautonomous differential equations and topological dynamics / 1,2. Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V.127. P.241-283.

[4] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург. Из-во Уральского ун-та.1992.

[5] Haddock J.R., Terjeki J. Liapunov-Rasumikhin functionals and an invariance principle for functional differential equations / J.Differential Equations.1983.

[6] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск. Изд-во фМГУ. 1994.

УДК 519.688

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРОВЕРКИ МАКСИМАЛЬНОСТИ ПРЕФИКСНОГО КОДА.

Маслина Е.Н.

Пусть задан алфавит Σ из n-букв. Буквы алфавита упорядочены и каждому слову $w \in \Sigma^*$ сопоставлена его длина. Пусть A – некоторое множество слов над Σ, упорядоченное лексикографически (см., например, [1]). Через $L(A)$ обозначим упорядоченную последовательность чисел, соответствующую длинам слов из A. Например, если $A = \{000, 001, 01, 1\}$, то $L(A) = \{3, 3, 2, 1\}$.

Можно сформулировать алгоритм, отвечающий на вопрос, соответствует ли заданной последовательности $L(A)$ максимальный префиксный код, и строящий множество A в случае соответствия.

Базис: $L(A)$ состоит из n-единиц. Тогда $A = \Sigma$.

Шаг : Проходя $L(A)$ последовательно от начала до конца, n рядом стоящих одинаковых чисел (пусть каждое из них равно m) заменить на число $m-1$ ($|w| = m-1$). При этом код сохранит свойство максимальной префиксности.

Считаем, $A = (A \setminus w) \bigcup w\Sigma$.

Применяем шаг алгоритма, пока либо не получим код из единиц, либо шаг применить нельзя и ответ "нет".

Для построения искомого множества A начиная с базиса все шаги применяются в обратном порядке.

Все вышесказанное позволяет сформулировать следующее

Утверждение: $L(A)$ задает максимальный префиксный код $\Leftrightarrow$ приведенный выше алгоритм даёт положительный ответ. Доказательство очевидно и опирается на определение максимального префиксного кода.

Пример: Пусть $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Тогда последовательность

$$L = \{3, 3, 3, 2, 4, 4, 4, 3, 3, 1, 1\}$$

задает следующий максимальный префиксный код

$$A = \{000, 001, 002, 01, 0200, 0201, 0202, 021, 022, 1, 2\}.$$

Последовательное выполнение шагов алгоритма можно продемонстрировать следующим образом:

$$\underbrace{\underbrace{3,3,3}_{2},2,\underbrace{\underbrace{4,4,4}_{3},3,3}_{2}}_{1},1,1$$

Литература.

1.В. Липский *Комбинаторика для программистов.* – М.: Мир, 1988.

УДК 519.713

ЕЩЁ РАЗ О КОНЕЧНЫХ АВТОМАТАХ.

Б. Ф. Мельников.

1.Введение.

Используемые далее обозначения совпадают с примененными в [1] – со следующими исключениями. Для заданного конечного автомата (НРС-автомата) K запись $\mathcal{L}(K)$ будет означать допускаемый этим автоматом язык, зеркальный автомат будем обозначать K^R, а записью $\widetilde{K}$ будем обозначать канонический конечный автомат, эквивалентный K. Поскольку для заданного K последний автомат является единственным (с точностью до переобозначения его состояний – см.[1], часть этого утверждения есть и в более известной монографии [2], то будем считать, что у всех вновь рассматриваемых нами канонических конечных автоматов уже задано множество состояний. Входной и выходной языки некоторого состояния q будут обозначаться соответственно $\mathcal{L}_K^{in}(q)$ и $\mathcal{L}_K^{out}(q)$.

По заданной функции переходов автомата $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ определим функцию $\gamma : Q \times Q \to \mathcal{P}(\Sigma)$ следующим образом: если для некоторых состояний q_1 и q_2 и буквы $a \in \Sigma$ выполнено условие $\delta(q_1, a) \ni q_2$, то будем полагать $\gamma(q_1, q_2) \ni a$.

Все эти обозначения – «в духе теории формальных языков» – были применены и в [3].

2. Специальное доказательство теоремы Клини.

Приведенное далее доказательство несколько отличается от «канонических». Ср. его, например, с приведенным в [4].

Для заданного автомата $K = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ рассмотрим произвольную инъективную функцию $\omega : Q \to \mathbf{R}^+$. (Из изложенного далее будет следовать, что важны не конкретные значения функции ω, а значения предиката $\omega(p) < \omega(q)$ для пар вершин $p, q \in Q$.) Будем иногда писать $q < r$ и $r > q$ ($q \le r$ и $r \ge q$) если $\omega(q) < \omega(r)$ (соответственно, $\omega(q) \le \omega(r)$). Зафиксируем в этом разделе K и ω.

Рассмотрим граф переходов автомата K. Для любых $q, p, r \in Q$, где $p \ne r$, $p \ge q$ и $r \ge q$, рассмотрим некоторый простой путь из p в r,

$$(p, q_1, q_2, \ldots, q_s, r),$$

такой что $(\forall i \in \overline{1,s})\,(q_i > q)$. Множество всех таких путей обозначим $\Omega_q(p,r)$. Если $\Omega_q(p,r) \neq \phi$, то будем писать $W_q(p,r)$. Обозначим также

$$\Omega(q) = \{\, p \in Q \,|\, W_q(q,p) \,\&\, W_q(p,q) \,\};$$

$\Omega(q)$ – специальные подмножества множества вершин графа переходов рассматриваемого автомата.

Рассмотрим алфавит

$$\bigcup_{q \in Q} R_q \cup \Sigma.$$

Ниже для каждого $q \in Q$ буква R_q будет обозначать регулярное выражение, задающее язык автомата $(Q_q, \Sigma, \delta, \{q\}, \{q\})$, где $Q_q = \{\, p \in Q \,|\, p \geq q \,\}$. Построим эти регулярные выражения по индукции.

Обозначим $\Phi_q(p,r)$ такое множество слов над этим алфавитом, которое может быть получено из множества простых путей $\Omega_q(p,r)$ следующим образом:

$$\Phi_q(p,r) = \Big\{\, a_1 R_{q_1} a_2 R_{q_2} \ldots a_s R_{q_s} a_{s+1} \,|\, s \geq 0,\ (p, q_1, q_2, \ldots, q_s, r)$$

$$\in \Omega_q(p,r), (\forall k \in \overline{1, s+1})\,(q_k \in \delta(q_{k-1}, a_k)) \text{ для } q_0 = p\,, q_{s+1} = r \,\Big\}.$$

Для каждого $q \in Q$ считаем $\Phi_q(q,q) = \{\, e \,\}$.

Пусть $q \in Q$ – состояние, для которого значение $\omega(q)$ максимально. Тогда множество Q_q содержит единственное состояние q, и

$$R_q = (\{\, a \in \Sigma \,|\, \delta(q,a) \ni q \,\})^*. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим произвольное состояние $q \in Q$; по предположению индукции, мы уже построили регулярные выражения R_p для всех $p > q$. Тогда, рассматривая граф переходов автомата $(Q_q, \Sigma, \delta, \{q\}, \{q\})$, мы можем записать допускаемый им язык следующим образом:

$$R_q = (\ \{\, a \in \Sigma \,|\, \delta(q,a) \ni q \,\} \ \cup \bigcup_{p>q} (\Phi_q(q,p) \cdot R_p \cdot \Phi_q(p,q))\ )^*. \tag{2}$$

В этом равенстве стоящее под знаком объединения p – та вершина из пройденных автоматом при допущении некоторого слова, которая имеет минимальное значение ω (не считая вершины q). Заметим, что (1) – частный случай (2).

Аналогично, язык, допускаемый K, может быть записан регулярным выражением (3) – см. ниже. (Используемое обозначение этого регулярного выражения – $\mathcal{R}_{K\omega}$ – отражает тот факт, что для его построения была выбрана конкретная функция ω. При выборе другой функции получится, вообще говоря, другое регулярное выражение, задающее тот же самый язык.)

$$\mathcal{R}_{K\omega} = \bigcup_{\substack{q \in Q,\\ s \in S, f \in F}} (\Phi_q(s,q) \cdot R_q \cdot \Phi_q(q,f)). \tag{3}$$

Рассмотрим пример – построение регулярного выражения (одного из возможных), задающего язык автомата (K), изображенного на следующем рисунке:

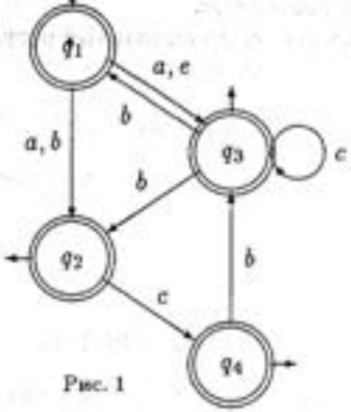

Рис. 1

Пусть функция ω определена так: $\omega(q_i) = i$ для всех $i \in \overline{1,4}$ (мы будем пользоваться только неравенствами $q_1 < q_2 < q_3 < q_4$).

Тогда, согласно (2), выполнены следующие равенства:

$$R_{q_4} = e, \quad R_{q_3} = c^*, \quad R_{q_2} = (cR_{q_4}bR_{q_3}b)^*,$$

$$R_{q_1} = (a+b)R_{q_2}cR_{q_4}bR_{q_3}b + (a+e)R_{q_3}b.$$

(Здесь и ниже, в записи $\mathcal{R}_{K_\omega}$, выражения, полученные применением (2) и (3), немного упрощены с помощью равенства $\phi^* = e$ и других известных свойств регулярных языков. Заметим, что возможны и другие упрощения.)

Согласно (3),

$$\mathcal{R}_{K_\omega} = \mathcal{R}_{U_\infty}(((a+b) + (a+e)R_{q_3}b)\,(R_{q_2} + cR_{q_4}) +$$

$$(a + e + (a+b)R_{q_2}cR_{q_4}b)\;R_{q_3}).$$

Выполнив все подстановки, из последнего равенства можно получить регулярное выражение (очень громоздкое) для допускаемого автоматом K языка:

$$\mathcal{R}_{K_\omega} = (a+b)\cdot(cbc^*b)^*cbc^*b + (a+e)c^*b(((a+b) + (a+e)c^*b)\cdot$$

$$((cbc^*b)^* + c) + (a + e + (a+b)\cdot(cbc^*b)^*cb)\;c^*).$$

3. Функция разметки.

Будем рассматривать произвольный регулярный язык L, некоторый конечный автомат

$$K = (Q, \Sigma, \delta, S, F),$$

допускающий этот язык, и произвольный всюду определенный автомат

$$T = (Q_T, \Sigma, \delta_T, \{s_T\}, F_T).$$

Для них определим функцию

$$\varphi^{in}_{KT} : Q \to \mathcal{P}(Q_T),$$

где для каждых $q \in Q$ и $\widetilde{q} \in Q_T$, множество $\varphi^{in}_{KT}(q)$ содержит $\widetilde{q}$ в том и только том случае, если

$$\mathcal{L}^{in}_K(q) \cap \mathcal{L}^{in}_T(\widetilde{q}) \neq \phi\ .$$

(При этом, используя известные факты теории конечных автоматов – см.[1] и др. – последнее определение можно считать

и *алгоритмом* построения функции φ^{in}_{KT}, поскольку $\mathcal{L}^{in}_K(q)$ и $\mathcal{L}^{in}_T(\widetilde{q})$ – регулярные языки. Отметим, что в частных случаях существует и более простой алгоритм построения этой функции, – она получается в процессе построения эквивалентного канонического автомата.)

Для эквивалентного канонического автомата

$$\widetilde{K} = (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$$

(являющегося по определению всюду определенным) функцию $\varphi^{in}_{K\widetilde{K}}$ (т.е. когда рассматриваемые автоматы, исследуемый и канонический, эквивалентны) будем кратко обозначать φ^{in}_K – именно эта функция и будет обычно использоваться в дальнейших построениях. В рассматриваемых далее примерах будем строить функцию φ^{in}_K.

Канонический автомат может иметь не более одного бесполезного состояния, однако бесполезное состояние, если оно и присутствует в автоматах, можно не рассматривать. Возможность этого ограничения объясняется таким обстоятельством. Если рассматриваемый (недетерминированный) автомат K не имеет ни одного бесполезного состояния, то для любого состояния q автомата K множество $\varphi^{in}_K(q)$ не содержит бесполезного состояния автомата $\widetilde{K^R}$ – это утверждение можно получить из определения детерминированного автомата. Заметим также, что для каждого недостижимого состояния q заданного автомата выполняется равенство $\varphi^{in}_K(q) = \phi$.

Рассмотрим пример – автомат, заданный рисунком 1 и эквивалентный канонический автомат, заданный рисунком 2:

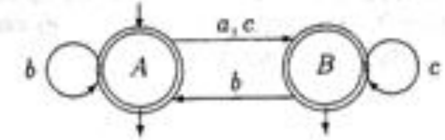

Рис. 2

Имеются следующие пары соответствующих состояний (т.е. состояний, для которых существует хоть одно слово, принадлежащее языкам $\mathcal{L}^{in}$ обоих состояний):

- (q_1, A), требуемое слово – c;
- (q_2, A), требуемое слово – b;
- (q_2, B), требуемое слово – a;
- (q_3, A), требуемое слово – снова c;
- (q_3, B), требуемое слово – снова a;
- (q_4, B), требуемое слово – ac.

Оставшиеся две пары состояний не подходят.

Таким образом, нами построена следующая функция φ_K^{in}:

$$\varphi_K^{in}(q_1) = \{A\},\ \varphi_K^{in}(q_2) = \varphi_K^{in}(q_3) = \{A, B\},\ \varphi_K^{in}(q_4) = \{B\}.$$

Существует и более простой способ построения функции φ_K^{in} – см. [3].

Утверждение 3.1. $\mathcal{L}_K^{out}(q) \subseteq \bigcap\limits_{\tilde{q} \in \varphi_K^{in}(q)} \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q})$

Доказательство. Пусть для некоторых v и $\tilde{q} \in \varphi_K^{in}(q)$ выполнено условие $v \notin \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q})$. Тогда достаточно доказать, что $v \notin \mathcal{L}_K^{out}(q)$.

Рассмотрим любое слово $u \in \mathcal{L}_K^{in}(q) \cap \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{in}(\tilde{q})$ (такое u существует по определению φ^{in}). Автомат $\tilde{K}$ – детерминированный, поэтому $uv \notin \mathcal{L}(\mathcal{K})$. Следовательно, условие $v \in \mathcal{L}_K^{in}(q)$, равносильное $uv \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$, противоречит равенству $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{K}}) = \mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Утверждение 3.2. $\mathcal{L}_K^{in}(q) \cdot \bigcap\limits_{\tilde{q} \in \varphi_K^{in}(q)} \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$

Доказательство. Рассмотрим любое слово $u \in \mathcal{L}_K^{in}(q)$. По определению φ^{in}, для некоторого $\tilde{q} \in \varphi_K^{in}(q)$ слово u принадлежит языку $\mathcal{L}_{\tilde{K}}^{in}(\tilde{q})$. Для всех слов

$$v \in \bigcap_{\tilde{q} \in \varphi_K^{in}(q)} \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q})$$

выполнено условие $v \in \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q})$. Следовательно, $uv \in \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{in}(\tilde{q}) \cdot \mathcal{L}_{\tilde{K}}^{out}(\tilde{q}) \subseteq \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{K}}) = \mathcal{L}(\mathcal{K})$.

4. Обратная функция разметки состояний.

Для заданного языка L рассмотрим канонический автомат, допускающий язык L^R (пусть R – множество состояний этого автомата), и функцию $\varphi_{K^R}^{in}$. По определению φ^{in}, эта функция имеет вид $\varphi_{K^R}^{in} : Q \to \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Определим функцию $\varphi_K^{out} : Q \to \mathcal{P}(\mathcal{R})$ следующим образом: $\varphi_K^{out}(q) = \varphi_{K^R}^{in}(q)$ для каждого $q \in Q$.

Продолжим рассмотрение автомата K, заданного рисунком 1. Эквивалентный автомату K^R канонический автомат (согласно, введенным обозначениям – $\widetilde{K^R}$) изображен на рис. 3:

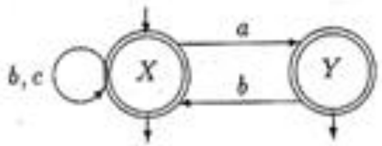

Рис. 3

Рассмотрим также инверсный автомат для $\widetilde{K^R}$, т.е. $\left(\widetilde{K^R}\right)^R$ (см. рис. 4);

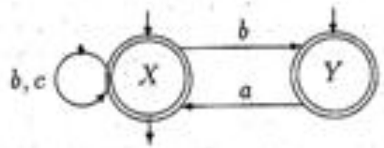

Рис. 4

заметим, что произвольный автомат K эквивалентен построенному на его основе $\left(\widetilde{K^R}\right)^R$.

Таким образом, канонический автомат, допускающий инверсный язык, также имеет 2 состояния (обозначенные на рисунке X и Y). Аналогично проведенным ранее построениям, получаем следующую функцию φ_K^{out}:

$$\varphi_K^{out}(q_1) = \{X, Y\},\ \varphi_K^{out}(q_2) = \varphi_K^{out}(q_3) = \varphi_K^{out}(q_4) = \{X\}.$$

Заметим, что $\varphi_K^{in}(q_2) = \varphi_K^{in}(q_3)$ и $\varphi_K^{out}(q_2) = \varphi_K^{out}(q_3)$.

Аналогично утверждениям 3.1 и 3.2, выполняются следующие два, «зеркальные»

Утверждение 4.1. $\mathcal{L}_K^{in}(\text{II}) \subseteq \left(\bigcap_{\overline{q} \in \varphi_K^{out}(q)} \mathcal{L}^{out}{}_{\widetilde{K^R}}(\overline{q}) \right)^R$

Утверждение 4.1. $\left(\bigcap_{\overline{q} \in \varphi_K^{out}(q)} \mathcal{L}^{out}{}_{\widetilde{K^R}}(\overline{q}) \right)^R \cdot \mathcal{L}_K^{out}(q) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$

5. Объединение состояний автомата.

При построении канонического конечного автомата в [1,2,3,5] и др. используется замена множества дуг, выходящих из одного состояния детерминированного конечного автомата, на множество дуг, выходящих из другого, эквивалентного состояния. Аналогичную процедуру можно осуществить и в случае недетерминированных автоматов: согласно вышеизложенному, существуют алгоритмы построения выходного языка заданного состояния (т.е. множества пометок путей из этого состояния в одно из финальных) – например, записи этого языка в виде регулярного выражения, а также сравнения двух таких языков. В случае положительного ответа алгоритма сравнения, два рассматриваемых состояния являются эквивалентными и могут быть объединены аналогичным образом.

Однако объединены могут быть не только эквивалентные (по рассмотренному отношению эквивалентности) состояния, но и такие, у которых совпадают значения одной из функций φ^{in} или φ^{out}. Описание такого – альтернативного рассмотренному выше – алгоритма объединения, в том числе достаточные условия возможности его применения, приведены в настоящем разделе.

Для некоторого автомата $K = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ и некоторых его вершин $q_1, q_2 \in Q$ обозначим записью $\mathcal{J}^{q_1 q_2}(K)$ автомат, граф переходов которого получается из графа переходов K следующим образом:

- для каждой вершины $r \in Q$ множества дуг вида $\gamma(q_1, r)$ заменяются на множества $\gamma(q_1, r) \cup \gamma(q_2, r)$;
- для каждой вершины $r \in Q$ множества дуг вида $\gamma(r, q_1)$ заменяются на множества $\gamma(r, q_1) \cup \gamma(r, q_2)$; таким образом, при любом из четырех вариантов $q', q'' \in \{q_1, q_2\}$ каждая дуга $\gamma(q', q'') \ni a$ становится петлей $\gamma(q_1, q_1) \ni a$;

- q_2 удаляется.

При этом в получаемом автомате q_1 является входом (выходом) тогда и только тогда, когда в K входом (соответственно, выходом) было хотя бы одно из состояний q_1, q_2.

Утверждение 5.1. Пусть для автомата $K = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ и некоторых его состояний $q_1, q_2 \in Q$ выполнено равенство $\varphi_K^{in}(q_1) = \varphi_K^{in}(q_2)$.[1] Тогда для автомата $K_1 = \mathcal{J}^{q_1 q_2}(K)$ выполнено равенство

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_\infty), \tag{4}$$

и при этом

$$\varphi_K^{in}(q_1) = \varphi_{K_1}^{in}(q_1). \tag{5}$$

Доказательство. Условие $\mathcal{L}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}_\infty)$ очевидно; докажем обратное включение. Если некоторый допускающий путь графа переходов автомата K_1 не проходит через q_1, то такой же путь содержится и в графе автомата K. Иначе – если этот путь содержит q_1, – согласно способу построения K_1 на основе K, пометка этого пути (пусть x) не есть слово из $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ только в том случае, если для некоторого $i \geq 2$, имеем $x = uv^i w$, где:

- u – пометка некоторого пути из одного из входов в q_1;
- v – пометка некоторого пути из q_1 в q_2;
- w – пометка некоторого пути из q_2 в один из выходов

(или наоборот, поменяв в сформулированных условиях местами q_1 и q_2, что рассматривается аналогично; другими словами: если в графе переходов автомата K_1 образуется некоторый q_1-цикл, в наших обозначениях помеченный v, а в графе K не было ни q_1-цикла, ни q_2-цикла с такой пометкой).

Как следствие сделанного предположения получаем

$$uv^2 w \notin \mathcal{L}(\mathcal{K}); \tag{6}$$

покажем, что выполнение условия (6) невозможно.

[1] Отметим, что согласно утверждению 3.1, из последнего получается равносильность условий $q_1 \in F$ и $q_2 \in F$.

По построению, $vw \in \mathcal{L}^{out}_K(q_1)$, поэтому согласно утверждению 3.1,

$$vw \in \bigcap_{\tilde{q} \in \varphi^{in}_K(q_1)} \mathcal{L}^{out}_K(\tilde{q}). \qquad (7)$$

По условию, $\varphi^{in}_K(q_1) = \varphi^{in}_K(q_2)$, поэтому

$$vw \in \bigcap_{\tilde{q} \in \varphi^{in}_K(q_2)} \mathcal{L}^{out}_K(\tilde{q}). \qquad (8)$$

Но $uv \in \mathcal{L}^{in}_K(q_2)$, т.е. согласно условиям (7) и (8) получаем $uvvw \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ вследствие утверждения 3.2.

Поскольку слова u, v и w, удовлетворяющие сформулированным условиям, выбирались произвольно, получаем, что (6) невозможно, а это доказывает равенство (4). Выполнение равенства (5) следует из определений детерминированного автомата и функции φ^{in} – пользуемся тем, что, согласно уже доказанному, один и тот же канонический автомат эквивалентен как K, так и K_1.

«Зеркально» доказывается следующее утверждение.

Утверждение 5.2. Пусть для автомата $K = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ и некоторых его состояний $q_1, q_2 \in Q$ выполнено равенство $\varphi^{out}_K(q_1) = \varphi^{out}_K(q_2)$. Тогда для автомата $K_1 = \mathcal{J}^{q_1 q_2}(K)$ выполнено равенство $\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}(K_1)$, при этом $\varphi^{out}_K(q_1) = \varphi^{out}_{K_1}(q_1)$.

Продолжим исследование автомата, заданного рисунком 1. Автоматы K^R и $\widetilde{K^R}$ и функция φ^{out}_K были рассмотрены выше, выполнено равенство $\varphi^{out}_K(q_2) = \varphi^{out}_K(q_4) = \{X\}$. Поэтому можно, используя утверждение 5.2, объединить состояния q_2 и q_4. Получаемый автомат $\mathcal{J}^{q_2 q_4}(K)$, эквивалентный K, приведен на рис. 5; отметим, что в нем имеется петля $\gamma(q_2, q_2) \ni c$, отсутствовавшая в автомате K.

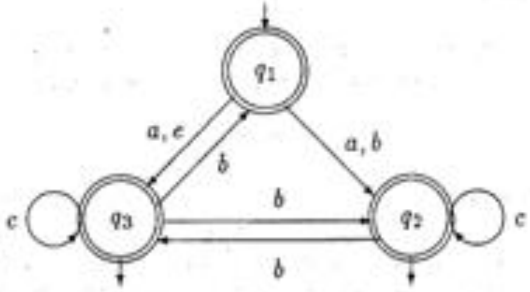

Рис. 5

Итак, с помощью описанного в этом разделе метода мы можем в некоторых случаях эквивалентно преобразовывать конечный автомат, уменьшая число его состояний, причем этот способ не был описан в [1]. Однако проблему минимизации числа состояний – т.е. задачу построения конечного автомата, эквивалентного заданному (или, что равносильно, допускающего заданный регулярный язык) и имеющему минимально возможное число состояний, мы рассматривать не будем. См. по этому поводу [1].

Литература.

1. В. Брауэр: *Введение в теорию конечных автоматов*, М., Радио и связь, 1987.

2. А. Ахо, Дж. Ульман: *Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1*, М., Мир, 1978.

3. Б. Ф. Мельников: *Подклассы класса контекстно-свободных языков*, М., Изд-во Моск. ун-та, 1995.

4. А. Саломаа: *Жемчужины теории формальных языков*, М., Мир, 1986.

5. D. Perrin: Finite automata, *Handbook of Theoret. Comput. Sci.*, Elsevier Sci. Publ., 1990.

УДК 519.716

К вопросу о строении верхних окрестностей замкнутых классов из решетки L_k

Михеева Е.А.

Настоящая работа относится к направлению в теории k-значных функций, которое занимается изучением строения решетки L_k замкнутых классов в k-значной логике P_k [1]. Для $k = 2$ решетка L_2 построена и полностью изучена Постом [2,3]. Оказалось, что L_2 состоит из счетного множества различных классов, каждый из которых имеет конечный базис. Описание L_k при $k \geq 3$ наталкивается на значительные трудности и в настоящий момент полного и исчерпывающего описания не имеет, поскольку в L_k есть классы, не имеющие конечного базиса, и L_k имеет мощность континуума [4].

Исследования в описании решетки L_k в настоящее время развиваются в нескольких направлениях. С одной стороны, они идут по пути описания отдельных фрагментов решетки. С другой стороны, они посвящены общим вопросам строения решетки: строению окрестности замкнутого класса. В [1] была описана нижняя окрестность замкнутого класса с конечным базисом, затем в [5] была получена полная классификация нижних окрестностей. В [6] описана верхняя окрестность предикатно-описуемого класса. В настоящей работе дается подход к классификации верхних окрестностей, подобной классификации из [5]. Задача ставилась перед автором академиком РАН С.В.Яблонским.

1.Верхние окрестности почти предикатно-описуемых классов.

Предикатом называется функция $P(y_1, \ldots, y_m)$, аргументы которой принимают значения из множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ $(k \geq 2)$, а сама функция принимает значения из множества истинностных значений $\{И, Л\}$. Число m называется местностью предиката.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k сохраняет предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$, если для любой системы наборов $\{(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)\}$, $i = 1, \ldots, m$, такой, что $P(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m) = \ldots = P(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m) =$И имеет место

$$P(f(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, f(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m)) = \text{И}.$$

Множество $U(P)$ всех функций из P_k, сохраняющих предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$, является замкнутым (относительно суперпозиции) классом и содержит селекторные функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$, $n = 1, 2, \ldots$, $1 \leq i \leq n$.

Через $[U]$ будем обозначать замыкание относительно суперпозиции системы функций U из P_k.

Следующее определение обобщает понятие предикатно-описуемого класса из [6].

Определение 1. Замкнутый класс U из L_k называется почти предикатно-описуемым, если существует предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$ такой, что $[U \cup e_1^1] = U(P)$.

Замечание. Предикатно-описуемый класс является и почти предикатно-описуемым, но класс последних шире.

Следующая теорема обобщает основной результат из [6].

Цепь $\overline{F}$: $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, состоящая из замкнутых классов, называем надцепью замкнутого класса U, если $U \subseteq F_n$ для всякого $n > 0$ и $U = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$.

Теорема 1. Следующие 3 утверждения эквивалентны:

1) Замкнутый класс U не имеет строго убывающих надцепей.
2) U имеет конечное число минимальных надклассов и каждый надкласс класса U содержит минимальный надкласс класса U.
3) U почти предикатно-описуем.

Доказательство ведем по схеме $1 \to 3 \to 2 \to 1$.

1) $1 \to 3$. Пусть выполнено 1. Определяем предикат $P^m(y_1, \ldots, y_{k^m})$ следующим образом. Пусть $f(x_1, \ldots, x_m) \in U$ или $f(x_1, \ldots, x_m) = e_i^m(x_1, \ldots, x_m)$ для некоторого i и пусть f определяется следующей таблицей:

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	$f(x_1, \ldots, x_m)$
0	0	$\ldots$	0	γ_1
0	0	$\ldots$	1	γ_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$k-1$	$k-1$	$\ldots$	$k-1$	γ_{k^m}

Положим $P^m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k^m}) = И$. В остальных случаях полагаем значение предиката равным $Л$. Получаем последовательность предикатов $P^1, P^2, \ldots$. Очевидно,

$$U(P^1) \supseteq U(P^2) \supseteq \ldots \supseteq [U \cup \{e_1^1\}] = U_1. \qquad (0.1)$$

Допустим $U = U_1$. Тогда из условия следует, что цепь (1) стабилизируется. Найдется m такое, что

$$U(P^m) = U(P^{m+1}) = \ldots = U_1.$$

Следовательно, U почти предикатно-описуем.

Допустим $U \neq U_1$. Рассмотрим в $U(P^1)$ множество F всех функций, не равных $e_1^1(x)$. Если $e_1^1(x) \in [F]$, то найдутся функции $h(x_1, \ldots, x_n) \in F, g_1(x), \ldots, g_n(x) \in U(P^1)$ такие, что

$$h(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = e_1^1(x)$$

Если одна из функций $g_1, \ldots, g_n$ не равна e_1^1, скажем функция g_1, то пусть $S(x) = h(x, g_2(x), \ldots, g_n(x))$. Тогда $S(g_1(x)) = e_1^1(x)$, то есть $e_1^1(x)$ получается суперпозицией одноместных функций из F. Если все функции $g_1, \ldots, g_n$ равны e_1^1, то пусть $S(x, y) = h(x, y, y, \ldots, y)$. Тогда $S(x, x) = e_1^1(x)$. Значит, если $e_1^1(x) \in [F]$, то $e_1^1(x)$ получается суперпозицией одноместных или двухместных функций из F.

Так как предел цепи (1) равен U_1, то найдется m_0 такое, что в классе F_0 функций из $U(P^{m_0})$, не равных $e_1^1(x)$, не будет одноместных функций, не принадлежащих U, и не будет двухместных функций $S(x, y)$ таких, что $S(x, x) = e_1^1(x)$. Тогда F_0 будет замкнутым классом в $U(P^{m_0})$, не содержащим из класса $U(P^{m_0})$ только функций, равных $e_1^1(x)$. Аналогично, класс F_n функций из $U(P^{m_0+n})$, не равных функций $e_1^1(x)$, будет замкнутым классом. Получаем цепь

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \qquad (0.2)$$

с пределом, равным U. Из 1) следует, что цепь (2) стабилизируется, т.е. найдется m_1 такое, что

$$F_{m_1} = F_{m_1+1} = \ldots = U$$

Но тогда $U(P^{m_1}) = U_1$, т.е. класс U почти предикатно-описуем.

2) $3 \to 2$. Пусть $U(P) = [U \cup \{e_1^1(x)\}]$ для некоторого предиката $P(y_1, \ldots, y_t)$. Допустим, $U \neq P_k$.

Возьмем произвольный замкнутый надкласс F класса U. Тогда класс F содержит функцию $e_1^1(x)$ (в случае, если $e_1^1(x) \notin U$ или содержит функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, не сохраняющую предикат P). В последнем случае можно выбрать n наборов

$$\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{t1}), \ldots, \alpha_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{tn}),$$

на которых P принимает значение $И$, а на наборе

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tn}))$$

принимает значение $Л$.

Пусть область истинности предиката P состоит из m наборов. Если $n > m$, то среди наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеются одинаковые. Отождествляя в функции f соответствующие переменные, получим функцию f из F, зависящую не более чем от m переменных, которая не сохраняет предикат P.

Таким образом, всякий замкнутый надкласс класса U содержит функцию, не принадлежащую классу U и зависящую не более чем от m переменных. Если $f_1, \ldots, f_s$ - все такие функции, то любой замкнутый надкласс класса U включает хотя бы один из замкнутых классов
$[U \cup \{f_1\}], \ldots, [U \cup \{f_s\}]$. Выбрав среди них минимальные, мы получим конечное число минимальных надклассов класса U и каждый надкласс класса U будет содержать минимальный надкласс.

3) $2 \to 1$. Пусть выполнено 2. Предположим $\overline{F}$ - надцепь класса U. Каждый класс F_n содержит некоторый из минимальных надклассов. В силу их конечности, по крайней мере один из них будет содержаться в бесконечном числе членов цепи $\overline{F}$, а из-за ее монотонной убываемости - во всех членах. Но тогда $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq U$. Противоречие. Следовательно, U не имеет надцепей. Теорема доказана.

2. О минимальных замкнутых надклассах.

Почти предикатно-описуемые классы имеют конечное число минимальных замкнутых надклассов. Из [2,3] вытекает, что в P_2 каждый замкнутый класс либо не имеет минимальных замкнутых надклассов, либо имеет конечное их число.

Теорема 2. Каждый замкнутый класс в P_k ($k \geq 2$) имеет не более счетного числа минимальных замкнутых надклассов.

Доказательство. Пусть U - собственный замкнутый класс, функции $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ не принадлежат классу U (конечный или счетный список). Рассмотрим классы

$$[U \cup \{g_1\}], \ldots, [U \cup \{g_n\}], \ldots \tag{0.3}$$

Каждый замкнутый надкласс класса U содержит один из классов из списка (3). Значит, минимальные замкнутые надклассы класса U (если они есть) лежат в списке (3). Следовательно, их множество не более чем счетно.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для каждого $k \geq 3$ в P_k существует замкнутый класс, имеющий счетное число минимальных замкнутых надклассов.

Доказательство. Возьмем функции

$$g_m(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{если } \exists i(x_i = 0) \vee \exists i \exists j (i \neq j \wedge x_i = x_j = 1), \\ 1 \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

$m = 2, 3, \ldots$.Пусть

$B_s = \{g_m(x_1, \ldots, x_m) | m \geq 2, m \neq s\}, s \geq 2;$

$B = \{g_m(x_1, \ldots, x_m) | m \geq 2\}.$

Определяем класс F как класс всех нетривиальных суперпозиций функций из множества B,

$F_s = [F \cup \{g_s\}], s \geq 2.$

Из леммы 3 из [5] следует, что класс F замкнут и не содержит ни одной функции из множества B. Из той же леммы вытекает, что класс F_s состоит из функций множества B и функций, равных функции $g_s(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, F предполон в F_s, т.е. F_s - минимальный замкнутый надкласс класса F. По лемме 3 из [5] классы F_s и F_t при $s \neq t$ различны. Поэтому ввиду теоремы 2 класс F имеет счетное число минимальных замкнутых надклассов.

Теорема доказана.

3. Об особых надцепях замкнутого класса.

Из [2,3] легко извлечь, что все замкнутые надклассы замкнутого класса U из P_k делятся на два типа: классы, содержащие минимальный замкнутый надкласс класса U, и классы, не содержащие никакого минимального замкнутого надкласса

класса U. Первые надклассы назовем регулярными, а последние - особыми. Далее, надцепи $\overline{F}$ замкнутого класса U тоже делятся на два типа: цепи, в которых каждый класс F_n регулярен, и цепи, в которых найдется особый класс F_{n_0}. В последнем случае F_n - особый класс для каждого $n \geq n_0$.

Определение 2. Надцепь $\overline{F}$ замкнутого класса F называется особой, если существует n_0 такое, что F_n - особый класс для каждого $n \geq n_0$.

Теорема 4. Пусть F - особый замкнутый надкласс замкнутого класса U. Тогда существует такая особая надцепь $\overline{F}$ класса U, что $F = F_0$.

Доказательство. Положим $F_0 = F$.

Допустим классы $F_0, \ldots, F_n$ построены, причем

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset U$$

и $F_0, \ldots, F_n$ - особые классы. Построим класс F_{n+1}.

Пусть $F_n \setminus U$ состоит из функций $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$. Для каждого $m \geq 1$ возьмем семейство $\Re_m$ замкнутых классов, содержащих U, содержащихся в F_n и не содержащих функции $f_1, \ldots, f_m$. Если β - цепь в $\Re$, то класс $G = \cup_{F \in \beta} F$ будет замкнутым и $f_1 \notin G, \ldots, f_m \notin G$. Поэтому β имеет верхнюю грань в $\Re_m$. Значит, в $\Re$ есть максимальные классы.

Все максимальные классы из $\Re_m$, взятые по всем $m \geq 1$, не могут равняться U, иначе U - предполный в F_n класс, откуда следует, что F_n - минимальный надкласс класса U. Следовательно, найдется m и максимальный класс G_m в $\Re_m$ такие, что $G_m \supset U$. Возьмем наименьшее m, для которого существует такой класс G_m, и положим $F_{n+1} = G_m$. Ясно, что $F_n \supset F_{n+1}$, $F_{n+1} \supset U$ и F_{n+1} - особый надкласс класса U.

Получаем цепь $\overline{F}$:

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots.$$

Из построения ясно, что предел цепи $\overline{F}$ равен U. Следовательно, $\overline{F}$ - особая надцепь класса U.

Теорема доказана.

Литература.

1. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР - 1958. - т.51. - с.5-142.

2. Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions// Amer. I.Math. - 1921. - V.43. - P.163-185.

3. Post E. Two- valued iterative systems of mathematical logic // Ann.Math. Studies. - 1941. - V.5.

4. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. -1959. - т.127, N1. - с.44-46.

5. Михеева Е.А. Классификация нижних окрестностей замкнутых классов из решетки L_k // Дискретная математика - 1991. - т.3, вып.4 - с.3-15.

6. Яблонский С.В. Строение верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // ДАН СССР. - 1974. - т.218, N2. - с.304-307.

УДК 512.554

ВОПРОС НИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОММУТАНТА АЛГЕБРЫ ИЗ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРОЙ ЛИ КАРТАНОВСКОГО ТИПА.

Мищенко С.П.

Данная работа относится к теории многообразий алгебр Ли. Характеристика основного поля равна нулю. В статье исследован вопрос следования условия нильпотентности коммутантов алгебр из условия нильпотентности коммутантов двупорожденных алгебр многообразия. Этот результат неверен даже для одного из многообразий почти полиномиального роста: наименьшего многообразия, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество. Оно имеет бесконечный базисный ранг, то есть не порождается своей конечно порожденной относительно свободной алгеброй, а любое собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост, а следовательно состоит из алгебр с нильпотентными коммутантами. Подробнее об этом можно прочитать в обзоре автора [1].

Необъясняемые понятия можно найти в монографии [2], которой будем следовать с одной лишь разницей: в отличие от монографии будем опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $xyz = ((xy)z)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Нильпотентность коммутантов алгебр многообразия, в котором выполнены все тождества бесконечномерной простой алгебры картановского типа, определяется нильпотентностью коммутанта относительно свободной алгебры ранга два.

Прежде, чем приступить к доказательству, введем необходимые обозначения.

Обозначим через $W_1, W_2, \ldots$- общую серию бесконечномерных простых алгебр картановского типа. Той же буквой, только жирным шрифтом, будем обозначать соответствующее многообразие алгебр Ли. То есть $\mathbf{W}_k = \operatorname{var}(W_k)$.

Пусть для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ через $F_2(\mathbf{V})$ обозначена относительно свободная алгебра ранга два.

Обозначим $\mathbf{A}$- многообразие абелевых алгебр Ли, $\mathbf{N}_c$- многообразие нильпотентных алгебр ступени нильпотентности не выше c. Тогда $\mathbf{N}_c\mathbf{A}$ - многообразие алгебр Ли, коммутанты которых нильпотентны ступени не выше c. Последнее многообразие определяется тождеством

$$(x_0 y_0)(x_1 y_1)(x_2 y_2)\ldots(x_c y_c) \qquad (1)$$

Кроме этого, нам потребуются еще два тождества:

$$z(xy)^m = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{p\in S_m, q\in S_m} (-1)^p (-1)^q z(x_{p(1)} y_{q(1)})(x_{p(2)} y_{q(2)})\ldots(x_{p(m)} y_{q(m)}) = 0 \quad (3)$$

Сформулируем необходимые в дальнейшем результаты. Первый - основной результат работы [3]:

Теорема 2. Пусть $\mathbf{V}$ такое многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики, что в нем выполнены тождества (2), (3) и существуют числа a, b, для которых выполняются неравенства

$$c_n(\mathbf{V}) \le b a^n \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда алгебры многообразия $\mathbf{V}$ имеют нильпотентный коммутант, то есть существует число c, что выполнено включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$.

Сохраним обозначения из упомянутого обзора автора для разрешимых многообразий полиномиального роста $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$. Сформулируем доказанную в нем теорему (см. [1], Теорема 5.8).

Теорема 3. Пусть $\mathbf{V}$- многообразие разрешимых алгебр Ли. Причем $\mathbf{V}_2 \not\subset \mathbf{V}, \mathbf{V}_3 \not\subset \mathbf{V}, \mathbf{V}_4 \not\subset \mathbf{V}$. Тогда существует такое число c, что выполняется включение $\mathbf{N}_c\mathbf{A}$.

Еще один результат автора, доказательство которого можно прочитать на стр. 428 монографии [2].

Теорема 4. Многообразие $\mathbf{W}_k$ порожденное алгеброй W_k имеет экспоненциальный рост.

Теперь мы готовы изложить

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\mathbf{V}$ - многообразие алгебр Ли, причем $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}_k$, а алгебра $F_2(\mathbf{V})$ принадлежит многообразию $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$ при некотором c.

В этом случае в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено такое условие: элемент от двух образующих из соответствующего члена нижнего центрального ряда коммутанта относительно свободной алгебры равен нулю.

Покажем, что в многообразии $\mathbf{V}$ при некотором m выполнено тождество (2).

Для любого r существует такое число m, что элемент $z(xy)^m$ по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$ равен линейной комбинации элементов, имеющих следующую скобочную структуру: два коммутатора, каждый из которых является левонормированным коммутатором по крайней мере r коммутаторов. Это следует из теоремы 3, так как многообразие $\mathbf{V} \cap \mathbf{AN}_r\mathbf{A}$ удовлетворяет ее условиям (в многообразии $\mathbf{V}_2$ не выполнено ни одно стандартное тождество, а в многообразии $\mathbf{W}_k$ это не так, что касается многообразий $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_4$, то их относительно свободные алгебры ранга два имеют ненильпотентные коммутанты).

Так как один из коммутаторов в каждом слагаемом зависит только от переменных x и y, то он равен нулю в силу условия нильпотентности коммутанта алгебры $F_2(\mathbf{V})$.

Итак, в многообразии $\mathbf{V}$ для некоторого m выполнено тождество (2).

Для того, чтобы доказательство теоремы 1 следовало из сформулированных теорем 2 и 4, достаточно показать, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено также тождество (3).

Это хорошо известный факт. Например, можно сослаться на результаты § 43 монографии [4].

Теорема доказана.

Литература.

1. Мищенко С.П. Рост многообразий алгебр Ли (обзор) // УМН.- 1990.- Т. 45.- N 6(276).- С. 25 - 45.
2. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли.- М.: Наука, 1985.
3. Мищенко С.П. Одно достаточное условие нильпотентности коммутанта алгебры Ли // Известия ВУЗов. Серия математика. - 1996 (в печати)
4. Размыслов Ю.П. Тождества алгебр и их представлений.- М.: Наука, 1989.

УДК 517.934

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЯЗЫКЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФС.

Нечаева Н.Н.

Интегрированный язык имитационного моделирования ФС содержит в своей основе наиболее распространенные классы моделей и предназначен для моделирования сложных физических систем.

При разработке языка для описания непрерывных систем с сосредоточенными параметрами выполнено обобщение таких известных классов моделей, как потоковые, сигнальные и структурные схемы.

При реализации языка необходимо было определить структуру математической модели (ММ) и построить алгоритм формирования ММ.

При формировании математической модели потоковые, сигнальные и структурные схемы, записанные на входном языке, преобразуются в систему уравнений . В качестве ММ выбрана система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Полученная система уравнений анализируется и сводится к типовому виду, а затем интегрируется для реализации необходимого вида анализа.

Алгоритм формирования ММ для динамической системы складывается из алгоритмов формирования ММ для потоковых, сигнальных, структурных схем и уравнений связи между схемами.

При построении алгоритма формирования ММ для потоковых схем выбран метод переменных состояния.

Используя описание модели потоковой схемы на входном языке, необходимо получить топологические матрицы схемы. Направленный граф схемы дает возможность построить матрицу инциденций. Ветви графа будут соответствовать элементам схемы. Узлы, относящиеся к данному элементу, показывают, какие узлы данная ветвь соединяет. Информацию о направлении ветвей получим из задания порядка узлов "исток-сток".

На основании этой информации строим матрицу инциденций А, строки которой соответствуют узлам графа, а столбцы - ветвям.

Для получения топологических уравнений необходимо произвести выбор дерева. Дерево выбирается с учетом некоторых предварительных требований к порядку рассмотрения различных типов схемных элементов, входящих в дерево. Каждому типу элемента присваивается определенный приоритет вхождения в дерево. Поэтому при построении матрицы инциденций А элементы располагаем исходя из установленного приоритета типов элементов.

В результате будем иметь собственное или нормальное дерево направленного графа. Дерево графа дает возможность получить матрицы главных сечений D и главных контуров B.

В [2] предложен и обоснован эффективный метод получения матриц главных сечений D и главных контуров B из матрицы А, с помощью которых формируется система топологических уравнений.

Если с помощью элементарных операций над строками и столбцами матрицы инциденций А привести ее к виду $[1|A]$, чтобы в левой части получилась единичная подматрица, то ветви, соответствующие столбцам единичной подматрицы, будут образовывать собственное дерево графа. Матрица, полученная в результате данных преобразований, будет являться матрицей главных сечений D.

$$D = \begin{array}{c} \\ E \\ C \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E & C & R & & G & L & I \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & D_{EG} & D_{EL} & D_{EI} \\ 0 & 1 & 0 & | & D_{CG} & D_{CL} & D_{CI} \\ 0 & 0 & 1 & | & D_{RG} & D_{RL} & D_{RI} \end{array}\right) \end{array}$$

Такой вид будет иметь матрица главных сечений для линейных схем с правильной структурой. Схемами с правильной структурой называют схемы, для которых можно построить собственное дерево.

Матрицу главных сечений можно представить в виде

$$D = [1_p | D_x],$$

где индекс р означает ребра дерева, х - хорды.

Матрицы B_p и D_x связаны простым соотношением.

$$D_x = -B_p^T \quad \text{или} \quad B_p = -D_x^T$$

т.е. $B = [B_p|1] = [-D_x^T|1]$. Следовательно, матрицу главных контуров для схем с правильной структурой можно представить следующим образом

$$B = \begin{array}{c} \\ E \\ C \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E & C & R & G & L & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} -D_{EG}^T & -D_{CG}^T & -D_{RG}^T & | & 1 & 0 & 0 \\ -D_{EL}^T & -D_{CL}^T & -D_{RL}^T & | & 0 & 1 & 0 \\ -D_{EI}^T & -D_{CI}^T & -D_{RI}^T & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Запишем уравнения для главных сечений и главных контуров

$$Di(t) = 0, \quad Bu(t) = 0$$

Предполагается, что строки u(t) и i(t) и столбцы B и D расположены в том же порядке, что и ветви.

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_p(t) \\ u_x(t) \end{bmatrix}, \qquad i(t) = \begin{bmatrix} i_p(t) \\ i_x(t) \end{bmatrix},$$

где индекс p означает ребра дерева, x - хорды.

В качестве переменных состояния выберем разностные переменные на ребрах дерева $u_p(t)$ и потоковые переменные на хордах $i_x(t)$, т.е. u_C, u_R, i_G, i_L.

Чтобы из уравнений исключить другие переменные, используем следующие соотношения

$$i_R = 1/R u_R, \quad u_G = 1/G i_G,$$

$$i_C = C du_C/dt, \quad u_L = L di_L/dt.$$

В результате всех преобразований получим следующую математическую модель для потоковой схемы с правильной структурой

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_R \\ i_G \\ i_L \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -D_{CG} & -D_{CL} \\ 0 & -1/R & -D_{RG} & -D_{RL} \\ D_{CG}^T & D_{RG}^T & -1/G & 0 \\ D_{CL}^T & D_{RL}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_R \\ i_G \\ i_L \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & D_{CI} \\ 0 & D_{RI} \\ D_{EG}^T & 0 \\ D_{EL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_E \\ i_I \end{bmatrix}$$

В общем случае, источники E и I могут быть зависимыми от переменных состояния и от времени t, т.е. $u_E = u_E(x,t)$, $i_I = i_I(x,t)$. Таким образом, мы получили ММ для потоковой схемы в виде

$$Ax(t)' = Bx(t) + C(x,t),$$

где $x(t) = [u_C, u_R, i_G, i_L]^T$ - вектор неизвестных, A, B - квадратные матрицы действительных коэффициентов, $C(x,t) = [u_E(x,t), i_I(x,t)]^T$ - вектор-функция.

Теперь рассмотрим формирование математической модели для сигнальной схемы.

Каждый элемент сигнальной схемы можно представить в виде системы уравнений.

$$\begin{array}{rcl} KRP & : & DK + DR + DP = \sum D, \\ & & DK = KdSF/dt,\ DR = RSF,\ dDP/dt = PSF. \\ KR & : & DK + DR = \sum D, \\ & & DK = KdSF/dt,\ DR = RSF. \\ KP & : & DK + DP = \sum D, \\ & & DK = KdSF/dt,\ dDP/dt = PSF, \\ RP & : & DR + DP = \sum D, \\ & & DR = RSF,\ dDP/dt = PSF. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} K & : & DK = \sum D, \\ & & DK = KdSF/dt. \\ R & : & DR = \sum D, \\ & & DR = RSF. \\ P & : & DP = \sum D, \\ & & dDP/dt = PSF. \end{array}$$

где SF = SF(t).

Система уравнений для элемента KRP выражает наиболее общую форму представления элементов сигнальной схемы. Системы уравнений для других элементов могут быть получены из этой системы с помощью исключения строк и столбцов, соответствующих отсутствующим переменным. Запишем в матричном виде систему уравнений для элемента KRP. В зависимости от типа входа связи можно записать следующие системы уравнений.

Если вход типа D :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DR \\ DP \\ Y \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DR \\ DP \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_j D_j \end{bmatrix}$$

Если вход типа F :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DR \\ DP \\ Y \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DR \\ DP \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_j SF_j \end{bmatrix}$$

Эти системы уравнений можно принять за обобщенную форму представления элемента сигнальной схемы. Из нее можно получить систему уравнений для любого элемента сигнальной схемы. Например, чтобы получить систему уравнений

для элемента KP, необходимо исключить строку и столбец, соответствующие отсутствующей переменной DR. В результате получим следующие системы уравнений для элемента KP в зависимости от типа входа:

Если вход типа D :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DP \\ Y \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DP \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_j D_j \end{bmatrix}$$

Если вход типа F :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DP \\ Y \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF \\ DK \\ DP \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_j SF_j \end{bmatrix}$$

Чтобы получить систему уравнений, например, для элемента R, необходимо из обобщенной формы исключить строки и столбцы, соответствующие переменным DK и DP. Аналогично можно получить систему уравнений для любого элемента сигнальной схемы, используя обобщенную форму представления.

Общая система уравнений для сигнальной схемы формируется путем объединения систем уравнений для каждого элемента, учитываются связи между элементами и внешние воздействия. Данная система будет системой ДАУ в виде:

$$Ax(t)' = Bx(t) + C(x,t),$$

где x(t) - вектор неизвестных, A, B - квадратные матрицы действительных коэффициентов, C(x,t) - вектор-функция.

Для интегрирования данной системы необходимо еще задать начальные условия

$$x(t_0) = x_0.$$

Для структурной схемы математическая модель строится следующим образом. Каждому блоку структурной схемы соответствует свое уравнение.

$$\begin{array}{rcl}
UMN & : & z = b(\sum_i b_i z_i + c), \\
SUM & : & z = \sum_i b_i z_i + c, \\
INT & : & dz/dt = b\sum b_i z_i,\ z(0) = z_0, \\
DIF & : & z = b dz_i/dt,\ z_i(0) = z_{i_0}, \\
APE & : & z + a_1 dz/dt = b_0 z_i,\ z(0) = z_0, \\
WMN & : & a_0 z + a_1 dz/dt + a_2 d^2 z/dt^2 + a_3 d^3 z/dt^3 = \\
 & & = b_0 z_i + b_1 dz_i/dt + b_2 d^2 z_i/dt^2 + b_3 d^3 z_i/dt^3, \\
 & & z(0) = z_0,\ z'(0) = z_0',\ z''(0) = z_0'', \\
 & & z_i(0) = z_{i_0},\ z_i'(0) = z_{i_0}',\ z_i''(0) = z_{i_0}''.
\end{array}$$

где z - выходная переменная текущего блока, z_i - входные переменные для данного блока (выходные переменные с блоков i, $i = 1, 2, ...$), b, b_i, b_0, b_1, b_2, b_3, a_0, a_1, a_2, a_3 - коэффициенты, z_0, z_{i_0}, z_0', z_0'', z_{i_0}', z_{i_0}'' - начальные значения переменных, $c = c(t)$ - внешнее воздействие.

Объединяя уравнения для каждого блока структурной схемы, получим математическую модель для структурной схемы

$$Az(t)' = Bz(t) + C(t),$$

где z(t) - вектор неизвестных, A, B - квадратные матрицы действительных коэффициентов, C(t) - вектор внешних воздействий.

Мы показали, как формируются математические модели для потоковых, сигнальных и структурных схем. Если модель представлена в виде совокупности данных схем, то общая ММ может быть получена с помощью объединения ММ для каждой схемы и уравнений связей между схемами.

Так реализован алгоритм формирования ММ в языке ФС, который позволяет получить ММ в виде

$$Ax(t)' = Bx(t) + C(x, t),$$

где x(t) - вектор неизвестных, A, B - квадратные матрицы действительных коэффициентов, C(x,t) - вектор связей и внешних воздействий.

Литература:

1. Кумунжиев К.В., Нечаева Н.Н. Моделирование на языке ФС. /Учеб.пособие. - Ульяновск, 1995.

2. Чуа Л.О., Пен-Мин-Лин Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы).-М.:Энергия, 1980.

УДК 519.218

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Николаев А.Ф.

Пусть на измеримом пространстве (Ω, F) заданы:

1) семейство вероятностных мер $\{P_\pi, 0 \le \pi \le 1\}$;

2) случайная величина $\theta = \theta(\omega)$ со значениями в $[0, \infty)$, такая,что $P_\pi\{\theta = 0\} = \pi, P_\pi\{\theta \ge t | \theta > 0\} = e^{-\lambda t}$;

3) винеровский процесс $W = (W_t)_{t \ge 0}$,не зависящий от θ.

Предположим,что наблюдению доступен случайный процесс $(x_t)_{t \ge 0}$ с дифференциалом

$$dx_t = [a_t^1 + (a_t^2 - a_t^1)\chi(t - \theta)]dt + \sigma dW_t, x_0 = 0,$$

где $\chi(t) = I\{t \ge 0\}, \sigma > 0$, $a_t^i \sim F_t$ измеримые функции и $F_t = \sigma\{\pi; x_s, s \le t\}$.

Лемма. При каждом $0 \le \pi \le 1$ случайная функция

$$\Pi_\pi = \{\pi_t(\omega, \pi), F_t, P_t\}, t \ge 0$$

является марковской с дифференциалом

$$d\pi_t = (1 - \pi_t)(\lambda + \frac{a_t^1(a_t^2 - a_t^1)}{\sigma^2}\pi_t)dt + \pi_t(1 - \pi_t)\frac{a_t^2 - a_t^1}{\sigma}d\overline{W}_t, \pi_0 = 0 \quad (1)$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \ge 0}$ винеровский процесс, $\pi_t = P_\pi\{\theta \le t | F_t\}$.

Доказательство. В силу леммы 4.4 [1] для каждого $0 \le \pi \le 1$ существует винеровский процесс $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \ge 0}$,такой что

$$dx_t = [a_t^1 + (a_t^2 - a_t^1)\pi_t]dt + \sigma d\overline{W}_t \quad (2)$$

Пусть $\mu_s(*), s \ge 0$ мера в пространстве действительных функций $x = (x_t)_{t \ge 0}, x_0 = 0$, отвечающая процессу $(\eta_t^s)_{t \ge 0}$ с дифференциалом

$$d\eta_t^s = [a_t^1 + (a_t^2 - a_t^1)\chi(t - s)]dt + \sigma dW_t, \eta_0^s = 0.$$

Если s=∞,то положим $\mu(*) = \mu_\infty(*)$. Образуем новую меру $\nu_t^\pi(*)$:

$$\nu_t^\pi = \pi\mu_0 + (1 - \pi)\int_0^t exp(-\lambda s)\lambda\mu_s(*)ds, \nu^\pi = \nu_\infty^\pi(*).$$

Из формулы Байеса следует,что

$$\pi_t = P_\pi\{\theta \le t | x_0^t\} = \frac{d\nu_t^\pi}{d\nu^\pi}(x_0^t),$$

где $\frac{d\nu_t^\pi}{d\nu^\pi}(x_0^t)$ производная Радома-Никодима в "точке" x_t^0. Поскольку меры ν_t^π,ν^π и μ взаимно абсолютно непрерывны,то (ν^π-п.н.)

$$\frac{d\nu_t^\pi}{d\nu^\pi}(x_0^t) = \frac{d\nu_t^\pi}{d\mu}(x_0^t) / \frac{d\nu_t}{d\mu}(x_0^t) =$$

$$\frac{\pi\frac{d\mu_0}{d\mu}(x_0^t) + (1 - \pi)\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{d\mu_s}{d\mu}(x_0^t)ds}{\pi\frac{d\mu_0}{d\mu}(x_0^t) + (1 - \pi)\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{d\mu_s}{d\mu}(x_0^t)ds + (1 - \pi)\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s}\frac{d\mu_s}{d\mu}(x_0^t)ds}$$

В силу теоремы 7.19 [2]

$$\frac{d\mu_s}{d\mu}(x_0^t) = exp(\frac{1}{\sigma^2}[\int_s^t (a_u^2 - a_u^1)dx_u - \frac{1}{2}\int_s^t (a_u^2)^2 - (a_u^1)^2 du])$$

$$= Y_t^s, s \le t.$$

В силу теоремы 7.20[2] Y_t^s является решением уравнения

$$Y_t^s = 1 + \int_s^t Y_u^s(a_u^2 - a_u^1)\frac{1}{\sigma^2}dx_u.$$

(Предполагается,что все a_u^i таковы,что выполнены все условия приведенных теорем).

Очевидно,что $\frac{d\mu_s}{d\mu}(x_0^t) \equiv 1$,если $s > t$.

Поэтому(ν-п.н.)

$$\pi_t = \frac{\pi Y_t^0 + (1-\pi)\int\limits_0^t \lambda Y_t^s e^{-\lambda s} ds}{\pi Y_t^0 + (1-\pi)\int\limits_0^t Y_t^s \lambda e^{-\lambda s} ds + (1-\pi)e^{-\lambda t}} \qquad (3)$$

Значит

$$1-\pi_t = \frac{(1-\pi_t)e^{-\lambda t}}{\pi Y_t^0 + (1-\pi)\int\limits_0^t \lambda Y_t^s e^{-\lambda s} ds + (1-\pi)e^{-\lambda t}} \qquad (4).$$

В силу неравенства Колмогорова (2)

$$P_\pi\{sup_{s\le t}|\overline{W}_s| \ge c\} \le \frac{t}{c^2}, t>0.$$

Поэтому согласно [2]

$$P_\pi\{sup_{s\le t}|x_s| \le \infty\} = 1.$$

Отсюда следует, что для любого конечного $t \ge 0$

$$P_\pi\{\pi_s < 1; s \le t\} = 1,$$

если только $0 \le \pi < 1$.
Положим $\phi_t = \frac{\pi_t}{1-\pi_t}$. В силу последнего равенства имеем

$$P_\pi = \{\phi_s < \infty; s \le t\} = 1, 0 \le \pi < 1, t \ge 0,$$

при этом,согласно (3) и (4), для всех $0 \le \pi < 1$

$$\phi_t = \frac{\pi}{1-\pi} Y_t^0 e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} \int\limits_0^t Y_t^s e^{-\lambda s} ds \qquad (5).$$

Стохастически дифференцируя [5],получим

$$d\phi_t = \lambda(1+\phi)dt + \phi_t \frac{a_t^2 - a_t^1}{\sigma^2} dx_t, \phi_0 = \frac{\pi}{1-\pi}.$$

Отсюда для $\pi_t = \frac{\phi_t}{1+\phi_t}$ по формуле Ито получим

$$d\pi_t = (1-\pi_t)(\lambda - \frac{(a_t^2 - a_t^1)^2}{\sigma^2})dt + \pi_t(1-\pi_t)\frac{a_t^2 - a_t^1}{\sigma^2} dx_t.$$

Из последнего равенства и из (2) следует (1). Лемма доказана.

Литература.

[1] Ширяев А.Н. "Статистический последовательный анализ". Издательство "Наука",Москва,1969.

[2] Липцер Р.Ш.,Ширяев А.Н. "Статистика случайных процессов". Издательство "Наука",Москва,1974.

УДК 531.36 + 517.929

К МЕТОДУ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА.

Павликов С. В.

Целью настоящей работы является развитие метода предельных уравнений и предельных функционалов Ляпунова [1-5] и исследование свойств устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа [6,7].

1. Определение уравнения нейтрального типа.

Пусть $R =]-\infty, +\infty[$ есть действительная ось, $R^+ = [0, +\infty[$, R^n есть действительное евклидово пространство n-векторов x с нормой $|x|$, $h \geq 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, \alpha \leq s \leq \beta)$, $C_H = \{\varphi \in C_{[-h,0]} : \|\varphi\| < H\}$, для непрерывной функции $x :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $x_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$ для $-h \leq s \leq 0$.

Определение 1.1. Пусть $\Gamma = R^+ \times C_H$ и пусть $F : \Gamma \to R^n$, $G : \Gamma \to R^n$ - заданные непрерывные функции. Соотношение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = F(t, x_t) \qquad (1.1)$$

называется функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа НФДУ(F, G), определенное на Γ.

Определение 1.2. Для данного НФДУ(F,G) функция x называется решением уравнения (1.1) на $[\alpha - h, \alpha + A)$, если $\alpha \in R^+$, $A > 0$ таковы, что $x \in C_{[\alpha-h,\alpha+A)}$, причем $(t, x_t) \in \Gamma$, $t \in [\alpha, \alpha + A)$, выражение $x(t) - G(t, x_t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1.1) на $[\alpha, \alpha + A)$.

Для заданных $\alpha \in R^+, \varphi \in C_{[-h,0]}$, $(\alpha, \varphi) \in \Gamma$ функция $x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение, начинающееся в точке (α, φ), если имеется $A > 0$, такое что $x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1.1) на $[\alpha - h, \alpha + A)$ и $x_t(\alpha, \varphi)$ при $t = \alpha$ равна φ, т.е. $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$.

Предположим, что функции F и G удовлетворяют условиям Липшица вида:

$$|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L\|\varphi - \psi\| \qquad (1.2)$$

где L - константа, $(t, \varphi), (t, \psi) \in \Gamma$;

$$|G(t_2, \varphi) - G(t_1, \psi)| \leq N\,|t_2 - t_1| + \lambda\|\varphi - \psi\| \qquad (1.3)$$

где $(t_1, \varphi), (t_2, \psi) \in \Gamma$, N, λ - константы, $0 < \lambda < 1$.

Из (1.2) и (1.3) следует, что для каждого начального условия $(\alpha, \varphi) \in \Gamma$ существует единственное решение $x(t, \alpha, \varphi)$ (1.1), определенное на $[\alpha - h, \alpha + A)$ $(A > 0)$ и непрерывно зависящего от начальных данных.

2.Построение предельных систем. Теорема о квазиинвариантности предельного множества.

Введем следующие предположения относительно функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$.

Предположение 2.1. Функция $F(t, \varphi)$ удовлетворяет условию: для каждого числа r, $0 < r < H$, существует число $M(r)$, такое что $|F(t, \varphi)| < M$, где $t \in [0, +\infty), \varphi(s) \in C_r$.

Лемма 2.1. Если $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение (1.1), определенное для любого $t \geq \alpha - h$ и т., ч. $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для любого $t \in [\alpha - h, +\infty)$, тогда семейство функций $x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha$ предкомпактно в C_r.

Доказательство. Из того, что $x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1.1), следует:

$$x(t) = x(\alpha) - G(\alpha, \varphi) + G(t, x_t) + \int_\alpha^t F(s, x_s)\,ds,\ t \geq \alpha$$

$$x(s) = \varphi(s), \alpha - h \leq s \leq \alpha\ .$$

Тогда, в силу (1.3) и ограниченности $F(t, \varphi)$ на $R^+ \times C_r$, для $\Delta > 0$ имеем:

$$|x(t+\Delta) - x(t)| = |G(t+\Delta, x_{t+\Delta}) - G(t, x_t) + \int_t^{t+\Delta} F(s, x_s)\,ds| \leq \lambda\|x_{t+\Delta} - x_t\| + (M_r + N)\Delta.$$

Введем обозначение: $\rho = \sup_{\alpha \leq t} |x(t+\Delta) - x(t)|$.

Тогда: $\rho \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\max_{\alpha-h\le s\le\alpha}|x(s+\triangle)-\varphi(s)| + \frac{M_c+N}{1-\lambda}\Delta$.
Оценка для ρ доказывает лемму.

Предположение 2.2. Функция $F(t,\varphi)$ равномерно непрерывна, а функция $G(t,\varphi)$ ограничена на каждом множестве $R^+\times K$, где $K\subset C_H$ - произвольное компактное множество из C_H, так что $\forall K\subset C_H, \forall\varepsilon>0\ \exists m(K)$ и $\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$, т.ч. $\forall$ $(t,\varphi),(t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2)\in R^+\times K, |t_2-t_1|\le\delta, \|\varphi_2-\varphi_1\|\le\delta$ имеют место соотношения:

$$|F(t_2,\varphi_2)-F(t_1,\varphi_1)|<\varepsilon, |G(t,\varphi)|\le m \tag{2.1}$$

Лемма 2.2. При предположениях 2.1, 2.2 и условии (1.3) семейство сдвигов $\{F^\tau(t,\varphi)=F(t+\tau,\varphi),\tau\in R^+\}$ и семейство сдвигов $\{G^\tau(t,\varphi)=G(t+\tau,\varphi),\tau\in R^+\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $R^+\times K$, где K - произвольный компакт из C_H.

Определение 2.1. Компактной оболочкой $H^+(F,G)$ функций $F(t,\varphi)$ и $G(t,\varphi)$, определенных на $R^+\times C_H$, и удовлетворяющих выше сделанным предположениям, называется множество совокупностей (F^*, G^*, Λ), где $F^*,G^*\in C(\Lambda,R^n),\Lambda=R^+\times\Lambda_1,\Lambda_1\subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n\to+\infty, n\to\infty$, для которой $\{F(t+t_n,\varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t,\varphi)$, а $\{G(t+t_n,\varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t,\varphi)$ на каждом множестве $[0,n]\times K$, где $n=1,2...$, множество K – компакт из Λ_1.

Функции F^* и G^*: $R^+\times\Lambda_1\to R^n$ называются предельными к функциям F и G.

Для каждой $(F^*,G^*,\Lambda)\in H^+(F,G)$ определим предельное уравнение:

$$\frac{d}{dt}[x(t)-G^*(t,x_t)] = F^*(t,x_t) \tag{2.2}$$

Из определения функций F^* и G^* вытекает следующая лемма.

Лемма 2.3. Если выполняются условия (1.2) и (1.3), то каждая предельная функция $F^*(t,\varphi)$ удовлетворяет (1.2), а $G^*(t,\varphi)$ – (1.3) относительно Λ.

Из этой леммы следует, что решение $x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (2.2) для каждого начального условия $(\alpha,\varphi)\in\Lambda$ существует, непрерывно зависит от начальных данных и является единственным.

Определение 2.2. Положительное предельное множество

$$\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$$

в пространстве C_H есть

$$\Omega^+ = \{\psi\in C_H : \exists t_n\to+\infty, n\to\infty, x_t^{(n)}(\alpha,\varphi)\to\psi, n\to\infty\}.$$

Взаимосвязь решений (1.1) и (2.2) дается следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть $x=x(t,\alpha,\varphi)$ есть решение (1.1), определенное для любого $t\ge\alpha-h$ и $|x(t,\alpha,\varphi)|\le r<H$.

Тогда положительное предельное множество этого решения квазиинвариантно к семейству предельных уравнений (2.2), а именно, для каждого элемента $\psi\in\Omega^+(x(t,\alpha,\varphi))$ существует $(F^*,G^*,\Lambda)\in H^+(F,G)$ и уравнение $\frac{d}{dt}[y(t)-G^*(t,y_t)]=F^*(t,y_t)$, такое, что для решения этого уравнения $y(t,0,\psi)$ выполняется соотношение $\{y_t(0,\psi):t\in R^+\}\subset\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.

Доказательство. Пусть $t_n\to+\infty$ есть последовательность, для которой $x_{t_n}(\alpha,\varphi)\to\psi$ при $n\to+\infty$. Фиксируем $L>0$. Рассмотрим $x(t+t_n)$ при $t\in[0,L]$. Из леммы 3.1 семейство $\{x^n(t)\}$ равномерно непрерывно, а по условию теоремы оно также равностепенно ограниченно. Из теоремы Арцела существуют подпоследовательность $t_m\to+\infty$ и функция $y(t):[0,L]\to R^n$, т.ч. $\{x^m(t)\}$ сходится к $y(t)$ для $t\in[0,L]$. Из (1.1) следует, что:

$$x(t+t_m) = x(t_m) - G(t_m,x_{t_m}) + G(t+t_m,x_{t+t_m})$$

$$+\int_0^t F(s+t_m,x_{s+t_m})\,ds \tag{*}$$

Из леммы 2.1 имеем компакт $K\subset C_H$, такой что $x_t(\alpha,\varphi)\in K$ для $t\ge\alpha$. Из леммы 2.2 и теоремы Арцела, используя диагональный процесс, получаем, что существует подпоследовательность t_{mk} и функции $F^*(t,\varphi),G^*(t,\varphi)$: $R^+\times K\to R^n$, $F^*,G^*\in H^+(F,G)$ т.ч.: $F(t+t_{mk},\varphi)$ сходится к

$F^*(t,\varphi)$, $G(t+t_{mk},\varphi)$ сходится к $G^*(t,\varphi)$ равномерно на каждом компакте из $R^+\times K$. Следовательно $G(t+t_{mk},x_{t+t_{mk}})\to G^*(t,y_t(t)), F(t+t_{mk},x_{t+t_{mk}})\to F^*(t,y_t(t))$ равномерно при $0\le t\le L$; $G(t_n,x_{t_{mk}})\to G^*(0,\psi)$. Устремляя в $(*)$ $m\to\infty$ получаем, что функция $y(t)=y(t,0,\psi)$ есть решение уравнения $\frac{d}{dt}[y(t)-G^*(t,y_t)]=F^*(t,y_t)$ на отрезке $[-h,L]$. Последовательно полагаем $L=1,2...$ и используя диагональный процесс получаем, что решение $y(t,0,\psi)$ уравнения (2.2) определено для всех $t\ge -h$ и $y_t(0,\psi)\in\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ для всех $t\in R^+$.

Замечание: Областью определения уравнения (2.2) по построению можно принять область $R\times\Lambda_1$, где $\Lambda_1\subset C_H$. Решение $y(t,0,\psi)$ в теореме 3.1 также по построению продолжимо для всех $t\in R$, при этом $\{y_t(0,\psi):t\in R\}\in\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.

3. Локализации положительного предельного множества.

Обозначим через $Z(t,x_t)=x(t)-G(t,x_t)$ – ядро уравнения (1.1).

Пусть $V(t,x_t,Z(t,x_t)):R^+\times C_H\to R$ – некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $x_t\in C_H$ и $t\in R^+$ и т., ч. его производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (1.1) существует. Под $\frac{dV}{dt}$ понимается верхняя правосторонняя производная функционала $V=V(t,x_t,Z(t,x_t))$ вдоль решения $x=x(t,\alpha,\varphi)$ в точке (t_1,x_{t_1}):

$$\dot V(t_1,x_{t_1})=\lim_{h\to0^+}\sup\frac{1}{h}(V(t_1+h,x_{t_1+h},Z(t_1+h,x_{t_1+h}))-$$
$$-V(t_1,x_{t_1},Z(t_1,x_{t_1})).$$

Допустим, что для производной $\frac{dV}{dt}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot V(t,\varphi,Z(t,\varphi))\le -W(t,\varphi)\le 0,\forall(t,\varphi)\in R^+\times C_H$$

Допустим, что непрерывная функция $W=W(t,\varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+\times K$, K – компакт из C_H. Определение 3.1. Компактной оболочкой $H^+(F,G,W,\Lambda)$ функций $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$ и $W(t,\varphi)$, определенных на $R^+\times C_H$, и удовлетворяющих вышесделанным

требованиям, называется множество предельных совокупностей (F^*,G^*,W^*,Λ), где F^*, G^*, $W^*\in C(\Lambda,R^n),\Lambda=R^+\times\Lambda_1,\Lambda_1\subset C_H$, таких что существует последовательность $t_n\to+\infty,n\to\infty$, для которой $\{F^n(t,\varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t,\varphi)$, $\{G^n(t,\varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t,\varphi)$, $\{W^n(t,\varphi)\}$ – к $W^*(t,\varphi)$ на каждом множестве $[0,n]\times K$, где $n=1,2...$, множество K – компакт из Λ_1.

Теорема 3.1. Пусть:

1.) $V(t,x_t,Z(t,x_t)):R^+\times C_H\to R$ есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K\subset C_H$, т.е. $V(t,\varphi)\ge m(K)\ \forall(t,\varphi)\in R^+\times K$, причем существует $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (1.1).

2.) $\frac{dV}{dt}\le -W(t,\varphi)\le 0\ \forall(t,\varphi)\in R^+\times C_H$

3.) $x=x(t,\alpha,\varphi)$ – решение (1.1), такое что $|x(t,\alpha,\varphi)|\le r<H\ \forall t\ge\alpha-h$, где $(\alpha,\varphi)\in R^+\times C_H$.

Тогда для любой $\psi\in\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ существует предельная совокупность $(F^*,G^*,W^*,\Lambda)\in H^+(F,G,W)$, т. ч. для решения $y(t,0,\psi)$ уравнения $\frac{d}{dt}[y(t)-G^*(t,y_t)]=F^*(t,y_t)$ выполняются соотношения $\{y_t(0,\psi):t\in R\}\subset\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ и $\{y_t(0,\psi):t\in R\}\subset\{W^*(t,\varphi)=0\}$.

Доказательство. Пусть $\psi\in\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$. По определению это означает, что существует последовательность $t_n\to+\infty$, такая что $\lim_{n\to\infty}x_{t_n}(\alpha,\varphi)=\psi$.

Согласно теореме 2.1 для ψ существует $(F^*,G^*,\Lambda)\in H^+(F,G)$ и уравнение $\frac{d}{dt}[y(t)-G^*(t,y_t)]=F^*(t,y_t)$, такое что для решения этого уравнения $y(t,0,\psi)$ выполняется: $\{y_t(0,\psi):t\in R\}\subset\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$. Так как $\{x_t(\alpha,\varphi),t\ge\alpha\}\subset K$ – компакт из C_H, то мы можем найти подпоследовательность (примем,что она совпадает с подпоследовательностью, определяющую (F^*,G^*,Λ)) $t_{n_k}\to+\infty$, которая определяет $W^*(t,\varphi)$.

В силу условий теоремы функционал $V(t)=V(t,x_t,Z(t,x_t))$ определен для всех $t\ge\alpha$ и является монотонно убывающим и ограниченным снизу, а значит $\exists\ c_0=const$, такая что: $\lim_{t_{n_k}\to+\infty}V(t_{n_k}+t)=c_0$.

Из оценки для производной $\dot V$ имеем:

$$V(t_{n_k}+t) - V(t_{n_k}-t) \le -\int\limits_{t_{n_k}-t}^{t_{n_k}+t} W(s, x_s(\alpha,\varphi))\,ds =$$

$$-\int\limits_{-t}^{t} W(s+t_{n_k}, x_{t_{n_k}+s})\,ds \le 0.$$

Переходим к пределу при $n_k \to \infty$ и получаем, что $\{y_t(0,\psi) : t \in R\} \subset \{W^*(t,\varphi) = 0\}$. Теорема доказана.

4. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Допустим, что $G(t,0) \equiv 0$ и $F(t,0) \equiv 0$. Тогда (1.1) имеет нулевое решение, отвечающее начальной функции $\varphi(s) \equiv 0$.

Определение 4.1. Решение $x = 0$ уравнения (1.1) называется устойчивым , если для произвольного $\alpha \in R^+, \varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$, такое что из неравенства $\|\varphi\| \le \delta$ следует, что $\|x_t(\alpha,\varphi)\| < \varepsilon$ для всех $t \ge \alpha$. Если число δ не зависит от α, то решение $x = 0$ равномерно устойчиво.

Определение 4.2. Точка $x = 0$ является точкой притяжения решений уравнения (1.1), если для произвольного $\alpha \in R^+$ найдется $\eta = \eta(\alpha) > 0$, такое что из неравенства $\|\varphi\| \le \eta$ следует, что $x(t,\alpha,\varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Определение 4.3. Решение уравнения (1.1) x=0 асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и является точкой притяжения.

Определение 4.4. Решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво, если оно равномерно устойчиво, а также при некотором $\eta > 0$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $\|\varphi\| \le \eta$ и $t \ge \alpha + T$ будет выполнятся неравенство $\|x_t(\alpha,\varphi)\| \le \varepsilon$.

Обозначим через $\omega_i(u), \omega_i : [0,\infty) \to R$ непрерывные строго возрастающие функции, т. ч. $\omega_i(0) = 0, \omega_i(u) > 0$ при $u > 0, i = 1,2$.

Теорема 4.1. Предположим, что:

1.) существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t,x_t)) : R^+ \times C_H \to R$, производная которого в силу системы (1.1) существует, при этом :

$$\omega_1(|Z(t,x_t)|) \le V(t,x_t,Z(t,x_t)) \le \omega_2(\|x_t\|); \frac{dV}{dt} \le -W(t,\varphi) \le 0;$$

2.) существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что для любой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*, Λ), которая соответствует этой последовательности, множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ содержит из всех решений уравнения (2.2) только тривиальное $y = 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из условия 1.) теоремы имеем равномерную устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1.1) [6].

Возьмем число δ из условия равномерной устойчивости. Покажем, что область $\Lambda_1 = \{\varphi : \|\varphi\| \le \delta\}$ лежит в области притяжения решения $x = 0$. Предположим, что это не так. Тогда существуют $\alpha \in R^+$, некоторое $\gamma > 0$, $\varphi : \|\varphi\| < \delta$, и последовательность $t_m \to +\infty$, такие что: $\|x(t_m,\alpha,\varphi)\| \ge \gamma$.

Выберем $\delta_1 = \delta_1(\gamma/2)$ из свойства равномерной устойчивости решения $x = 0$ (1.1). Тогда $\|x_t(\alpha,\varphi)\| > \delta_1(\gamma/2)\ \forall t \ge 0$. Возьмем последовательность t_n из условия 2.) теоремы. Тогда $x(t+t_n,\alpha,\varphi) \to y(t,0,\psi)$ равномерно по $t \in [0,T]$, где $\psi = \lim_{n\to\infty} x_{t_n}$, $y(t,0,\psi)$ – есть решение предельного уравнения, образованного F^*, G^*. В силу $\|x_t(\alpha,\varphi)\| > \delta_1\ \forall t \ge 0$ имеем:

$$y_t(0,\psi)\| \ge \delta_1, \forall t \in R^+ \tag{4.1}$$

В силу теоремы 3.1 $\{y_t(0,\psi) : t \in R\} \subset \{W^*(t,\varphi = 0\}$. Но в силу условия 2.) теоремы имеем, что $y(t,0,\psi) = 0,\ t \ge 0,\ \psi \in \Lambda_1$. Полученное противоречие с неравенством (4.1) доказывает теорему. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Предположим, что:

1. существует непрерывный функционал $V(t,\varphi,Z(t,\varphi))$, такой, что $V(t,x_t,Z(t,x_t)) \le \omega(\|x_t\|)$, причем область $V > 0$ имеет открытое сечение, граница которого содержит элемент $\varphi(s) \equiv 0$, и производная $\dot V$ вдоль решения (1.1) удовлетворяет:

$$\frac{dV}{dt} = \dot V(t,\varphi,Z(t,\varphi)) = \lim_{\Delta t\to 0}\inf \frac{[V(t+\Delta t) - V(t)]}{\Delta t} \ge W(t,\varphi) \ge 0$$

при $(t,\varphi) \in (R^+ \times C_H)$.

2. существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что для любой предельной совокупности $(F^*, G^*, W^*, \Lambda) \in H^+(F,G,W)$, которая соответствует этой последовательности, множество $\{W(t,\varphi) = 0\}$ содержит из всех решений уравнения (2.2) только $y = 0$.

Тогда решение системы (1.1) x=0 неустойчиво.

Доказательство. Из условия 1. теоремы для произвольного $\alpha > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ имеем существование $\varphi_0(s)$, такой, что при $\|\varphi_0(s)\| \le \delta$ $V(\alpha,\varphi_0, Z(\alpha,\varphi_0)) = \gamma > 0$.

Предположим, что решение $x = x(t,\alpha,\varphi_0)$ ограничено, т.е.

$$\|x(t,\alpha,\varphi_0)\| \le r < H.$$

Тогда из свойства $V(t,x_t,Z(t,x_t)) \le \omega(\|x_t(s)\|)$ имеем: $\lim_{t_n\to+\infty} V(t+t_n) = c_0$, где t_n - последовательность из условия 2. теоремы. Кроме того, из $\dot V \ge 0$, следует, что $V \ge V(\alpha,\varphi_0,Z(\alpha,\varphi_0)) > 0$. Значит $\|x_t(t,\alpha,\varphi_0)\| \ge l_0$ $\forall t \ge \alpha$.

Из оценки для производной получаем:

$$V(t+t_n) - V(t_n) \ge \int\limits_0^t W(s+t_n, x_{s+t_n}(\alpha,\varphi_0))\,ds \ge 0.$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $W^*(t, y_t(0,\psi)) = 0$ для каждого $t \ge 0$, где $y(t,0,\psi)$ есть решение предельного уравнения (2.2) такое, что $\|y_t(0,\psi)\| \ge l_0$, что противоречит условию 2. теоремы.

Определени 4.5.[7] Ядро уравнения (1.1) $Z(t,x_t) = x(t) - G(t,x_t)$ называется устойчивым, если нулевое решение разностного уравнения:

$$Z(t,x_t) = 0, t \ge 0, y_0 = \psi \in C_Z, C_Z = \{\varphi \in C_H : Z(t,\varphi) = 0\}$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4.3. Предположим, что:

1.) в уравнении (1.1) $G(t,\varphi)$ линейно по φ, а ядро $Z(t,x_t)$ устойчиво;

2.) выполняется условие 1. теоремы 4.1;

3.) для каждой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*, Λ) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ содержит из всех решений предельного уравнения $\frac{d}{dt}[y(t) - G(t,y_t)] = F(t,y_t)$ только тривиальное $y = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Работа выполнена при частичной поддержке програмой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект 3.3.1. Автор благодарит проф. А.С. Андреева за полезные обсуждения.

Литература:

1. Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay// Funk. Ekv., 1978. V.21. p. 11-41.

2. Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations// J. Differ. Equat. 1985. V.59.

3. Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990 г., стр. 46-56.

4. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. О притяжении решений неавтономного функционально-дифференциального уравнения. Ульяновск: Функциональный анализ, выпуск 33, 1992 г., стр.16-23.

5. Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Ульяновск: фМГУ, 1994. 80 с.

6. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука, 1981. 448 с.

7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Москва: "Мир", 1984. 421 с.

УДК 519.832

КРИТЕРИИ РИСКА В ПРОГРАММНЫХ МОДЕЛЯХ ИГР С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

А.Н. Радионов.

В предлагаемой статье описывается метод оценки позиции в антагонистических недетерминированных играх, который является своего рода обобщением на случай недетерминированных игр метода минимакса, подробно описанного в книге Г.М. Адельсона-Вельского, В.А. Арлазарова, М.В. Донского "Программирование игр". Окончательная оценка позиции в новом методе определяется на основе всех оценок, полученных для всех возможных значений случайных факторов. Все эти значения специальным образом усредняются. С физической точки зрения такое усреднение дает положение центра тяжести одномерной системы, тела которой имеют массы, определяемые специально подобранной функцией (в дальнейшем - функцией риска), координаты тел системы - значения соответствующей статической оценки (определяется только детерминированными факторами игры).

Здесь и далее речь будет идти о нахождении "хорошей" тактики игрока с помощью рассчета на ЭВМ. Рассмотреть все варианты развития игровой партии не представляется возможным из-за их огромного количества. В результате приходится ограничиваться определенной "глубиной" просмотра, которую полагаем равной некоторому фиксированному числу. При достижении (во время перебора) предельной глубины считаем, что достигли заключительной позиции и вычисляем для нее статическую оценку, которая отражает степень приоритетности этой позиции в стратегическом плане.

Суть метода минимакса (для детерминированного случая) заключается в следующем: Пусть $\omega(\Pi_k)$ статическая оценка позиции Π_k, а Π_{k_i} позиция, получаемая из Π_k после хода g_i.

Обозначим через G_k множество всевозможных ходов из позиции Π_k:

$$G_k = \bigcup_{\forall i} \{\Pi_{k_i}\}.$$

Тогда статическая оценка позиции $V(\Pi_{k_1 \ldots k_n})$ выражается функцией

$$V(\Pi_{k_1 \ldots k_n}) = W(G_{k_1 \ldots k_n}) = \begin{cases} \min\limits_{\Pi \in G_{k_1 \ldots k_n}} V(\Pi) & , n/2 \notin \mathbf{Z} \\ \max\limits_{\Pi \in G_{k_1 \ldots k_n}} V(\Pi) & , n/2 \in \mathbf{Z} \\ \omega(\Pi_{k_1 \ldots k_n}) & , G_{k_1 \ldots k_n} \neq 0 \end{cases}$$

В качестве оптимального можно выбрать ход, ведущий из Π_k в Π_{k_i}, где $V(\Pi_k)$=V(Π_{k_i}). Эта тактика предполагает, что противник стремится максимально увеличить свой выигрыш или, что эквивалентно для антагонистических игр, максимально уменьшить выигрыш противника.

Предлагаемое обобщение метода минимакса на недетерминированные игры подразумевает некоторое усложнение функции $V(\Pi_k)$.

Итак, пусть $\xi_1 \ldots \xi_n$ - всевозможные исходы случайного события. $\Pi_{k_j}^{\xi_i}$ - позиция, получаемая из Π_k при исходе ξ_i, после хода $g_j^{\xi_i}$.

Пусть $f(x)$ - функция риска, в качестве которой можно взять любую функцию, определенную на $\mathbf{R}[0,1]$. Тогда

$$V(\Pi_{k_1 \ldots k_n}) = W(G_{k_1 \ldots k_n}) = Z \begin{bmatrix} f\left(G_{k_1 \ldots k_n}^{\xi_1}\right) \\ f\left(G_{k_1 \ldots k_n}^{\xi_m}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} W\left(G_{k_1 \ldots k_n}^{\xi_i}\right) \cdot f\left(W\left(G_{k_1 \ldots k_n}^{\xi_i}\right)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} f\left(W\left(G_{k_1 \ldots k_n}^{\xi_i}\right)\right)}, \text{ где } Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} -$$

координаты центра тяжести одномерной системы точек с координатами $x_1 \ldots x_n$ и массами $f(x_1) \ldots f(x_m)$, где $x_1 \ldots x_m \in [0,1]$. Для выполнения последнего условия достаточно нормировать статическую оценку $\omega(\Pi_{k_1 \ldots k_n})$.

Выбор функции $f(x)$ определяет стратегию игрока. Результаты моделирования игры "короткие нарды", где у одного из игроков $f(x)$= 1, а у второго изменяется от эксперимента к эксперименту, отражены в следующей таблице:

Функция риска 1-го игрока	Функция риска 2-го игрока	Количество сыгранных партий	Количество побед 1-го игрока (xx% - процент выигрышей)
$f(x)=\begin{cases}0, x>0\\1, x=0\end{cases}$ (крайний пессимист)	1 ("оптимист")	150	51 (34%)
$f(x)=1-x$	1	87	23 (26%)
$f(x)=1-0.3x$	1	90	32 (36%)
$f(x)=1-x^2/2$	1	123	62 (50.4%)
$f(x)=1-0.3x^2$	1	105	74 (70%)

Как видно из таблицы, подбирая вид $f(x)$, можно "заставить" игрока менять свою тактику от "крайнего пессимиста" до "оптимиста" (Крайний пессимист - игрок, который играет, исходя из предположения, что ему всегда выпадает самая неудачная комбинация случайных факторов. Оптимист предполагает, что его "невезучесть" и "невезучесть" соперника одинаковы.). Обе крайности не дают улучшения тактики. Улучшение наступает при "умеренных" функциях риска (в коротких нардах $f(x)\approx 1-x^2/3$).

Кстати говоря, при $f(x)=\begin{cases}0, x>0\\1, x=0\end{cases}$ имеем модель метода минимакса для детерминированной игры трех игроков (третий - случай).

Остается лишь подобрать функию $f(x)$ так, чтобы ее обладатель получил наилучшую тактику (при фиксированной функции риска другого игрока).

УДК 681.514.62

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Семушин И.В.

Разработаны основы теории активной идентификации стационарного оптимального дискретного фильтра в адаптивной модели, присоединенной к замкнутой системе управления стохастическим линейным объектом для трех последовательно повышающихся степеней априорной неопределенности.

Постановка задачи. Рассмотрим системы, представимые уравнениями

$$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma W_t+\Psi u_t;\ x_t\in R^n; W_t\in R^q, \quad (1)$$

$$z_t=Hx_t+V_t;\ t=1,2,...;\ z_t\in R^m, \quad (2)$$

$$u_t=f_0(z^{t-l});\ t=1,2,...;\ u_t\in R^l, \quad (3)$$

где $\{W_t\}$, $\{V_t\}$ - независимые белые последовательности, характеризуемые двумя моментами:

$$\forall t: E[W_t]=0; E[V_t]=0; E[W_t W^T{}_t]=Q; E[W_t W^T{}_t]=R. \quad (4)$$

Здесь и далее R^n обозначает n-мерное действительное пространство случайных векторов со скалярным произведением $(a,b)=E(a^Tb)$ и нормой $\|a\|=\sqrt{(a,a)}$, где $a,b\in R^n$; E - оператор математического ожидания : т - символ транспонирования; Ф,Г и т.п. - матрицы; f_0 - функция; $z^{t-l}=(...,z_{t-2},z_{t-1},z_t)\in R^m$; $a_1^t=(a_1,a_2,...,a_t)\in R^{nt}$ - вектор-столбец, составленный из значений вектора $a\in R^n$ в последовательные моменты времени 1,2,... t.

Системы содержат обьект (1), измеритель (2) и обратную связь (3), которая не обязательно должна быть линейной. В частности, при квадратичном критерии управления данной системой оптимальным является разделение обратной связи на фильтр и регулятор. В фильтре вычисляются оценки состояния x_t : текущая оценка $\hat{x}_{t|t}$ и предсказанная оценка $\hat{x}_{t|t-1}$. Первая из них опирается на измерение z_1^t, а вторая на z_1^{t-1}. В уравнениях оптимального по структуре фильтра

$$\hat{x}_{t+1|t} = \Phi_0\hat{x}_{t|t-1} + G_0\hat{v}_{t|t-1} + \Psi_0 u_t = \Phi_0\hat{x}_{t|t} + \Psi_0 u_t, \tag{5}$$

$$\hat{v}_{t|t-1} = z_t - H_0\hat{x}_{t|t-1};\ \hat{x}_{t|t-1} \in R^n, \tag{6}$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_0\hat{v}_{t|t-1};\ G_0 = \Phi_0 K_0 \tag{7}$$

индексы "0" отражают тот факт, что при неизвестности матриц описания (1)-(4) соответствующие матрицы для фильтра от них могут отличаться по значениям, но не по размерам. Для их оптимизации вводится критерий оценивания $J_t = \|l_t\|^2$, где

$$l_t = x_t - \hat{x}_{t|t} \text{ или } l_t = x_t - \hat{x}_{t|t-1} \tag{8}$$

Оценки $\hat{x}_{t|t}$ используются регулятором для вычисления управляющих воздействий $u_t = -\varphi_0(\hat{x}_{t|t})$, где $\varphi_0(\cdot)$ - функция. При этом оптимальной является линейная функция с некоторой матрицей L_0:

$$u_t = -L_0\Phi_0\hat{x}_{t|t} \tag{9}$$

В условиях неопределенности или резкой, но сравнительно редкой изменчивости значений матриц в описании (1), (2), (4) адаптация обратной связи рассматривается, прежде всего как задача идентификации оптимальных значений матриц для стационарного фильтра вида (5)-(7) по критерию J_t ошибок (8). Для процесса ее решения не предполагается, что обратная связь (3) задана в виде уравнений (5)-(7), (9) Для этого принимаются лишь следующие достаточно общие предположения.

А1. Матрица R - положительно определенная (R>0).

А2. Измерения могут быть неполными (rank H < n).

А3. Пара матриц (Φ,U), где $UU^T = \Gamma Q \Gamma^T$ -стабилизируемая /1/.

А4. Система (1), (2) "объект+сенсор" - полностью наблюдаемая,

т.е. rank W(H,Φ,S) = n , где

$S \triangleq \max(p_1, p_2, \dots, p_m) \le p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$,

$p_j \triangleq rank\ W(h_j, \Phi, n)$ j=1,2,...,m,

$$W(X,Y,r) \triangleq \left[X^T (XY)^T \dots (XY^{r-1})^T\right]^T$$

для любых матриц X,Y и целого $r \ge 1$; h_j - строки матрицы H, причем частные индексы наблюдаемости p_j известны.

А5. В описании (1), (2), (4) могут быть три, последовательно повышающиеся, степени априорной неопределенности:

1) неизвестны Γ,Q,R; известны Φ, Ψ ,H;
2) неизвестны Φ,Γ,Q,R; известны Ψ ,H;
3) неизвестны Φ,Γ,Q,R, Ψ ; известна H;

А6. Некоторый момент времени, условно обозначаемый как $t = 1$, принят за момент начала идентификации. При $t \ge 1$ обобщенный параметр неопределенности (неизвестные по А5 значения) и обобщенный параметр обратной связи (характеристики функции (3)) остаются неизменными, но такими, что вся замкнутая система (1)-(3) экспоненциально устойчива /2/. В частности, она так устойчива и для обратной связи вида (5)-(7), (9), т.е. спектральный радиус $\rho(\cdot)$ переходной матрицы

$$\begin{bmatrix} \Phi - \Psi L_0 G_0 H & -\Psi L_0(\Phi_0 - G_0 H_0) \\ (I - \Psi_0 L_0) G_0 H & (I - \Psi_0 L_0)(\Phi_0 - G_0 H_0) \end{bmatrix}$$

для составного вектора $(x_t, \hat{x}_{t|t-1})$ строго меньше единицы.

Предварительные определения.

Запишем идентифицируемые уравнения стационарного фильтра Калмана, который существует в предположениях А1-А4 /1/:

$$x_{t+1|t} = \Phi x_{t|t-1} + G v_{t|t-1} + \Psi u_t = \Phi x_{t|t} + \Psi u_t, \tag{10}$$

$$x_{t|t} = x_{t|t-1} - K v_{t|t-1};\ G = \Phi K, \tag{11}$$

$$z_t = H x_{t|t-1} + v_{t|t-1} \tag{12}$$

где $K = MH^T(HMH^T + R)^{-1}$; M - единственное, неотрицательно определенное, решение дискретного уравнения Лурье

$$M = \Phi(M - MH^T(HMH^T + R)^{-1}HM)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \tag{13}$$

такое, что

$$tr\,M = \min_{\hat{x}_{t|t-1}} \|x_t - \hat{x}_{t|t-1}\|^2 = \|x_t - x_{t|t-1}\|^2$$

Искомый параметр фильтра (10)-(12) обозначим обобщенно как $\Theta = (\Phi, G, \Psi, H)$ или, при другой реализации в уравнении (10), как $\Theta = (\Phi, K, \Psi, H)$. В силу связи $G = \Phi K$ данные реализации эквивалентны, поэтому будем считать, что эти обозначения взаимозаменяемы. Тогда при использовании субоптимального фильтра (5)-(7) в обратной связи, параметр неопределенности будет иметь, соответственно, обозначения $\Theta_0 = (\Phi_0, G_0, \Psi_0, H_0)$ или $\Theta_0 = (\Phi_0, K_0, \Psi_0, H_0)$.

Введем неособую матрицу наблюдаемости

$$W_* = \left[h_1^T \ldots (h_1 \Phi^{p_1-1})^T \ldots h_m^T \ldots (h_m \Phi^{p_m-1})^T\right]^T \tag{14}$$

и канонические переменные $x^* = W_* x$ в инвариантном описании измерений, получаемом из (1),(2):

$$x_{t+1}^* = \Phi_* x_t^* + \Gamma_* W_t + \Psi_* u_t \;, \tag{15}$$

$$z_t = H^* x_t^* + V_t \;, \tag{16}$$

$$\Phi_* = W_* \Phi W_*^{-1}; \Gamma_* = W_* \Gamma; \Psi_* = W_* \Psi; H_* = H W_*^{-1} \tag{17}$$

Имеем $H_* = \left[h_{ij}^*\right]$, где i=1,2,...,m; $h_{ij}^* = 1$ при $j = p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} + 1$ и $h_{ij}^* = 0$ при других j; Φ_* - блочная сопровождающая (коагулированная /3/) матрица, содержащая не более mn ненулевых элементов, которые в общем случае неопределенности неизвестны. Аналогичное преобразование базиса проведем в уравнениях (10)-(12). Получим

$$x_{t+1|t}^* = \Phi_* x_{t|t-1}^* + G_* \nu_{t|t-1} + \Psi_* u_t = \Phi_* x_{t|t}^* + \Psi_* u_t \,, \tag{18}$$

$$x_{t|t}^* = x_{t|t-1}^* + K_* \nu_{t|t-1}; G_* = \Phi_* K_*; G_* = W_* G \;, \tag{19}$$

$$z_t = H_* x_{t|t-1}^* + \nu_{t|t-1}; K_* = W_* K \tag{20}$$

Определение 1. Пусть A - матрица с размерами $\dim A = sm \times k, k \geq 1$. Запишем

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_s \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_i^1 \\ \ldots \\ a_i^m \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_1^1 \ldots a_1^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s^1 \ldots a_s^m \end{bmatrix},$$

$$i = 1,2,\ldots,s; \dim a_i^j = 1 \times k; j = 1,2,\ldots,m; \dim A_T = s \times km$$

Тогда φ - преобразованием матрицы A называется матрица $\varphi(A)$; $\dim \varphi(A) = n \times k$, строки которой получают, выбирая их из A_T в следующем порядке:

$$a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1; a_1^2, \ldots, a_{p_2}^2; \ldots; a_1^m, \ldots, a_{p_m}^m$$

Введем обозначения нижних треугольных блочных матриц следующего вида и размеров (при $k \geq 1$):

$$\underset{(\dim V_0 = sm \times sk)}{V_0(X,Y,Z,s)} = \begin{bmatrix} 0 & \\ XY & 0 \\ \ldots & \ldots \\ XY^{s-2}Z & XY^{s-3}Z \ldots 0 \end{bmatrix},$$

$$\underset{(\dim V_1 = sm \times sk)}{V_1(X,Y,Z,s)} = \begin{bmatrix} XZ & \\ XYZ & XZ \\ \ldots & \ldots \\ XY^{s-1}Z & XY^{s-2}Z \ldots XZ \end{bmatrix},$$

$$\underset{(\dim V_2 = sm \times sm)}{V_2(X,Y,F,s)} = \begin{bmatrix} I & \\ XF & I \\ \ldots & \ldots \\ XY^{s-2}F & XY^{s-3}F \ldots I \end{bmatrix},$$

$$\underset{(\dim V_3 = sm \times sm)}{V_3(X,Y,F,s)} = \begin{bmatrix} I & \\ XYF & I \\ \ldots & \ldots \\ XY^{s-1}F & XY^{s-2}F \ldots I \end{bmatrix}.$$

Здесь X,Y,Z,F - произвольные матрицы с размерами: $\dim X = m \times n$; $\dim Y = n \times n$; $\dim Z = n \times r$; $\dim F = n \times m$

Определение 2. Пусть - Y_* любая матрица с размерами $\dim Y_* = n \times n$, имеющая структуру блочной коагулированной матрицы Φ_*; Z и F - произвольные матрицы с размерами $\dim Z = n \times k$; $\dim F = n \times m$ ($k \geq 1$).Тогда F-, B-, P-, N-преобразованиями матриц Z и F называются матрицы:

$$F(Z) = \varphi(V_0(H_*, Y_*, Z, s)); \dim F(Z) = n \times sk \,,$$

$$B(Z) = \varphi(V_1(H_*, Y_*, Z, s)); \dim B(Z) = n \times sk \,,$$

$$P(F) = \varphi(V_2(H_*, Y_*, F, s)); \dim P(F) = n \times sm \,,$$

$$N(F) = \varphi(V_3(H_*, Y_*, F, s)); \dim N(F) = n \times sm \,.$$

Из определения 1 следует, что $W_* = \varphi(W(H, \Phi, s))$, $\varphi(W(H_*, Y_*, s)) = I$. Для матриц, заданных определением 2, непосредственно установим следующее практическое правило построения любой их i-й строки $F_i(Z)$, $B_i(Z)$, $P_i(F)$, $N_i(F)$.

Правило:
1) задают k=1,2,...,m;
2) задают j=1,2,..., P_k;
3) находят $i=(p_1+...+p_{k-1})+j$;
4) рекуррентно получают:

$$F_i(Z)=\begin{cases}0,\ j=1\\ Z_{i-1}\otimes F_{i-1}(Z),\ j\neq 1\end{cases},\quad B_i(Z)=\begin{cases}Z_i\otimes 0,\ j=1\\ Z_i\otimes B_i(Z),\ j\neq 1\end{cases},$$

$$P_i(F)=\begin{cases}I_k,\ j=1\\ F_{i-1}\otimes P_{i-1}(F),\ j\neq 1\end{cases},\quad N_i(F)=\begin{cases}I_k,\ j=1\\ F_i\otimes N_i(F),\ j\neq 1\end{cases},$$

где 0 - нулевая строка,

I_k - k-я строка единичной матрицы,

$(\cdot)_i$ - i-я строка матрицы $(\cdot)$,

$\otimes$ - знак соединения двух строк в одну строку с ограничением справа до требуемой длины: sk для $F_i(Z)$, $B_i(Z)$ и sm для $P_i(F)$, $N_i(F)$.

Отсюда видно, что матрицы, заданные определением 2, действительно не зависят от элементов переходной матрицы Φ_* (при $Y_*=\Phi_*$). Это существенно для следующих построений.

Адаптивная модель и критерий качества идентификации. Присоединим к данной системе (1)-(3) модель $M(\hat{Q}_*)$, описываемую уравнениями

$$g_{t+1|t}=Ag_{t|t-1}+B\eta_{t|t-1}+Cu_t=Ag_{t|t}+Cu_t, \tag{21}$$

$$g_{t|t}=g_{t|t-1}-D\eta_{t|t-1},\ B=AD, \tag{22}$$

$$z_t=H_*g_{t|t-1}+\eta_{t|t-1} \tag{23}$$

где A по структуре аналогична матрице Φ_*. Модель ограничим условиями невырожденности ($|A|\neq 0$) и экспоненциальной устойчивости: $\rho(A-BH_*)<1$. В процессе адаптации модель должна полностью идентифицировать фильтр (18)-(20). Это означает, что модельный параметр $\hat{\Theta}_*=(A,B,C)$, или при другом обозначении $\hat{\Theta}_*=(A,D,C)$, должен по окончании этого процесса совпадать с оптимальным значением

$\Theta_*=(\Phi_*,G_*,\Psi_*)$ или, соответственно, $\Theta_*=(\Phi_*,K_*,\Psi_*)$.

Хотя указанное совпадение при практической реализации алгоритмов идентификации может пониматься не более чем в смысле "почти наверное" (с вероятностью "1"), здесь оно понимается в смысле точного совпадения, означающего также потенциальную возможность равенств:

$$g_{t+1|t}=x^*_{t+1|t};\ g_{t|t}=x^*_{t|t};\ \eta_{t|t-1}=\nu_{t|t-1} \tag{24}$$

Это вызвано тем, что для таких алгоритмов нужен критерий качества идентификации, который они минимизируют. Следовательно, проблема состоит, прежде всего, в том, чтобы найти такой критерий, минимум которого достигается в точности при указанном совпадении: $\hat{\Theta}_*=\Theta_*$. Она возникает по причине нереализуемоти ошибок вида (8) и, следовательно, любого, зависящего от них, критерия.

Для решения проблемы дополним описание (21)-(23) уравнениями

$$g_{t+k|t}=Ag_{t+k-1|t}+Cu_{t+k-1}, \tag{25}$$

$$\hat{z}_{t+k|t}=H_*g_{t+k|t};\ k=1,2,\ldots,s, \tag{26}$$

определяющими модельные оценки векторов состояния x^*_{t+k} и, соответственно, вектора измерений z_{t+k} системы (15)-(17) при предсказании оценок по данным z_1^t. Используем рекуррентность в уравнениях (18)-(20) для представления величин $z_{t+1},\ldots,z_{t+s}$ сначала через $x^*_{t+1|t}$, затем через $x^*_{t|t}$ и применим к каждому из двух получаемых при этом выражений определенное выше φ-преобразование. Аналогично используем уравнения (21)-(23) для представления величин (26) сначала через $g_{t+1|t}$, затем через $g_{t|t}$ и также применим φ-преобразование. В результате получим две пары выражений:

$$\varphi(z_{t+1}^{t+s})=x^*_{t+1|t}+F(\Psi_*)u_{t+1}^{t+s}+P(G_*)v_{t+1|t}^{t+s|t+s-1}, \tag{27}$$

$$\varphi(z_{t+1}^{t+s})=\Phi_*x^*_{t|t}+B(\Psi_*)u_{t+1}^{t+s-1}+P(G_*)v_{t+1|t}^{t+s|t+s-1}, \tag{28}$$

$$\varphi(\hat{z}_{t+1|t}^{t+s|t})=g_{t+1|t}+F(C)u_{t+1}^{t+s}, \tag{29}$$

$$\varphi(\hat{z}_{t+1|t}^{t+s|t})=Ag_{t|t}+B(C)u_{t+1}^{t+s-1}, \tag{30}$$

Теорема. Минимум по модельному параметру $\hat{\Theta}_*$ критерия

$J_\varepsilon = \left\| \varepsilon_t(\hat{\Theta}_*) \right\|^2$ от процесса

$$\varepsilon_t(\hat{\Theta}_*) = \varphi(z_{t+1}^{t+s}) - \varphi(\hat{z}_{t+1|t}^{t+s|t}), \qquad (31)$$

реализуемого в любой из следующих равносильных форм:

$$\varepsilon_{t+1|t} = \varphi(z_{t+1}^{t+s}) - g_{t+1|t} - F(C)u_{t+1}^{t+s} = P(B)\eta_{t+1|t}^{t+s|t+s-1}, \qquad (32)$$

$$\varepsilon_{t|t} = \varphi(z_{t+1}^{t+s}) - Ag_{t|t} - B(C)u_{t-1}^{t+s-1} = N(D)\eta_{t+1|t}^{t+s|t+s-1}, \qquad (33)$$

в каждый момент времени t является необходимым и достаточным условием совпадения характеристик $\hat{\Theta}_*, g_{t+1|t}, g_{t|t}$ адаптивной модели (21)-(23) с соответствующими характеристиками $\Theta_*, x_{t+1|t}^*, x_{t|t}^*$ оптимального фильтра канонического типа (18)-(20). Это выполняется для трех степеней априорной неопределенности,. указанных в предположении А5, соответственно, следующим образом:

1) при $\hat{\Theta}_* = B$ или $\hat{\Theta}_* = D$, при $\Theta_* = G_*$ или $\Theta_* = K$ - в замкнутой системе (1)-(3) с присоединенной моделью (21)-(23).

2) при $\hat{\Theta}_* = (A,B)$ или $\hat{\Theta}_* = (A,D)$, при $\Theta_* = (\Phi_*, G_*)$ или $\Theta_* = (\Phi_*, K_*)$ - в замкнутой системе (1)-(3) с присоединенной моделью (21)-(23).

3) при $\hat{\Theta}_* = (A,B,C)$ или $\hat{\Theta}_* = (A,D,C)$, при $\Theta_* = (\Phi_*, G_*, \Psi_*)$ или $\Theta_* = (\Phi_*, K_*, \Psi_*)$ - в разомкнутой системе (1), (2) с $u_t = \xi_t$, где ξ_t - белая (тестовая) последовательность, не зависящая от $\{W_t\}, \{V_t\}$. (Доказательство в приложении).

Выводы.

1. По любому из четырех указанных способов (32), (33) реализации процесса (31) может быть построена практическая схема. Для сходимости в ней алгоритмов минимизации клитерия J_ε /2/ предусмотрены предположение А6 и ограничение $\rho(A - BH_*) < 1$. По окончании процесса минимизации /4/ становится известной оценка матрицы (14).

2. С обращением равенств (17) и последних равенств (19)-(20) появляется возможность возврата к физическим переменным для установки в обратной связи найденного таким образом оптимального фильтра (10)-(12).

3. В обратной связи появляется также возможность установки оптимального регулятора типа (9). В нем Φ_0 заменяется на полученную оценку матрицы Φ. При этом оценка установившегося оптимального значения $L = (\Psi^T \Pi \Psi + V_u)^{-1} \Psi^T \Pi$ может быть расчитана в ускоренном масштабе времени путем отыскания решения Π уравнения $\Pi = \Phi^T \left[\Pi - \Pi\Psi(\Psi^T \Pi \Psi + V_u)^{-1} \Psi^T \Pi \right] \Phi + V_x$, двойственного уравнению (13), если заданы симметрические матрицы $V_u > 0$ и $V_x \geq 0$ критерия управления

$$J = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} E(x_t^T V_x x_t + u_{t-1}^T V_u u_{t-1})$$

на неограниченном отрезке времени $N \to \infty$ и если обьект полностью управляем: $rank\, W(\Psi^T, \Phi^T, n) = n$.

4. Разработанная теория для замкнутых систем управления (1)-(3) с повышенной степенью априорной неопределенности позволяет осуществить адаптацию, активную в том смысле, что она чуствительна непосредственно к степени удаления обратной связи действующей системы от минимума критерия оценивания, хотя и без фактического наблюдения ошибок (8).

Приложение.

Доказательство теоремы. Представляя выражение (27) и (29) или выражения (28) и (30) в уравнение (31), получим

$$\varepsilon_{t+1|t} = (x_{t+1|t}^* - g_{t+1|t}) + \left[F(\Psi_*) - F(C) \right] u_{t+1}^{t+s} + P(G_*) v_{t+1|t}^{t+1|t+s-1},$$

$$\varepsilon_{t|t} = (\Phi_* x_{t|t}^* - Ag_{t|t}) + \left[B(\Psi_*) - B(C) \right] u_{t-1}^{t+s-1} + P(G_*) v_{t+1|t}^{t+1|t+s-1}$$

Первые (заключенные в круглые скобки) слагаемые, полученных выражений, как видно из (18)-(20) и (21)-(23), определены на множестве $\{\ldots, v_{t-1|t-2}, v_{t|t-1}\}$ значений обновляющей последовательности. Последние же слагаемые определены на другом множестве $\{v_{t+1|t}, \ldots, v_{t+s|t+s-1}\}$ этой белой последовательности. Средние слагаемые либо равны нулю (при $C = \Psi_*$, что выполняется для случаев 1 и 2 по предположению А5), либо не коррелированы с другими слагаемыми (при $u_t = \xi_t$ для случая 3 по предположению А5). В любом случае критерий J_ε равен сумме квадратов норм указанных трех слагаемых. Его минимум равносилен совпадению $\hat{\Theta}_* = \Theta_*$ ввиду единственности фильтра (18)-(20) на множестве моделей типа (21)-(23) и в силу приведенного выше правила построчного построения матриц $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Этот минимум равен квадрату нормы третьего слагаемого, не зависящего от параметра $\hat{\Theta}_*$.

Литература.

1. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М:Наука, 1984.
2. Ljung L. Convergence analysis of parametric identification methods. - IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, v. AC-23, 5, pp. 770-783.
3. Семушин И.В. Идентификация линейных стохастических обьектов по неполным зашумленным измерениям вектора состояний. - Автоматика и телемеханика, 1985, № 8, с.61-71.
4. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М:Наука, 1984.

УДК 512.542

О ТОЖДЕСТВАХ СО СЛЕДОМ ТИПА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ

И.Ю.Свиридова

Хорошо известно, что алгебраические алгебры ограниченного индекса являются PI- алгебрами. Заметка посвящена доказательству следующей теоремы

ТЕОРЕМА. Произвольное собственное многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторой коммутативной алгеброй.

Пусть A – ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом R. Произвольное R-линейное отображение $Tr : A \to R$ будем называть следом. Отметим, что в определении следа мы не требуем выполнение условия $Tr(a_1a_2) = Tr(a_2a_1)$.

Пусть X – счетное множество, $F[X]$ – свободная ассоциативная алгебра (без единицы) над полем F, порожденная X. Через T обозначим свободную ассоциативно-коммутативную алгебру с единицей, порожденную всеми символами $Tr(u)$, где u– непустые слова от $x_i \in X$. Алгебру $\widetilde{F}[X] = F[X] \otimes T$ назовем свободной алгеброй со следом. В дальнейшем знак $\otimes$ мы будем опускать. Элементы алгебры $\widetilde{F}[X]$ будем называть полиномами со следом.

Пусть A – алгебра со следом, $f(x_1, \dots, x_n)$ – полином со следом. Будем говорить, что алгебра A удовлетворяет тождеству $f(x_1, \dots x_n) = 0$, если для всех $a_1, \dots, a_n \in A$ в алгебре A выполняется равенство $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

Полиномами со следом типа Гамильтона-Кэли степени n будем называть полиномы со следом вида

$$x^n + \sum_{(i)} \alpha_{(i)} x^{i_0} Tr(x^{i_1}) \cdots Tr(x^{i_t}),$$

где $(i) = (i_0, i_1, \dots, i_t)$ $\quad i_1 \geq \dots \geq i_t, \quad i_0 + i_1 + \cdots + i_t = n,\ i_0 < n$.

Хорошо известно, что в полной алгебре матриц порядка n, в которой след определен обычным способом, выполняется тождество со следом : $X_n(x) = 0$, где $X_n(x)$ – многочлен Гамильтона-Кэли, определяемый рекуррентно по формулам

$$X_1(x) = x - Tr(x), \quad X_n(x) = X_{n-1}(x) \cdot x - \frac{1}{n} \cdot Tr(X_{n-1}(x) \cdot x).$$

Произвольную конечномерную алгебру A можно вложить в алгебру матриц некоторого порядка, поэтому в A можно определить след $Tr : A \to F$ так, чтобы алгебра A удовлетворяла некоторому тождеству со следом типа Гамильтона-Кэли.

Рассмотрим $A \otimes_F G$, где A – произвольная конечномерная алгебра над полем F, $char F = 0$, а G – алгебра Грассмана бесконечного ранга. Известно, что $G = G_0 \oplus G_1$, где $G_0(G_1)$ – подпространства, порожденные всеми словами соответственно четной (нечетной) длины. Заметим, что так как $C(G) = G_0$ – центр алгебры G, то $A \otimes_F G$ можно рассматривать как алгебру над G_0.

Пусть при этом в алгебре A определен Tr. Тогда определим G_0-линейное отображение Tr в $A \otimes_F G$ следующим образом

$$Tr(a \otimes g) = Tr(a) \cdot Tr(g), \quad a \in A, g \in G,$$

где $Tr(g) \stackrel{def}{=} Tr(g_0 + g_1) = g_0, \quad g \in G, g_0 \in G_0, g_1 \in G_1$.

Так как $G_0 = C(G)$, отображение Tr в алгебре $A \otimes_F G$ определено корректно.

Лемма. Если m-мерная алгебра A удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству типа Гамильтона-Кэли степени n, то алгебра $A \otimes_F G$ удовлетворяет тождеству со следом типа Гамильтона-Кэли степени $n(mn+1)$.

Доказательство. Пусть $\{a_1, \ldots, a_m\}$ – базис алгебры A, $\dim A = m$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\deg f = n$ – полилинейное тождество со следом типа Гамильтона-Кэли, выполняющееся в A. Докажем, что $A \otimes_F G$ удовлетворяет тождеству

$$\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right)^{mn+1} = 0,$$

Рассмотрим произвольные $b_1, \ldots, b_n \in A \otimes_F G$,

$$b_l = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes g_{(i)}^{(l)}, \qquad g_{(i)}^{(l)} \in G, \ l = 1, \ldots, n$$

и подставим их в рассматриваемое тождество со следом. В силу полилинейности полинома

$$\left(f(b_1, \ldots, b_n)\right)^{mn+1} =$$

$$= \left(\sum_{(i)} f\left(a_{i_1} \otimes (g_0{}_{(i_1)}^{(1)} + g_1{}_{(i_1)}^{(1)}), \ldots, a_{i_n} \otimes (g_0{}_{(i_n)}^{(n)} + g_1{}_{(i_n)}^{(n)})\right)\right)^{mn+1},$$

где $g_0{}_{(i_t)}^{(t)} \in G_0, g_1{}_{(i_t)}^{(t)} \in G_1$.

Разобьем полученную сумму на две части, где первая часть состоит из слагаемых вида

$$f(a_{i_1} \otimes g_0{}_{(i_1)}^{(1)}, \ldots, a_{i_n} \otimes g_0{}_{(i_n)}^{(n)}),$$

а вторая из всех оставшихся слагаемых.

Так как $G_0 = C(G)$ и отображение Tr – G_0-линейно, то первая часть равна 0 в $A \otimes_F G$, в силу того, что алгебра A удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Обозначим $u_j = g_{\rho_1}{}_{(i_1)}^{(1)} \cdots g_{\rho_n}{}_{(i_n)}^{(n)}$, если найдется $t \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\rho_t = 1$. Тогда получим

$$\left(f(b_1, \ldots, b_n)\right)^{mn+1} == [\sum_{(i)} \sum_{j=1}^{2^n-1} P_n^j(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \otimes u_j]^{mn+1} =$$

$$= \sum_{(i),(j)} [\prod_{t=1}^{mn+1} P_n^{j_t}(a_{i_{1,t}}, \ldots, a_{i_{n,t}})] \otimes u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdots u_{j_{mn+1}} = 0,$$

здесь $(j) = (j_1, \ldots, j_{mn+1})$, где $j_t \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$,

$(i) = (i_{1,t}, \ldots, i_{n,t})$, где $i_{l,t} \in \{1, \ldots, m\}$.

Так как любое слово вида $u_{j_1} \cdots u_{j_{mn+1}}$ содержит хотя бы два одинаковых элемента из L, где $L = \{g_1{}_{(1)}^{(1)}, \ldots, g_1{}_{(m)}^{(1)}, \ldots, g_1{}_{(1)}^{(n)}, \ldots, g_1{}_{(m)}^{(n)}\} \subset G_1$, и следовательно, учитывая $g_1^2 = 0$, где $g_1 \in G_1$, равно 0. Лемма доказана.

Теорема 1. Произвольное многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторой коммутативной алгеброй.

Доказательство. Действительно, согласно теореме А.Р.Кемера [1], любое собственное многообразие ассоциативных алгебр порождается грассмановой оболочкой некоторой конечномерной супералгебры. Как показано выше, произвольная конечномерная супералгебра A удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству со следом типа Гамильтона-Кэли. Следовательно по лемме грассманова оболочка супералгебры A также удовлетворяет тождеству типа Гамильтона-Кэли, а значит является алгебраической ограниченной степени. Теорема доказана.

Заметим также , что при этом не всякое многообразие ассоциативных алгебр порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над полем.

Теорема 2. Многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над полем тогда и только тогда, когда оно порождается некоторой конечномерной алгеброй.

Доказательство. Пусть B – алгебраическая алгебра индекса n над некоторым полем F. Если a – произвольный нильэлемент алгебры B, то $a^n = 0$.

Пусть N – максимальный ниль-идеал алгебры B, тогда N удовлетворяет тождеству $x^n = 0$, и следовательно по теореме Нагаты-Хигмана N – нильпотентный идеал. Фактор-алгебра B/N не имеет ненулевых ниль-идеалов, а значит удовлетворяет стандартному тождеству некоторой степени. Следовательно, алгебра B удовлетворяет следующему тождеству вида

$$S_k(x_1,\ldots,x_k)\cdot S_k(x_{k+1},\ldots,x_{2k})\cdot\ldots\cdot S_k(x_{k(t-1)+1},\ldots,x_{t\cdot k})=0,$$

которое, очевидно, не выполняется в алгебре Грассмана. Значит, по теореме Кемера [1], многообразие $Var(B)$ порождается некоторой конечномерной алгеброй.

Справедливость обратного утверждения теоремы очевидна в силу того, что любая конечномерная алгебра является алгебраической ограниченного индекса. Теорема доказана.

Лемма дает верхнюю оценку для минимальной степени d тождеств типа Гамильтона-Кэли алгебры $M_n(G) = M_n(F)\otimes_F G$: $d \le n^4 + n$. Дадим нижнюю оценку для этой степени.

Теорема 3. Если алгебра $M_n(G)$ удовлетворяет полилинейному тождеству со следом типа Гамильтона-Кэли $P_d(x_1,\ldots,x_d) = 0$, то $d \ge 2n$.

Доказательство. Допустим $\deg P_d < 2n$. Тогда можно сделать следующую подстановку

$$x_1 = e_{11}\otimes g_{11}, x_2 = e_{12}\otimes g_{12}, x_3 = e_{22}\otimes g_{13},\ldots, x_d = e_{kk}\otimes g_{1d},$$

где $k \le n$, g_{1i} – различные элементы из G_1, e_{ij} – матричные единицы. Так как по определению отображения Tr

$Tr(a\otimes g_1) = Tr(a)\cdot Tr(g_1) = 0$, $a \in M_n(F)$, $g_1 \in G_1$,

в результате такой подстановки любой моном, содержащий символ Tr, обращается в 0. Очевидно, что ввиду выбора матричных единиц, 0 также получится и при подстановке заданных элементов в любой из оставшихся мономов кроме $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_d$. Следовательно

$$P_d(e_{11}\otimes g_{11},\ldots,e_{nn}\otimes g_{1d})$$

$$= e_{11}\cdot\ldots\cdot e_{nn}\otimes g_{11}\cdot\ldots\cdot g_{1d} = e_{1n}\otimes g_{11}\cdot\ldots\cdot g_{1d}\ne 0.$$

Таким образом, тождество со следом типа Гамильтона-Кэли степени меньшей, чем $2n$ не выполняется в алгебре $M_n(G)$. Теорема доказана.

Литература.

[1]. Kemer A.R.,*Ideals of identities of associative algebras*, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs 87, Providence, R.I.,1991.

УДК 519.689

МОДЕЛЬ НЕРАВНОМЕРНОГО РАЗБИЕНИЯ ПАМЯТИ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ СЖАТЫХ ТАБЛИЦ.

Смагин А.А.

После сжатия данных [1,2,3] часто используют следующие операции со структурами данных: поиск по признаку; разбиение, сдвиг, сортировка, слияние и др. Указанные действия в существующих системах оперативной и постоянной памяти,изготовленной на БИС и СБИС, выполнять невозможно без привлечения дополнительных программных или аппаратных средств. В связи с этим важной проблемой является построение модели памяти, которая обеспечила бы рациональное размещение сжатых структур данных и быстрый в них поиск.

При разработке способа сжатия необходимо учитывать будущую структуру реализации сжатой таблицы . Если удается на ранней стадии сжатия при выборе или разработке метода сжатия работать в среде модели физической реализации, то такое сжатие может обеспечить наибольшую эффективность пары преобразований "сжатие - восстановление".

Разработка такой модели должна удовлетворять ряду наиболее широко применяемых на практике требований, таких, как: формальность, конструктивность, понятность, минимальность, применяемость, расширяемость. Не менее важным является то обстоятельство, насколько разработанная модель удовлетворяет критерию практики, то есть имеется ли возможность реализовать ее на базе существующей технологии.

Сжатие структур данных типа таблиц приводит к преобразованию исходной структуры данных, которое влечет за собой и изменение организации поиска данных в таблице, и, следовательно, в системе памяти требуется применять новые способы размещения строк таблицы и доступа к ним. Однако система жесткой адресации (встроенный дешифратор) не может быть перестроена, и поэтому нужно принимать меры по новой организации поиска табличных данных с помощью дополнительных аппаратных или программных средств, либо изыскивать резервы функциональных возможностей существующей организации памяти.

Так как модель реализации сжатой таблицы является "производной" от исходной структуры данных, то ее построение должно опираться на ее свойства, результаты преобразования этой структуры.

При сжатии таблиц используются разбиения исходной структуры данных - таблицы - на части, которые могут быть равномерными (одинаковые размеры фрагментов) и неравномерными. Выбор вида разбиения определяется способами сжатия данных и последующего их поиска.

Задача построения модели памяти для хранения сжатых таблиц и организации поиска данных в них может быть сформулирована следующим образом: на основании известных способа сжатия, способа сжатого представления , способа поиска сжатых данных найти такое эффективное представление (модель) адресного пространства памяти,которое было бы изоморфным представлению (модели) сжатой таблицы и отвечало бы перечисленым ниже требованиям.

Если модель памяти рассматривать на двух уровнях: внешнем - с точки зрения пользователя таблицы - и внутреннем - с точки зрения исследователя, осуществляющего сжатие табличного массива, - то можно выделить внешние и внутренние требования к модели памяти. Внешние требования: 1) фиксированные форматы на входное и выходное слова; 2) время получения табличного данного находится в пределах допустимого; внутренние требования: 1) сегментация памяти; 2) многоформатность доступа; 3) возможность варьирования размерами сегментов; 4) возможность простой дешифрации сегментов; 5) параллелизм организации памяти; 6) реализация на типовых БИС памяти.

Модель памяти должна быть наиболее совместимой с исходной и сжатой структурами данных и позволять выполнение в ней преобразований, аналогичных преобразованиям над исходной структурой данных. Сжатие базируется на разбиении структуры данных, поэтому для построения модели памяти целесообразно использовать алгебру разбиений множества объектов.

Алгебра разбиений [5] основывается на следующих положениях. 1. Исходное множество объектов задается в дискретном пространстве. 2. Задается множество разбиений дискретного пространства на интервалы. 3. На множестве разбиений определяются отношение по рядка и соответствующие этому отношению операции. 4. Множество разбиений образует алгебраическую структуру, которая допускает компактное представление. 5. С учетом свойств этой структуры составляются алгоритмы решения задач проектирования новых объектов. 6. Отношение порядка на множестве разбиений и компактное представление этого множества позволяют уменьшить перебор и улучшить емкостную оценку сложности новых объектов.

Переход к новым областям представления адресов пространства памяти - множествам равномерных и неравномерных разбиений - позволяет получать новые структуры адресного пространства с новыми свойствами и дает возможность отыскания простых преобразований этих структур при реализации сжатых массивов данных.

Модель неравномерного разбиения.

Задача неравномерного разбиения пространства памяти состоит в получении конечного множества подпространств с независимым доступом, имеющих легко различимые их признаки, переменные размеры, независимое от размеров подпространств время доступа. Решение поставленной задачи при удовлетворении заданных требований включает решения двух подзадач:

1) построение способа гибкого и компактного задания пространства памяти;

2) разработка способа размещения модельного пространства памяти.

Рассмотрим способ неравномерного разбиения пространства памяти, основанный на сдвиге сигнальной единицы.

Разбиением множества двоичных векторов X будем называть множество подмножеств $S_i \subset X$, удовлетворяющих условиям:

1) $S_i \cap S_h = 0$ при $i \neq h$;

2) $\cup S_i = X$.

Пусть n-разрядный двоичный вектор $X = X_n X_{n-1} X_{n-2} \ldots X_3 X_2 X_1$, $x = \{0, 1\}$ задает пространство памяти из 2^n попарно различимых ячеек памяти. Положим в этом векторе на всех позициях, кроме x_1, нули, а на позиции x_1 запишем единицу, то есть вектор X примет частное значение $X_1 = 0_n 0_{n-1} 0_{n-2} \ldots 0_3 0_2 1_1$. Очевидно, этот вектор задает первое подпространство с одной ячейкой памяти.

Будем выполнять пошаговую операцию сдвига на один разряд влево вектора X_1 и при сдвиге на освобождаемую единицей позицию записывать переменную x. Тогда вектор X_1 за

n - 1 шагов породит вектор-матрицу (n × n) следующего вида:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n-1} & 0_{n-2} & \cdots & 0_3 & 0_2 & 1_1 \\ 0_n & 0_{n-1} & 0_{n-2} & \cdots & 0_3 & 1_2 & x_1 \\ 0_n & 0_{n-1} & 0_{n-2} & \cdots & 1_3 & x_2 & x_1 \\ . & . & . & \cdots & . & . & x_1 \\ 0_n & 0_{n-1} & 1_{n-2} & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0_n & 1_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \\ 1_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}_n^1 \qquad (1)$$

Элементы такой матрицы определяются как

$$r(i,j) = \begin{cases} 1 \ , & j = 1 \\ 0 \ , & j > 1 \\ x \ , & j < i \end{cases}$$

где $1 \le i \ , j \le n$.

Вектор X_1 является порождающим для матрицы (1). Единицы, находящиеся на главной диагонали матрицы (1), будем называть сигнальными.

Определение 1. Квадратная матрица (n × n) вида (1) называется полной; в такой полной матрице все позиции справа от сигнальных единиц заполнены переменными x.

В общем виде любая строка (1) может быть записана как

$$X_1 = [0_n 0_{n-1} \ldots 0_{j+1} 1_j x_{j-1} \ldots x_2 \ x_1] \qquad (2)$$

и представляет собой троичный вектор, элементы которого берутся из множества {0, 1, x}. Вектор (2) можно представить более компактно

$$X_i = [0^v \ 1_j \ x^t],$$

где j - номер позиции единицы, v - число нулей слева от единицы, t - число переменных x справа от единицы. Компактная запись особенно удобна при описании массива, полученного после сжатия. В частности, допускается запись $X = [0 \ 1_j \ x]$, которая указывает на полное пространство (без сжатия).

Каждая строка (1) задает собственное подпространство S вектора X. Исследуя последовательности символов в строках (1), можно заметить, что они состоят из двух частей: левой константной $0_n 0_{n-1} \ldots 0_{j+1} 1_j$, которая является задающей координатой подпространства, и правой, определяющей адреса и, следовательно, объем подпространства. Из (1) следует, что пространство вектора X состоит из разбиений

$$S = (S_1, S_2, ..., S_n) \vdash 2^n,$$

причем $\sum_{i=1}^{n} S_i = 2^n$, и функция разбиений в данном случае имеет вид $P(S_i) = 2^{i-1}$. Отметим также, что разбиения не пересекаются между собой, и каждое из них имеет собственную верхнюю границу, равную $P(S_i)$, причем элементы S_i - разбиения вычисляются по формуле

$$S_i = 2^i + \sum_{l=0}^{i-1} 2^l x_l \qquad (3)$$

где i - десятичный номер строки в (1). Верхняя граница (3) получается при всех x = 1, а нижняя - при всех x = 0.

Троичный вектор (2) представляет собой частично упорядоченное множество, которое имеет максимальную нижнюю Θ_H^m и максимальную верхнюю Θ_B^m границы: $\Theta_H^m = 1_j\, 0_{j-1}\, 0_{j-2} \dots 0_2\, 0_1$ и $\Theta_B^m = 1_j\, 1_{j-1}\, 1_{j-2} \dots 1_2\, 1_1$, кроме того, они пронумерованы. Следовательно, о троичном векторе (2) можно говорить как о некоторой структуре.

Определение 2. Структура вида (2) называется адресным сегментом.

Определение 3. Группа символов адресного сегмента S_i, состоящая из переменных x_i называется адресом сегмента памяти. Адрес i-го сегмента имеет вид $A_{si} = x_{j-1}\, x_{j-2} \dots x_2\, x_1$. Очевидно, что общее количество ячеек памяти, адресуемое адресом i-го сегмента, равно 2^{i-1}.

Общее количество ячеек памяти, адресуемое n строками одной матрицы (1), составляет

$$W = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} + 2$$

где число 2 подразумевает включение в пространство памяти двух ячеек из первой строки с адресами $X_1^0 = 0_n\, 0_{n-1} \dots 0_2\, 0_1$, $X_1^1 = 0_n\, 0_{n-1} \dots 0_2\, 1_1$.

Примечание. В матрице (1) используется второй вектор X_1^1 для удобства ее обработки. В реальных условиях нужно учитывать и X_1^0.

Так как длина адресов подпространства - переменная от 1 до n - 1 , то подпространства имеют разную длину, и, следовательно, разбиение пространства вектора X есть неравномерное разбиение.

Определение 4. Размерностью адресного сегмента называется количество переменных x_i входящих в соответствующую строку (2). Очевидно, что все адресные сегменты структуры (2) имеют разные размерности.

Введем обозначение: адрес, принадлежащий i-му подпространству, будем обозначать A_i^k, где нижний индекс указывает на номер подпространства, а верхний - на порядковый номер адреса внутри подпространства,причем $k = 0, 1, 2, ..., 2^{i-1}$. Любой десятичный адрес $< A_i^k >$, принадлежащий i-му подпространству, может быть вычислен по формуле

$$< A_i^k > = \sum_{l=0}^{i-2} 2^l x_l\,, \qquad (4)$$

где i - десятичный номер строки матрицы (1).

Степенной ряд (4) является производящим адреса i-го подпространства, и его вид совпадает с формулой получения элементов S_i -разбиения (3).

Определение 5. Неравномерным разбиением пространства вектора X называется пространство подпространств, которые образуются строками матрицы (1).

Назовем матрицу сегментов (1) моделью неравномерного разбиения пространства памяти. Строки-векторы полной матрицы (1) задают базис пространства вектора X, число строк задает размерность пространства.

Определение 6. Часть i-й строки матрицы (1), получаемая путем отбрасывания переменных x, находящихся справа от сигнальной единицы, будем называть признаком, или ключом, подпространства и обозначать через K_i.

Ключ представляет собой двоичную константу переменной длины

$$K_i = 0_n\, 0_{n-1} \dots 0_{j+1}\, 1_j\,. \qquad (5)$$

Каждый сегмент имеет собственный ключ . Для матрицы (n x n) максимальное число ключей соответствует количеству подпространств и равно n. При практическом использовании модели разбиения памяти иногда требуется знать зависимость длины ключа от его числового значения.

Введем формулу, с помощью которой по числовому значению кода люча можно определять его длину.

Лемма 1. Пусть l_{K_i} - длина кода ключа K_i, выраженная в битах, а $< Z_{K_i} >$ - значение кода ключа K_i. Тогда длина кода ключа K_i определяется следующим образом:

$$l_{K_i} = n - \log_2 < Z_{K_i} > .$$

Доказательство. Найдем десятичное значение кода ключа K_i через десятичный номер сегмента как $< Z_{K_i} > = 2^{i-1}$. В свою очередь, длина l_{K_i} определяется по формуле $l_{K_i} = n - i + 1$. Выражая l_{K_i} через $< Z_{K_i} >$, получим $l_{K_i} = n - \log_2 < Z_{K_i} >$.

Лемма 2. Множество ключей K из (1) представляет собой префиксное множество.

По определению, префиксное множество - это множество кодов, в котором ни одна комбинация кода не совпадает с началом более длинной комбинации другого кода или удовлетворяет неравенству Крафта $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \le 1$, где l_i - длина (в битах) i-го ключа.

Докажем префиксность кодов ключей из (1).

Для этого неравенство Крафта запишем как

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_{K_i}} = \sum_{i=1}^{n} 2^{-(n - \log_2 < Z_{K_i} >)} \tag{6}$$

Выражение (6) представляет собой убывающий на единицу ряд целых неотрицательных чисел. Сумма этого ряда вычисляется как n(n+1)/2. Следовательно, при любом целом неотрицательном n

$$2^{-n(n+1)/2} < 1$$

что и требовалось доказать. Префиксность кодов ключей обеспечивает их простую дешифрируемость.

Так как элементами пространства вектора X являются адреса, представляющие собой целые числа, то в дальнейшем будем считать, что имеем дело с целочисленным пространством и его топологию будем определять двумя целочисленными координатами K и $\overline{A}$: K = {K_0, K_1, K_2, ..., K_n }, $\overline{A}$ = {$\overline{A}_1$,

$\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ }. Иначе говоря, каждый вектор-адрес $X_i = x_n x_{n-1} \dots x_1$ будет определяться парой координат, то есть $X_i = (K , \overline{A})$, и представлять собой точку с целочисленными координатами в декартовой системе координат K, $\overline{A}$. Следовательно, все множество точек-адресов образует систему - двумерную решетку.

Принадлежность некоторого подмножества векторов $\overline{X}$ одному из n разбиений матрицы (1) можно выразить через отношение эквивалентности $\dot{B}$, которое рассматривается как совпадение признаков-ключей K, и $X_q \dot{B} X_u$ означает, что X_q и X_u находятся в одном и том же сегменте.

Отсюда следует, что на всем множестве двоичных векторов {X_0, X_1, ..., X_{2^n}} задано множество отношений эквивалентности {$\dot{B}_0, \dot{B}_1, \dot{B}_2, ..., \dot{B}_n$}, каждое из которых определяет принадлежность любого из двоичных векторов $X_i \in X_{2^n}$ одному из n разбиений.

Сопоставим каждому элементу из i-го разбиения пару целых чисел $X \to <t_e , r>$, где t_e - номер сегмента, в который попало значение вектора $<X_i>$, r - порядковый номер элемента X_i в i-м разбиении. Если номеру сегмента t_e будет соответствовать значение кода ключа, а порядковому номеру r - значение частичного адреса, то элементы X_q и X_u считаются элементами одного сегмента, если у них совпадают первые номера, т.е. $t_{e_q} = t_{e_u}$.

Дополнительно отметим, что число ключей равно n, что также обеспечивает сравнительно небольшие общие аппаратные затраты на их хранение и дешифрацию.

Разложение матрицы пространства памяти

Пусть полная матрица R(i,j) (1) получит разложение по диагонали, состоящей из сигнальных единиц, на две треугольные матрицы K и A следующим образом:

$$R = K\,A = {}^{n}\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \dots & \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & \dots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}^{1}_{n} \; {}^{n-1}\begin{bmatrix} & & x \\ & & \\ & \iddots & \vdots \\ & & \\ x & \dots & x \end{bmatrix}^{2}_{n} \quad (7)$$

причем матрица K образуется из матрицы R путем выделения ее верхней левой части относительно главной диагонали, включая ее, а матрица A - путем выделения правой части матрицы R, исключая главную диагональ. Разложение вида (7) назовем KA-разложением (K - ключ, A - адрес).

Матрица K является треугольной верхней, и ее элементы определены как

$$K(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (8)$$

Матрица A является нижней треугольной, и ее элементы определены как

$$A(i,j) = x \text{ при } j < i. \quad (9)$$

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием существования матрицы адресных сегментов вектора X являются:

а) представление каждой строки матрицы (1) в виде последовательности (2);

б) неповторяемость позиций сигнальных единиц в строках матрицы (1), или, другими словами, ключи подпространств должны иметь разную длину.

Следствие 1. Разбиение строки (1) на части предложенным способом позволяет получать ключ естественным образом и осуществлять достаточно просто поиск подпространства.

Обоснованность выбора ключа вида (5) состоит в следующем:

- ключи вида (5), задавая подпространства $\overline{S}_i$ = (K , $\overline{A}$), при подстановке на места переменных x всех нулей или всех единиц образуют естественные верхние и нижние границы разбиений в пространстве вектора X;

- наличие последовательности нулей определенной длины перед сигнальной единицей позволяет достаточно просто отличать ключидруг от друга;

- позиция сигнальной единицы в строке матрицы позволяет

определить размер подпространства, задаваемый адресной частью строки;

- уникальность кодов ключей (использование нескольких сигнальных единиц в коде ключа приводит к искажению процесса идентификации);

- простой способ образования ключей.

Следствие 2. Количество переменных x в адресных частях строк матрицы (1) является переменным, что позволяет осуществлять гибкий подбор подпространства с нужным размером.

Утверждение 2. Пусть имеется пространство ключей $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, n - целое, представляющих собой уникальные коды вида (5). Тогда всякий ключ может быть рекуррентно найден через любой ключ из K, если известно строчное расстояние между ними, по формулам

$$K_i = K_q\,2^{i-q} = K_q\,2^{d_p}, \text{ при } i > q;$$
$$K_q = K_i / 2^{i-q} = K_i / 2^{d_p}, \text{ при } i < q; \quad (10)$$
$$q < i,\ 1 \le q \le n$$

За строчное расстояние примем разность d_p между индексами соответствующих ключам строк полной матрицы сегментов. Пусть, как и раньше, индекс у имени ключа K_i будет обозначать номер строки полной матрицы сегментов. Если сравнить два любых ключа из соседних строк, то увидим, что их численные значения отличаются сомножителем 2, то есть все последующие ключи можно рекуррентно вычислить через соседние, и если процесс нумерации начинать с верхней строки матрицы, то формула для получения ключа следующая: $K_i = K_{i-1}\,2$, а если - с нижней строки, то ключи вычисляются по формуле $K_i = K_{i+1} / 2$.

Возьмем несоседние ключи $K_2 = 0_n\,0_{n-1}\,0_{n-2} \dots 0_4\,0_3\,1_2$ и $K_5 = 0_n\,0_{n-1} \dots 0_7\,0_6\,1_5$. Разность между второй и пятой строками $t_{2,5} = 3$. Тогда, для того чтобы получить K_5, необходимо произвести умножение: $K_5 = K_2\,2^3$.

Обратно, чтобы из K_5 получить K_2, необходимо вместо умножения на 2^3 выполнить деление на 2^3. Действительно, $K_2 = K_5 / 2^3$. Рассмотрим предельные случаи, когда ключи взяты из верхней и нижней строк матрицы сегментов: $K_1 = 0_n\,0_{n-1} \dots 0_3\,0_2\,1_1$; $K = 1_n$. Разность между первой и n-й строками полной матрицы $t_{1,n} = n-1$. Следовательно, $K_1 = K_n / 2^{n-1}$, $K_n = K_1\,2^{n-1}$.

Или, в общем случае, правила выражения одного ключа через другой определяются по (10).

На множестве ключей из треугольной матрицы существует бинарное отношение строгого порядка E . Будем рассматривать ключи как целые двоичные числа, у которых правый разряд - самый младший. Тогда, для того чтобы отношение E было отношением строгого порядка, необходимо выполнение следующих свойств отношения E.

1. Для любых $K_1 \in K$, $K_2 \in K$ имеет место либо K_1 **E** K_2, либо K_2 **E** K_1, но не сразу оба этих условия. Действительно, пусть $K_1 = 0_n\, 0_{n-1} \ldots 0_2\, 1_1 = 1$, а $K_2 = 0_n\, 0_{n-1} \ldots 0_3\, 1_2 = 2$, тогда отношение **E** будет математическим отношением $<$, т.е. $K_1 < K_2$, и, следовательно, не может быть $K_2 < K_1$, тем более выполнение обоих условий. В свою очередь, выполнение этого свойства можно проверить для любой пары ключей K_i и K_q при условии $i < q$ (если же $i > q$, то отношение $<$ заменяется отношением $>$).

2. Бинарное отношение **E** не рефлексивно ни для одного $K_i \in K$ (действительно, не может быть $K_i < K_i$).

3. Отношение **E** антисимметрично - невозможно при $K_1 < K_2$ выполнение $K_2 < K_1$.

4. Отношение **E** транзитивно - выполняется при $K_1 < K_2$ и $K_2 < K_3 \rightarrow K_1 < K_3$.

В заключение отметим, что в общем случае пространство двоичного вектора X интерпретируется как n пар пространств векторов K и $\overline{A}$. Множество векторов $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ образует базис, состоящий из ключей переменной длины $K = [0_n \ldots 0_2\, 1_1]$, $K_2 = [0_n \ldots 0_3\, 1_2]$, ..., $K = [1_n]$. При этом считается, что пространство троичного вектора $\overline{\overline{S}} = \{\overline{\overline{S}}_1, \overline{\overline{S}}_2, \ldots, \overline{\overline{S}}_n\}$ порождено этим базисом, и его размерность равна n. Базис определяет в пространстве троичного вектора $\overline{\overline{S}}$ систему отсчетов (систему координат). При этом пространства частичных адресов $\overline{A}$ задают координаты соответствующих троичных векторов или точки этих пространств. Размеры пространств определены длиной адресных частей $\overline{A}$ троичных векторов.

Таким образом осуществляется переход от рассмотрения адресного пространства памяти как множества из 2^n двоичных векторов к пространству из n троичных векторов, т.е. к новому пространству с новыми свойствами. Переход осуществляется в четыре этапа: 1) разбиение пространства вектора X на группы по определенному правилу; 2) представление групп троичными векторами; 3) образование матрицы из троичных векторов; 4) КА-разложение матрицы на верхнюю и нижнюю треугольные матрицы.

Список литературы.

1. Информационные системы: табличная обработка информации / Е.П.Балашов, А.А.Смагин, В.Б.Смолов и др.; Под ред. Е.П.Балашова, В.Б.Смолова.- Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1985.-184 с.

2. *Смагин А.А.* Организация сжатия информации в табличных структурах.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. - 124 с.

3. *Lynch T.J.* Data compression. Techniques and application. - Van Nostrand Company.- 1985. - 345.

4. *Ramabadran T.* An adaptive algoritm of the compression of computer data // IEEE Trans.Commun. - 1989.- vol.37. - N.4.- P.317-324.

5. *Hartmanis J., Stearns R.* Algebraic structure theory of sequential machines. - N.Y.- 1966.- 212 p.

УДК 519.689

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В МОДЕЛИ НЕРАВНОМЕРНОГО РАЗБИЕНИЯ ПАМЯТИ

Смагин А.А.

В процессе проектирования структур памяти для размещения сжатых таблиц может возникнуть необходимость уменьшения размеров подпространств памяти, отводимых под строки полной матрицы модели неравномерного разбиения памяти или перехода от подпространства с меньшими к подпространству с большими размерами. Иначе говоря, над подпространст вами памяти нужно производить определенные действия.

Как указывалось в [1] пространству вектора X_{2^n} принадлежат множество ключей $K = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$ и множество адресных векторов $\overline{A} = \{\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n\}$, поэтому пространство X_{2^n} в самом общем виде будем задавать парой $X=(K, \overline{A})$. Но разбиения задают это же пространство как множестно подпространств $X = \overline{S} = \{\overline{S}_1, \overline{S}_2, ..., \overline{S}_n\}$. Введем определение подпространства вектора $\overline{S}$ и в дальнейшем на соответствующем уровне иерархии разбиений будем пользоваться им как структурной единицей, т.е. как самостоятельным математическим объектом.

Определение 1. Множество $\overline{S}_i = (K_i, \overline{A}_i)$ является подпространством (сегментом) адресного пространства вектора X тогда и только тогда, когда:

1) ключ K_i имеет фиксированное значение и не является ключом никакого другого подпространства век тора X;

2) адрес A_i образуется разложением матрицы неравномерного разбиения по диагонали сигнальных единиц, и его длина $l_{A_i} < n$;

3) само подпространстао $\overline{S}_i$, не пересекается ни с каким другим подпространством матрицы сегментов, то есть $\overline{S}_i \cap \overline{S}_k = 0$, $i,k = \overline{1,n}$.

На множестве подпространств $\{\overline{S}_i | i = \overline{1,n}\}$ введем два закона композиции: 1) сложение подпространств; 2) умножение на скаляр. Эти операции будут проводиться с троичными векторами. Обозначим операцию сложения знаком +, а операцию умножения - знаком x.

Определение 2. Суммой подпространств $\overline{S}_i$, и $\overline{S}_k$ $(i,k = \overline{1,n})$ будем называть такое подпространство $\overline{S}_{i,k} = \overline{S}_i + \overline{S}_k$, получение которого подчиняется следующим правилам:

$$\left.\begin{aligned} & x_j \oplus \alpha_j = \alpha_j \oplus x_j = x_j + 1_{j+1}; \\ & 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1; \\ & 0 \oplus 0 = 0; \\ & 1 \oplus 1 = x_j + 1_{j+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\oplus$ - поразрядная операция; $\alpha_j = \{x_j, 1, 1_{j+1}, 0\}$.

Пример 1. Пусть заданы два подпространства $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_3$: $\overline{S}_4 = 0_n 0_{n-1} ... 0_5 1_4 x_3 x_2 x_1$ и $\overline{S}_3 = 0_n 0_{n-1} ... 1_3 x_2 x_1$. Произведем суммирование соседних подпространств.

$$\begin{array}{rl} \overline{S}_3 = & 0_n 0_{n-1} ... 0_5 0_4 1_3 x_2 x_1 \\ +\,\underline{\overline{S}_4 =} & \underline{0_n 0_{n-1} ... 0_5 1_4 x_3 x_2 x_1} \\ \overline{S}_{3,4} = & 0_n 0_{n-1} ... 1_5 x_4 x_3 x_2 x_1; \end{array}$$

$$\overline{S}_{3,4} = \overline{S}_3 + \overline{S}_4 = 0_n 0_{n-1} ... 0_6 1_5 x_4 x_3 x_2 x_1.$$

Пример 2. Пусть нужно объединить два одинаковых подпрост ранства $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_4$.

$$\begin{array}{rl} \overline{S}_4 = & 0_n 0_{n-1} ... 0_5 1_4 x_3 x_2 x_1 \\ +\,\underline{\overline{S}_4 =} & \underline{0_n 0_{n-1} ... 0_5 1_4 x_3 x_2 x_1} \\ \overline{S}_{4,4} = & 0_n 0_{n-1} ... 1_5 x_4 x_3 x_2 x_1; \end{array}$$

Отметим, что операция сложения подпространств обладает свойством коммутативности $\overline{S}_i + \overline{S}_k = \overline{S}_k + \overline{S}_i$, ассоциативности $\overline{S}_i + (\overline{S}_k + \overline{S}_l) = (\overline{S}_i + \overline{S}_k) + \overline{S}_l$.

Определение 3. Умножением подпространства $\overline{S}i$, на скаляр ρ будем называть произведение $\overline{S}_{i,\rho} = \overline{S}_i \times \rho$, где $\rho = \{02^q\}$ $q = 0,1,2,3,...,2^{n-1}$, которое выполняется по правилу

$$\overline{S}_{i,\rho} = \overline{S}_i \times \rho = [01_j x] \times 2^q = [01_{j+q} x] \qquad (2)$$

Пример 3. Пусть задано подпространство $\overline{S}_5 = 0_n 0_{n-1} \ldots 1_5 x_4 x_3 x_2 x_1$ и скаляр ρ=2, тогда их произведение равно

$$\overline{S}_{5,\rho} = \overline{S}_5 \times \rho = [0_n 0_{n-1} \ldots 1_5 x_4 x_3 x_2 x_1] \times 2^2 =$$
$$= 0_n 0_{n-1} \ldots 1_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 .$$

Фактически операция умножения троичного вектора на скаляр есть операция сдвига влево или вправо его кортежа x в зависимости от знака ρ. Как видно из последнего примера, сигнальная единица в результате умножения переместилась влево на две позиции. Старший бит частичного адреса троичного вектора занял позицию сигнальной единицы, кортеж переменных x стал на две позиции длиннее, тем самым увеличив адресное подпространство в четыре раза. Что насается множества $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2^N}\}$, то среди его элементов существуют: а) элемент $\rho_1 = 2^0$, который является нейтральным (действительно, $\overline{S}_i \times 2^0 = 2^0 \times \overline{S}_i = \overline{S}_i$, то есть при умножении троичного вектора на нейтральный элемент вектор не изменяется); б) элемент $\rho_0 = 0$, являющийся нулевым (умножение любого троичного вектора на нулевой элемент дает век тор пространства X с единственной ячейкой памяти, адрес которой $0_n 0_{n-1} \ldots 0_{j+1} 0_j 0_{j-1} \ldots 0_2 0_1$).

Операция умножения троичного вектора на скаляр коммутативна: $\overline{S}_i \times \rho = \rho \times \overline{S}_i$. Если же сочетать операции сложения и умножения на скаляр, то можно заметить, что их связывает закон дистрибутивности: $(\overline{S}_i + \overline{S}_k) \times \rho = \overline{S}_i \times \rho + \overline{S}_k \times \rho$.

Отметим, что умножение троичного вектора на скаляр является внешним законом композиции на множестве троичных векторов.

Рассмотрим свойства элементов множества $\{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n\}$. Относительно внутреннего закона композиции - операции сложения - на множестве $\{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n\}$ отсутствуют нейтральный и симметричный элементы, поэтому, с учетом свойства коммутативности и свойства ассоциативности, можно говорить о множестве $\{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n\}$ и операции сложения как о

абелевой (коммутативной) полугруппе.

Множество подпространств $\overline{S}$ вместе с определенной на нем операцией умножения и свойствами коммутативности, ассоциативности, а также существованием нейтрального и нулевого элементов образуют абелеву (коммутативную) группу.

Определение 4. Разложением ключа K_i троичного вектора $\overline{S}_i$, называется операция ψ вынесения из ключа группы старших битов

$$\psi(K_i : h_b) = 0^{h_b} [0^{n-h_b} 1_j] \qquad (3)$$

Запишем в более общем виде:

$$\psi(K_i : h_b) = \hat{K}_i (K_i^b) \qquad (4)$$

Определение 5. Группу старших вынесенных битов из ключа $\hat{K}_i$ назовем дополнением до ключа K_i.

Определение 6. Оставшуюся часть ключа K_i^b будем называть базой ключа K_i.

Очевидно, что существует операция ψ^{-1} обратная операция ψ и такая, что $\psi^{-1}(\hat{K}_i, K_i^b) = K_i$.

Пример 4. Пусть задан ключ $K_5 = 0_n 0_{n-1} \ldots 0_7 0_6 1_5$. Осуществим операцию ψ вынесения дополнения $\hat{K}_5$:

$$\psi(K_5) = \hat{K}_5 \psi(K_5^b) = [0_n 0_{n-1} \ldots 0_7][0_6 1_5]$$

Лемма. Количество выносимых битов h_b за пределы кортежа двоичных переменных ключа K_i меньше значения номера позиции, на которой находится сигнальная единица, то есть $h_b < j$, где j - позиция сигнальной единицы.

Действительно, пусть $h_b \geq j$. При вынесении дополнения будет вынесена и часть двоичного вектора, которая захватывает сигнальную единицу и переменные x, относящиеся к адресу подпространства.Такие действия приводят к тому, что будет невовозможно распознать подпространство, т.е. нарушается условие существования матрицы - модели пространства неравномерного разбиения.

Рассмотрим операцию вынесения дополнения ключа на множестве ключей, т.е. в пространстве треугольной матрицы **K**. Запишем эту операцию применительно к p ключам:

$$\psi(S_i, S_{i+1}, \ldots, S_p : h_b) = \hat{K}_{i,j,\ldots,p}(K_i^b, K_{i+1}^b, \ldots, K_p^b)$$

Для p -местной операции вынесения дополнения ключей $\hat{K}_{i,j,\ldots,p}$ называется общим признаком для ключей $K_i, K_j, \ldots, K_p$.

Пример 5. Пусть $p = 2, K_4 = 0_n 0_{n-1} \ldots 0_5 1_4, K_3 = 0_n 0_{n-1} \ldots 0_4 1_3$. Выделим с помощью (4) общий признак:

$$\psi(K_4, K_3 : 5) = \psi\{[0_n 0_{n-1} \ldots 0_5 1_4][0_n 0_{n-1} \ldots 0_4 1_3]\} =$$

$$[0_n 0_{n-1} \ldots 0_5]\{[1_4],[0_4 1_3]\} = [0_5]\{[1_4],[0_4 1_3]\}.$$

Таким образом, для подпространств $\overline{S}_4$ (ключ K_4) и $\overline{S}_3$ (ключ K_3) выделен общий признак $K_{4,3} = [\,0_5\,]$,состоящий из n-4 нулей и занимающий позиции с 5 -й по n-ю.

Иными словами, общий признак представляет собой фрагмент двоичной последовательности, начинающийся с n-го разряда и состоящий из нулей, общих для ключей, к которым применена операция вынесения.

Многоместная операция вынесения общего признака (4) имеет важное значение для случая объединения подпространств, организованных параллельно друг другу. Как будет показано ниже, операция поиска нужной ячейки памяти в этом случае существенно упрощается. Заметим, что подпространства $\overline{S}_i, \overline{S}_j, \ldots, \overline{S}_p$, вошедшие в объединение подпространств $\overline{S}_{i,j,\ldots,p} = \overline{S}_i + \overline{S}_j + \ldots + \overline{S}_p$, будут иметь две области существования: 1) новую совокупность образующих координат - общий признак $\hat{K}_{i,j,\ldots,p}$; 2) множество баз $K_i^b, K_{i+1}^b, \ldots, K_p^b$. Поэтому поиск ячейки памяти будет осуществляться в три этапа: сначала распознавание общего признака, затем - собственно базы ключа, и только после этого выполняется обращение к нужной ячейке памяти.

Конструирование подпространств.

Под конструкцией пространства вектора X понимается такое представление полной матрицы сегментов модели неравномерного разбиения памяти, которое отражает результаты ее преобразования при сжатии табличного массива данных. В пространстве вектора X такие представления конструкции будут однозначно определять, из какого количества подпространств состоит пространство вектора X, размеры каждого подпространства, организацию поиска подпространства среди множества других, а также ячейки памяти внутри каждого отдельно взятого подпрост ранства.

Процесс объединения подпространств приводит к изменению структуры матрицы сегментов, в частности, к уменьшению количества строк. Преобразуя по определенным правилам строки полной матрицы , можно осуществлять конструирование отдельных подпространств и, следовательно, конструирование самого пространства вектора X .

Возьмем из матрицы-модели i-ю строку, адресная часть которой задает j-1 битов. Очевидно ,что максимальное число ячеек памяти составит 2^{j-1}. Для заданной строки управление размером подпространства можно осуществлять отбрасыванием старших или младших битов адреса. Отбрасывание старших или младших разрядов адресной части строки приводит к преобразованию этой строки. Будем на месте отбрасываемых разрядов ставить прочерки. Предположим, что у адреса i-й строки, имеющего вид $\overline{A}_i = x_{j-1}x_{j-2}\ldots x_3x_2x_1$, отброшены два младших бита, тогда адрес $\overline{A}_i$ будет представляться как $A_i = x_{j-1}x_{j-2}\ldots x_3 - -$.

Преобразование строк матрицы сегментов за счет выбрасывания адресных битов вызывает изменение конфигурации нижней треугольной матрицы **A** и уменьшение ее площади по сравнению с исходной. Эту площадь можно оценить и по оценке - судить о размерах подпространств и самого пространства вектора X.

Возможные конфигурации матрицы сегментов, полученные путем отбрасывания младших и старших битов, представлены на рис. 1. Так, на рис. 1 б,г,д изображены матрицы сегментов ленточного типа. Лента характеризует два аспекта конструирования пространства матрицы сегментов: 1) равномерность его разбиения на под пространства с одинаковым числом ячеек памяти; 2) количество адресов подпространства определяется шириной ленты δ, т.е. числом битов, входящих в адресную часть строки, за исключением тех, которые не входят в зону ленты. Лента не может находиться слева от главной диагонали, и ее ширина ограничена.

Ниже приведен пример преобразования полной матрицы (n=8) в матрицу сегментов с шириной ленты δ = 2.

$$\mathbf{R}_1 = \left[\begin{matrix} 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 0_4 & 0_3 & 0_2 & 1_1 \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 0_4 & 0_3 & 1_2 & x_1 \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 0_4 & 1_3 & x_2 & x_1 \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 1_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 1_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0_8 & 0_7 & 1_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0_8 & 1_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 1_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \Rightarrow$$

Полная матрица

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 0_4 & 1_3 & x_2 & x_1 \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 0_5 & 1_4 & x_3 & x_2 & - \\ 0_8 & 0_7 & 0_6 & 1_5 & x_4 & x_3 & - & - \\ 0_8 & 0_7 & 1_6 & x_5 & x_4 & - & - & - \\ 0_8 & 1_7 & x_6 & x_5 & - & - & - & - \\ 1_8 & x_7 & x_6 & - & - & - & - & - \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Ленточная матрица

Нетрудно убедиться, что максимальная ширина ленты δ равна n-2 , причем в этом случае матрица сегментов будет состоять из двух нижних строк. Для приведенного выше примера преобразованная матрица сегментов представляется следующим образом:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0_8 & 1_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 1_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & - \end{bmatrix}.$$

Минимальная ширина ленты равна 1 биту, т.е. в этом случае каждое подпространство состоит из двух ячеек памяти. Отметим, что с увеличением размеров подпространств при равномерном разбиении пространства вектора X (в случае ленточной матрицы) количество подпространств уменьшается. При этом справедливо соотношение H = n - δ, где H - число подпространств . Для последнего примера образуются два подпространства общим объемом V = 2 x 2^6 = 128 битов, то время как вектор X порождает пространство размером 256 ячеек. В общем случае суммарный объем ячеек памяти всех подпространств ленточной матрицы сегментов равен

$V = Q_{ЛМ}\ 2^8$, где $Q_{лм}$ - число строк ленточной матрицы.

Применение ленточной матрицы сегментов приводит к неполному использованию пространства вектора X - образуется некоторый резерв ячеек памяти, размер которого зависит от ширины ленты.

На рис. 1,г приведена разновидность ленточной матрицы, в которой на участке ленты от первой строки до строки с номером i_0 используется неравномерное разбиение. На рис. 1,д изображена матрица с усеченной на i верхних строк лентой. В этом случае отброшены и старшие $\Delta_{АЧ}$ битов адресной части троки матрицы сегментов. На рис. 1,з - матрица с прямоугольной лентой, причем ширина вертикальной и горизонтальной частей одинакова.

Рассмотрим другой случай, когда в пространстве вектора X производится неравномерное разбиение, при котором сигнальные единицы не занимают положение главной диагонали. Введем понятие расстояния между подпространствами.

Определение 7. Расстоянием $\bar{G}$ между подпространствами $\overline{S}_k$ и $\overline{S}_l$ называется разность кодов ключей этих подпространств $\overline{D}_{k-l} = K_k - K_l$, где $k, l = \overline{1,n}$ и $k > l$.

Определение 8. Соседними подпространствами называются два подпространства, $\overline{S}_i$ и $\overline{S}_q$, расстояние между которыми

$$\overline{D}_{i-q} = K_i - K_q = 2^{i-1} = 2^q,$$

где i > q.

Рассмотрим пример. Пусть i = 5, а q = 4, тогда $\overline{D}_{5-4} = 2^5 - 2^4 = 2^4$, следовательно, подпространства соседние.

Определение 8. Два подпространства $\overline{S}_k$ и $\overline{S}_l$ называются несоседними, если выполняется условие $\overline{D}_{k-l} = K_k - K_l > 2^l$, где $k > l$.

Пример. Пусть ключи двух подпространста K_6 и K_4 имеют вид: $K_6 = 0_8 0_7 1_6$, $K_4 = 0_8 0_7 0_6 0_5 1_4$, то есть k = 6, l = 4, тогда $\overline{D}_{6-4} = 64 - 16 > 2^4$.

Определение 9. Псевдодиагональю матрицы сегментов называется такая диагональ из сигнальных единиц, которая формирует как минимум два несоседних подпространства.

Если из полной матрицы сегментов можно образовать последовательность соседних подпространств, в которой каждое последующее подпространство в два раза больше предыдущего, то в матрице с псевдодиагональю такая последовательность существовать не может. Из матрицы с псевдодиагональю можно построить ленточную матрицу, в которой лента имеет не линейный, а ступенчатый характер (рис. 1, в).

Разнообразие представлений полной матрицы вследствие "деформирования" (образования ступеней) и смещения главной диагонали дает универсальное средство для получения дискретного пространства вектора X с необходимой конструкцией.

На рис. 1, е,ж приведены примеры запрещенных конфигураций матрицы сегментов: в этих матрицах существуют повторяющиеся ключи; что противоречит условиям существования матрицы сегментов. Дополнительно отметим, что введение расстояния $\overline{D}$ между подпространствами приводит к рассмотрению пространства сегментов $\overline{S} = \{\overline{S}_1, \overline{S}_2, ..., \overline{S}_n\}$ как метрического пространства. Действительно, пространство сегментов обладает следующими свойствами:

1) $\overline{D}(\overline{S}_1, \overline{S}_2) \geq 0 \quad (\overline{D}(\overline{S}_1, \overline{S}_1) = 0)$;

2) $\overline{D}(\overline{S}_1, \overline{S}_2) = \overline{D}(\overline{S}_2, \overline{S}_1)$;

3) $\overline{D}(\overline{S}_1, \overline{S}_3) = \overline{D}(\overline{S}_1, \overline{S}_2) + \overline{D}(\overline{S}_2, \overline{S}_3)$.

Диапазон изменений значений вектора X находится в пределах от 0 до 2^n . Однако в реальных условиях для некоторых задач диапазон необязательно начинается с 0 и кончается на значении 2^n. Матрица сегментов предоставляет широкие возможности для изменения границ диапазона переменной x^i. Начало диапазона (нижняя граница) может регулироваться отбрасыванием некоторого числа младших разрядов адресной части строки. Рассмотрим пример. Пусть задана строка с ключом $K_5 = 0_8 0_7 0_6 1_5$, тогда адресное пространство начинается с ячейки памяти с адресом $\overline{A}_н = 0_4 0_3 0_2 0_1$, и его верхняя граница имеет адрес $\overline{A}_в = 1_4 1_3 1_2 1_1$, так как граничные значения адресов - 0 и 2^4 - 1 (если считать бит x_1 имеющим нулевой вес). Для данной строки начало подпространства можно смещать влево по строке, отбрасывая младшие биты. В случае отбрасывания одного бита нижняя граница адреса смещается на позицию x_2(вес 2^1), и размер подпространства уменьшается вдвое. Можно считать, что в этом случае сегмент изменился и

стал определяться как [2, 2^4- 1]. Аналогичным образом получаются результаты при отбрасывании последующих битов: [2^2,2^4 - 1], [2^3,2^4 - 1].

Определим количество подпространств H_i, которое можно задать с помощью строк полной матрицы сегментов при последовательном отбрасывании младших разрядов в адресной части строк.

Определение 10. Подпространством $\overline{S}_i^l$ i-й строки матрицы сегментов называется *l*-е подпространство, адрес которого сформирован группированием соседних переменных x в адресной части i-й строки, причем $1 \leq l \leq H_i$.

В общем случае i-я строка может одновременно задать $H'_в = i - 1$ подпространств. Следовательно, общее число подпространств, которое удается сформировать адресными частями строк матрицы сегментов, равно

$$H_в = \sum_{i=1}^{n-1} (i - 1) + 1 ,$$

где $n \geq i \geq 1$.

На рис. 2 приведены зависимости количества подпространств от номера строки матрицы сегментов и суммарного числа подпространств от номера строки матрицы сегментов. Эти зависимости упрощают процесс поиска нужной строки матрицы сегментов для конструирования пространства с необходимой конфигурацией.

Рассмотренный ранее способ образования пространств строки матрицы сегментов базировался на смещении правой границы нижней треугольной матрицы адресов (уменьшении числа битов в адресе путем отбрасывания младших разрядов). Однако можно создавать подпространства строки матрицы группированием и выделением соседних адресных битов. При таком способе образования адресов число подпространств строки увеличивается, и общее число подпространств i-й строки находится как

$$H_i = \sum_{P_A^l = 1}^{l_A - 1} \left(l_{\overline{A}} - P_{\overline{A}}^l + 1 \right) + 1 .$$

Может быть использована и другая формула:

$$H_i = \frac{\left(l_{\bar{A}}\right)!}{2\left(l_{\bar{A}}-2\right)} + l_{\bar{A}},$$

которая вычисляет общее количество подпространств без учета количества битов, входящих в частичный адрес подпространства строки. В обеих формулах используются следующие обозначения: $l_{\bar{A}}$ - длина адресной части строки, $P^l_{l_{\bar{A}}}$ - число битов в группе символов, входящих в адрес l-го подпространства строки, $1 \le l \le H_i$. Суммарное количество подпространств, образуемой матрицей (3.2), определяется как

$$H_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{P^l_{\bar{A}}=1}^{l_{\bar{A}}-1} \left(l_{\bar{A}} - P^l_{l_{\bar{A}}} + 1 \right) + 1 \right\},$$

Пример. Возьмем четвертую и шестую строки матрицы сегментов с адресными частями $x_3x_2x_1$ и $x_5x_4x_3x_2x_1$. Для четвертой строки сформируем два подпространства: $\bar{S}_4^1$ и $\bar{S}_4^2$ с одинаковыми размерами, например, с адресами соответственно x_3x_2 и x_2x_1, а для шестой строки - три подпространства $\bar{S}_6^1$, $\bar{S}_6^2$, $\bar{S}_6^3$, с разными размерами, например, с адресами $x_5x_4x_3x_2$, $x_4x_3x_2$, $x_3x_2x_1$. Обращение к подпространствам четвертой строки разрешается только при наличии ключа K_4, а к подпространству шестой строки - ключа K_6. (Иллюстрация к примеру приведена на рис. 3)

Введем иерархию подпространств. Пространство вектора X есть иерархическое пространство с двумя уровнями иерархии:

1) $X = \{\bar{S}_i : i = \overline{1,n}\}$;

2) $\bar{S}_i = \{\bar{S}_i^a : t = \overline{1,H_i}\}$,

где H_i- число подпространств в пространстве строки $\bar{S}_i$. Способ образования пространств $\bar{S}_i$ известен, а подпространства $\bar{S}_i^a$ формируются путем разбиения кортежа переменных x адресной части строки полной матрицы.

Действительно, матрица сегментов задает пространство из n подпространств, принадлежащих строкам матрицы; в свою очередь, подпространство строки состоит из H_i собственных подпространств. Схематично иерархию можно представить рис. 4. Следует отметить, что имена подпространств, относящихся к строке, необходимо помечать двойным индексом: первый - номер строки, второй - номер по порядку. Так как подпространства, образованные строкой матрицы, имеют один и тот же ключ, то появление ключа в системе памяти будет разрешать одновременное обращение к подпространствам строки, что имеет важное значение при выборке групп данных с одним и тем же признаком; однако сами адреса могут подаваться в разные моменты времени, и это придает гибкость управлению работой с подпространствами (случай одноканальной памяти).

Отметим также и то, что подпространства строки не пересекаются между собой, как и подпространства полной матрицы. Этот факт важен как с точки зрения независимости доступа к ячейкам памяти подпространств, так и с точки зрения параллельной организации модулей памяти.

Изложенный подход преобразования пространств модели неравномерного разбиения памяти создает основу создания программной системы автоматизации исследования сжатых представлений табличных массивов и их последующих реализаций.

Список литературы.

1. Смагин А.А. Модель неравномерного разбиения памяти для хранения сжатых таблиц. \\ Фундаментальные проблемы математики и механики. Сборник п/р Бутова А.А..- Ульяновск,1996.

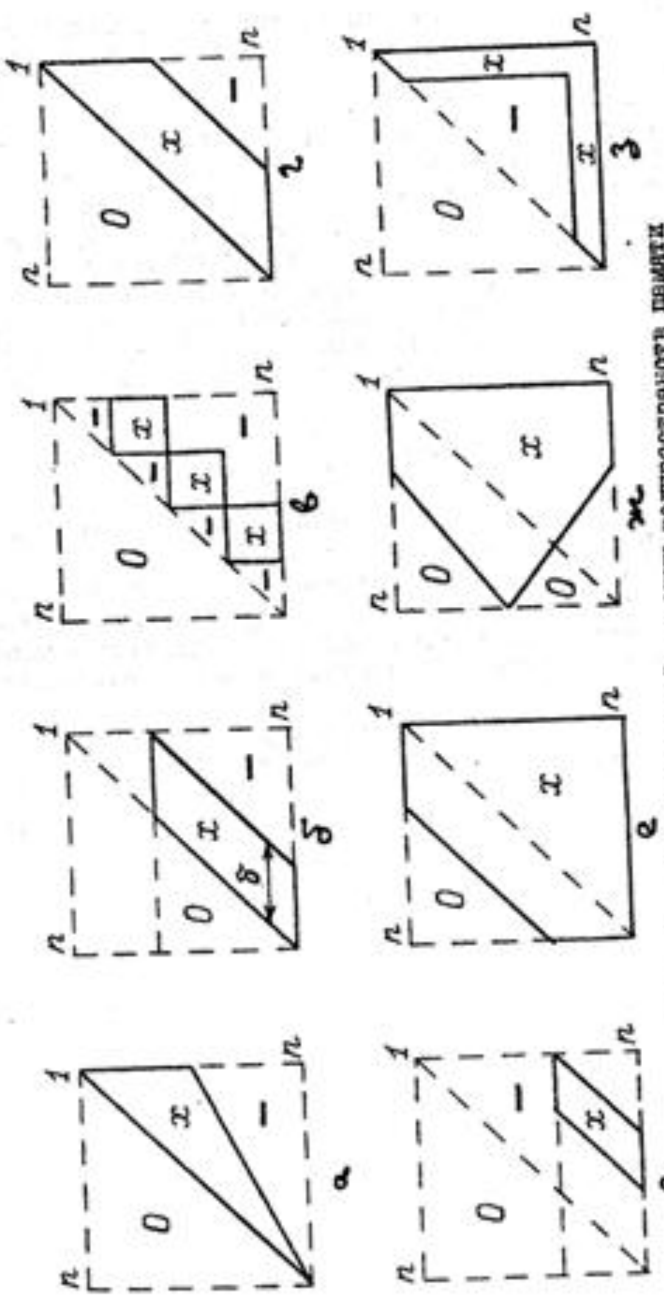

Рис. 1 Возможные конфигурации подпространств памяти

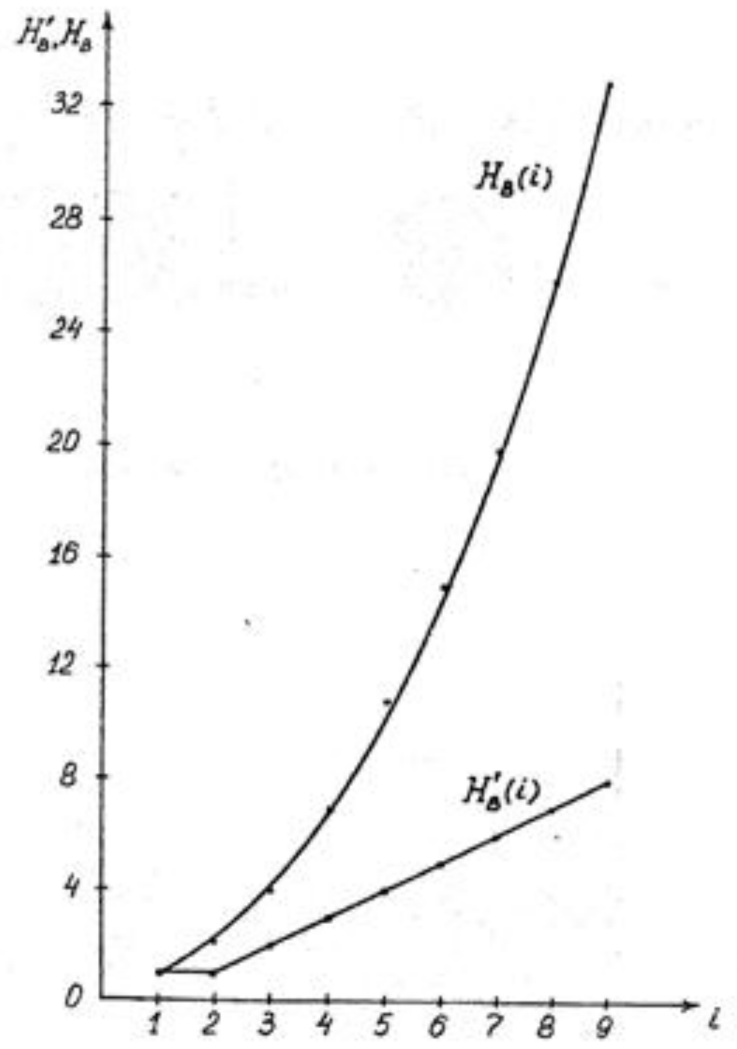

Рис. 2 Зависимость количества подпространств строки для одной строки модели от номера строки

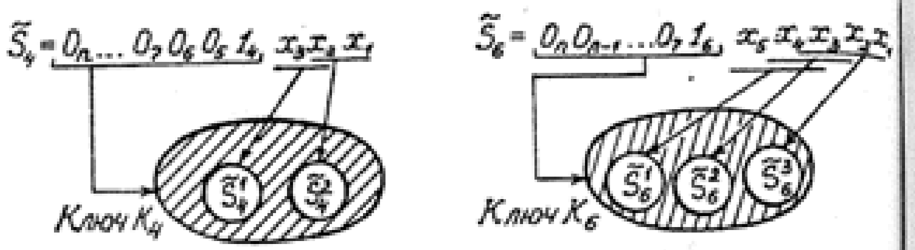

Рис. 3. Два примера подпространств с общим ключом

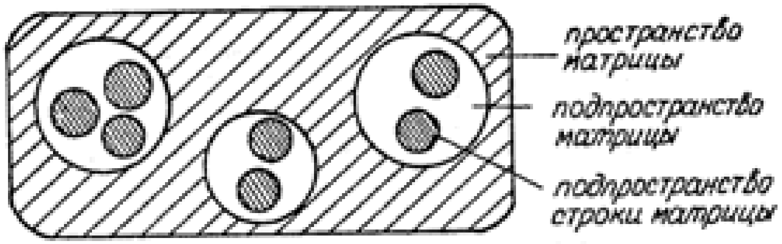

Рис. 4 Иерархия подпространств памяти модели

УДК 519.689

СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Смагин А.А., Терентьева Ю.Ю.

В настоящей работе представлен способ преобразования дискретной информации, который позволяет осуществлять передачу данных по каналу. Целью подобного рода преобразований является повышение надёжности передачи информации.

Предлагаемый способ позволяет кодировать числа для последующей передачи их по каналу.При этом код числа может иметь разный ранг, что позволяет повысить помехоустойчивость и осуществлять эффективный контроль за достоверностью передаваемой информации. Кроме того, данный способ преобразования дискретной информации предусматривает возможность коррекции ошибок, возникающих при передаче по каналу.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется некоторое множество S1,состоящее из всех неотрицательных десятичных целых чисел. Необходимо найти преобразование этого множества во множество двоичных слов (обозначим его S2),причем длина и ранг этих слов могут быть переменными,кроме этого должно быть найдено и обратное преобразование.

Обязательным требованием для данного отображения множеств является биективность,которая бы гарантировала однозначность кодирования и декодирования.

Для решения поставленной задачи разработан математически обоснованный алгоритм, который реализует необходимое преобразование. Он относится к одному из наиболее эффективных методов кодирования информации - кодирование с помощью матриц [1].

В основу алгоритма положена разработанная треугольная матрица специального вида. Эта матрица имеет следующую структуру :

1) по главной диагонали расположены нулевые элементы ;

2) элементы первого столбца равны номеру соответствующей строки минус единица ;

3) все остальные элементы матрицы строятся по рекурсивной формуле :

$T(i,j) = T(i-1,j-1) + T(i-1,j)$.

Следует отметить, что данную матрицу можно построить и нерекурсивным методом :

1) по главной диагонали расположены нулевые элементы ;

2) элемент $T(i,j)$, для которого $i > j$, равен биномиальному коэффициенту C^{j}_{i-1}.

Таким образом, матрица, играющая роль таблицы весовых коэффициентов, имеет следующий вид :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 3 & 3 & 1 & 0 & & & & & & \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & & & & \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & & & \\ 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & & \\ 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 & \\ 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{L\times Q}$$

Заметим,что L и Q могут быть неограничены.

Рассмотрим алгоритм кодирования исходных чисел.

Возьмем некоторое число N из множества S1 и зададим ранг кода R. В таблице весовых коэффициентов находим R-ый столбец. Затем ищем строку i такую, что

$$T(i, R) \le N < T(i+1, R).$$

В i-ой позиции кода (считая справа налево) ставится 1.

Переходим к (R-1)-ому столбцу матрицы (в дальнейшем переменная j будет обозначать номер текущего столбца) и (i-1)-ой строке (аналогично переменная i будет хранить значение текущей строки). Процедура кодирования продолжается для числа M, равного разности исходного десятичного числа и рассматриваемого элемента матрицы весовых коэффи-

циентов (в дальнейшем описании это текущее число будет обозначаться M). При последующих итерациях возможен ряд случаев:

1) Если $T(i,j) \le M$ и $j > 1$, то в i-й позиции кода ставится 1 ,процедура продолжается для числа, равного разности текущего десятичного числа и рассматриваемого элемента матрицы, при уменьшении номера текущей строки и столбца на единицу.

2) Если $M > 0$, $j = 1$ и $T(i, j) = M$, то в i-ой позиции кода ставится 1, при этом M становится равным нулю, и номер текущей строки уменьшается на единицу.

3) Если $M = 0$, $j = 1$, и в формируемом коде число значащих позиций не равно рангу R, то в i-ой позиции кода ставится единица, и процесс кодирования завершается.

4) Если $M = 0$, $j = 1$, и в формируемом коде число значащих позиций равно рангу R, то в i-ой позиции кода ставится ноль,и процесс кодирования завершается.

5) Если $T(i,j) > M$, то в i-ой позиции кода ставится ноль, при этом номер текущей строки уменьшается на единицу.

Рассмотрим пример 1.

Предположим,нужно закодировать число $N = 24$. Зададим ранг $R = 4$. Согласно вышеизложенному алгоритму в 4-ом столбце матрицы находим элемент $T(7,4)$ такой, что

$T(7,4) \le N < T(8,4)$.В 7-ой позиции кода ставим 1,при этом M становится равным 9 (24 - 15 = 9). Номер текущей строки становится равным 6, номер текущего столбца - 3.

Переходим к элементу матрицы $T(6,3) = 10$. Поскольку его значение больше M, и номер текущего столбца больше единицы, то в 6-ой позиции ставится 0, номер текущей строки становится равным 5.

Переходим к элементу матрицы $T(5,3)$: в 5-ой позиции ставится 1, M становится равным 5, номер текущего столбца становится равным 2, текущей строки - 4.

Переходим к элементу матрицы $T(4,2)$: в 4-ой позиции кода ставится 1, M становится равным 2, номер текущего столбца - 1, текущей строки - 3.

Переходим к элементу $T(3,1)$: в 3-ей позиции кода ставится 1, M становится равным 0, номер текущей строки - 2.

Переходим к элементу $T(2,1)$: во 2-ой позиции ставится 0, номер текущей строки - 1. Переходим к элементу $T(1,1)$: в 1-ой позиции ставится 0, процедура кодирования закончена.

Полученный код имеет следующий вид: 1011100

Теперь рассмотрим алгоритм декодирования.

Предположим, имеется некоторый код вида :$K_1 K_2 \ldots K_p$, где $K_i \in \{0, 1\}$. Поставим в соответствие данному элементу множества S2 два упорядоченных множества индексов.

Первое множество (назовем его A) включает номера позиций при нумерации справа налево.

Второе множество (назовем его B) строится следующим образом: нулю в коде соответствует ноль, единице соответствует ее номер в коде, считая справа налево. Например, для кода 1011100 второе множество будет иметь вид: 4032100. Декодирование числа осуществляется по формуле:

$$N = \sum_{i : B_i \neq 0} T(A_i, B_i)$$

Рассмотрим пример 2.

Предположим, нужно получить значение кода 1011100. Тогда согласно алгоритму декодирования формируем два множества.

$$A = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\},$$
$$B = \{4, 0, 3, 2, 1, 0, 0\}.$$

Искомое число вычисляем согласно формуле декодирования

$$N = T(7, 4) + T(5, 3) + T(4, 2) + T(3, 1) = 24.$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Пусть $K(P, R)$ - подмножество S1, состоящее из неотрицательных целых чисел от 0 до $C_P^R - 1$. Обозначим через $W(P, R)$ подмножество множества S2, состоящее из всех кодов длины P ранга R. Для элементов множества $W(P, R)$ введём отношение предпочтения. Код $(c_1, c_2, \ldots, c_P)$ будем считать предпочтительней кода $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$, если существует номер k такой, что $c_k > d_k$, и не существует номера m такого, что $m < k$ и $c_m < d_m$. Отношение предпочтения обозначим $C \gg D$. Назовём k степенью предпочтительности. Обозначим через Ψ оператор декодирования, действующий на множестве $W(P, R)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

Для двух элементов C и D множества $W(P, R)$ таких, что $C \gg D$, справедливо неравенство

$$\Psi(C) > \Psi(D)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим структуру кодирующей матрицы. Заметим, что для любых w1 и w2 таких, что $w1 \leq w2$ и для любых k1 и k2, удовлетворяющих условию $k1 < k2$, справедливо

$T(k1, w1) < T(k2, w2)$.

Согласно алгоритму декодирования

$$\Psi(C) = \sum_{i : B_i^C \neq 0} T(A_i^C, B_i^C),$$

где A^C и B^C - упорядоченные по убыванию значений элементов множества специальной структуры.

Пусть k - степень предпочтительности кода C коду D. Тогда $B^C{}_k$ - порядковый номер единицы в коде C, на котором реализовалось отношение предпочтения степени k. По построению множества B существует номер s такой, что

$$B^D{}_s = B^C{}_k$$

Так как $C \gg D$, то $A^C{}_k > A^D{}_s$. А это значит, что суммируя элементы кодирующей матрицы по вышеизложенному алгоритму, получим числа $\Psi(C)$ и $\Psi(D)$, удовлетворяющие условию

$$\Psi(C) > \Psi(D),$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ:

Операция декодирования задаёт инъективное преобразование множества кодов $W(P, R)$ во множество $K(P, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Для доказательства рассмотрим два различных элемента множества кодов $W(P, R)$. Обозначим их C и D. Очевидно, что между ними существует отношение предпочтения. Пусть $C \gg D$, применим операцию декодирования к данным кодам. По утверждению 1 получим числа $\Psi(C)$ и $\Psi(D)$, для которых справедливо неравенство:

$$\Psi(C) > \Psi(D)$$

Следовательно, разным кодам, которые играют роль прообразов, соответствуют разные числа, играющие роль образов. Это тем самым доказывает, что Ψ - инъекция.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Элемент кодирующей матрицы ровно на единицу больше суммы элементов вышестоящей диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Докажем следующее равенство:

$$T(i,j) = T(i-1,j) + T(i-2,j-1) + \ldots + T(i-j+1) + 1$$

По правилу построения кодирующей матрицы

$$T(i,j) = C^{j}_{i-1}.$$

Тогда доказываемое равенство примет вид:

$$C^{j}_{i-1} = C^{j}_{i-2} + C^{j-1}_{i-3} + \ldots + C^{1}_{i-j} + 1$$

По свойству биномиальных коэффициентов

$C^{j}_{i-1} = C^{j}_{i-2} + C^{j-1}_{i-2}$. Используя это свойство, получим

$$C^{j-1}_{i-2} = C^{j-1}_{i-3} + \ldots + C^{1}_{i-j} + 1$$

Редуцируя данное равенство аналогичным образом, получим

$$C^{1}_{i-j+1} = C^{1}_{i-j} + 1.$$

А это в свою очередь является тождеством, Таким образом утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Для любого элемента $D \in W(P,R)$ справедливо

$\psi(D) \in K(P,R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть C - самый предпочтительный код среди кодов длины P ранга R. Очевидно, что он будет иметь следующий вид: первые R позиций занимают единицы, а остальные (P - R) - нули. Согласно алгоритму декодирования, этот код соответствует числу

$$\psi(C) = T(P,R) + T(P-1,R-1) + \ldots + T(P-R+1,1)$$

Из утверждения 2 следует

$$T(P,R) + T(P-1,R-1) + \ldots + T(P-R+1,1) = T(P+1,R) - 1$$

Значит, $\psi(C) = T(P+1,R) - 1$. Так как $T(P,R) = C^{R}_{P}$, то

$$\psi(C) = C^{R}_{P} - 1 \quad /*/$$

Возьмём произвольный код $D \in W(P,R)$, отличный от кода C. Ясно, что C в D . Из утверждения 1

$$\psi(D) < \psi(C).$$

Учитывая /*/ , имеем

$$\psi(D) < C^{R}_{P} - 1$$

То, что $\psi(D) >= 0$, следует из самого алгоритма декодирования. Таким образом,

$$\psi(D) \in K(P,R),$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

Операция декодирования задаёт биективное отображение множества кодов $W(P,R)$ во множество $K(P,R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Доказательство этого утвкрждения опирается на следующие ранее доказанные факты:

1) по следствию из утверждения 1 операция декодирования задаёт инъекцию.

2) card $W(P,R)$ = card $K(P,R)$.

Этот факт очевиден, т.к. количество всех возможных наборов из нулей и единиц, содержащих ровно R единиц и P-R нулей, равно C^{R}_{P}.

3) Из утверждения 3 все образы декодирующего отображения ψ множества кодов $W(P,R)$ принадлежат множеству $K(P,R)$.Отсюда очевидно, что оператор декодирования является биекцией.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА

Предложенный алгоритм преобразования дискретной информации для любого положительного R задаёт биективное отображение множества кодов $W(P(R),R)$ во множество S1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Заметим, что при неограниченном возрастании длины кода P мощность множеств $W(P,R)$ и $K(P,R)$ неограниченно увеличивается , т.к. равна C^{R}_{P}. Значит, для любого неотрицательного $N \in K(P,R)$ найдётся P такое, что $N < C^{R}_{P}$. Из утверждения 4 следует , что инвариантно относительно P и R существует биективное отображение множества кодов $W(P,R)$ во множество $K(P,R)$. В силу произвольности N можно считать, что ψ - биекция из множества кодов $W(P(R),P)$ во множество S1 .

СЛЕДСТВИЕ 1

Любое неотрицательное целое число может быть корректно закодировано в двоичный код заданного ранга.

СЛЕДСТВИЕ 2

При кодирования неотрицательного целого числа N в двоичный код ранга R при выполнении условия

$T(P^*, R) \le N < T(P^* + 1, R)$

минимальной длиной кода является номер строки P^* кодирующей матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Среди всех P, удовлетворяющих условию $N < C^{R}_{P}$, существует минимальное P_{min}, порождающее множество $W(P_{min}, R)$, для которого операция кодирования/декодирования биективна. Так как $P_{min} = \min(N < C^{R}_{P})$, то

$$C^{R}_{P_{min}-1} \le N < C^{R}_{P_{min}}$$

По свойству кодирующей матрицы $T(P^* + 1, R) = C^{R}_{P^*}$. Следовательно $P_{min} = P^*$ - минимальная длина кода.

Список использованной литературы:

1. Г.Биркгоф,Т.Барти "Современная прикладная алгебра". Издательство "Мир",Москва,1976.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩЕНИЙ.

Суетина Н.Л.

Рассматривается невозмущенная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1}$$

и система с возмущением

$$\dot{x} = X(t, x) + p(t, x), \tag{2}$$

где $x \in R^n$, векторные функции $X(t,x)$ и $p(t,x)$ определены в области $R^+ \times \Gamma$, ($R^+ = [0, +\infty[$, Γ - некоторая область пространства R^n с нормой $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$) и таковы, что для каждой точки $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma$ решения $x = x(t, t_0, x_0)$ и $\tilde{x} = x(t, t_0, x_0)$ систем существуют и единственны.

Предположим, что вектор-функция $X(t,x)$ удовлетворяет также следующим условиям [1,2] : на каждом компакте $K \subset \Gamma$ выполнены неравенства

$$\|X(t,x)\| \le \lambda_k(t), \quad \|X(t,x_2) - X(t,x_1)\| \le \eta_k(t)\|x_2 - x_1\|$$

где $\lambda_k(t)$ и $\eta_k(t)$ локально интегрируемые функции, $\lambda_k(t)$ – равно- мерно непрерывна в среднем, $\eta_k(t)$-равностепенно ограничена в среднем, т.е. существует число $N = N(K)$, и для каждого малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$, такое что при любом $t \in R^+$ для любого множества $E \in [t, t+1]$ мерой $\mu(\varepsilon) \le \delta$ выполнены неравенства

$$\int_E \lambda_k(\tau)d\tau \le \varepsilon, \quad \int_t^{t+1} \eta_k(\tau)d\tau \le N$$

При этом предположении семейство сдвигов $\{X_\tau(t,x) = X(\tau + t, x)\}$ предкомпактно в некотором функциональном пространстве F и системе (1) может быть сопоставлено семейство предельных уравнений [2]

$$\dot{x} = \Phi(t,x), \quad \Phi(t,x) = \frac{d}{dt} \lim_{t_n \to +\infty} \int_0^t X(t_n + \tau, x)d\tau \tag{3}$$

Исследуем задачу об устойчивости системы (2), когда возмущение $p(t,x)$ является постоянно действующим [3-7], исчезающим в среднем или интегрально соответствии со следующими определениями.

Определение 1 [4]. Возмущение $p = p(t,x)$ есть исчезающее в среднем, если для любой последовательности непрерывных функций $u_k(t) : [a,b] \to K$, сходящейся равномерно к функции $u = u(t) : [a,b] \to K$ и любой последовательности $s_k \to +\infty$ выполняется соотношение

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_a^b p_1(s_k+\tau, u_k(\tau))d\tau = 0 \tag{4}$$

Определение 2 [6]. Возмущение $p = p_2(t,x)$ есть интегрально исчезающее, если существует функция $\sigma(t) : [0,+\infty[\to R$, такая что для всех $t \in R^+$ и $x \in \Gamma$ выполняется оценка $\|p_2(t,x)\| \le \sigma(t)$, при этом

$$\int\limits_0^\infty \sigma(\tau)d\tau < +\infty \tag{5}$$

Из определения предельной системы (3) следует, что если возмущение $p(t,x)$ удовлетворяет одному из условий (4), (5), то семейство предельных к (2) систем совпадает с семейством систем, предельных к системе (1). На основании такой связи систем и результатов из [1] можно получить следующие результаты о предельном поведении решений возмущенной системы (2).

Пусть функция Ляпунова $V = V(t,x) \in C^1(G \to R)$ ограничена на каждом компакте $K \subset \Gamma$, $V(t,x) \le m(k) \forall (t,x) \in R^+ \times K$, и имеет производную в силу системы (1)

$$\dot V_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} X(t,x) \le -W(t,x) \le 0$$

Как и в [1], обозначим через $M^+(c)$ множество, образуемое непродолжаемыми решениями предельной к (1) системы $\dot x = \Phi(t,x)$, содержащихся в множестве $\{V^1_\infty(t,c) : c = \text{const}\} \cap \Omega(t,x) = 0$ через $M^+_*(c)$ – объединение $M^+(c)$ по всем предельным парам (Φ,Ω). Тогда можно доказать следующие теоремы о предельном поведении решений системы (2).

Теорема 1. Предположим, что:

1) существует ограниченная на каждом компакте $K \subset \Gamma$ функция $V = V(t,x) \in C^1(G \to R)$, имеющая в силу системы (1) $\dot V_{(1)}(t,x) \le -W(t,x) \le 0$;

2) возмущение $p(t,x)$ есть исчезающее в среднем $p = p_1(t,x)$ такое, что $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot p_1(t,x)\right) \le 0$, где $(a \cdot b)$ – скалярное произведение.

Тогда каждое ограниченное компактом $K \subset \Gamma$ решение $x = \tilde x(t,t_0,x_0)(t \le t_0)$ возмущенной системы (2) неограничено приближается к множеству $\{M^+_*(c) : c = \text{const}\}$ при $t \to +\infty$.

Теорема 2. Результат предыдущей теоремы остается справедливым, если выполняются условия 1) и 2) теоремы 1 и условие:

3) частные производные $\frac{\partial V}{\partial x}$ ограничены в области G, $\|\frac{\partial V}{\partial x}\| \le Q$ для всех $t \in R^+$ и $x \in \Gamma$;

4) на систему действует также интегрально исчезающее возмущение, т.е. $p = p_1(t,x) + p_2(t,x)$.

Рассмотрим вопрос о влиянии возмущений $p = p(t,x)$ на устойчивость инвариантного относительно системы (1) множества L [6], предполагая, что областью определения систем (1) и (2) является область $G = R^+ \times R^n$, а множество L содержится в некотором компакте $K \subset R_n$.

Определение 3 [6]. Множество L эвентуально устойчиво относительно решений системы (2), если при любом малом $\varepsilon > 0$ можно найти число $T = T(\varepsilon) > 0$, для которого при каждом $t_0 \ge T$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что выполняется неравенство $d(\tilde x(t,t_0,x_0), L(t)) < \varepsilon$ для всех $t \ge t_0$ и $\|x_0\| < \delta$ (здесь $d(x,L) = \sup(\|x-y\|, \forall y \in L)$).

Теорема 3 [6]. Допустим, что

1) существует C^1 - функция $V = V(t,x) : R^+ \times R^n \to R$, такая, что :

а) $V(t,x) \ge h_1(d(x,L)) \ge 0$ для всех $x \in R^n$L и $t \in R^+$,

б) $V(t,x) = 0$ для всех $x \in \partial L$ и всех $t \in R^+$, в) $V(t,x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$ равномерно по $t \in R^+$;

2) частные производные $\frac{\partial V}{\partial x}$ для всех $t \in R^+$ в области $R^n L$ удовлетворяют условию $\frac{\partial V}{\partial x}\| \leq Q(1+V)$, где Q–const; для производной фунции $V = V(t,x)$ в силу (1) имеет место оценка $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -W(t,x) \leq 0$;

3) действующее на систему исчезающее в среднем возмущение $p = p_1(t,x)$ удовлетворяет условию $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot p_1(t,x)\right)^{\cdot} \leq 0$;

4) на систему действует таже интегрально исчезающее возмущение $p = p_2(t,x)$;

5) для каждой предельной к (X,W) пары (Φ,Ω) и соответствующего множества $V_\infty^{-1}(t,c)$ максимально инвариантное подмножество множества $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = \text{const} \geq 0\} \bigcap \{\Omega(t,x) = 0\}$ содержится в L^+.

Тогда множество L является притягивающим в целом для решений возмущенной системы (2) и множество L эвентуально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Функция

$$\mu(t) = e^{-Q\int\limits_0^t \sigma(\tau)d\tau}$$

монотонно убывает $\mu(t) \searrow (+\infty)$, имея значение $\mu(+\infty) = \lim_{t\to+\infty}\mu(t) > 0$. Введем функцию $V = V_1(t,x)$, определяемую равенством $V_1(t,x) = \mu(t)(V(t,x)+1) - \mu(+\infty)$.

Для ее производной в силу системы (2) согласно условиям теоремы находим

$$\dot{V}_1 = \mu(t)(\dot{V}_{(1)} + \frac{\partial V}{\partial x}p_1 + \frac{\partial V}{\partial x}p_2 - Q\sigma(1+V)) \leq$$

$$\mu(t)(-W + \|\frac{\partial V}{\partial x}\|\|p_2\| - Q\sigma(1+V)) \leq \mu(t)W(t,x) \leq 0 \qquad (3)$$

Пусть $x = \tilde{x}(t,t_0,x_0)(t_0,x_0) \in R^+ \times R^n$ какое-либо решение системы (2). В силу свойства $V(t,x) \to +\infty$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in R^+$ для числа $Q_0 = \mu_0(t_0)(V(t_0,x_0)) + 1) - \mu(+\infty)$ найдется значение $r = r(Q_0)$, что для всех $\|x\| \geq r$ выполнено

неравенство $V(t,x) > Q_0/\mu(+\infty)$. Функция $V_1(t,x)$ в силу (3) монотонно убывает вдоль решения $x = \tilde{x}(t,t_0,x_0)$ и значит для всех $t \geq t_0$ выполнены соотношения $\mu(+\infty)V(t,\tilde{x}(t,t_0,x_0)) \leq V_1(t,\tilde{x}(t,t_0,x_0)) \leq Q_0$

Отсюда по выбору числа r следует, что решение $x = \tilde{x}(t,t_0,x_0)$ ограничено при всех $t \geq t_0$, $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq r$

Из определения функции $V_1(t,x)$ следует равенство

$$\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = \text{const}\} = \{(V_1)_\infty^{-1}(t,c_1) : c_1 = \mu(\infty)c\}$$

Пара, предельная к паре $(X+p, \mu(t)W)$ есть $(\Phi, \mu(+\infty)\Omega)$, где $\mu(\infty) > 0$, пара (Φ,Ω) есть предельная к (X,W). Отсюда, используя условие 5) теоремы, можно получить [1] соотношение $d((\tilde{x}(t,t_0,x_0),L) \to 0$ при $t \to +\infty$, т.е. свойство притяжения в целом множеством L решений возмущеной системы (2).

Эвентуальная устойчивость следует из следующих рассуждений. Для произвольного самого $\varepsilon > 0$ найдем число $T = T(\varepsilon) > 0$ из соотношения

$$\mu(T) - \mu(+\infty) < \frac{h(\varepsilon)}{2} \cdot \mu(+\infty)$$

что возможно в силу $\mu(t) \searrow \mu(+\varepsilon)$ при $t \to +\infty$. Для каждого $t_0 \geq T$ будем определять значение $\sigma = \sigma(\varepsilon,t_0) > 0$ из неравенства

$$\mu(t_0)\sup(V(t_0,x) : d(X,L) < \delta) < \frac{h(\varepsilon)}{2} \cdot \mu(+\infty),$$

что возможно в силу условий $V(t,x) = 0$ при $x \in \partial L$. Для каждого решения системы (2): $x = \tilde{x}(t,t_0,x_0) : t_0) > T_1$, $\|x_0\| < \delta$ из неравенства $V_{(1)} < 0$ имеем соотношения

$$\mu(t)h((d(\tilde{x}(t,t_0,x_0),L(t))) \leq V_1(t,\tilde{x}(t,t_0,x_0)) \leq$$

$$\leq V_1(t_0,x_0) = \mu(t_0)V(t_0,x_0) + \mu(t_0) - \mu(+\infty) < h(\varepsilon)\cdot\mu(+\infty)$$

из которых получаем, что $h(d(\tilde{x}(t,t_0,x_0),L(t))) < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$ и значит эвентуальную устойчивость множества L.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 4. Допустим, что выполнены условия предыдущей теоремы,а также $V(t,x) \leq h_1(d(x,L))$. Тогда множество L

равномерно притягивающее в целом и эвентуально равномерно асимптотически устойчиво.

Обращение теоремы Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости [5,6] позволяет также вывести результат об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 5. Предположим, что существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы 4. Тогда множество L устойчиво при постоянно действующих возмущениях. •

Полученные результаты являются обобщением результатов работ [6-9].

Работа выполнена при частичном финансировании по программе "Университеты России", направление "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект N 3.3.1.

Литература

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

2. Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. V.23. No 2. P.216-223.

3. Гаршин С.И. Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями // Из АН КазССР. Сер. мат., мех. 1948. No 56. Вып.2. С.46-73.

4. Artstein Z. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. No 2. P.172-189.

5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения // М.: Наука, 1966. 530с.

6. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method // Tokyo: The Math. Soc. of Japan. 1966. 216 p.

7. Straus A., Jorke J.A. Perturbation theorems of ordinary differential equations // J. Differ.Equat. 1967. V.3. No 1. P.15-30.

8. Levin J.J., Nohel J.A. Global asymptotic stability for nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. V.5. No 2. P.194-211.

9. Wakeman D.R. An applications of topological dynamics to obtain a new invariance property of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1975. V 17. No 2. P.259-295.

УДК 517.958

ОБ ОБРАЩЕНИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ R^n ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ.

Сысоев С. Е.

ВВЕДЕНИЕ.

Экспоненциальное лучевое преобразование с поглощением, зависящим от направления, для функции $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ имеет вид

$$Q_\mu f(\theta,E_\theta x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)t} f(E_\theta x+t\theta)\,dt\,,$$

где $\theta \in \mathbf{S}^{n-1}$ направляющий вектор прямой, по которой ведется интегрирование, $E_\theta x = x-(x\cdot\theta)\theta$ проекция точки $x \in \mathbf{R}^n$ на гиперплоскость $\theta^\perp = \left\{y \in \mathbf{R}^n : y\cdot\theta=0\right\}$, коэффициент поглощения $\mu=\mu(\theta)$ зависит только от направления и является неотрицательной непрерывной функцией на $\mathbf{S}^{n-1}$. Преобразования такого типа встречаются в задачах эмиссионной компьютерной томографии [1]. В случае постоянного поглощения предложены методы обращения экспоненциального лучевого преобразования [1-6]. В [7] на плоскости рассмотрено экспоненциальное лучевое преобразование с коэффициентом поглощения, зависящим от направления, и получено несколько интересных формул для этого преобразования, в том числе формула обращения. Однако во всех перечисленных работах предполагается, что значения $Q_\mu f$ известны на множестве всех прямых в $\mathbf{R}^n$. В то же время понятно, что для однозначного восстановления исходной функции f по данным $Q_\mu f$ достаточно гораздо меньшего объема данных. Например, при $n=3$ можно рассматривать $\mathbf{R}^3$ как пачку параллельных плоскостей и восстанавливать функцию на каждой из этих плоскостей. Во многих практических задачах функция $Q_\mu f$ известна лишь на некотором подмножестве ее области определения. В этой ситуации говорится о восстановлении исходной функции по неполным данным. В §1 данной работы рассматривается вопрос об однозначности восстановления функции f, располагая неполной информацией об ее экспоненциальном лучевом преобразовании с коэффициентом поглощения, зависящим от направления.

К проблеме обращения по неполным данным относится задача о восстановлении функции f, исходя из значений ее экспоненциального лучевого преобразования, известных лишь для некоторого n-мерного семейства прямых в $\mathbf{R}^n$. В.П. Паламодову принадлежит гипотеза о существовании явной формулы обращения экспоненциального лучевого преобразования с коэффициентом поглощения, зависящим от направления, в случае, когда данные этого преобразования известны лишь для семейства прямых в $\mathbf{R}^n$, пересекающих на бесконечности фиксированную бесконечно удаленную кривую $L \subset \mathbf{RP}^{n-1}$, которая имеет непустое пересечение с каждой гиперплоскостью. Эта задача рассматривается в §2 данной работы.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В.П. Паламодову за постоянное внимание к работе и помощь.

§1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБРАЩЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ.

Как и в случае $\mu \equiv const$ [4] справедлива следующая теорема единственности:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}$ бесконечное множество, $\mu \in C(\mathbf{S}^{n-1})$, $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subseteq \mathbf{R}^n$. Если $Q_\mu f(\theta, y) = 0$ при $\theta \in \Omega$, $y \in \theta^\perp$, то $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пэли-Винера преобразование Фурье $\tilde{f}$ продолжается до целой функции экспоненциального типа в $\mathbf{C}^n$. Согласно проекционной теореме [2] имеет место соотношение

$$\tilde{f}(\xi + i\mu(\theta)\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Q_\mu f\right)^\wedge(\theta, \xi) = 0 \qquad (1.1.)$$

при $\theta \in \Omega$, $\xi \in \theta^\perp$, где $\left(Q_\mu f\right)^\wedge$ (n-1)-мерное преобразование Фурье функции $Q_\mu f$ по второй переменной.

Обозначим

$$\left(\theta^\perp\right)_{\mathbf{C}} = \left\{ z \in \mathbf{C} : z = \xi_1 + i\xi_2,\ \xi_1 \in \theta^\perp,\ \xi_2 \in \theta^\perp \right\}$$

комплексификация гиперплоскости $\theta^\perp$. Поскольку имеет место (1.1.), следовательно, $\tilde{f}(z + i\mu(\theta)\theta) = 0$ при $\theta \in \Omega$, $z \in (\theta^\perp)_{\mathbf{C}}$. Пусть θ_0 предельная точка множества Ω. По непрерывности имеем $\tilde{f}(z + i\mu(\theta_0)\theta_0) = 0$ при $z \in (\theta_0^\perp)_{\mathbf{C}}$.

Выберем в $\mathbf{R}^n$ систему координат так, чтобы $\theta_0 = e_n$ - направление оси X_n. Поскольку $\tilde{f}$ целая функция в $\mathbf{C}^n$, то её можно записать в виде сходящегося степенного ряда по переменной z_n $\tilde{f}(z', z_n + i\mu(e_n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z') z_n^k$ где $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Здесь $c_0(z') = \tilde{f}(z', i\mu(e_n)) = 0$, т.к. $(z', 0) \in (e_n^\perp)_{\mathbf{C}}$. Следовательно, функция $h(z) = \tilde{f}(z + i\mu(e_n)e_n)$, $z \in \mathbf{C}^n$ делится на z_n.

Далее,

$$\frac{h(z)}{z_n} = \frac{\tilde{f}(z + i\mu(e_n)e_n)}{z_n} = 0$$

при $z = \xi + i(\mu(\theta)\theta - \mu(e_n)e_n)$, где $\theta \in \Omega$, $\xi \in \theta^\perp$. По непрерывности

$$\frac{h(z)}{z_n} = \frac{\tilde{f}(z + i\mu(e_n)e_n)}{z_n} = 0$$

когда $z \in (\theta_0^\perp)_{\mathbf{C}} = (e_n^\perp)_{\mathbf{C}}$. Поэтому функция $\frac{h(z)}{z_n}$ делится на z_n.

Рассуждая таким образом, получаем, что для любого натурального k функция

$$\frac{h(z)}{z_n^k} = \frac{\tilde{f}(z + i\mu(e_n)e_n)}{z_n^k} = 0$$

при $z \in (e_n^\perp)_{\mathbf{C}}$. По теореме единственности для функций многих комплексных переменных $\tilde{f} \equiv 0$ на $\mathbf{C}^n$. Следовательно, $f \equiv 0$.

Теорема 1.1. доказана.

Теорема 1.1. означает, что функция f с компактным носителем однозначно определяется функцией $Q_\mu f$ для любого бесконечного набора векторов $\theta \in \mathbf{S}^{n-1}$. Если использовать лишь конечное число направлений, то получаем противоположный результат.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\theta_1, ..., \theta_k \in \mathbf{S}^{n-1}$ - произвольный конечный набор векторов. Тогда существует функция $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f \neq 0$ такая, что $Q_\mu f(\theta_j, y) = 0$, $y \in \theta_j^\perp$ при всех $1 \leq j \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из проекционной теоремы следует, что нужно найти функцию $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f \neq 0$ такую, что $\tilde{f}(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j) = 0$ при $\xi \in \theta_j^\perp$, $1 \leq j \leq k$. Для этого рассмотрим функцию

$$q(\zeta) = \prod_{j=1}^{k} \theta_j \cdot (\zeta - i\mu(\theta_j)\theta_j) = \prod_{j=1}^{k} (\theta_j \zeta - i\mu(\theta_j)) \quad , \zeta \in \mathbf{C}^n .$$

При $\zeta = \xi + i\mu(\theta_j)\theta_j$, $\xi \in \theta_j^\perp$ $q(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j) = 0$. Возьмем дифференциальный оператор D с постоянными коэффициентами такой, что $(D\tilde{u})(\eta) = q(\eta)\tilde{u}(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}^n$. Для произвольнойфункции $u \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, ее преобразование Фурье $\tilde{u}$ продолжается до целой функции в $\mathbf{C}^n$. Поэтому для любого $1 \leq j \leq k$

$$(D\tilde{u})(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j) = q(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j)\tilde{u}(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j) = 0$$

при $\xi \in \theta_j^\perp$. Следовательно, взяв произвольную функцию $u \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $u \neq 0$, получим, что функция $f = Du$ обладает требуемыми свойствами.

Теорема 1.2. доказана.

§2. О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ДАННЫМ ЕЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА n-МЕРНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим n-мерное семейство прямых, пересекающих на бесконечности фиксированную бесконечно удаленную кривую $L \subset \mathbf{RP}^{n-1}$, которая имеет непустое пересечение с каждой гиперплоскостью $H \subset \mathbf{R}^n$. Имеется естественное двулистное на-

крытие $\kappa : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{RP}^{n-1}$, склеивающее противоположные точки сферы. Обозначим $C = \kappa^{-1}(L)$ обратный образ кривой L. Кривая C центрально симметрична, пусть $\theta = \theta(s)$, $0 \leq s \leq S$, ее параметризация, где s натуральный параметр, тогда $\theta(s) = -\theta(S+s)$ при $s \in [0, S]$, $\theta(0) = \theta(2S)$. Предположим, что $\mu \in \mathbf{C}^1(\mathbf{S}^{n-1})$ и $\mu(\theta) = \mu(-\theta)$ для $\theta \in \mathbf{S}^{n-1}$. Рассмотрим задачу восстановления функции $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по данным $Q_\mu f$, известным лишь для $\theta \in C$. Обозначим

$$T = \int_C |\eta(s)| \, ds ,$$

где $\eta(s)$-проекция $\theta'' = \frac{d^2\theta}{ds^2}(s)$ на подпространство, ортогональное векторам $\theta(s)$, $\theta'(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая связная кривая $C \subset \mathbf{S}^{n-1}$ центрально симметрична, $\mu \in C^1(\mathbf{S}^{n-1})$ - четная функция, тогда по данным $Q_\mu f(\theta, E_\theta x)$, $\theta \in C$ функция $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ восстанавливается

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} e^{-\mu(\theta) x\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\mu(\theta) q}{q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta) \right) \times$$
$$\times Q_\mu f(\theta, E_\theta x + q\theta') \, dq \, ds \; + \; Kf(x)$$

где внутренний интеграл имеет смысл главного значения Коши, $\mu'(\theta) = \frac{d}{ds}\mu(\theta)$, Kf - оператор свертки, ядро которого $O(T\mu^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из проекционной теоремы

$$\tilde{f}(\xi + i\mu(\theta_j)\theta_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(Q_\mu f \right)^\wedge (\theta, \xi) \qquad (2.1.)$$

где $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \cdot \theta = 0$, $\theta \in C$. Зададим ориентацию $\mathbf{R}^n$ формой $\omega = d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_n$, где $(\xi_1, ..., \xi_n)$ ортонормальная система координат. Рассмотрим ориентированное многообразие $C \times \mathbf{R}^n$, его размерность равна n+1. Рассмотрим гладкое подмногообразие

$$\Gamma = \{(s,\xi) : \xi \cdot \theta(s) = 0\} \subset C \times \mathbf{R}^n .$$

На Γ существует дифференциальная форма γ такая, что

$$d(\xi \cdot \theta) \wedge \gamma = d s \wedge \omega$$

Поскольку $d(\xi,\theta)\big|_{\Gamma} = 0$, то ограничение γ на Γ есть однозначно определенная не равная тождественно нулю дифференциальная форма. Пусть при фиксированном s

$$(\theta, \theta', e_1, \ldots, e_{n-2})$$

- положительно ориентированный ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, тогда

$$\omega = \theta \cdot d\xi \wedge \theta' \cdot d\xi \wedge e_1 \cdot d\xi \wedge \ldots e_{n-2} \cdot d\xi ,$$

следовательно,

$$\gamma = -d s \wedge \theta' \cdot d\xi \wedge e_1 \cdot d\xi \wedge \ldots e_{n-2} \cdot d\xi ,$$

Зададим формой $-\gamma$ ориентацию Γ. Рассмотрим отображение $P_\mu : \Gamma(\mu) \to \mathbf{C}^n$, $P_\mu(s,\xi) = \xi + i\,\mu(\theta(s))\theta(s)$, где $\Gamma(\mu) = \{(s,\xi) \in \Gamma : \xi \cdot \theta'(s) > \mu(\theta(s))\}$. Тогда $\Pi(\mu) = \{\Gamma(\mu), P\mu\}$ - ориентированная n-цепь в $\mathbf{C}^n$. Пусть

$$M(\mu) = \{(s,t) : 0 \le t \le \mu(\theta(s)),\ 0 \le s \le 2S\} \subset \mathbf{R}^2 ,$$

$$\delta : U(\mu) \times \mathbf{R}^{n-2} \to \mathbf{C}^n$$

тогда $\Delta(\mu) = \{U(\mu) \times \mathbf{R}^{n-2}, \delta\}$ - ориентированная n-цепь в $\mathbf{C}^n$, ориентация которой задана формой $ds \wedge dt \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-2}$. Легко проверить, что цепь $\Pi(\mu) + \Delta(\mu)$ замкнутая. Рассмотрим ориентированную $(n+1)$ цепь в $\mathbf{C}^n$:

$$\Lambda = \bigcup \{\Pi(\tau\mu) + \Delta(\tau\mu),\ 0 \le \tau \le 1\},$$

имеем $\partial\Lambda = \Pi(\mu) + \Delta(\mu) - \Pi(0)$. Обозначим

$$\zeta_1 = \xi_1 + + i\eta_1, \ldots, \zeta_n = \xi_n + + i\eta_n$$

где $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ система координат в $\mathbf{R}^n$, биортогональная $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, тогда $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ - комплексные координаты в $\mathbf{C}^n$. Функция $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, поэтому в силу теоремы Пэли - Винера преобразование Фурье $\tilde{f}$ целая аналитическая функция. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\Phi_x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}(\zeta) e^{i\zeta \cdot x} \alpha ,$$

где $\alpha = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$ и $\zeta \cdot x = \xi x + i \eta x$. Функция $\tilde{f} e^{i\zeta \cdot x}$ целая аналитическая и ри фиксированной $\operatorname{Im}\zeta$

$$\left| \tilde{f}(\zeta) e^{i\zeta \cdot x} \right|$$

при $|\operatorname{Re}\zeta| \to \infty$ убывает быстрее любой положительной степени $|\zeta|$. Поэтому в соответсвии с теоремой Стокса $\forall x \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$\int_{\Pi(\mu)} \Phi_x + \int_{\Delta(\mu)} \Phi_x - \int_{\Pi(0)} \Phi_x = \int_{\Lambda} d\Phi_x = 0 .$$

Имеем $\deg P_0 = -1$, где $P_0 : \Gamma(0) \to \mathbf{R}^n$. Поэтому

$$\int_{\Pi(0)} \Phi_x = -\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_x = -f(x) ,$$

следовательно

$$f(x) = -\int_{\Pi(\mu)} \Phi_x - \int_{\Delta(\mu)} \Phi_x . \qquad (2.2)$$

Используя (2.1), вычислим каждый из этих интегралов:

$$\int_{\Pi(\mu)} \Phi_x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\Gamma(\mu)} (Q_\mu f)^{\wedge}(\theta,\xi) e^{i(\xi + i\mu(\theta)\theta) \cdot x} P_\mu^*(\alpha) \qquad (2.3)$$

Вычислим форму

$$P_\mu^*(\alpha) = \theta \cdot d\xi \wedge \sigma + i\, d\,\mu(\theta) \wedge \sigma = (-\xi \cdot \theta' + i\,\mu'(\theta))\, d s \wedge \sigma ,$$

где $\sigma = \theta' \cdot d\xi \wedge e_1 \cdot d\xi \wedge \ldots \wedge e_{n-2} \cdot d\xi$, $\mu'(\theta) = \frac{d}{ds}\mu(\theta(s))$. Подставляя это в (2.3), получим

$$\int_{\Pi(\mu)} \Phi_x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\Gamma(\mu)} (Q_\mu f)^{\wedge}(\theta,,\xi) e^{i(\xi + i\mu(\theta)\theta) \cdot x} d s \wedge \sigma \ +$$

$$+ \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\Gamma(\mu)} (Q_\mu f)^{\wedge}(\theta,\xi) e^{i(\xi + i\mu(\theta)\theta) \cdot x} \mu'(\theta)\, d s \wedge \sigma = I_1 + I_2 .$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$I_2 = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{2S} ds\, \mu'(\theta)\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{\Gamma(\mu,s)} |\sigma|\, (Q_\mu f)^\wedge(\theta,\xi)\, e^{i\xi\cdot x},$$

где $|\sigma|$ - евклидов элемент площади на

$$\Gamma(\mu, s) = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \xi\cdot\theta(s) = 0,\ \xi\cdot\theta'(s) > \mu(\theta(s))\}.$$

Так как $\xi = t\theta' + u_1 e_1 + \ldots + u_{n-2} e_{n-2}$, где $t = \xi\cdot\theta'$, $u_k = \xi\cdot e_k$, $k = 1,\ldots,n-2$, то $|\sigma| = d(\xi\cdot\theta')\, d(\xi\cdot e_1)\ldots d(\xi\cdot e_{n-2}) = dt\, du_1\ldots du_{n-2}$, следовательно

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\Gamma(\mu,s)} |\sigma|\, (Q_\mu f)^\wedge(\theta,\xi)\, e^{i\xi\cdot x} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_\mu^{+\infty} dt \int_{\mathbf{R}^{n-2}} du_1\ldots du_{n-2}\, (Q_\mu f)^\wedge\left(\theta, t\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k\right) e^{i\left(t\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k\right)\cdot x} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (h * Q_\mu f)\left(\theta, (\theta'\cdot x)\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} (e_k\cdot x) e_k\right),$$

где

$$h(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mu^{+\infty} e^{itq}\, dt = \frac{i e^{i\mu q}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{q + i0} = \frac{i e^{i\mu q}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{q} - i\pi\delta(q)\right),$$

и свертка вычисляется по формуле

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (h * Q_\mu f)\left(\theta, (\theta'\cdot x)\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} (e_k\cdot x) e_k\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left(e^{i\mu q}\left(\frac{1}{q} - i\pi\delta(q)\right), Q_\mu f\left(\theta, (\theta'\cdot x - q)\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} (e_k x) e_k\right)\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{e^{i\mu q}}{q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta') + \frac{1}{2} Q_\mu f(\theta, E_\theta x),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Следовательно

$$I_2 = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, \mu'(\theta)\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{e^{i\mu q}}{q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta') +$$

$$+ \frac{i}{4\pi} \int_0^{2S} ds\, \mu'(\theta)\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} Q_\mu f(\theta, E_\theta x).$$

отсюда

$$\operatorname{Re} I_2 = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, \mu'(\theta)\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{\cos\mu q}{q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta')$$

Вычислим интеграл I_1. Поскольку

$$I_1 = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{2S} ds\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{\Gamma(\mu,s)} |\sigma|\, \xi\cdot\theta' (Q_\mu f)^\wedge(\theta,\xi)\, e^{i\xi\cdot x},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\Gamma(\mu,s)} |\sigma|\, \xi\cdot\theta' (Q_\mu f)^\wedge(\theta,\xi)\, e^{i\xi\cdot x} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_\mu^{\infty} dt \int_{\mathbf{R}^{n-2}} du_1\ldots du_{n-2}\, t\, (Q_\mu f)^\wedge\left(\theta, t\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k\right) e^{i\left(t\theta' + \sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k\right)\cdot x} =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} (h' * Q_\mu f)(\theta, E_\theta x),$$

где $h'(q) = \frac{d}{dq} h(q) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i\mu e^{i\mu q}}{q + i0} - \frac{e^{i\mu q}}{(q + i0)^2}\right)$, следовательно

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} (h' * Q_\mu f)(\theta, E_\theta x) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\mu q}}{q + i0}, \frac{\partial}{\partial q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta')\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{e^{i\mu q}}{q} \frac{\partial}{\partial q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta') + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta')\Big|_{q=0}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Следовательно

$$\operatorname{Re} I_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{\cos\mu q}{q} \frac{\partial}{\partial q} Q_\mu f(\theta, E_\theta x - q\theta')$$

Поскольку f вещественная функция, требуется найти вещественную часть

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma(\mu)} \Phi_x = \operatorname{Re} I_1 + \operatorname{Re} I_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos \mu\, q}{q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta) \right) Q_\mu f\left(\theta, E_\theta x + q\theta'\right) \quad (2.4)$$

где внутренний интеграл понимается в смысле главного значения. Далее,

$$\int_{\Delta(\mu)} \Phi_x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(\mu)\times \mathbf{R}^{n-2}} \bar{f}(\zeta) e^{i\zeta\cdot x} \delta^*(\alpha),$$

где $\zeta = t(\theta' + i\theta) + \sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k$. Имеем

$$\delta^*(\alpha) = i\left(\sum_{k=1}^{n-2} u_k e_k \cdot \theta''\right) ds \wedge dt \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-2}.$$

Обозначим

$$p = \theta\cdot(x-y), q = \theta'\cdot(x-y), r_k = e_k\cdot(x-y),\ k = 1,\ldots,n-2.$$

Используя эти обозначения получим

$$\int_{\Delta(\mu)} \Phi_x = \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=1}^{n-2} \int_0^{2S} ds\, e_k\cdot\theta'' \int_0^{\mu(\theta)} dt \int_{\mathbf{R}^{n-2}} du_1\ldots du_{n-2} u_k \bar{f}(\zeta) e^{i\zeta\cdot x} =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{n-2} \int_0^{2S} ds\, e_k\cdot\theta'' \int_0^{\mu(\theta)} dt \int_{\mathbf{R}^{n-2}} du_1\ldots du_{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} dy\, u_k f(y) e^{i\zeta\cdot(x-y)} =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{n-2} \int_0^{2S} ds\, e_k\cdot\theta'' \int_{\mathbf{R}^n} dy\, f(y) \int_0^{\mu(\theta)} dt\, e^{t(iq-p)} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} du_1\ldots du_{n-2} u_k f(y) e^{i\sum_{k=1}^{n-2} u_k r_k}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{n-2} \int_0^{2S} ds\, e_k\cdot\theta'' \int_{\mathbf{R}^2} dp\, dq \frac{\partial f}{\partial e_k}(x - p\theta - q\theta') J_\mu(p,q) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, e_k\cdot\theta'' \int_{\mathbf{R}^2} dp\, dq\, \eta\cdot d f(x - p\theta - q\theta') J_\mu(p,q),$$

где обозначено $J_\mu(p,q) = \frac{e^{\mu(\theta)(iq-p)} - 1}{iq - p}$. Используя соотношения $\theta(s+S) = -\theta(s)$, $\theta'(s+S) = -\theta'(s)$, $e_k(s+S) = e_k(s)$, $k = 1,\ldots,n-2$, при $s\in[0,S]$ и $\mu(-\theta) = \mu(\theta)$, получим

$$\int_{\Delta(\mu)} \Phi_x = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds \int_{\mathbf{R}^2} dp\, dq\, \eta\cdot d f(x - p\theta - q\theta')\left(J_\mu(p,q) - J_\mu(-p,-q)\right)$$

следовательно

$$\mathrm{Re} \int_{\Delta(\mu)} \Phi_x = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{S} ds \int_{\mathbf{R}^2} dp\, dq\, \eta\cdot d f(x - p\theta - q\theta') K_\mu(p,q), \quad (2.5)$$

где

$$K_\mu(p,q) = \frac{p(1 - ch\,\mu(\theta) p \cos\mu(\theta) q) - q\, sh\,\mu(\theta) p \sin\mu(\theta) q}{p^2 + q^2},$$

причем $K_\mu = O(\mu^2)$ при малых μ. С учетом (2.2), (2.4), (2.5) получаем

$$f(x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos\mu(\theta) q}{q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta) \right) \times$$
$$\times Q_\mu f\left(\theta, E_\theta x - q\theta'\right) + K f(x),$$

где

$$K f(x) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{S} ds \int_{\mathbf{R}^2} dp\, dq\, \eta\cdot d f(x - p\theta - q\theta') K_\mu(p,q)$$

оператор свертки, ядро которого есть $O(T\mu^2)$.

Теорема 2.1. доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $C \subset \mathbf{S}^{n-1}$ плоская кривая (является пересечнием $\mathbf{S}^{n-1}$ с двумерной плоскостью, проходящей через начало координат), то $\eta(s) = 0$ и получаем формулу точного восстановления функции f:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} ds\, e^{-\mu(\theta)\theta\cdot x} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos\mu(\theta) q}{q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta) \right) \times$$
$$\times Q_\mu f\left(\theta, E_\theta x + q\theta'\right)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если $\mu = 0$, то имеем классическое лучевое преобразование

$$Pf(\theta, E_\theta x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(E_\theta x + t\theta)\, dt,$$

следовательно,

$$f(x) = \frac{-1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q} P f\left(\theta, E_\theta x + q\theta'\right),$$

т.е. достаточно только половины кривой C.

При n=2 это известная формула обращения лучевого преобразования на плоскости (см. [1]). Другим путем С. Орловым [8] в $\mathbf{R}^3$ в классическом случае $\mu = 0$ была получена иная формула обращения по данным лучевого преобразования, известным в направлениях $\theta \in \Gamma$, где $\Gamma \subset \mathbf{S}^2$ кривая, имеющая непустое пересечение с каждой окружностью большого радиуса на $\mathbf{S}^2$.

Литература.

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. - М.: Мир, 1980.
2. Natterer F. On the inversion of the attenuated Radon transform.// Numer. Math., v. 32, 1979, 431-438.
3. Tretiak O., Metz C. The exponential Radon transform.// SIAM J.Appl. Math., v. 39, 1980, 341-354.
4. Marcoe A. Fourie inversion of the attenuated Radon transform.// SIAM J. Math. Anal., v. 15, 1984, 718-722.
5. Finch D., Hertle A. The exponential Radon transform.// Contemporary Mathematics, v. 63, 1987, 67-73.
6. Hazou I.A., Solmon D.C. Inversion of the exponential X-ray transform. 1: Analysis.// Math. Methods in Appl. Sciences, v. 10, 1988, 561-574.
7. Kuchment P.A., Shneiberg I. Some inversion formulas in the single photon emission computed tomography.//Applicable Analysis,
8. Орлов С.С. Теория трехмерной реконструкции.2. Оператор восстановления.// Кристаллография, т. 20, 4, 1975,701-709.

УДК 519.85

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Цыганова Ю.В.

За последние 12-15 лет накоплен достаточно большой набор алгоритмов решения переопределенных систем линейных уравнений типа $z=Ax+v$ по методу наименьших квадратов. Эту систему можно рассматривать как некоторую математическую модель, в которой x - вектор неизвестных параметров, v - вектор ошибок модели, z - результат наблюдений, матрица A - набор экспериментальных условий. Задачей является получение наилучшей оценки для вектора x.

Проблема решения задач МНК возникает также при проведении экспериментов, связанных с задачами фильтрации (например, при оценке элементов движения объекта). Поэтому для исследователей чрезвычайно важно иметь под рукой универсальное программное средство, позволяющее планировать и проводить эксперименты, связанные с решением подобных задач. В этой программе должны быть реализованы все известные алгоритмы решения, а также способы сравнения их эффективности при решении конкретной задачи.

Известные варианты решения можно разделить на две группы: ковариационные и информационные алгоритмы. Здесь дается описание основных идей и свойств этих алгоритмов.

Первый подход к решению задачи: ковариационная форма.

1. Калмановская форма МНК-решения.

Алгоритм Калмана записывается следующим образом:

Дано: $\tilde{P}, \tilde{x}, A, z$

Найти: $\hat{P}, \hat{x}, K$

1) Обновление решения при добавлении новой "порции" уравнений с матрицей A и вектором z, размерности m:

1. $K = \widetilde{P} + A^T(A\widetilde{P}A^T + I_m)^{-1}$

2. $\hat{P} = \widetilde{P} - KA\widetilde{P}$

3. $\hat{x} = \widetilde{x} + K(z - A\widetilde{x})$

2) Экстраполяция решения на будущий момент добавления следующей порции уравнений:

$$4.\ \widetilde{P} := \hat{P}\ ;\ \widetilde{x} := \hat{x}$$

Рассмотрим частный случай при m=1. (Происходит добавление по одному уравнению). Тогда пункт 1) предыдущего алгоритма записывается в виде m-кратного повторения процедуры "скалярного" обновления:

0) Дано: $\widetilde{P}, \widetilde{x}$

1) m-кратное повторение

$$\alpha = a^T\widetilde{P}a + 1\ ;\ K = \widetilde{P}a/\alpha\ ;\ \hat{P} = \widetilde{P} - Ka^T\widetilde{P}\ ; \qquad (1)$$

$$\hat{x} = \widetilde{x} + K(z - a^T\widetilde{x})\ ; \qquad (2)$$

с экстраполяцией между повторениями

$$\widetilde{P} := \hat{P}\ ;\ \widetilde{x} := \hat{x}\,.$$

2) Результат : $\hat{P}, \hat{x}$.

где a- i-й столбец матрицы A^T ; z - i-й элемент вектора z (i=1,2,...,m).

Недостаток метода: При вычислении матрицы $\hat{P}$ существует опасность потери положительной определенности $\widetilde{P}$ из-за наличия операции вычитания, что может привести к расходимости оценок для x.

2. Стабилизированный алгоритм Калмана (Схема Джозефа).

В предыдущем алгоритме можно использовать общую формулу, справедливую при любом, не обязательно оптимальном коэффициенте Калмана K :

$$\hat{P} = (I - KA)\widetilde{P}(I - KA)^T + KK^T \qquad (3)$$

При оптимальном K она превращается в

$$\hat{P} = \widetilde{P} - KA\widetilde{P}\ ,\ \text{где}\ \ K = \widetilde{P}A^T(A\widetilde{P}A^T + I_m)^{-1}$$

Недостаток метода: Большой объем вычислений (в 1,5-2 раза больший, чем в стандартном алгоритме Калмана).

3. Квадратно-корневой алгоритм Поттера .

Вместо положительно определенных матриц $\hat{P}$ и $\widetilde{P}$ можно

работать с их квадратными корнями, где $\widetilde{P} = \widetilde{S}\widetilde{S}^T$, $\hat{P} = \hat{S}\hat{S}^T$. $\hat{S}$ и $\widetilde{S}$ получают в результате разложения Холецкого (S - либо верхнетреугольная, либо нижнетреугольная матрица).

Основная идея метода с использованием квадратного корня состоит в замене ковариационной матрицы корнем из нее, а затем и замене уравнений (1) на аналогичные, предназначенные для последовательного расчета матрицы S.

Данный алгоритм отличается от стандартного калмановского применением вместо (1) следующих уравнений:

$$f = \widetilde{S}^T a\ ;\ \alpha = 1 + f^T f\ ;\ \gamma = 1/(1 + \sqrt{1/\alpha})\ ;$$
$$K = \widetilde{S}f/\alpha\ ;\ \hat{S} = \widetilde{S} - \gamma K f^T\ ; \qquad (4)$$

Здесь вычисление $\hat{S}$ равносильно счету с двойной точностью $\hat{P}$ в первом алгоритме. Также устранена опасность потери матрицей P свойства положительной определенности, что вело бы к расходимости оценок для x.

Недостатки метода: Наличие операции извлечения квадратного корня и потеря специального вида матрицы S в общем случае.

4. Алгоритм Бирмана.

Данный алгоритм был получен на основании теоремы об одноранговом обновлении факторизованных ковариационных матриц (Agee-Turner, 1972). Основная идея алгоритма состоит в разложении ковариационной матрицы P в произведение двух треугольных матриц и диагональной матрицы. Можно рассматривать два варианта алгоритма Бирмана: LD-алгоритм и UD-алгоритм Бирмана. В LD-алгоритме используется разложение матрицы $P=LDL^T$, где L-нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, D-диагональная матрица. В UD-алгоритме рассматривается разложение матрицы $P=UDU^T$, где U-верхнетреугольная матрица с единичной диагональю, D-диагональная матрица.

Рассмотрим LD-алгоритм Бирмана (UD-алгоритм получается аналогично), который дается в следующей теореме:

Теорема (Bierman, 1975). Пусть в калмановской прцедуре скалярного обновления (1), (2) используются разложения:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{L}}^{T},\ \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{L}}^{T},$$

где L-нижнетреугольные с единичной диагональю матрицы, D-диагональные матрицы. Тогда данная процедура эквивалентна следующему алгоритму:

В начале положить:

$$\alpha_n = 1 + \mathbf{v}_n \mathbf{f}_n;\ \mathbf{f} = \bar{\mathbf{L}}^{T} a;\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{f};$$

$$\mathbf{K} = (0, \ldots, \mathbf{v}_n);\ \hat{\mathbf{d}}_n = \bar{\mathbf{d}}_n / \alpha_n;$$

Для j=n-1, n-2 ,..., 1

начало

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} + \mathbf{v}_j \mathbf{f}_j;$$

$$\hat{\mathbf{d}}_j = \bar{\mathbf{d}}_j \cdot \alpha_j + 1/\alpha_j;$$

$$\lambda_j = -\mathbf{f}_j / \alpha_{j+1};$$

$$\hat{l}_j = \bar{l}_j + \lambda_j \cdot \mathbf{K}_{j+1};$$

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_{j+1} + \mathbf{v}_j \cdot \bar{l}_j;$$

конец

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_1(\mathbf{z} - a^{T}\bar{\mathbf{x}}) / \alpha_1 .$$

Данный алгоритм не содержит операции извлечения квадратного корня, а работа с треугольными матрицами требует меньшего числа арифметических операций по сравнению с обычными.

5. Сокращенный LD-алгоритм.

При рассмотрении приложений, касающихся задачи оценки элементов движения объекта, выбор измерительных средств может быть таким, что в измерение z попадает лишь заранее известная часть элементов оцениваемого вектора x. Предположим, эта часть - первые q элементов:

$$a^{T} = (** \ldots * | 0 \ldots 0), \tag{5}$$

где *- q величин, из которых q - я не равна нулю; n>1, 1<=q<n.

Тогда для этого случая можно составить соответствующий алгоритм, используя LD-алгоритм Бирмана.

Если $a^{T} = (0 \ldots 0 | ** \ldots *)$, то сокращенный объем вычислений будет получен при опоре на UD- вариант алгоритма Бирмана.

Сокращение объема вычислений получается наибольшим из возможных среди алгоритмов этого класса, поскольку значение q берется индивидуально для каждого из m повторений всей процедуры.

Второй подход к решению задачи: информационная форма.

1. Информационная форма МНК-решения.

Рассмотрим расширенную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{z}}$, где $\bar{\mathbf{x}}$ - решение, полученное по МНК. Пусть $\bar{\mathbf{R}}^{T}\bar{\mathbf{R}} = \bar{\Lambda}$ - априорная информационная матрица. Обозначим $\bar{d} = \bar{\Lambda}\bar{x}$, $\hat{d} = \hat{\Lambda}\hat{x}$. Тогда информационный алгоритм МНК выглядит следующим образом:

1) Обновление информационной матрицы (накопление информации)

$$\hat{\Lambda} = \bar{\Lambda} + \mathbf{A}^{T}\mathbf{A};$$

2) Накопление информационного решения

$$\hat{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}} + \mathbf{A}^{T}\mathbf{z};$$

с экстраполяцией между повторениями эксперимента

$$\bar{\Lambda} := \hat{\Lambda};\ \bar{\mathbf{d}} := \hat{\mathbf{d}}.$$

В любой момент времени можно найти оценку для x, так как

$$(*)\quad \hat{\mathbf{d}} = \hat{\Lambda}\hat{\mathbf{x}};\ \hat{\mathbf{x}} = \hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{d}}.$$

Информационную форму МНК-алгоритма целесообразно использовать лишь в тех случаях, когда само решение требуется сравнительно редко, т.е. когда можно длительно накапливать информацию, в противном случае придется слишком часто решать систему (*).

Замечание: В калмановской форме МНК-решения $P^{-1} = \Lambda$.

2. Квадратно-корневой информационный алгоритм.

Рассмотрим полную систему уравнений (6). Предположим, она характеризуется следующей матрицей:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} & \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{A}_1 & z_1 \\ \mathbf{A}_2 & z_2 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{A}_m & z_m \end{bmatrix} \tag{7}$$

Теорема: Решение по методу МНК полной системы уравнений, характеризующейся матрицей (7), дается следующим последовательным алгоритмом:

Начальное условие:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 & \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} & \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

Для j=1,...,m

$$\mathbf{T}_j \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{j-1} & \hat{z}_{j-1} \\ \mathbf{A}_j & z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_j & \hat{z}_j \\ 0 & e_j \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-T}; \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \hat{z}_m ,$$

где T_j - ортогональная матрица.

В данном алгоритме в качестве ортогонального преобразования целесообразно использовать алгоритм преобразования Хаусхолдера.

В заключение в нижеследующей таблице приводится оценка минимального числа операций, необходимых для расчета по формулам данных алгоритмов на одном шаге. При определении оценки предполагалось, что все алгоритмы в такой степени используют симметрию матрицы и нулевые компоненты, в какой они проявляются в общей форме. Естественно, нужно еще учитывать и тот факт, что данная оценка будет в некоторых случаях зависеть от конкретной реализации алгоритма на каком-либо языке программирования. Данные таблицы показывают, что объемы вычислений разных алгоритмов, зависящие как от самих уравнений, так и от соотношения между m и n (n=dim x, mxn=dim A), могут иногда существенно отличаться друг от друга (например, стандартный и стабилизированный алгоритмы Калмана). Поэтому если сразу несколько алгоритмов подходят для решения конкретной задачи, то при выборе желательно учитывать также и объем вычислений, как

один из показателей эффективности работы программы.

Алгоритм	Сложений	Умножений	Делений	Квадратных корней
1.Стандартный Калмана	$(1.5n^2+3.5n)m$	$(1.5n^2+4.5n)m$	m	-----
2.Стабилизированный Калмана	$(4.5n^2+5.5n)m$	$(4.5n^2+6.5n)m$	m	-----
3. Поттер	$(3n^2+3n)m$	$(3n^2+4n)m$	2m	m
4. Бирман	$(1.5n^2+1.5n)m$	$(1.5n^2+5.5n)m$	nm	-----
5. Информационный	$(0.5n^2+1.5n)m$	$(0.5n^2+1.5n)m$	-----	-----
6. Квадр.-корневой инф (учит.алгоритм Хаусхолдера)	$n^2+3n+(n^2+2n)m$	$1.5n^2+3.5n+(n^2+3n)m$	n	n

Приведенные алгоритмы алгебраически эквивалентны алгоритмам статистического оценивания для линейных моделей динамических систем (на этапе обработки измерений).

Литература:

1. Каминский П.Г., Брайсон А.Е., Шмидт С.Ф. Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц. - Зарубежная радиоэлектроника, 1973, #6, с.37-53.

2. Bierman G.J. Factorization methods for discrete sequential estimation. N.-Y.: Acad. Press,1977.

3. Семушин И.В. Эффективные алгоритмы обновления оценок по измерениям.- Судостроительная промышленность, 1991, вып. 27, с. 55-62.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.

Юрьева О.Д.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x. \qquad (1)$$

Здесь $x \in R^n$, $t \in R$, $A(t) \in R^{n \times n}$.

Предположим, что матрица $A(t)$ является ограниченной, то есть $\|A(t)\| \le a_1 = const$, знак $\le$ - означает матричное неравенство, $\|\cdot\|$ - норма в $R^{n \times n}$. Пусть матрица $G(t) \in C^1$, такая что $G(t) \ge g_0 E$, $\|G(t)\| \le g_1$, $\|\dot{G}(t)\| \le g_2$; $g_0, g_1, g_2 > 0$; и пусть для функции Ляпунова

$$V(x,t) = x^T G(t) x \ge 0$$

производная в силу системы (1) имеет оценку

$$\dot{V} = x^T B(t) x \le 0, \quad B(t) = A(t)^T G(t) + \dot{G}(t) + G(t)A(t). \qquad (2)$$

Следовательно, нулевое решение системы (1) устойчиво. Исследуем вопрос об асимптотической его устойчивости на основе работы [1].

Так как матрицы $A(t)$ и $B(t)$ ограничены, можно определить предельную к (1) систему и предельную к $\dot{V}(x,t)$ функцию [1]

$$\dot{x} = A^*(t)x, \quad A^*(t) = \frac{d}{dt} \lim_{t_n \to \infty} \int_0^t A(t_n + \tau) d\tau. \qquad (3)$$

$$\Omega(t,x) = x^T B^*(t) x, \quad B^*(t) = \frac{d}{dt} \lim_{t_n \to \infty} \int_0^t B(t_n + \tau) d\tau. \qquad (3')$$

Примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $U(t)$ и $V(t)$ - две матрицы, размерностей $m \times n$ и $n \times n$ соответственно, имеющие непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно в интервале $(\tau - \delta, \tau + \delta)$, $\tau \in R$, $\delta > 0$. Говорят, что пара матриц $(U(t), V(t))$

наблюдаема, если для точки τ, выполнено $rk[K_1\ K_2\ \dots\ K_n]^T = n$. Здесь $K_1 = U(\tau)$, $K_i = K_{i-1}(\tau)V(\tau) + \frac{dK_{i-1}(\tau)}{d\tau}$, $2 \le i \le n$.

Матрицу $K = [K_1\ K_2\ \dots\ K_n]^T$ назовем матрицей наблюдаемости пары $(U(t), V(t))$.

Допустим, что для каждой предельной пары $(A^*(t), B^*(t))$, существует точка $\tau \in R$, в окрестности $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ которой матрицы $B^*(t)$ и $A^*(t)$ имеют непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно. Тогда имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Если каждая пара $(B^*(t), A^*(t))$ наблюдаема, то тривиальное решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функция $V(x,t)$ является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел. Производная функции $V(x,t)$ вдоль решений (1) согласно (2) есть постоянно отрицательная функция.

Рассмотрим множество $N = \{\Omega(x,t) = 0\} = \{x^T B^*(t) x = 0\} = \{B^*(t)x = 0\}$. Пусть N_1 - наибольшее инвариантное относительно $\dot{x} = A^*(t)x$ подмножество множества N [1], и пусть решение $x(t)$ принадлежит N_1. Тогда имеем $B^*(t)x(t) \equiv 0$. И далее цепочку равенств

$$0 = \tfrac{d}{dt}(B^*(t)x) = [\dot{B}^*(t) + B^*(t)A^*(t)]x$$
$$0 = \tfrac{d^2}{dt^2}(B^*(t)x) = [\ddot{B}^*(t) + 2\dot{B}^*(t)A^*(t) + B^*(t)\dot{A}^*(t) + B^*(t)A^{*2}(t)]x$$
$$\dots$$
$$0 = \tfrac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(B^*(t)x) = \dots$$

В матричном виде эти равенства перепишутся в виде $0 = Kx$, где K - матрица наблюдаемости пары $(B^*(t), A^*(t))$.

Так как каждая пара $(B^*(t), A^*(t))$ наблюдаема, то для некоторого момента времени $\tau \in R$, ранг матрицы наблюдаемости K равен n. Следовательно, при $t = \tau$ имеем $x(\tau) = 0$. В силу единственности решения линейной системы получаем, что $x(t) \equiv 0$ для любого $t \in R$.

На основании теоремы 3.3 из работы [1] получаем, что нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Следующее определение позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости в предположениях относительно исходных матриц $A(t)$ и $B(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара матриц $(B(t), A(t))$ строго наблюдаема, если:

1) существует число $T > 0$, такое что для любого момента $\tau \geq 0$ существует точка $t^*(\tau) \in (\tau, \tau+T)$, в окрестности которой матрицы $B(t)$ и $A(t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка n включительно;

2) ранг матрицы наблюдаемости $K(t)$ пары $(B(t), A(t))$ равен n (в окрестности той же точки t^*).

При этом, этот ранг определяется одним и тем же минором $\Delta(t)$, $|\Delta(t^*)| \geq \delta > 0$ матрицы $K(t)$.

Легко заметить, что тогда $|\Delta^*(t^*)| \geq \delta > 0$ в предельном случае, и для наблюдаемости каждой пары $(B^*(t), A^*(t))$ достаточна строгая наблюдаемость пары $(B(t), A(t))$.

Отсюда имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для системы (1) существует функция Ляпунова вида $V = x^T G(t) x$, удовлетворяющая условию (2). При этом $A(t)$ и $B(t)$ имеют непрерывные производные до порядка n включительно. Если пара матриц $(B(t), A(t))$ строго наблюдаема, тогда тривиальное решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

С помощью методики доказательства, приведенной в теореме 1, устанавливается более общий результат.

Рассмотрим множество $N = \{\Omega(x,t) = 0\} = \{x^T B^*(t) x = 0\} = \{B^*(t)x = 0\}$. Предположим, что существует матрицы $C^*(t)$ и $D^*(t)$, такие что: 1) множество $N_1 = \{x : C^*(t)x = 0\}$ совпадает с N; 2) множество $N_2 = \{x : D^*(t)x = 0\}$ включает в себя множество N_1 . Кроме того, допустим, что существует окрестность точки τ, $\tau \in R$, в окрестности которой матрицы $C^*(t)$ и $D^*(t)$ имеют непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно.

ТЕОРЕМА 3. Если каждая пара $(C^*(t), A^*(t) - D^*(t))$ наблюдаема, то тривиальное решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим траекторию $x(t) \in N$. Получаем, что $C^*(t)x \equiv 0$ и $D^*(t)x \equiv 0$. Далее имеем цепочку равенств:

$$
\begin{cases}
0 = \frac{d}{dt}(C^*(t)x) = [\dot{C}^*(t) + C^*(t)A^*(t)]x = [\dot{C}^*(t) \\
+C^*(t)(A^*(t) - D^*(t))]x(t) \\
0 = \frac{d}{dt}\{[\dot{C}^*(t) + C^*(t)(A^*(t) - D^*(t))]x(t)\} = ((\ddot{C}^*(t) + \dot{C}^*(t) \\
(A^*(t) - -D^*(t)) + C^*(t)(\dot{A}^*(t) - \dot{D}^*(t)])x(t) \\
+(\dot{C}^*(t) + C^*(t)(A^*(t) - D^*(t)))(A^*(t) - D^*(t))x(t) \\
= \{\ddot{C}^*(t) + 2\dot{C}^*(t)[A^*(t) - D^*(t)] + \\
+C^*(t)[A^*(t) - D^*(t)]^2 + C^*(t)[\dot{A}^*(t) - \dot{D}^*(t)]\}x(t) \\
\ldots \\
0 = \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(C^*(t)x) = \ldots
\end{cases}
$$

Предположим, что каждая пара $(C^*(t), A^*(t) - D^*(t))$ наблюдаема. Тогда существует момент времени τ, такой что ранг матрицы наблюдаемости $K(t)$ равен n. Поэтому в момент времени τ $x(\tau) = 0$. В силу единственности решения линейной системы $x(t) \equiv 0$ для любого момента времени $t \in R$. Отсюда заключаем, что $x(t) = 0$ равномерно асимптотически устойчиво [1].

Аналогично предыдущему можно получить равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1) из строгой наблюдаемости пары $(C(t), A(t) - D(t))$.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему вида

$$x(t) = A(t)x + B(t)x \tag{4}$$

Здесь $B(t) = -B(t)^T$, $A(t) = A(t)^T \leq 0$, $A_1(t) = A_1^T(t) < 0$, $\dim A(t) = \dim B(t) = n \times n$, $\dim A_1(t) = m \times m$, $1 \leq m < n$. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы (4). Система (4) с учетом структуры матриц перепишется в виде

$$
\begin{cases}
\dot{x}^1 = A_1 x^1 + A_2 x^2 + B_1 x^1 + B_2 x^2 \\
\dot{x}^2 = A_2^T x^1 + A_3 x^2 + B_3 x^2 - B_2^T x^1
\end{cases} \tag{5}
$$

Здесь $x^1 \in R^m$, $x^2 \in R^{n-m}$, $\dim A_1 = \dim B_1 = m \times m$, $\dim A_2 = \dim B_2 = m \times (n-m)$, $\dim A_3 = \dim B_3 = (n-m) \times (n-m)$.

Введем функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

Ее производная в силу системы (4) будет иметь оценку

$$\dot V = x^T A(t) x = (x^1)^T A_1(t) x^1 + (x^2)^T A_2^T(t) x^1 + \\ +(x^1)^T A_2(t) x^2 + (x^2)^T A_3(t) x^2 \le 0 \qquad (6)$$

Функция $\Omega(x,t)$ при этом есть

$$\Omega(x,t) =$$
$$= (x^1)^T A_1^*(t) x^1 + (x^2)^T (A_2^T)^*(t) x^1 + (x^1)^T A_2^*(t) x^2 + (x^2)^T A_3^*(t) x^2$$

Предельные уравнения для (5) имеют вид

$$\begin{cases} \dot x^1 & = A_1^* x^1 + B_1^* x^1 + B_2^* x^2 + A_2^* x^2 \\ \dot x^2 & = (A_2^T)^* x^1 + B_3^* x^2 - (B_2^T)^* x^1 + A_3^* x^2 \end{cases} \qquad (7)$$

Рассмотрим множество $N = \{\Omega(x,t) = 0\}$. Пусть N_1 - наибольшее инвариантное подмножество относительно (7) множества N. Если $x(t) \in N_1$, тогда $x^1(t) \equiv 0$ и $A_3^*(t) x^2 \equiv 0$.

Применяя теорему 3, получаем, что нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво, если каждая пара матриц ($U^*(t), V^*(t)$)

$$U^*(t) = \begin{pmatrix} A_3^*(t) \\ B_2^*(t) + A_2^*(t) \end{pmatrix}, V^*(t) = (B_3^*(t))$$

наблюдаема.

Полученные результаты развивают известный пример Н.Г.Четаева [2] к теореме А.М.Ляпунова и обобщают результаты работы [3].

Работа выполнена при частичной поддержке программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект 3.3.1.

Литература.

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.

2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения.// М., Наука. 1965.

3. Miller R.K. and Michel A.N. Asymptotic stability of system: results involving the system topology. // SIAM J. Control and optimization. 1980. Vol.18. No. 2.

УДК 519.7

THE SPLITTING THEIREM ABOVE A R.E.DEGREE

Ishmukhametov Sh.

Two the most important theorems about the structure of Turing recursively enumerable (r.e.) degrees were the Splitting Theorem and the Density Theorem both proved by J.Sacks. A natural combination of this theorems is the following proposition :

Given degrees c and d, $c < d$, there exist degrees a and b such that $d = a \cup b$, $c < a$, $c < b$.

In 1975 A.Lachlan proved [1] that this result does not hold for r.e.degrees by constructing the r.e.degrees c and d, $c < d$, such that for any r.e. a and b the property $d = a \cup b$, $c < a$, $c < b$ did not hold for a, b, c and d. It was the first application of the famous 'monstrous injury arguments'.

Interest in the n-r.e. (and more particular d-r.e.=2-r.e.) degrees stemed from their affinity with r.e.degrees. Many similarities and differences were found at the the individual levels of the n-r.e. degree hierarchy (more exactly, between r.e. and 2-r.e. degrees). As for levels of $n > 2$ the Downey's conjecture about the equvalence of the elementary theories of n_1r.e.degrees for varioues $n > 1$ is not proved or disapproved now.

In [2] S.B.Cooper proved that the Splitting Theorem holds in n-r.e. degrees for any n. On the other hand, the Density Theorem is not true even for 2-r.e.degrees as proved [3] by a group of authors included R.Soare, L.Harrington, A.H.Lachlan, S.B.Cooper, S.Lempp. So the combination of the theorems mentioned above is not possible for n-r.e.degrees, $n > 1$. But some positive result however can be obtained.

Theorem 1. *Given r.e.degrees c and d, $c < d$, there exist 2-r.e.degrees a and b such that $c < a$, $c < b$, $a \cup b = d$.*

In (4) the author proved the theorem for case D is T-complete. Now we consider the case D is any non-recursive r.e.set. We follow notations of R.Soare [5].

Let C and D be r.e.sets from degrees c and d. We construct d.r.e.

sets A and B satisfying the following list of priority requirements :

$$
\begin{aligned}
&M_{2e} : D \neq \Phi_e^A, \\
&N_{2e+1} : D \neq \Phi_e^B, \\
&P_{2e} : A \neq \Phi_e^C, \\
&P_{2e+1} : B \neq \Phi_e^C,\ e \in \omega,
\end{aligned} \qquad (1),
$$

where $\{\Phi_i(X)\}$, $i = 0, 1, 2...$ is a standard listing of p.r.functionals with an oracle X.

Besides we ensure reducibilities $C <_T A$, $C <_T B$ and $D \equiv_T A \oplus B$. With this purpose we split the set of all naturals ω into three infinite recursive sets with empty intersection Q_1, Q_2, and Q_3 and use the first one to code C into A and B. For simplicity we can assume that $C \subseteq Q_1$ and put all elements enumerated in C to A and B. This gives us a relation :

$$\forall x (x \in C \Leftrightarrow x \in A \cap Q_1 \Leftrightarrow x \in B \cap Q_1) \qquad (2)$$

To ensure a reducibility $D <_T A \oplus B$ we split the set Q_2 into an infinite sequence $\{F_x\}$ of disjoint finite sets: $Q_2 = \cup F_x$, $x \in N$ such that $|F_x| = x + 1$. Then we construct d.r.e sets A and B such that :

$$\forall x (x \in D \Leftrightarrow A \cap F_x \neq \emptyset \vee B \cap F_x \neq \emptyset \qquad (3)$$

In order to satisfy the requirements P_e, $e \in N$, we use a usial Sacks coding strategy (sf[4], chap. 8), coding elements of D into $A \oplus B$ and use for this the set Q_3. Assume that the enumetarion of all triples $< e, x, t >$ lies in Q_3. We enumerate an element $< e, x, t >$ to A at a stage $s > t$ for satisfying P_e if :

1) $x \in D$,

2) $< e, x, t >$ is not restrained by any N_i -requirement, $i \leq e$, at stage s.

3) $l_A^C(r, e) > x$ for all r, $t < r < s$,

where $l_A^C(s, e) = \min\{z | A^s(z) \neq \Phi_e^C(z)\}$, is a standard length function which states the equality between initial segments of A and $\Phi_e(C)$ at stage s.

Let A_i and B_i denote sets $A \cap Q_i$ and $B\, Q_i$, $i = 1, 2, 3$, respectively. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ and $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ and only parts A_2 and B_2 be properly d.r.e.sets while sets A_1, A_2, B_1, B_2 be r.e.sets.

We have a sequence of negative requirements $\{N_e\}$, $e \in N$. Below we define for them length and use functions :

(length function): $l_A(e, s) = \min\{z | D^s(z) \neq \Phi_e^A(z)\}$,

(use function) : $u_A(e, s) = \min\{u | D^s(z) = \Phi_e^{A \restriction u}(z), z < l_A(e, s)\}$.

In order to preserve an agreement $D^s(z) = \Phi_e^A(z)$ for $z < l_A(e, s)$ we restrain at stage s the initial segment of A of length $u_A(e, s)$ from entering any numbers and call this restraint N_2e-requirement. At the later stages we allow to cancel this restraint only if it is injured by elements of C enumerated into A or by elements of Q_3 put to A for satisfying a requirement P_i, $i < e$. If R_e-requirement is not cancelled yet we call it active. R_e- requirements can also be injured by elements x of Q_2 put to A for satisfying condition (3). We do not cancel R_e-requirement in this case because later such x cam be removed from A. Finally, we cancel R_2e-requirement if it is injured by elements of Q_2 extracted from A. Denote via $r_A(e, s)$ the greatest element keeped by R_e-requirements active at stage s. Define functions $l_B(e, s)$, $r_B(e, s)$ and $u_A(e, s)$ similarily.

Now we describe the procedure of coding D into $A \oplus B$. Let x be an element of D enumerated there at a stage s and $y_0, y_1, y_2, ...$ be elements of F_x in increasing order. At stage $s + 1$ we choose to which of sets A or B to put y_0. We use Sacks idea of preserving requirements of higher priority. If a requirement with the highest priority injured by y_0 has the even index $2e$ we put y_0 to B, otherwise to A. If no N_e-requirement injured by y_0, we put y_0 to A. We continue the procedure for x at later stages. Assume that y_0 was enumerated at stage $s + 1$ into B, and N_2e is the requirement of the highest priority injured by y_0. At stages $t > s$ we test is it possible to restore N_e. This occasion appears if some N_{2e-1} restraning y_0 becomes non-active. Then, we extract y_0 from A, and enumerate it into B. This allows to increase a number of N_i-requirements not injured by y_0. Then we continue the procedure waiting for a stage at which N_2e- requirements become non-active, and remove y_0 from B and enumerate y_1 into A etc.

This procedure ends if either the set F_x is exhausted or a number of N_i-requirements not injured by elements of F_x can not be increased more. In the first case at least all N_i-requirements with $i < x$, would be saved by this procedure. The second case means that either no requirement is injured by elements of F_x or some y_j was restrained by a N_i-requirement which is not ever injured. The last case is possible only finitely often for any e (it can be proved by induction on e) so any N_i gives a finite effect on the requirements of lower priority.

The proof of the theorem follows from the following lemmas.

LEMMA 1. $D <_T A \oplus B$.

Proof. For all x, if $x \in D$ then there exists an element of F_x in $cupB$. This ensures the relation (3).

LEMMA 2. $D \neq \Phi_0^A$, *and* $\liminf r_A(s,q) < \infty$.

Proof. N_0-requirements are injured only by elements of C put to A. Since D is not reducible to C, so $D \neq \Phi_0^A$. Assume that at each stage s no more than one number c is enumerated in C. A stage s is called C-minimal if

$$C^s \lceil c = C \lceil c$$

If N_i-requirement is not injured at some C-minimal stage it is never injured . There is only a finite number of such requirements so there exists such $r_A(0)$ that $r_A(0,s) = r_A(0)$ for all sufficiently large C-minimal s.

LEMMA 3. $D \neq \Phi(B)$, *and* $\liminf r_B(0,s) < \infty$.

Proof. N_1 -requirements can be injured either by elements of C or by elements of $F_x, x \in \omega$, put to B or extracted from B during the coding procedure of x into $A \oplus B$. If some y_i was put to B at stage t injuring N_1-requirement then there exists a N_0 -requirement active at stage t which restrained y_i from entering to A. If $y > r_A(0)$ then at the nearest C-minimal stage $s > t$ all N_0-requirements except permanent bounded by $< r_A(0)$ become passive and we extract y_i from B and enumerate it it into A restoring N_1 -requirement injured by y_i . If some $N_{i,s'}$-requirement was created between stages t and s then it is injured by extracting y from B, but using set C as an oracle we can predict at the stage s' is it ever be injured. Notice that at C-minimal stages the values $r_A(0,s)$ and $r_B(0,s)$ drop back to $r_A(0)$ and $r_B(0)$ simultaneously.

LEMMA 4.
$A \neq \Phi_0(C)$, *and* $A^{(0)} = \langle 0,x,t \rangle | x,t \in \omega, \langle 0,x,t \rangle \in A$ *is recursive and uniformly recursive in* D.

Proof does not differ from the standard.

LEMMA 5. *If sets* $A^{(i)}$ *and* $B^{(i)}$ *are uniformly recursive in* D *for* $i < e$, *then using* D *as an oracle we can define for any* N_{2e}*-requirement is it ever injured.*

Proof. Every N_{2e}-requirement can be injured either by elements of C put to A, or by elements of $A^{(i)}$ enumerated for satisfying conditions $P_{2i}, i < e$ or by elements of F_x put to A or extracted from A during the coding procedure for x. The first and the second cases are clear. If N_{2e}-requirement contains some y_i from F_x then y is enumerated into A simultaneously with the previous y_{i-1} extracted from B. The first element y_0 can be put to B only at such stage at which x is enumerated in D. y_0 is extracted from B if there exists some N_{2i}-requirement with $i < e$ which restraines y and later injured. Now the lemma can be proved using induction on i.

Extending lemmas 2,3,4 and 5 to other naturals we prove that all conditions of the theorem hold. This finishes the proof of the theorem.

Literature

1. A.H.Lachlan. A recursively enumerable degree which will not split over all lesser ones, Ann.Math.Log. 9 (1975), 307-365

2. S.B.Cooper. A splitting theorem for the n-r.e.degrees, Proc. Am. Math. Soc. **115**, 461-471

3. S.B.Cooper, L.Harrington, A.H.Lachlan, S.Lempp, R.I.Soare. The d.r.e.degrees are not dense , Ann.Pure and Appl.Logic 55, 125-151

4. Ш.Т.Ишмухаметов. О разложении степени 0' на меньшие Т-степени, содержащие разности р.п. множеств, Известия вузов. Математика, N1 (380), 1994, стр. 12-16

5. R.I.Soare. Recursively enumerable sets and degrees, Springer-Verlag, Berlin, N.Y.,1986

Фундаментальные проблемы математики и механики.
Выпуск 1.
Ученые записки Ульяновского государственного университета.

Н/К

Подписано в печать с оригинал макета 2.04.96.
Формат 84×108 $1/_{32}$. Усл. п. л. 17,0. Уч.-изд. л. 15,5.
Тираж 1000 экз. Заказ N 21/ 10

Подразделение оперативной полиграфии
Ульяновского государственного университета.
432000, г.Ульяновск, ул.Л.Толстого, 42.