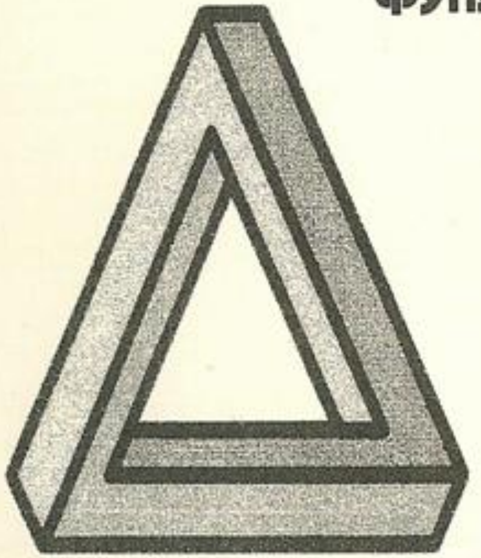
Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Ученые записки Ульяновского государственного университета

Фундаментальные проблемы математики и механики



1996

Выпуск 2

Министерство общего и
профессионального образования РФ

Учёные записки Ульяновского
государственного университета

Фундаментальные проблемы математики и механики

Выпуск 2

Ульяновск 1996

ББК 22.19+32.97
УДК 519.6+519.7

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Ульяновского государственного университета.

Фундаментальные проблемы математики и механики: Сборник статей. / Под ред. Б.Ф.Мельникова. - Вып.2. Ульяновск: УлГУ. 1996. - 39 с.

Второй сборник из серии, посвящённой фундаментальным проблемам математики, прикладной математики, механики и информатики, включает в себя работы преподавателей и аспирантов механико-математического факультета УлГУ. Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с современными проблемами математики.

ISBN 5-7769-0040-9

Рецензент: д.ф.-м.н. А.С.Андреев.

Оглавление

Е.И. Агеенко. Сжатие чертежной информации

В настоящее время остается актуальной задача сжатия чертежной графической информации. Это связано с внедрением в деятельность предприятий систем управления инженерным документооборотом (EDM). Основными требованиями, предъявляемыми к системе EDM, являются: 1) наиболее компактное представление информации и 2) работа с информацией в реальном времени,

Чертежи вводятся в систему EDM посредством сканирования. Сканер производит растровые изображения, - набор точек, в то время как векторное изображение - файл чертежа САПР представляет собой набор описаний объектов. Оно может быть легко обработано, модифицировано и занимает примерно в 40 раз меньший объем памяти.

Однако процесс векторизации растровых изображений в настоящее время остается сложной дорогостоящей операцией, требующей интерактивного взаимодействия с человеком.

Но исследования показывают, что векторизовать необходимо лишь небольшой процент чертежей, используемых в задачах моделирования и управления.

Оставшаяся часть чертежей может быть перенесена в архив в растровом виде. Потребность в корректировке таких чертежей, а также выполнения основных операций с топологическими объектами могут быть наиболее экономично удовлетворены с помощью гибридного редактирования.

Анализ существующих методов сжатого представления растровых изображений показывает, что:

1) коэффициент сжатия изображения обратно пропорционален количеству составляющих его топологических элементов;

2) с ухудшением качества изображения коэффициент сжатия резко падает;

3) сжатые форматы можно условно разделить на два класса: подверженные дальнейшему сжатию и неподверженные, причем первые предпочтительнее.

4) наилучшими показателями обладают: векторный формат представления изображений (например CGM) и формат CCITT Group 4, однако область применения последнего ограничена качеством чертежей.

5) рассмотренные алгоритмы сжатия/восстановления не удовлетворяют второму требованию - возможности работы с графической информацией в реальном времени.

Представляет интерес разработка новых алгоритмов сжатия чертежной графической информации, не только с целью получения более компактного представления, но и обеспечения более высокого быстродействия работы со сжатой информацией, а также получение представления, позволяющего проведение дальнейшего семантического анализа информации и векторизации.

Новые методы должны опираться на следующие подходы:

1. Совершенствование изображения, включающее в себя операции, улучшающие внешний вид образа для перевода его в формат, более подходящий для машинной обработки.

2. Сегментация изображения - совокупность методов, которые включают в себя восприятие образа и извлечение информации, относящейся к конкретным "сегментам" картины, таким как линии, области и объекты, и их соотношениям. Сегментация подразделяется на пространственную сегментацию - кластеризацию

и типовую сегментацию - классификацию. Классификация образов подразумевает классификацию множества элементов изображения в соответствии со значением некоторого свойства образа, которое можно измерить или оценить для каждого рассматриваемого набора элементов изображения. Если плотность вероятности значения этого свойства для каждого класса известна вместе с вероятностями появления класса, то можно построить критерий классификации с минимумом ошибки.

3. Построенный список свойств, соответствующих подмножествам образа, должен определить и связать друг с другом различные области изображения в контексте представления. Это в основном линейные, нормированные, инвариантные относительно преобразования свойства, носящие как локальный (форма), так и глобальный характер (проекция или преобразование).

Полученное представление позволит путем сопоставления перейти к распознаванию всего образа или его компонентов, что будет способствовать еще более компактному представлению изображения.

Итак, перечислим достигаемые результаты:

1. Изображения сохранены в сжатом виде, сравнимом по размеру с векторным представлением (коэффициент сжатия не менее 40).

2. Изображения могут быть восстановлены, просмотрены и обработаны в реальном времени.

3. Изображения представлены в форме, удобной для последующих векторизации и распознавания.

4. Процесс сжатия изображений - автоматический, без вмешательства человека.

М.Ю.Акимов, П.А.Вельмисов. Исследование устойчивости трубопровода в нелинейной модели

В качестве модельного уравнения, описывающего колебания трубопровода с протекающей в нем жидкостью, можно предложить следующее уравнение

$$M\ddot{w} + D\left[w'''' - \int_0^t \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial \tau} w''''(x,\tau)d\tau\right] + \xi\dot{w}'''' - \eta\ddot{w}'' + Pw'' + \gamma\dot{w} +$$

$$+\beta\left[w - \int_0^t \frac{\partial V(t,\tau)}{\partial \tau} w(x,\tau)d\tau\right] + \alpha\dot{w}' + f_1 w^3 + g_{01}w^2\dot{w} + g_{10}\dot{w}^3 -$$

$$-w''\left[\theta\int_0^\ell w'^2(x,t)dx + \nu\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\ell w'^2(x,t)dx\right] = 0,\ x \in (0,\ell)$$

где точка обозначает производную по времени t, штрих - по координате x. Предполагается, что трубопровод изготовлен из вязкоупругого материала и опирается на основание с нелинейной упругой реакцией и нелинейным демпфированием. Учитывается также нелинейность продольного сжимающего (растягивающего) усилия.

В первом приближении $(w = \psi(t)g(x))$ на основе метода Галеркина и построения функционала, соответствующего интегродифференциальному уравнению для $\psi(t)$, получены условия устойчивости трубопровода.

$$A>0,\ B>0,\ E_1>0,\ E_2>0,\ E_3>0,\ \frac{\partial}{\partial\tau}(RQ+SV)>0,\ \frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}(RQ+SV)\le 0,$$

$$R[Q(0,t)-Q(t,t)] + S[V(0,t)-V(t,t)] \ge -C,$$

$$\frac{d}{dt}[(RQ+SV)(0,t)-(RQ+SV)(t,t)] \le 0$$

которые налагают ограничения на значение сжимающего усилия и скорость потока в трубопроводе. В перечисленных условиях введены обозначения

$$A = \int_0^\ell (Mg - \eta g'')g dx,\ B = \int_0^\ell (\xi g'''' + \gamma g + \alpha g')g dx$$

$$C = \int_0^\ell (Dg'''' + Pg'' + \beta g)g dx,\ R = \int_0^\ell Dgg'''' dx,\ S = \int_0^\ell \beta g^2 dx$$

$$E_1 = \int_0^\ell \left(f_1 g^4 - \theta g'' g \int_0^\ell g'^2 dx\right) dx,$$

$$E_2 = \int_0^\ell \left(g_{01} g^4 - 2\nu g'' g \int_0^\ell g'^2 dx\right) dx,\ E_3 = \int_0^\ell g_{10} g^4 dx$$

Вид функции $g(x)$ зависит от способов закрепления концов трубопровода. В статическом случае исследуется бифуркация решений соответствующего нелинейного уравнения. Для более высоких приближений проводится численное исследование динамики трубопровода.

А.С.Андреев. Об устойчивости неустановившегося движения

Излагается развитие прямого метода Ляпунова в исследовании задачи об устойчивости неустановившегося движения. Проводится расширение класса неавтономных уравнений, для которых применимы способы исследования свойств устойчивости, основанные на построении предельных уравнений и предельных функций Ляпунова.

К.Г.Арбеев. Оценка параметров в системе стохастических уравнений диффузионного типа

Пусть некоторый объект описывается системой из n стохастических уравнений диффузионного типа:

$$dX_t = (A + B_t(X))dt + \sum dW_t, \quad \text{где} \tag{1}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \vdots \\ x_t^n \end{pmatrix}, \qquad W_t = \begin{pmatrix} w_t^1 \\ \vdots \\ w_t^n \end{pmatrix}$$ - винеровский процесс с независимыми компонентами, а матрица Σ неизвестна.

Требуется упорядочить компоненты вектора-столбца X_t согласно некоторому "критерию значимости" и затем найти элементы матрицы диффузии Σ.

Обозначим $y_t = \frac{[X,X]_t}{t}$, где $[X,X]_t$ - матрица взаимных вторых вариаций компонент процесса X_t.

Предлагается следующий критерий выбора компонент:

$$i_k = \arg \min_{i \in \{k,\cdots,n\}} \Big(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |[x^i, x^j]_t| \Big), \tag{2}$$

$$x_t^k := x_t^{i_k}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Таким образом, компоненты вектора X_t упорядочиваются по уменьшению степени независимости от остальных компонент.

Определим теперь элементы матрицы диффузии Σ. Так как процесс $Z_t = \int_0^t (A + B_t(X))dt$ имеет локально ограниченную вариацию, то $[X,X]_t = \Sigma\Sigma^T t$, т.е.

$$y_t = \Sigma\Sigma^T. \tag{3}$$

Для однозначного определения элементов матрицы Σ из уравнения (3) предположим, что матрица имеет нижнетреугольный вид, т.е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Из соотношений (1), (3), учитывая (4), имеем:

$$[x^k, x^j]_t = \sum_{i=1}^{j} \sigma_{ki}\sigma_{ji} t, \quad k = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, k.$$

отсюда получаем соотношения для определения элементов матрицы диффузии:

$$\sigma_{kj} = \frac{\frac{[x^k, x^j]_t}{t} - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_{ki}\sigma_{ji}}{\sigma_{jj}}, \tag{5}$$

$$\sigma_{kk} = \sqrt{\frac{[x^k, x^k]_t}{t} - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{ki}^2}, \quad k = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, k-1. \tag{6}$$

Полученные результаты применимы к исследованию процесса изменения курсов валют на Лондонской бирже за период с января 1994г. по октябрь 1995г. В данной модели валюты упорядочены согласно критерию (2), кроме того, определена матрица диффузии Σ, согласно соотношениям (5), (6).

ЛИТЕРАТУРА

1) Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. "Статистика случайных процессов", М.: Наука, 1974г.

2) Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. "Теория мартингалов", М.: Наука, 1986г.

С.П.Безгласный. О стабилизации программных движений Лагранжевых систем

Рассматривается управляемая голономная механическая система, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{1}$$

где $q \in R^n$, $\dot q \in R^n$ - обобщенные координаты и скорости, кинетическая энергия представима в виде $T = T_2 + T_1 + T_0$, $T_2 = \frac{1}{2}\dot q^T A(t,q)\dot q$ - квадратичная форма скоростей $\dot q$, $T_1 = B(t,q)\dot q$ - линейная форма скоростей $\dot q$, $T_0 = T_0(t,q)$; действующие на систему силы $Q = Q_1 + Q_2$ представляют собой сумму возмущающих сил Q_1 предполагаемой известной структуры и активных управляющих воздействий Q_2.

Определяются управляющие силы Q_2 и условия на возмущения Q_1, обеспечивающие стабилизацию программного движения $q = \dot q = 0$ системы (1). При этом также решается задача об оценке качества переходного процесса величиной функционала

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, q, \dot q)\, dt \tag{2}$$

Полученные результаты обобщают и развивают результаты работ [1,2].

Литература

1) Зубов В.И. *Динамика управляемых систем.* М.: Высш.шк., 1982.

2) Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. *Управление движением механических систем.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

А.Н.Безногов. К вопросу об исследовании ошибки оценивания кусочно - постоянной функций распределения

Пусть на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) определена последовательность независимых случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,N}$ с совпадающими распределениями $F_\xi(t) = P(\xi_i \le t)$. Введем *эмпирическую функцию распределения* - $F_{\flat,\xi}^N(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{I(\xi_i \le t)}{N}$. Для исследования ошибки оценивания функции распределения $(F_\xi(t) - F_{\flat,\xi}^N(t))$ рассмотрим по следовательность процессов $X^N = (X^N(t))_{t\ge 0}$:

$$X^N(t) = \sqrt{N}(F_\xi(t) - F_{\flat,\xi}^N(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{I(\xi_i \le t) - F_\xi(t)}{\sqrt{N}}, N = 1, 2, \dots$$

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $F_\xi(t)$ - кусочно-постоянная функция, имеющая m разрывов в точках $t_1,\dots,t_m$, где $t_i < t_j$ при $1 \le i \le j \le m$. При увеличении числа наблюдений, $N \to \infty$, последовательность $X^N(t)$ сходится по распределению к процессу $X = (X(t))_{t\ge 0}$:*

$$X(t) = \begin{cases} \eta_k, \in [t_k, t_{k+1}] \\ 0, t \notin [t_1, t_m] \end{cases},$$

где $k = 1,\dots,(m-1)$ *и* η_k - *это* $(m-1)$ *случайная величина* с Гаусовским распределением $N(0, P(\xi_1 \le t_k) - P^2(\xi_1 \le t_k))$.

В качестве доказательства следует лишь указать, что строение процесса $X(t)$ следует из вида процесса $X^N(t)$, т.к. для любого $N = 1,2,\dots$:

$$X^N(t) = \begin{cases} \eta_k^N, \in [t_k, t_{k+1}] \\ 0, t \notin [t_1, t_m] \end{cases},$$

где $k = 1,\dots,(m-1)$ и η_k^N - это $(m-1)$ случайная величина *с Гаусовским распределением* $N(0, P(\xi_1 \le t_k) - P^2(\xi_1 \le t_k))$.

Нужно также отметить, что распределение выбрано исходя из характера процесса $X^N(t)$, а параметры распределения вычисляются непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. *Исходя из характера предельного процесса $X(t)$ существует зависимость между его скачками, причем*

$$cov(\eta_i, \eta_j) = F_\xi(t_j)(1 - F_\xi(t_i)), \text{ где } 1 \le i \le j \le (m-1).$$

В качестве обоснования данного замечания следует указать, что ковариация скачков вычисляется непосредственно и по аналогии с расчетом параметров их распределения.

Основываясь на указанном выше результате, а так же рассматривая предельный процесс в качестве семимартингала, можно указать триплет его предсказуемых характеристик, который является чрезвычайно полезным в дальнейших исследованиях. Таким образом справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *В условиях и на основании теоремы 1 триплет предсказуемых характеристик предельного процесса $X(t)$ имеет вид:*

$$(B_t^1, 0, \nu), \text{ где}$$

1) $B_t^1 = \begin{cases} 0, \ t \notin [t_1, t_m] \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{F_\xi(t_i)}{F_\xi(t_j)} \eta_j \end{cases}, \ \forall t \in [t_k, t_{k+1}[, \forall 1 < k < (m-1)$

2) $\nu(dx, \{t\}) = dF_\varphi(x)$, *где* φ - Гаусовская случайная величина *с парьметрами распределения:* $m = \triangle B_t^1$ *и* $\delta = D\eta_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{cov(\eta_k, \eta_i)^2}{D\eta_i}$

В качестве доказательства следует указать, что данный результат основывается на теореме о нормальной корреляции и ее следствиях, а также вычисленной непосредственно ковариации скачков предельного процесса.

Результаты могут быть использованы как в общетеоретических областях так и в прикладных задачах, в частности для проверки гипотезы о виде функции распределения случайного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1) Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов - М:Наука, 1986

2) Ширяев А.Н. Вероятность - М:Наука, 1989

3) Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов - М:Наука, 1974

А.Ю.Богданов. Слабо сжимающие отображения и стабилизация дискретных систем управления

Рассматривается неавтономная нелинейная дискретная управляемая система

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + g(k, x(k))u(k), \quad f(k,0) \equiv 0, \quad g(k,0) \equiv 0 \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$; $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ – отображения допустимых размерностей, удовлетворяющие условиям предкомпактности. Определим $f_k^0(x) = x$, $f_k^1(x) = f(k,x)$, ..., $f_k^i(x) = f(k+i-1, f_k^{i-1}(x))$.

Определение. Функция $f(k,x)$ называется слабо сжимающей в области $\Gamma \subset R^n$, если для некоторой нормы $\|x\|^2_{P(k)} := x^T P(k) x$, где $P(k) > 0$, выполнено $\|f(k,x)\|^2_{P(k)} \le \|x\|^2_{P(k)}$ для всех $x \in \Gamma$.

Предположим, что для системы (1) существует обратная связь $\alpha(k,x)$, $\alpha(k,0) \equiv 0$: $f_\alpha(k,x) = f(k,x) + g(k,x)\alpha(k,x)$ слабо сжимающая в области $\Gamma \subset R^n$. Определям

$$\widetilde{S}_\alpha = \{x \in \Gamma: \ (\widetilde{f_{\alpha n_0}^{i+1}}(x))^T \widetilde{P}(n_0+i)\widetilde{g}(\widetilde{f_{\alpha n_0}^{i}}(x)) = 0, \ \forall\, i, \ n_0 \in Z_+\}$$

$$\widetilde{\Omega}_\alpha = \{x \in \Gamma: \ \|\widetilde{f_{\alpha n_0}^{i+1}}(x)\|^2_{\widetilde{P}(n_0+i+1)} = \|\widetilde{f_{\alpha n_0}^{i}}(x)\|^2_{\widetilde{P}(n_0+i)}, \ \forall\, i, \ n_0 \in Z_+\}$$

где знак "~" над функциями означает, что они являются предельными по одной и той же последовательности $n_k \to +\infty$.

Теорема. Предположим, что $\widetilde{S}_\alpha \cap \widetilde{\Omega}_\alpha = \{0\}$, тогда система (1) локально стабилизируема посредством обратной связи

$$u(k) = \alpha(k, x(k)) - [I + \frac{1}{2} g^T(k, x(k)) P(k) g(k, x(k))]^{-1} \cdot$$

$$\cdot g^T(k, x(k)) P(k) f_\alpha(k, x(k)) \tag{2}$$

Если $\Gamma \equiv R^n$, то закон управления (2) глобально стабилизирует систему (1).

А.А.Бутов. Об условиях в законах типа "повторного логарифма" со случайной нормировкой для процессов из $\mathcal{M}^2_{loc}$

На стохастическом базисе $B^X = (\Omega, \mathcal{F}, F^X, P)$ с $F^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\ge 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \le t)$ для процесса $X = (X_t)_{t\ge 0} \in \mathcal{M}^2_{loc}$ (т.е. локально квадратично интегрируемого интеграла) в минимальном каноническом семимартингальном представлении

$$X_t = X_t^c + \int_0^t \int_{R^1 \setminus \{0\}} x(d\mu^X - d\nu^X)$$

получены условия, при которых $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\lim_{t\to\infty} \sup \frac{X_t}{\sqrt{2[X,X]_t \ln\ln [X,X]_t}} > 1+\varepsilon\} = 0$$

(и аналогично для $\lim\inf$):

(а) $\forall B^X -$ м.м. $\sigma \quad E|\Delta X_\sigma| I(\sigma < \infty) < \infty$

(б) $[X,X]_\infty = \infty \quad P-$ п.н.

(в) $\forall a > 0 \quad \int_0^\infty (1+\varphi([X,X]_{s-}))^{-2} \int_{|x|>\psi([X,X]_{s-})a} x^2 d\nu^X \quad P-$ п.н.,

где $\varphi(x) = \sqrt{2x \ln\ln x}$, $\psi(x) = \sqrt{x/2\ln\ln x}$.

Утверждение обобщает утверждение о законе повторного логарифма для мартингалов с ограниченными скачками, содержащееся в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1) Бутов А.А., Лукьянчиков А.Г. Мартингальные методы и предельные теоремы типа "закон повторного логарифма" - Вторая Всеросийская шк. по стох. методам - М.:ТВП, 1995, с. 31-32.

С.Г.Валеев. Ошибки математических моделей обработки астроинформации

Одной из широко распространенных задач обработки астроинформации является задача построения редукционной (математической) модели по измерениям на астрофотографиях,полученных из наземных наблюдений или аэрокосмическими средствами.

При этом методология поиска модели обработки сводится к двум положениям:

1) обоснование выбора типа модели;

2) анализ модели по внутренней,смешанной и внешней точности.

С позиций математической статистики можно сделать следующие критические замечания в адрес стандартной методологии: 1) ограничен круг применяемых мер качества модели; 2) принятая редукционная модель считается жестко заданной; 3) не учитывается возможность нарушения предположений МНК. Из этих замечаний наиболее серьезным является последнее.

Условия применения МНК в рассматриваемой задаче координатного преобразования могут нарушаться. В соответствии с теорией это приводит к значительным случайным и систематическим ошибкам, что проверялось путем численных экспериментов [1,2,3] по двум рядам наблюдений с общим количеством астрографий порядка 100.

Основные выводы при этом следующие.

1. Результаты исследований влияния несоблюдения условий МНК подтверждают высказанные теоретические выводы о случайных и систематических ошибках,возникающих при использовании стандартного МНК.

2. Включение в модель незначимых по t-критерию слагаемых ведет к понижению точности прогноза.

3. При определении координат звезд на серии снимков по одной и той же редукционной формуле следует иметь в виду, что систематические ошибки прогноза координат звезды могут достигать: при грубом отождествлении модели 2-3"; при использовании модели, содержащей незначимые члены, до 0.8" по ξ и 0.3" по η; при оценивании параметров неоптимальным методом эта ошибка будет около 0.1-0.3".

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. - М. : Наука,1991.-272 с.

2. Валеев С.Г.,Шамарин М.Г.,Даутов И.А.,Пелишев И.Е. Регрессионные модели в фотографической астрометрии//Кинематика и физика небесных тел.-1987.-Т.3.-N 5-С.30-35.

3. Валеев С.Г.,Положенцев Д.Д.,Сальес Р.Ф.,Ягудин Л.И. Анализ редукционных астрофотографических моделей по внутренним и внешним мерам на основе наблюдений в Боливии//Кинематика и физика небесных тел.-1991.-Т.7.-N 3С.9-14.

С.Г.Валеев, В.И.Дьяков. Программное обеспечение для задач МНК большой размерности

Одной из небесномеханических задач, решаемых на кафедре прикладной математики УлГТУ, является задача восстановления мегарельефа и гравитационных полей планет Земной группы по данным слежения за КА и наземным наблюдениям большого объема (до 100 мегабайт) при большой размерности моделей, содержащих порядка сотен и тысячи неизвестных.

Для решения разрабатываются и используются программные средства (ПО),реализующие стратегию статистического (регрессионного) моделирования и планируемые к объединению в виде автоматизированной системы научных исследований (АСНИ) с элементами экспертной системы для персональных компьютеров. Структурными единицами программного обеспечения являются модули, обеспечивающие решение нормальных и избыточных (переопределенных) систем алгебраических линейных уравнений; решение последних есть решение МНК. С помощью этих подпрограмм реализуются различные версии регрессионного анализа (РА). В настоящее время разрабатываются ПС,позволяющие провести адаптацию вычислительной схемы в случае существенного нарушения основных предположений МНК.

В работе используются следующие два подхода к решению задач большой размерности при функционировании программ в MS DOS.

1. Внедрение специальных программ - расширителей DOS - библиотек программ,используемых разработчиком DOS-приложений. DOS-расширитель "обрамляет" обычную программу. При этом обрамляющая программа, выполняющаяся первой,п олучает управление, переводит компьютер в защищенный режим работы и запускает внутреннее обычное приложение DOS.

2. Использование EMS-памяти. Задействуется память,расположенная на EMS-

плате,либо память эмулируется из дополнительной с помощью драйвера. Был создан программный модуль на Borland C++ v3.1, который может использовать любая прикладная программа для размешения больших объемов данных в расширенной памяти,не переводя компьютер в защищенный режим.

П.А.Вельмисов. Об устойчивости решений одной системы интегродифференциальных уравнений

Исследуется устойчивость движения (по Ляпунову) вязкоупругой пластины, которая является частью ($x = a, y_0 < y < y_*$) границы L_0, разделяющей две области S_1иS_2, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью. Области S_1, S_2 имеют границы L_1, L_2иL_0 произвольной формы.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -P_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x,y) \in S_1 \bigcup S_2;$$
$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -P_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}), \quad (x,y) \in S_1 \bigcup S_2;$$
$$u_x + v_y = 0, \quad (x,y) \in S_1 \bigcup S_2;$$
$$L(w) \equiv M\ddot{w}(y,t) + \left\{ D\left[w''(y,t) - \int\limits_0^t Q(y,\tau,t)w''(y,\tau)d\tau \right] + \xi \dot{w}''(y,t) \right\}'' -$$
$$-(\eta\ddot{w}'(y,t))' + (Nw'(y,t))' + \gamma\dot{w}(y,t) + \beta\left[w(y,t) - \int\limits_0^t R(y,\tau,t)w(y,\tau)d\tau \right] +$$
$$+g(y,t,w,\dot{w}) = P(a,y,t), \quad y \in (y_0, y_*);$$
$$u(L_k) = v(L_k) = 0, \quad k = 1,2; \quad u(L_0 \backslash (y_0,y_*)) = v(L_0 \backslash (y_0,y_*)) = 0,$$
$$u(a,y,t) = \dot{w}(y,t), \ v(a,y,t) = 0, \quad y \in (y_0, y_*)$$

где u, v, P - функции x, y, t ; w зависит от y, t ; индексы x, y, t снизу обозначают частные производные, точка сверху - производную по t , штрих - производную по y. Постановку задачи следует также дополнять начальными условиями для u, v, P, w и граничными условиями для w . Исследование устойчивости проводится на основе функционала

$$J(t) = 1/2 \int\int\limits_S \rho(u^2 + v^2)ds, \ S = S_1 \bigcup S_2$$

производная которого в силу уравнений и граничных условий задачи имеет вид

$$\dot{J} = -2\int\limits_{y_0}^{y_*} \dot{w}L(w)dy - \mu \int\int\limits_S (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)ds$$

Полученные условия устойчивости налагают ограничения на коэффициенты в выражении для $L(w)$, в том числе на значение сжимающего усилия N , и функции $g(y,t,w,\dot{w})$,
$Q(y,\tau,t)$, $R(y,\tau,t)$.

Аналогичный результат имеет место для любого числа областей $S_1, S_2, ..., S_n$, каждая из разделительных границ между которыми содержит произвольное число вязкоупругих элементов, параллельных координатным осям x, y.

А.Б.Верёвкин. О порождающих подалгебры Веронезе

Пусть $A = \oplus_{n\geqslant 0} A_n$ градуированная ассоциативная алгебра над полем $k{=}A_0$. Её подалгеброй Веронезе степени $d \geqslant 1$ назовём $A^{(d)} = \oplus_{n\geqslant 0} A_{nd}$. Если все компоненты A_n конечномерны, можно рассмотреть ряды Гильберта $A(t) = \sum_{n\geqslant 0} \dim A_n{\cdot}t^n$ и $A^{(d)}(t){=}\sum_{n\geqslant 0} \dim A_{nd}{\cdot}t^{nd}{=}d^{-1}{\cdot}\sum_{r=1}^d A(t{\cdot}\exp\{\frac{2\pi i r}{d}\})$. В этом случае A обладает порождающим множеством $X{=}\cup X_n$, $X_n{\subset}A_n$ с рядом Гильберта $X(t){=}\sum_{n>0} \sharp(X_n){\cdot}t^n$; среди всех таких множеств имеются минимальные – у них число элементов любой степени n: $\sharp(X_n)$ – принимает наименьшее из всех возможных значений. Они являются подъёмами базиса пространства $A_+{\otimes}_A(A/A_+)$, $A_+ = \oplus_{n>0} A_n$. Аналогично, имеются минимальные порождающие множества $X^{(d)}$ алгебры $A^{(d)}$; все они имеют один ряд Гильберта $X^{(d)}(t)$ и моя цель – дать ему оценку через $X(t)$.

Ясно, что, при фиксированном $X(t)$, $X^{(d)}(t)$ имеет наибольшее значение, когда $A = k{<}X{>}$ – свободная алгебра. В этом случае имеем формулу:

$$\left(1 - X^{(d)}(t)\right)^{-1} = \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}\left(1 - X\left(t{\cdot}\exp\left\{\frac{2\pi i r}{d}\right\}\right)\right)^{-1} \qquad (1)$$

Доказательство:

Поскольку $A = k{<}X{>}$ – свободная алгебра, $A(t){=}(1 - X(t))^{-1}$ и справа в (1) стоит $A^{(d)}(t)$. Сама формула (1) теперь равносильна утверждению о свободности подалгебры Веронезе, а эта свободность следует из Теоремы 6.2 [1,стр.294] (нужно рассмотреть полугруппы порождённые X и $X^{(d)}$, соответственно) или из теоремы Шютценберже [2,стр.133].

Предложение 1. *Пусть* $A = k{<}X{>}$, $d \geqslant 1$. *Тогда равносильны условия:*

1) $A^{(d)}$ *– конечнопорождена;*

2) *для некоторого многочлена* $P(t)$, $X(t) = t^n{\cdot}P(t^d)$.

Доказательство:

Пусть $X(t) = t^n{\cdot}Z(t^d)$, для некоторого ряда $Z(t)$. Тогда

$$(1 - X(t))^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}(X(t))^s = \sum_{s=0}^{\infty} t^{ns}{\cdot}(Z(t^d))^s .$$

В $(Z(t^d))^s$ степени всех слагаемых кратны d , поэтому

$$(1 - X^{(d)}(t))^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}(t^n{\cdot}Z(t^d))^{sa} = \left(1 - (t^n{\cdot}Z(t^d))^a\right)^{-1},$$

где $a = d/НОД(d,n)$. Следовательно, $X^{(d)}(t) = (t^n{\cdot}Z(t^d))^a$ – является многочленом, только когда $Z(t)$ – многочлен.

Пусть $X(t)$ не представим в виде $t^n{\cdot}Z(t^d)$, тогда имеются $x, y{\in}X$, $d{\nmid}l{=}\deg x$, $m{=}\deg y > 0$, $d{\nmid}(l{-}m)$.

Рассмотрим уравнение в $\mathbb{N}$:

$$l + mz \equiv 0 \pmod{d}. \tag{2}$$

Если оно неразрешимо, тогда, полагая $\alpha = d/НОД(d,l)$, видим $\nu_s = x \cdot y^{ds} \cdot x^{\alpha-1} \in A^{(d)}$, но никакое его начало не лежит в $A^{(d)}$. Поэтому, для всех s, $\nu_s \in X^{(d)}$ и $\sharp(X^{(d)}) = \infty$.

Если (2) разрешимо, пусть β – его наименьшее решение. Рассмотрим слово:

$$\mu_s = x \cdot y^{\beta-1} \cdot (x \cdot y^{\beta})^s \cdot x \cdot y^{\beta+1} \in A^{(d)}.$$

Любое его начало имеет следующий вид:

$\omega = x \cdot y^r,\ 0 \leqslant r < \beta\ :\ \deg\omega \equiv l + mr \not\equiv 0 \pmod{d}$ и $\omega \notin A^{(d)}$;

$\omega = x \cdot y^{\beta-1} \cdot (x \cdot y^{\beta})^r \cdot x\ :\ \deg\omega \equiv l - m \not\equiv 0 \pmod{d}$ и $\omega \notin A^{(d)}$;

$\omega = x \cdot y^{\beta-1} \cdot (x \cdot y^{\beta})^p \cdot x \cdot y^r,\ 0 < r \leqslant \beta\ :\ \deg\omega \equiv l + m(r-1) \not\equiv 0 \pmod{d}$,
поскольку $0 \leqslant r - 1 < \beta$ и $\omega \notin A^{(d)}$.

Следовательно, $\mu_s \in X^{(d)}$ для всех s, и $\sharp(X^{(d)}) = \infty$.

Следствие 2. *Если X содержит элементы различных степеней, тогда алгебра $A^{(d)}$ – конечнопорождена лишь для конечного числа значений d.*

Пример 3. *Пусть $A = k\langle x, y\rangle$, $\deg x = 1$, $\deg y = 2$. Тогда*

$$X(t) = t + t^2,\ A(t) = (1 - t - t^2)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} F_s \cdot t^s,$$

где $(F_s,\ s = 0, 1, \ldots) = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ – последовательность Фибоначчи. Несложно посчитать ряд $X^{(d)}(t)$:

$$X^{(d)}(t) = \frac{F_d \cdot t^d - (-1)^d \cdot t^{2d}}{1 - F_{d-2} \cdot t^d},\ F_{-1} := 0.$$

В частности, $X^{(2)}(t) = 2t^2 + t^4 + t^6 + \cdots$, $X^{(2)} = \{y, x \cdot y^s \cdot x,\ s = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Вопрос 4. *Если A – несвободна, подалгебра $A^{(d)}$ может оказаться конечно-порождённой при всех d. Возникает задача перечисления $X^{(d)}$ в более общей ситуации. Мне представляются интересными два случая, для которых методы настоящей работы неприменимы:*

1) $A = S(X)$ – свободная коммутативная k-алгебра порождённая X.

2) $A = \Lambda(X)$ – внешняя k-алгебра порождённая X.

ЛИТЕРАТУРА

1) Кон П. *Свободные кольца и их связи* — М.:Мир, 1971

2) Лаллеман Ж. *Полугруппы и комбинаторные приложения* — М.:Мир, 1985

Д.Р.Воденин, Т.С.Балагурова. Решение прикладной задачи теории расписаний на базе современных технологий программирования

Несмотря на то, что задачи теории расписаний достаточно давно привлекают к себе внимание, полученные результаты являются достаточно скромными. Тем не менее имеется довольно много практических задач, требующих даже не оптимального, но хотя бы допустимого решения. Авторы считают что применение современных компьютерных технологий и современных компьютеров позволит создать удобную и простую в использовании систему для решения некоторого класса задач теории расписаний.

В качестве такого класса задач рассматривалась задача составления расписания спортивных игр. Предметная область такого класса задач включает в себя перечень спортивных команд, разделенных на лиги и дивизионы и спортивно-игровых площадок, каждая из которых характеризуется своим рабочим расписанием. Требуется составить расписание игр каждой лиги и дивизиона.

Для решения подобного класса задач создается программная система, работающая как приложение в MS-WINDOWS. Большое внимание уделено интерфейсу. В качестве программного средства реализации выбран язык VISUAL BASIC, так как в нем имеются простые стандартные средства для создания удобного интерфейса. Исходные данные удобно хранить в виде базы данных. Чтобы не создавать собственную СУБД в качестве таковой выбрана СУБД ACCESS 2.0 из пакета MICROSOFT OFFICE. Язык VISUAL BASIC имеет средства взаимодействия с данной СУБД.

В настоящее время имеется первая версия данной системы. Она обеспечивает

- гибкий интерфейс, ориентированный на пользователя, который поддерживает работу с базой данных, позволяет вводить, просматривать и изменять информацию с максимальными удобствами для пользователя.

- исполнение команды генерации расписания с возможностью последующего просмотра, коррекции и печати расписания.

Для генерации расписания авторами предложен эвристический алгоритм, поскольку других алгоритмов решения подобных задач не существует. В настоящее время система работает на макетных данных. Предполагается ее использование для решения реальных задач. Хотя система создается для работы под MS WINDOWS, переход к работе под WINDOWS-95 не составляет сложностей. Достаточно провести заново трансляцию в VISUAL BASIC IV, а базы данных перевести на ACCESS-7.0.

ЛИТЕРАТУРА

1) Р.В.Конвей, В.Л.Максвелл, Л.В.Миллер. *Теория расписаний*, М: Наука, 1975.

2) В.С.Танаев,В.В.Шкурба, *Введение в теорию расписаний*, М: Наука, 1975.

3) Д.Р.Воденин. *Интерактивная система для корректирования расписаний в терминах служб* - В кн. "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования". VIII Всесоюзный симпозиум, г.Нарва-Йыэсуу, М.: ЦЭМИ АН СССР, 1984.

В.К.Горбунов. Построение индикатора предпочтений потребительского спроса в условиях приближенных данных

Рассматривается задача построения индикатора отношения предпочтений $u(x)$ на рынке товаров $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по наблюдениям торговой статистики $\{p^t, x^t : t = 0, \ldots, T\}$, где $p^t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$ - цены и $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$ - объемы продажи товаров в периоды t. Статистика приближенно представляет стационарный (по предложению) спрос $x(p)$, определяемый как решение задач потребления

$$\max\{u(x) :< p, x > \leq b(p), x \geq 0\}, \tag{1}$$

где $< p, x >$ - скалярное произведение цен p на объемы x, $b(p)$ - затраты покупателей на данном рынке при ценах p. Известны оценки погрешностей наблюдаемого спроса $\delta_i^t \geq 0$:

$$|x_i^t - x_i(p^t)| \leq \delta_i^t, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{2}$$

Известно [1], что в случае идеальной статистики $x^t = x(p^t)$ критерием существования индикатора $u(x)$ является разрешимость системы линейных неравенств

$$\lambda_t < p^t, x^t > \leq \lambda_\tau < p^\tau, x^t > \quad \lambda_t > 0, \quad t, \tau = 0, \ldots, t. \tag{3}$$

В случае (2) нами предлагается понятие слабой регулярности статистики $\{p^t, x^t\}$, означающее совместность системы (3) при некоторых данных $\{p^\tau, y^t\}$, эквивалентных по точности (2) заданной статистике, т.е.

$$|y_i^t - x_i^t| \leq \delta_i^t, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{4}$$

Выяснение слабой регулярности сводится к решению задачи минимизации максимальной из невязок системы (3)

$$\psi_{t\tau}(\{y^t\}) = \lambda_t < p^t, y^t > - \lambda_\tau < p^\tau, y^t > \quad t, \tau = 0, 1, \ldots, T,$$

при условиях (4). Для решения этой задачи в случае больших T предложен метод последовательного наращивания системы (3), подобный специальному алгоритму [2], рассчитанному на идеальную статистику.

ЛИТЕРАТУРА

1) Шапанин А. А., *Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса.* // Мат. моделирование, 1993. Т.5, N9, с.3-17.

2) Веретенков С. Д., Шапанин А. А. *Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов.* М.: ВЦ АН СССР, 1991.

В.К.Горбунов, В.В.Петрищев. Численная реализация метода нормальных сплайнов для интегральных уравнений

Рассматривается задача решения системы линейных интегральных равенств

(1) $\int\limits_a^b K(s, t_i)\, x(s)\, ds = f(t_i)$,

Такие системы возникают при обработке измерений в различных естественнонаучных областях непосредственно или в результате частичной дискретизации интегрального уравнения 1-го рода. В силу недоопределенности в [1] было предложено искать нормальное решение с одной из гильбертово-соболевских норм. На основе развитой техники представления линейных функционалов-интегралов левой части (1) в каноническом виде задача решается в ряде частичных случаев без дискретизации интегралов. При этом система (1) переходит в $< h_i, x >= f(t_i), i = 1..m$, где $< .,. >$ - скалярные произведения, соответствующие выбранной норме. Элементы h_i представляются интегралами

(2) $h_i(s) = \int\limits_a^b K(\tau, t_i)\, G(\tau, s)\, d\tau$,

где $G(s, \tau)$ – функция Грина некоторой краевой задачи, определяемой выбором нормы [1].

В докладе излагаются результаты по численной реализации метода нормальных сплайнов для общего случая с нормой $\|x\| = [x^2(a) + \int\limits_a^b [x'(s)]^2\, ds]$. Дано описание эффективного алгоритма вычисления элементов h_i, скалярных произведений $< h_i, h_j >$ и построения нормального решения системы (1). При этом учитывается специфика интегралов (2). Приведены результаты модельных задач [2], подтверждающие эффективность алгоритма.

1. Горбунов В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации // ЖВМ и МФ, 1991, т.29, N2, с.212-224.

2.Верлань А.Ф. Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. - Киев: наукова думка, 1986.

М.В.Дёмина. Об устойчивости стационарных вращательных движений спутника переменного состава

В работе изучаются задачи стабилизации вращательных движений спутника на круговой и эллиптической орбитах. В частности, исследована следующая задача.

Рассмотрим симметричный спутник, движущийся по круговой орбите, и укажем условия отделения рабочей массы спутника, при которых не нарушается асимптотическая устойчивость его стационарных вращательных движений, перпендикулярных плоскости орбиты, получаемая действием моментов диссипативных сил. Предположим, что : центр масс спутика, не перемещаясь вдоль корпуса, движется по круговой орбите; сохраняются направления главных центральных осей инерции спутника Ox_1, Ox_2, Ox_3 и его симметричная структура $A(t) = B(t) \neq C(t)$; возникающие в результате отделения рабочей массы реактивные силы реактивного момента не создают, или создаваемые ими моменты являются диссипативными по угловым скоростям $\dot\theta$, $\dot\psi$; θ, ϕ, ψ - углы Эйлера, образуемые $Ox_1x_2x_3$ с орбитальной системой координат [1].

Уравнения движения спутника допускают стационарные движения, в которых спутник вращается вокруг оси Ox_3, коллинеарной нормали к плоскости орбиты,

с постоянной угловой скоростью собственного вращения $\dot{\phi}_0$.
Допустим, что диссипативные или реактивные силы создают моменты

$$M_\psi = -k_1\dot{\psi}, \quad M_\theta = -k_2\dot{\theta}, \quad k_1, k_2 - const > 0.$$

Предположим, что выполнены следующие ограничения на моменты инерции тела A, C и угловую скорость вращательного движения $\omega_3{}^\circ$

$$\alpha_1 = (3C - 4A){\omega_3}^2 + \dot{C}\omega_0{\omega_3}^\circ \geq \delta, \ \alpha_2 = (C{\omega_3}^\circ - A\omega_0)\omega_0 \geq \delta = const > 0$$

и одна из совокупностей следующих условий: $\dot{\alpha}_1(t) \leq 0$, $\dot{\alpha}_2(t) \leq 0$ или

$$2k_1 + \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_2} \geq k_0 = const > 0, \quad (2k_1 + \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1})(2k_2 + \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha_2}) - (\alpha_1 - \alpha_2)^2(2A\omega_0 - C{\omega_3}^\circ)^2 \geq k_0$$

Тогда на основании теоремы из [2] можно получить, что соответствующее стационарное движение будет равномерно асимптотически устойчивым по $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta$ и ψ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. // М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 276с.

2. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы.// ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С. 225-232.

Д.А.Жданов. Определение параметров процессов, эволюционирующих в случайных средах

Пусть на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) определен стационарный в узком смысле измеримый процесс $R(x) = R(\omega, x)$, $-\infty < x < \infty$, $\omega \in \Omega$ с $E\ R(0) = 0$ и $E\ R^2(0) < c$. Предположим, что (см.§1,ч.II,гл.4[1])

$$a = \left\{2\int_0^\infty E[R(x)R(0)]\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad (1)$$

Следует заметить, что выполнения условия (1) нетрудно добиться с помощью нормировки процесса R. Определим процесс $x^n = (x^n_t)_{t\geq 0}$ с

$$x^n_t = \sqrt{n}\int_0^t R(ng(s) + \alpha_s x^n_s)\,ds \ + \ \sigma W_t, \qquad (2)$$

где $g(s)$ - монтонная функция с $|g'(s)|^{-1} \neq 0 \ \ \forall s \geq 0$, α_s - интегрируемая функция, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ - винеровский процесс, не зависящий от R. Для таких процессов справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Для процессов x^n (2) при $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость распределений $x^n \to x$*, где $x = (x_t)_{t\geq 0}$ с

$$x_t = \int_0^t \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{|g(s)|}}\,dW_s - ER^2(0)\int_0^t \frac{\alpha_s}{g'(s)}\,ds \qquad (3)$$

Теорема 1 является частным случаем результатов, приведенных в [2], с a (1) - произвольной положительной константой. Предположим, что процессы x^n и x наблюдаемы. Тогда справедлива

Теорема 2. *Для функций $g(s)$, α_s и параметра σ (2) имеют место следующие оценки*

$$\sigma = \sqrt{[x^n, x^n]_t/t},$$

$$g'(t) = \left(d[x, x]_t - \sigma^2\right)^{-1},$$

$$\alpha_t = \frac{d(Ex_t)}{dt}\frac{g'(s)}{ER^2(0)},$$

где x^n определен в (2), x - в (3), $t > 0$.

Доказательство основано на применении мартингальных методов и использовании теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1) Сборник ИНТ: *Современные проблемы математики. Фундаментальное направление.* т.45. 1989г..

2) Жданов Д.А. *Исследование свойств процессов, эволюционирующих в случайной среде.* // Фундаментальные проблемы математики и механики. Сборник п/р Бутова А.А.. Ульяновск:УлГУ,1996.С.111-121.

Л.В.Калинин. Рекуррентные вычисления в задаче распознавания нарушений

Рассмотрим задачу распознавания нарушений на примере стохастических моделей динамических систем, представимых уравнениями:

$$x_{t+1} = \Phi x_t + \Gamma w_t\ ; \quad x_t \in R^n;\ w_t \in R^q, \qquad (1)$$

$$z_t = Hx_t + v_t\ ; \quad t = 1, 2, \ldots; \quad z_t \in R^m, \qquad (2)$$

где $\{w_t\}, \{v_t\}$ - случайные независимые белые последовательности, характеризуемые двумя первыми моментами:

$$\forall t: \quad E[w_t] = 0;\ E[v_t] = 0, \quad \forall t, s: \quad E[w_t w_s^T] = Q\delta_{ts};\ E[v_t v_s^T] = R\delta_{ts}, \qquad (3)$$

где R - положительно определенная матрица $R > 0$.

Выделим следующие причины нарушений: (1) - в собственной динамике (системная матрица Φ); (2) - в возмущающей среде и ее взаимодействии с объектом (матрица диффузии Q и матрица Γ); (3) - в структуре измерителя (матрица H); (4) - в ошибках измерительного тракта (матрица R).

Таким образом, система (1) - (3) в силу непредвиденных причин может в некоторый момент времени измениться скачком на иные, не расчетные значения параметров

$$\Phi = \Phi_i, \Gamma = \Gamma_i, Q = Q_i, H = H_i, R = R_i, \ i = 1, 2, \ldots, M. \tag{4}$$

Каждому набору таких значений поставим в соответствие гипотезу $\mathcal{H}_i, i = 1, 2, \ldots, M$. Гипотеза $\mathcal{H}_0$ соответствует работе системы без нарушений. Поставим задачу обнаружить факт нарушения, когда момент его появления известен.

Ее теоретическое решение, основанное на критерии минимума полной вероятности ошибок при различении $M+1$ гипотез, требует вычисления $M(M+1)/2$ логарифмов отношений правдоподобия вида

$$\lambda_t^{ij}(Z(t)) = ln\{p(Z(t)|\mathcal{H}_i)/p(Z(t)|\mathcal{H}_j)\}, \tag{5}$$

где i, j - все сочетания гипотез из $M+1$ по 2; $Z(t)$ - составной вектор всех измерений от момента скачка до текущего $t; p(Z(t)|\mathcal{H}_i)$ - совместная плотность вероятностей данных $Z(t) = [z(1), \ldots, z(t)]$ при условии выполнения гипотезы $\mathcal{H}_i \ (i = 0, 1, \ldots, M)$.

Теорема. Логарифм отношения правдоподобия (5) в условиях задачи (1)-(4) определяется рекурентным выражением

$$\lambda_t^{ij} = \lambda_{t-1}^{ij} + (\mu_t^i - \mu_t^j), t \geq 1,$$

$$\mu_t^i = -ln(\sqrt{2\pi}\sigma_{it}) - \frac{1}{2}(\nu_i(t)/\sigma_{it})^2.$$

с начальным условием $\lambda_0^{ij} = B$, где $B = ln[\beta/(1-\alpha)]$ - нижний порог последовательного решающего правила; α и β - заданные вероятности ошибок первого и второго рода.

Е.А.Ковалев, Л.Х.Бухареева. Об одной модели массового обслуживания с управлением потоком заявок

Рассмотрим СМО с ожиданием с одним обслуживающим устройством, обслуживание в котором случайно и экспоненциально распределено с интенсивностью обслуживания μ. Емкость очереди L бесконечна, дисциплина обслуживания - FIFO. Входящий в СМО поток заявок - пуассоновский, с интенсивностью λ. Заявка входящего потока с вероятностью b $(0 \leq b \leq 1)$ остается заявкой и встает в очередь на обслуживание, и с вероятностью $1-b$ становится управляющей командой - сигналом, который блокирует обслуживающее устройство, то есть прекращает обслуживание заявки в нем на время, экспоненциально распределенное с параметром ω. Заявки, поступающие в СМО с заблокированным обслуживающим устройством, могут либо присоединяться к очереди, либо теряться.

Состояние СМО описывается марковскм процессом $\{x(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и не более, чем счетным пространством состояний X; причем $x(t) = (n(t), v(t))$, где n - число заявок в системе в момент времени t: $v(t) = 1$, если в момент времени t обслуживающее устройство заблокировано, и

$v(t) = 0$ в противном случае. При этом пространство состояний СМО имеет вид: $X = \{(n,0), (n,1); n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Обозначим через $\{p(x), x \in X\}$ стационарное распределение процесса $x(t)$. $p(x) = p(n, v)$. Найдем стационарное распределение вероятностей состояний СМО.

Предположим, что заявки, поступающие в систему с заблокированным обслуживающим устройством, присоединяются к очереди. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если в СМО, описанной выше, выполняется условие (1):

$$\frac{\lambda b}{\mu(\lambda b + \omega)}\sqrt{(\lambda b + \omega)^2 + (\mu + \lambda(1-b))^2} < 1,$$

то стационарное распределение вероятностей состояний СМО находится по следующей формуле: $p(n) = Q^n p(0)$, где $p(n) = \begin{pmatrix} p(n,0) \\ p(n,1) \end{pmatrix}$ - вектор, компонентами которого являются искомые величины. Матрица Q имеет следующий вид: $Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda b}{\mu} & \frac{\lambda b}{\mu} \\ \frac{\lambda^2 b(1-b)}{\mu(\lambda b+\omega)} & \frac{\lambda b(\mu+\lambda)}{\mu(\lambda b+\omega)} \end{pmatrix}$, а вектор $p(0) = \begin{pmatrix} p(0,0) \\ p(0,1) \end{pmatrix}$ характеризует стационарное распределение вероятностей остояний СМО в момент, когда в СМО нет ни одной заявки, и имеет вид:

$$p(0) = \begin{pmatrix} \frac{\mu\omega - \lambda^2 b(1-b) - \lambda b\omega}{\mu(\omega+\lambda(1-b))} \\ \frac{\lambda(1-b)(\mu\omega - \lambda^2 b(1-b) - \lambda b\omega)}{(\lambda b+\omega)\mu(\omega+\lambda(1-b))} \end{pmatrix}.$$

При условии, что $(\lambda + \mu + \omega)^2 - 4\mu(\lambda b + \omega) \geq 0$, средняя длина очереди определяется выражением: $E\eta = \frac{t_1}{(1-t_1)^2}p(0,0) + \frac{t_2}{(1-t_2)^2}p(0,1)$, где $t_1 = \frac{\lambda b(\lambda+\mu+\omega+\sqrt{(\lambda+\mu+\omega)^2 - 4\mu(\lambda b+\omega)})}{2\mu(\lambda b+\omega)}$; $t_2 = \frac{\lambda b(\lambda+\mu+\omega-\sqrt{(\lambda+\mu+\omega)^2 - 4\mu(\lambda b+\omega)})}{2\mu(\lambda b+\omega)}$.

И.И.Кохановский. Нормальные сплайны в задачах восстановления двумерных зависимостей

Многие задачи обработки результатов измерений приводят к проблеме восстановления функции $\varphi(x)$ — элемента гильбертова пространства $H(R^n)$ по результатам u_i конечного набора измерений:

$$(f_i, \varphi) = u_i\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,, \tag{1}$$

здесь f_i — линейные непрерывные функционалы.

Эта проблема недоопределённая. Доопределим её, поставив задачу минимизации выпуклого функционала J

$$(J, \varphi) = \|\varphi - \varphi_0\|_H^2\,, \tag{2}$$

при условии (1). Здесь $\varphi_0 \in H$ — пробный элемент. Решение этой задачи — обобщённый сплайн Аттьи-Лорана [1]. В силу специфики функционала (2) его естественно называть нормальным сплайном [2].

В случае когда $H \equiv H_\varepsilon^s$, H_ε^s — обобщённое Соболевское пространство

$$H_\varepsilon^s(R^n) = \left\{\varphi | \varphi \in S', (\varepsilon^2 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}[\varphi] \in L_2\right\}, \varepsilon > 0, s > \frac{n}{2},$$

где S' — пространство обобщённых функций медленного роста, а $\mathcal{F}[\varphi]$ — преобразование Фурье функции φ, функционалы f_i могут быть приведены к каноническому виду (скалярному произведению) и задача (2),(1) сводится к конечномерной задаче решения системы линейных уравнений. Для такого сведения необходимо знать воспроизводящее ядро пространства H_ε^s. Это ядро в случае $s = r + \frac{n+1}{2}$, $(r = 0, 1, \ldots)$ может быть выражено через элементарные функции.

Техника нормальных сплайнов применялась для решения двумерных задач аппроксимации и вычислительной томографии. В докладе приводятся результаты вычислительных экспериментов и решения реальной задачи аппроксимации гидрогеологического поля.

Литература

1) П.-Ж.Лоран *Аппроксимация и оптимизация* — М.:Мир, 1975.

2) В.К.Горбунов *Метод нормальной сплайн-коллокации* // ЖВМ и МФ, 1989, т.29, №2, 212–224.

Г.Ю. Куликов. Об асимптотическом разложении погрешности неявных одношаговых методов решения задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные

Задача Коши с алгебраической связью имеет следующий вид:

$$x'(t) = g(x(t), y(t)), \tag{1а}$$

$$y(t) = f(x(t), y(t)), \tag{1б}$$

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \tag{1с}$$

где $t \in [0, T]$, $x(t) \in \mathbf{R}^m$, $y(t) \in \mathbf{R}^n$, $g : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^m$, $f : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$, и начальные условия (1с) заданы корректно: т.е., $y^0 = f(x^0, y^0)$. Заметим, что мы рассматриваем только автономные задачи вида (1), так как любая неавтономная задача сводится к автономной введением новой независимой переменой.

В настоящее время предложено множество методов для решения задачи (1) [1]–[6]. В этой работе мы изучаем асимптотическое разложение глобальной ошибки для неявных одношаговых методов произвольного вида. Следуя подходу, изложенному в [6], такие методы можно записать следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + \tau\Phi(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, \tau), \tag{2а}$$

$$y_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots K - 1, \tag{2б}$$

$$x_0 = x^0, \quad y_0 = y^0, \tag{2с}$$

где $K\tau = T$. При построении метода (2) мы использовали неявный одношаговый метод для решение решение обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_{k+1} = x_k + \tau\Phi(t_k, x_k, t_{k+1}, x_{k+1}, \tau), \quad k = 0, 1, \ldots K - 1. \tag{3}$$

Предположим, что система (1) удовлетворяет на некотором множестве D_1 условиям гладкости, ограниченности и включения (см. условия I–III в [6]). Дополнительно предположим, что метод (3) имеет разложение локальной погрешности вида

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) - \tilde{x}_{k+1} = \psi_{s+1}(t_k)\tau^{s+1} + \psi_{s+2}(t_k)\tau^{s+2} + \\ \cdots + \psi_{S+1}(t_k)\tau^{S+1} + O(\tau^{S+2}), \quad k = 0, 1, \ldots, K - 1, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\tilde{x}_{k+1}$ — решение задачи (3) при условии $x_k = x(t_k)$.

Обозначим через $\bar{z}_k = (\bar{x}_k, \bar{y}_k)^T$ приближенное решение задачи (1), найденное с помощью метода (2), а через $z(t_k) = (x(t_k), y(t_k))^T$ — точное решение этой задачи. (Известно, что при выполнении условий I–III задача (1) имеет единственное решение [3]). Тогда при достаточной гладкости правой части задачи (1) и функции приращения Φ метода (3) справедливо

$$\begin{aligned} x(t_k) - \bar{x}_k = \bar{\psi}_s(t_k)\tau^s + \bar{\psi}_{s+1}(t_k)\tau^{s+1} + \\ \cdots + \bar{\psi}_S(t_k)\tau^S + O(\tau^{S+1}), \end{aligned} \tag{5а}$$

$$\begin{aligned} y(t_k) - \bar{y}_k = \bar{\phi}_s(t_k)\tau^s + \bar{\phi}_{s+1}(t_k)\tau^{s+1} + \\ \cdots + \bar{\phi}_S(t_k)\tau^S + O(\tau^{S+1}), \end{aligned} \tag{5б}$$

$k = 1, 2, \ldots, K$, где $\bar{\psi}_i(t)$ и $\bar{\phi}_i(t)$, $i = s, s+1, \ldots, S$, — решения систем дифференциально-алгебраических уравнений вида

$$\bar{\psi}_i'(t) = \partial_x g(x(t), y(t))\bar{\psi}_i(t) + \partial_y g(x(t), y(t))\bar{\phi}_i(t) + \hat{\psi}_{i+1}(t), \tag{6а}$$

$$\bar{\phi}_i(t) = \partial_x f(x(t), y(t))\bar{\psi}_i(t) + \partial_y f(x(t), y(t))\bar{\phi}_i(t), \tag{6б}$$

$$\bar{\psi}_i(0) = 0, \quad \bar{\phi}_i(0) = 0, \tag{6с}$$

а $\hat{\psi}_{i+1}(t)$ — коэффициент главного члена в разложении x-компонент локальной ошибки метода (2) с функцией приращения

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, \tau) = \sum_{l=s}^{i-1}(\bar{\psi}_l(t_{k+1}) - \bar{\psi}_l(t_k))\tau^{l-1} + \\ \Phi\Big(x_k - \sum_{l=s}^{i-1}\bar{\psi}_l(t_k)\tau^l, y_k - \sum_{l=s}^{i-1}\bar{\phi}_l(t_k)\tau^l, \\ x_{k+1} - \sum_{l=s}^{i-1}\bar{\psi}_l(t_{k+1})\tau^l, y_{k+1} - \sum_{l=s}^{i-1}\bar{\phi}_l(t_{k+1})\tau^l, \tau\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Литература

1. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
2. *Куликов Г.Ю.* Об одном способе численного решения автономной задачи Коши

с алгебраической связью на фазовые переменные// Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. 1992. № 1. С. 14–19.

3. *Куликов Г.Ю.* О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные (невырожденный случай)// Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. 1993. № 3. С. 10–14.

4. *Куликов Г.Ю.* О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 4. С. 522–540.

5. *Куликов Г.Ю.* Практическая реализация и эффективность численных методов решения задачи Коши с алгебраической связью// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 11. С. 1617–1631.

6. *Куликов Г.Ю.* Теоремы сходимости для итерационных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 8. С. 73–89.

К.В.Кумунжиев, Р.А.Исмагилов, В.Е.Лунин. База знаний для контрольно-обучающих систем

Попытки создания на базе ЭВМ контрольно-обучающих систем(КОС) начались практически одновременно с появлением самих ЭВМ. Несмотря на большой объем исследований и разработок в этой области, уровень существующих систем для ПЭВМ относительно невысок. До применения доведены лишь системы обучения и контроля, основанные на фактологических и алгоритмических знаниях с жесткой структурой. Причина этого, на наш взгляд, в ограниченности модели знаний, которая используется в таких системах. Знания человека - глубоко структурированная система, "строительство" которой идет многие годы. При этом, в последнее время практически все психологи, работающие в этой области, единодушны в том, что степень структурированности системы знаний во многом определяет интеллектуальный уровень человека. В основе структуры знаний человека лежит определенный набор когнитивных схем разной степени сложности и вложенности, объединяемых большим числом связок-отношений (структурных, семантических и пр.). Предложена и отрабатывается многоуровневая база знаний для КОС. Нижний уровень базы - терминальные в рамках данной проблемной области понятия, задаваемые именем, набором атрибутов-свойств и методов (способов описания и генерации знаний). Из терминальных понятий с использованием отношений из заданного набора строятся более сложные понятия в соответствии с принятым множеством когнитивных схем. Использование когнитивных схем как основы верхнего уровня значительно облегчает процесс построения моделей предметных областей, что существенно при использовании систем подобного класса. Двухуровневая структура базы знаний позволила ограничить, структурировать и автоматизировать обучающие и контрольные операции; это обеспечивает, соответственно, гибкость и широкую сферу применения самой контрольно-обучающей системы. Реализованный в настоящее время прототип системы с базой знаний такого типа используется для отработки и проверки пригодности структуры применительно к различным областям знаний. Кроме того, на этом же прототипе предполагается уточнить необходимый набор когнитивных схем, как декларативных, так и процедурных. Работа с прототипом позволит исследовать структуру базы знаний, ответить на возникающие вопросы и определить направления дальнейшего развития базы знаний и КОС на ее основе.

Е.Н.Маслина. Сравнение способов представления максимальных префиксных кодов

Будем рассматривать максимальные префиксные коды над алфавитом Σ, $|\Sigma| = n$. В [1] предложены два способа представления максимальных префиксных кодов. Посчитаем затраты памяти, для хранения кода в каждом из этих способов. Пусть $A \in mp(\Sigma)$, $|A| = k$.

1) Представление максимального префиксного кода последовательностью длин входящих в него слов. Для кодирования длины каждого слова понадобится M ячеек памяти, где

$$M = \begin{cases} \log_n l_{max} \text{— если это целое число} \\ [\log_n l_{max}] + 1 \text{— иначе} \end{cases}$$

Здесь l_{max} обозначает максимальную из длин слов кода A. Следовательно, затраты на весь код – $k * M$.

2) Представление максимального префиксного кода „левым" обходом кодового дерева. Затраты на построение слова по дереву совпадают с количеством ребер в дереве – $p = \frac{n(k-1)}{n-1}$
Доказательство проведем индукцией по количеству листьев k.

   а) $k = n : p = n = \frac{n*(n-1)}{n-1}$

   б) Предположим, что формула верна для некоторого $k = k' : \ p = \frac{n*(k'-1)}{n-1}$

   в) Докажем, что формула верна для $k = k'_1 = k' + n - 1$ (поскольку каждый раз добавляется $n-1$ лист)

$$p(k'_1) = p(k') + n = \frac{n*(k'-1)}{n-1} + n = \frac{n*(\overbrace{k'+n-1}^{k'_1}-1)}{n-1} =$$
$$= \frac{n*(k'_1-1)}{n-1}$$

Из приведенных оценок очевидно, что более эффективным является второй способ представления.

ЛИТЕРАТУРА

1) М. Н. Жирнов, Е. Н. Маслина. *О способах представления максимальных префиксных кодов.* – В кн.: Тезисы докладов студентов и аспирантов на V ежегодной научно-практической конференции. Ульяновск: УлГУ, 1996.

Б.Ф.Мельников. Специальные подмоноиды глобального надмоноида свободного моноида

Определение 1. Если язык L обладает следующим свойством:

$$(\exists k \in \mathbb{N})\ (\forall u \in L)\ (|u| < k)\ ,$$

то он называется *ограниченным*.

Определение 2. Если язык L обладает следующим свойством:

$$(\forall \alpha \in \Sigma^{\omega})\ (\exists u \in L)\ (u \in \mathrm{pref}\,(\alpha))\ ,$$

то он называется *полным*.

Определение 3. Если язык L обладает следующим свойством:

$$\Big(\forall \alpha \in \Sigma^{\omega}\Big)\ \Big((L \cap \mathrm{pref}\,(\alpha)\ \neq\ \emptyset) \text{ или } (\alpha \in \mathrm{adh}\,(L))\Big)\ , \qquad (0.1)$$

то он называется *предполным*.

Теорема 1. Любой из 12 вариантов, получающихся при выполнении (не выполнении) каждого из следующих 4 ограничений:

- рассматриваются только ограниченные языки;
- рассматриваются только префиксные языки;
- рассматриваются только полные (предполные) языки

описывает множество элементов глобального надмоноида (множество языков), которое образует моноид с операцией конкатенации и единицей $\{\varepsilon\}$.

Теорема 2. Пусть $|\Sigma| = 1$. Тогда у глобального надмоноида имеется 2 различных собственных подмоноида – префиксный и ограниченный.

Теорема 3. Любой ограниченный предполный язык является полным.

Теорема 4. Любой префиксный полный язык над конечным алфавитом является ограниченным.

Теорема 5. Над бесконечным алфавитом существует префиксный полный язык, не являющийся ограниченным.

Таким образом, существуют следующие 10 (а в случае конечного алфавита – 9) *различных* подмоноидов глобального надмоноида свободного моноида (слово «подмоноид» здесь употреблено согласно теореме 1):

1. Собственно глобальный надмоноид.
2. Ограниченный надмоноид.
3. Префиксный надмоноид.
4. Предполный надмоноид.
5. Полный надмоноид.
6. Ограниченный префиксный надмоноид.
7. Ограниченный полный надмоноид.
8. Префиксный предполный надмоноид.
9. Префиксный полный надмоноид (он не совпадает с ограниченным префиксным полным только в случае бесконечного числа атомов исходного свободного моноида).
10. Ограниченный префиксный полный надмоноид.

В.Л.Михеев. Об универсальных теориях K-идеалов в изолях

Пусть N обозначает множество натуральных чисел, Λ - множество изолей, Λ_R - множество регрессивных изолей, K - множество почти комбинаторых общерекурсивных функций, M - множество почти монотонных общерекурсивных функций, R - множество рекурсивных отношений.

В [1] дано понятие расширения f_Λ произвольной функции из N^n в N и расширение R_Λ произвольного отношения $R \subseteq N^n$. Подмножество Γ множества Λ называется K-*идеалом*, если оно замкнуто относительно расширения f_Λ любой функции f из K и относительно взятия предшественников по отношению $\leq$ на изолях ($\leq$ определено через сумму изолей). K-идеал Γ регрессивен, если $\Gamma \subseteq \Lambda_R$. K-идеал Γ однопорожден, если он совпадает с наименьшим из K-идеалов, содержащих некоторый изоль T.

В [2] Эллентук показал, что существуют однопорожденные регрессивные K-идеалы с универсальными теориями (в сигнатуре $< K, R >$) двух типов : с такой же, как у Λ, и такой же, как у N, и поставил вопрос о том, какие еще универсальные теории могут иметь однопорожденные регрессивные K-идеалы.

В данном сообщении показано, что универсальные теории (в сигнатуре $< K, R >$) произвольных K-идеалов (не только регрессивных и не только однопорожденных) могут быть только двух названных выше типов ,т.е. полностью описаны универсальные теории K-идеалов (причем для регрессивных K-идеалов можно брать сигнатуру $< M, R >$).

Литература

1) Nerode A. *Extensions to isols* // Ann.Math.-1961-v.73-N2-p.362-403

2) Ellentuck E. *Hyper-torre isols* // J.Symb.Log-1981-v.46-p.1-5

Е.А.Михеева. О надцепях замкнутого класса k-значной логики

Цепь замкнутых классов $\tilde{F} : F_0 \supset F_1 \supset \ldots$ называется надцепью замкнутого класса U, если $U = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$.

Надцепи $\tilde{F}$ замкнутого класса U делятся на два типа: цепи, в которых каждый класс F_n содержит минимальный замкнутый надкласс класса U (регулярные надцепи), и цепи, для которых найдется n_0 такое, что класс F_n при $n \geq n_0$ не содержит никакого минимального замкнутого надкласса класса U (особые надцепи).

Надцепь $\tilde{F}$ вложима в надцепь $\tilde{G}$, если существует последовательность чисел $n_0 < n_1 < \ldots$ такая, что $F_{n_i} \subseteq G_i$ для всякого $i \geq 0$. Надцепи $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ эквивалентны, если они вложимы друг в друга. Семейство всех надцепей класса U разбивается на классы эквивалентности. При этом класс эквивалентности надцепей состоит только из регулярных надцепей или только из особых надцепей.

В двухзначной логике [1] каждый замкнутый класс, имеющий надцепи, имеет только один класс эквивалентности надцепей, состоящий из особых надцепей.

Теорема. Для каждого $k \geq 3$ в k-значной логике существует замкнутый класс, имеющий континуум классов эквивалентности регулярных надцепей.

Литература

1) Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. *Функции алгебры логики и классы Поста.* // М.: Наука. - 1966.

2) Яблонский С.В. *Функциональные построения в k-значной логике.*// Труды МИАН СССР - 1958. - т.51. - с.5 - 142.

С.П.Мищенко, В.М.Петроградский. Показатели экспоненты многообразий алгебр Ли с нильпотентным коммутантом

Определим необходимые понятия. Пусть V — многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Рассмотрим векторное пространство полилинейных элементов $P_n(V)$ относительно свободной алгебры ранга n многообразия V. Его размерность обозначим через $c_n(V)$. Последовательность чисел $(c_n(V)), n = 1, 2, \dots$ является важной характеристикой многообразия V. В работе [1] введены верхний (нижний) показатели экспоненты многообразия V:

$$HEXP(V) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad LEXP(V) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

В случае их совпадения обозначим полученное число через $BEXP(V)$. Ясно, что показатель экспоненты для многообразий полиномиального роста равен единице, а для многообразий сверхэкспоненциального роста — бесконечности. В работе [1] доказано, что не существует многообразий, для которых нижний показатель экспоненты строго меньше двух. В то же время в конце параграфа приведены примеры многообразий с показателем равным двум. Там же сформулированы нерешенные задачи, например, о целочисленности показателей экспонент.

Для изложения полученных результатов осталось ввести одно обозначение. Обозначим через N_cA многообразие, состоящее из всех алгебр с нильпотентным коммутантом ступени не выше c.

Теорема 1. *Для многообразия N_cA имеем $c_n(N_cA) \approx n^c c^{n-c-1}$, в частности, показатель экспоненты равен c.*

Теорема 2. *Пусть V является подмногообразием многообразия N_cA. Тогда показатель экспоненты является целым числом*

$$BEXP(V) \in \{0, 1, 2, \dots, c\}.$$

Доказательство теорем основано на применении теории представлений симметрической группы и использования конструкции вербального сплетения.

ЛИТЕРАТУРА

1) Мищенко С.П. *Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли*//Матем.сб.- 1996.- Т. 187, N 1.- С. 83 - 94.

А.Ф.Николаев. Задача о разладке в общем случае

На вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы:
- случайная величина $\theta \in [0, \infty)$: $P\{\theta = 0\} = \pi, P\{\theta \geq t | t > 0\} = e^{-\lambda t}$;
- винеровский процесс $W = (W_t)_{t\geq 0} : W \amalg \theta$;
- процесс x, доступный наблюдению:

$$dx_t = [a_t^1 + (a_t^2 - a_t^1) * I\{t \geq \theta\}]dt + \sigma dW_t, \ \ x_0 = 0,$$

где $a_t^i \sim F_t$ - измеримые функции, $F_t = \sigma\{x_s; s \leq t\}$.
Обозначим через T класс F - марковских моментов.
Найти марковский момент τ^*:

$$\rho(\tau^*) = inf\{\rho(\tau), \tau \in T\}, \text{ где}$$

$$\rho(\tau) = P\{\tau < \theta\} + c * E\{\tau - \theta | \tau \geq \theta\} * P\{\tau \geq \theta\}.$$

Это задача о разладке в байесовской постановке.

Выберем $0 < \alpha < 1$ и зафиксируем. Пусть $P\{\tau < \theta\} \leq \alpha$ $(*)$.
Найти $\bar\tau$:

$$E\{\bar\tau - \theta | \bar\tau \geq \theta\} \leq E\{\tau - \theta | \tau \geq \theta\} \ \forall \tau \in T, \text{ удовлетворяющих } (*).$$

Это задача о разладке в вариацонной постановке.

Оптимальный момент в байесовской постановке имеет следующий вид:

$$\tau^* = inf\{t \geq 0 : \pi_t \geq A^*\}, \text{ где}$$

$$\pi_t = P\{\theta \leq t | F_t\},$$

A^* есть решение уравнения $\psi^*(x) = -1$, где

$$\psi(x) = \int_0^x -\frac{cu}{a_2(u)} exp\{\int_u^x -\frac{a_1(v)}{a_2(v)} dv\} du,$$

$$a_1(\pi) = (\lambda + \frac{a_t^2 - a_t^1}{\sigma^2} a_t^1 \pi) * (1 - \pi), \ \ a_2(\pi) = \frac{1}{2}[\pi(1 - \pi)]^2 * [\frac{a_t^2 - a_t^1}{\sigma}]^2.$$

Оптимальный момент в вариационной постановке имеет следующий вид:

$$\bar\tau = inf\{t \geq 0 : \pi_t \geq \bar A\}, \text{ где } \bar A = 1 - \alpha.$$

А.Е.Носова. Управление процессами случайного блуждания в случайной среде

Рассматривается многомерный процесс случайного блуждания $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$, $d \geq 0$ в случайной среде $\epsilon = \{ (\lambda^1(i), \dots, \lambda^d(i))$, $(\mu^1(i), \dots, \mu^d(i)), i \in Z^d\}$, определяемый интенсивностями положительных скачков k-й компоненты λ^k и интенсивностями отрицательных скачков μ^k.

Рассматривается минимальное представление процесса, то есть наблюдаем только одну компоненту, для определенности будем считать, что это первая компонента. В настоящей работе была доказана следующая

Теорема. Минимальное представление процесса $X^{1,n} = (X_t^{1,n})_{t\geq 0}$ в случайной среде $\xi = \{(\hat{\lambda}^n(i,t))_{t\geq 0}, (\hat{\mu}^n(i,t) = \hat{\lambda}^n(i-1,t))_{t\geq 0}, i \in Z\}$ задается формулами:

$$\hat{\lambda}^n(i,t) = \sum_{\hat{i} \in Z^{d-1}} n\lambda^1(i, i^2, \ldots, i^d)\rho_t^n(\hat{i}) \tag{1}$$

$$\rho_t(\hat{i}) = P_0(X_t^2 = i^2, \ldots, X_t^k = i^k, \ldots, X_t^d = i^d | F_t^{X^1})$$

$$\rho_0^n(\hat{i}) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{d}\left(1 - \frac{|i^k|}{\epsilon\sqrt{n}}\right)}{(\epsilon\sqrt{n})^{d-1}} \quad \text{при} \quad \max|i^k| < \epsilon\sqrt{n} \tag{2}$$

$$\rho_0^n(\hat{i}) = 0 \quad \text{при} \quad \max|i^k| \geq \epsilon\sqrt{n}$$

$$\rho_t^n(\hat{i}) = \rho_0^n(\hat{i}) + \int\limits_0^t \sum_{k=2}^{d} \rho_s^n(\hat{i} - \hat{b}^k)\lambda^k(X_s^{1,n}, \hat{i} - \hat{b}^k)n\, ds \; +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{k=2}^{d} \rho_s^n(\hat{i} + \hat{b}^k)\lambda^k(X_s^{1,n}, \hat{i})n\, ds \; -$$

$$- \int\limits_0^t \sum_{k=2}^{d} \rho_s^n(\hat{i})[\lambda^k(X_s^{1,n}, \hat{i} - \hat{b}^k) + \lambda^k(X_s^{1,n}, \hat{i})]n\, ds \; +$$

$$+ \int\limits_0^t \varphi_{s-}^{A,n}(\hat{i})\, dm_s^{A,n} \; + \; \int\limits_0^t \varphi_{s-}^{B,n}(\hat{i})\, dm_s^{B,n},$$

$\hat{b}^k = (b^{k,2}, \ldots, b^{k,d})$ и $b^{k,k} = 1, b^{k,j} = 0$ при $j \neq k$

$$\begin{aligned} \varphi_{s-}^{A,n}(\hat{i}) &= \rho_{s-}^n(\hat{i})\left(\frac{\lambda^1(X_{s-}^{1,n}, \hat{i})}{\sum\limits_{\hat{k} \in Z^{d-1}} \lambda^1(X_{s-}^{1,n}, \hat{k})\rho_{s-}^n(\hat{k})} - 1\right) \\ \varphi_{s-}^{B,n}(\hat{i}) &= \rho_{s-}^n(\hat{i})\left(\frac{\lambda^1(X_{s-}^{1,n} - 1, \hat{i})}{\sum\limits_{\hat{k} \in Z^{d-1}} \lambda^1(X_{s-}^{1,n} - 1, \hat{k})\rho_{s-}^n(\hat{k})} - 1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} m_t^{A,n} &= A_t^n \; - \; \int \hat{\lambda}^n(X_s^{1,n}, s)ds \\ m_t^{B,n} &= B_t^n \; - \; \int \hat{\lambda}^n(X_s^{1,n} - 1, s)ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Результаты этой теоремы были обобщены на случай функционально зависимой от траекторий и времени случайной среды.

Получена формула для нахождения асимптотически оптимального управления в случайной среде.

С.В.Павликов. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка

Рассматривается неавтономное функционально – дифференциальное уравнение запаздывающего типа:

$$\ddot{x}(t) + p(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + b(t, x(t), \dot{x}(t))f(x(t - r(t))) = 0 \tag{1}$$
$$f(0) = 0, 0 \leq r(t) \leq h = const$$

На основе построения функционала Ляпунова и применении теорем об асимптотической устойчивости из [1] проводится исследование устойчивости нулевого решения (1). Получен следующий результат:

Пусть $x(t) = x_1(t), \dot{x}_1 = x_2$. Если функции $p(t,x_1,x_2), b(t,x_1,x_2)$, $f(x_1), r(t)$ являются ограниченными, равномерно непрерывными функциями своих аргументов, функции $p(t,x_1,x_2)$, $b(t,x_1,x_2)$, $f(x_1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ удовлетворяют условию Липшица по x_1, x_2, и выполнено:

$$f(x)x > 0(|x| > 0), \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \leq L, 0 < b_0 \leq b(t,x_1,x_2) \leq b_1,$$

$$\frac{p(t,x_1,x_2)}{b(t,x_1,x_2)} + \frac{\frac{\partial b}{\partial t}}{2b^2} \geq c_0 = const > 0, \left|\frac{\partial b}{\partial x_1}\right| \leq c_1, c_0 > hL.$$

Тогда решение $\dot{x}(t) = x(t) = 0$ уравнения (1) является равномерно асимптотически устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1) Андреев А.С. *Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений.* Филиал МГУ в г. Ульяновске. Ульяновск. 1994. 80 с.

В.М.Петроградский. Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и аналитические функции

Мы рассматриваем два различных типа роста для алгебр Ли. Обозначим

$$\ln^{(1)} n = \ln n, \quad \ln^{(s+1)} n = \ln \ln^{(s)} n, \; s > 1.$$

Пусть $f(n)$ — функция натурального аргумента и $\tau_\gamma(n)$ — функция натурального аргумента, возрастающая относительно вещественного параметра γ. Пусть число $c \in \mathbb{R}$ фиксировано. Введем обозначение

$$f(n) \sim^f \tau_c(n) \iff \inf\{\gamma \in \mathbb{R} \,|\exists N : \; f(n) \leq \tau_\gamma(n), \; n \geq N\} = c.$$

1. Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие алгебр Ли и $F(\mathcal{M})$ — его свободная алгебра счетного ранга. Обозначим через $c_n(\mathcal{M})$ размерность линейной оболочки полилинейных элементов, составленных из n различных переменных в $F(\mathcal{M})$. Следующая теорема дает более точную асимптотику, чем [1].

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{N}_{s_q} \cdots \mathcal{N}_{s_1}$, $q \geq 2$ многообразие полинильпотентных алгебр Ли. Тогда

$$c_n(\mathcal{V}) \sim^f \begin{cases} (n!)^{\frac{s_2-1}{s_1}}\beta^n, & \beta = (s_2)^{1/s_1}; \qquad q = 2; \\ \dfrac{n! \cdot \beta^n}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}}, & \beta = (s_2/s_1)^{1/s_1}; \qquad q = 3, 4 \ldots \end{cases}$$

Основным инструментом в наших рассуждениях является *функция сложности* многообразия $\mathcal{M}$, задаваемая следующим образом

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathcal{M})}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Известно, что для нетривиального многообразия она является целой функцией комплексного аргумента. Изучается рост функции сложности и связь роста с поведением коэффициентов её ряда Тейлора. Заметим, что в случае $q > 2$ функция сложности имеет бесконечный порядок.

2. Пусть A — алгебра над полем K, порожденная конечным множеством X. Пусть $\gamma_A(X,n)$ — размерность подпространства, натянутого на все мономы, составленные из элементов X, длины не более чем n. Следующая теорема дает также более точную асимптотику, чем результаты [2],[3].

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{N}_{s_q}\cdots\mathcal{N}_{s_1}$, $q \geq 2$ многообразие полинильпотентных алгебр Ли. Предположим что $L = F_k(\mathcal{V})$ его свободная алгебра ранга k, свободно порожденная множеством $X = \{x_1,\dots,x_k\}$. Тогда

$$\gamma_L(X,n) \begin{cases} \approx \frac{A}{t!}n^t, & q=2, \\ \sim^C \exp(Cn^{\frac{t}{t+1}}), & q=3, \\ \sim^B \exp\left(\frac{B^{1/t}n}{(\ln^{(q-3)} n)^{1/t}}\right), & q\geq 4; \end{cases} \quad \text{где}$$

$$t = s_2 \dim_K F_k(\mathcal{N}_{s_1}), \quad A = \frac{1}{s_2}\left(\frac{k-1}{\prod_{q=2}^{s_1} q^{\psi_k(q)}}\right)^{s_2},$$

$$B = s_2 A\zeta(t+1), \quad C = (1+1/t)(Bt)^{\frac{1}{t+1}};$$

$\psi_k(q)$ — размерность пространства элементов степени q в $F_k(\mathcal{N}_{s_1})$, и $\zeta(x)$ — дзета функция Римана. В данном случае мы используем ряд Гильберта

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{M},z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{F_k}(n)\, z^n, \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Он сходится в единичном круге. Основной момент — изучение его роста при $z \to 1$.

Отметим, что обе теоремы дают более точную асимптотику, чем [1],[2],[3]. Однако они дают только верхнюю оценку, в отличие от упомянутых результатов.

Литература

1) Петроградский В.М., *О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли*// Фунд. Прикл. Математика, **1**, (1995), 4, 989-1007.

2) Петроградский В.М., *О некоторых типах промежуточного роста в алгебрах Ли*// Успехи Матем. наук, **5**, (1993), 181-182.

3) Petrogradsky V.M., *Intermediate Growth in Lie Algebras and Their Enveloping Algebras*// J.Algebra, **179**, (1996), 459-482.

Л.Н.Полякова. Диагностирование элементов управляющих систем

Автоматизация управления технологическими процессами основана на использовании специализированных вычислительных систем. Требование высокой надежности управляющих систем делает актуальной задачу поиска дефектов с заданной глубиной и достоверностью.

Модульная организация вычислительных систем определяет требуемую глубину поиска дефектов до функционально законченного устройства и до сигналов управления. Такое требование предполагает задание объекта диагностирования (ОД) на алгоритмическом уровне, учитывающем структуру системы, функции отдельных модулей и систему команд. Математическая модель ОД представлена в виде:

$$M = \langle U, F, P \rangle,$$

где U - универсум системы, элементами которого являются входные и выходные шины объекта и множество устройств, хранящих информацию, F - множество арифметических и логических функций, заданных на элементах универсума, P - множество отношений на элементах универсума, обусловленных системой команд. На заданной модели ОД определим дефекты в виде искажения символов модели, т.е. представим множество дефектов объединением дефектов элементов универсума, функций и управления:

$$D = D_u \cup D_f \cup D_p$$

Основу процесса тестового диагностирования составляет задание входных воздействий на ОД и анализ ответных реакций. Для указания места и типа дефекта с заданной глубиной применяются тесты поиска дефектов, в которых основой метода построения является упорядочение дефектов с целью исключения маскирования дефектов по отношению доминирования. Дефект d_i доминирует над дефектом d_j $(d_i \triangleright d_j)$, если на всем множестве тестовых наборов T $R(d_i,d_j)$-реакция объекта с дефектами d_i и d_j совпадает с $R(d_i)$-реакцией объекта с дефектом d_i.

$$\forall t \in T \mid R(d_i,d_j) = R(d_i) \Rightarrow d_i \triangleright d_j.$$

Для каждого класса дефектов строится свой идентификатор - совокупность тестовых наборов, "настроенных" на обнаружение данного класса дефектов. Идентификатором $I(d_i)$ дефекта d_i называется множество тестовых наборов, на котором ответная реакция исправного ОД отличается от ответной реакции ОД с дефектами $\{d_j\}$, над которыми доминирует дефект d_i.

Чтобы множество тестовых наборов $T = \{t_1,\dots,t_n\}$ являлось идентификатором $I(d_i)$ дефекта $d_i)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий. 1.Если в ОД есть дефект d_i, он должен проявиться на идентификаторе $I(d_i)$, т.е. ответная реакция ОД должна совпадать с ожидаемой. 2. Дефект d_i должен проявиться на идентификаторе $I(d_i)$ независимо от наличия в ОД других дефектов, над которыми доминирует d_i.

$$\forall t \in I(d_i) \mid R(d_i) = R(d_i,d_j).$$

3. Никакой однократный дефект, над которым доминирует дефект d_i, не должен проявиться на идентификаторе $I(d_i)$:

$$\exists t \in I(d_i) \mid R(d_i,d_j) \neq R(d_j).$$

Тест поиска дефектов представляет собой упорядоченную в соответствии с порядком на множестве дефектов последовательность идентификаторов и позволяет достичь требуемую глубину обнаружения дефекта на различных уровнях детализации описания объекта.

А.Н.Радионов. Нестандартные методы оценивания позиции в недетерминированных антагонистических играх

Предлагаются новые оценочные функции для оценивания позиции в антагонистических недетерминированных играх. Эти функции, называемые "динамические", определяются на множестве значений "статических" функций. Статические функции определяются на множестве позиций игры, при этом не зависят от ее недетерминированных свойств. Обычно статические функции характеризуют игровую позицию в стратегическом плане. Напротив, при построении динамических функций, желательно использование знаний о характере случайностей, влияющих на развитие партии.

Рассматриваются динамические функции, представляющие собой различные "усреднения" значений статических функций. Приводятся результаты, полученные при сравнивании работы программ с алгоритмом выбора стратегии методом минимакса и с алгоритмом, использующим динамические функции.

Литература:

1. Радионов А. Н. "Некоторые критерии риска в играх с неполной информацией" в тезисах докладов на XI международной конференции по проблемам теоретической кибернетики, стр. 168. Издательство СВНЦ, 1996.

2. Радионов А. Н. "Критерии риска в программных моделях игр с нулевой суммой" в сборнике "Фундаментальные проблемы математики и механики" издательство Ульяновского Государственного Университета 1996

А.Г.Сковиков. Параметры распределения случайной последовательности невязок фильтра Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему вида:

$$x_{t+1} = \Phi x_t + \Gamma w_t + \Psi u_t\ ;\quad t = 0,1,\ldots;\quad x_t \in R^n;\ w_t \in R^q, \tag{1}$$

$$z_t = H x_t + v_t\ ;\quad t = 1,2,\ldots;\quad z_t \in R^m, \tag{2}$$

$$u_t = f_0(Z(t));\quad u_t \in R^l. \tag{3}$$

В этой модели $\{w_t\}$, $\{v_t\}$ - случайные независимые белые последовательности с нулевым средним и матрицами ковариации Q и R соответственно; Φ, Γ и т.п. - матрицы; f_0 - функция, выражающая зависимость управляющего воздействия u_t от $Z(t)$; $Z(t) = (z_1, \ldots, z_{t-1}, z_t)$ - составной вектор, составленный из значений измерений $z \in R^m$ в последовательные моменты времени $1, 2, \ldots, t$.

Известно, что оптимальный по структуре фильтр определяется уравнениями

$$\hat{x}_{t+1|t} = \Phi_0 \hat{x}_{t|t} + \Psi_0 u_t,\qquad \hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_0 \hat{\nu}_t, \tag{4}$$

$$\hat{\nu}_t = z_t - H_0 \hat{x}_{t|t-1}\ ;\quad \hat{x}_{t|t-1} \in R^n, \tag{5}$$

Параметры фильтра Φ_0, H_0, Ψ_0, K_0 оптимальны, если они минимизируют исходный функционал качества $J_* = \|x_t - \hat{x}_{t|t}\|^2$.

Параметры системы (1) - (3) в силу непредвиденных обстоятельств могут приобрести иные значения. Пусть число таких различных ситуаций конечно, равно M+1, и любая ситуация выражается гипотезой

$$\mathcal{H}_i : \{\Phi = \Phi_i, \Psi = \Psi_i, H = H_i, K = K_i, L = L_i\}, i = 0, 1, \ldots, M.$$

Представим совместную плотность распределения вероятностей обобщенного вектора измерений $Z(t)$ в виде

$$P_{Z(t)}(\eta_1, \ldots, \eta_t) = P_{z_t|Z(t-1)}(\eta_t|Y_{t-1}) P_{Z(t-1)}(\eta_1, \ldots, \eta_{t-1}) =$$
$$= P_{z_t|Z(t-1)}(\eta_t|Y_{t-1}) P_{z_{t-1}|Z(t-2)}(\eta_{t-2}|Y_{t-2}) \cdot \ldots \cdot P_{z_2|Z(1)}(\eta_2|\eta_1) P_{z_1}(\eta_1). \tag{6}$$

Пусть реально выполняется гипотеза $\mathcal{H}_i$. Следовательно фильтр Калмана, соответствующий этой гипотезе, является оптимальным.

Теорема 1. Условная плотность распределения вероятностей $P_{z_k|Z(k-1)}(\eta_k|Y_{k-1})$ является нормальной с условным средним

$$E\{z_k|Z(k-1) = Y_{k-1}\} = H_i \hat{x}_{k|k-1}$$

и ковариацией

$$\Sigma_{ik} = H_i P^i_{k|k-1} H_i^T + R_i,$$

где $P^i_{k|k-1}$ - ковариация ошибки одношагового предсказания, вычисляемая i-ым фильтром Калмана.

Теорема 2. Плотность распределения вероятностей $P_{z_1}(\eta_1)$ является нормальной со средним

$$E\{z_1\} = H_1 \hat{x}_{1|0}$$

и ковариацией

$$\Sigma_{i1} = H_i P^i_{1|0} H_i^T + R_i.$$

С.Е.Сысоев. Единственность решения задачи восстановления функции по её интегралам по семейству окружностей с центрами на фиксированной прямой

В полосе $\Omega = \{(\xi, \eta) : \xi \in \mathbb{R},\ 0 < \eta < h\}$ рассмотрим семейство дуг окружностей

$$\gamma(x, y) : \eta = \sqrt{(y + c)^2 - (\xi - x)^2} - c,\quad \xi \in (\xi_1, \xi_2),$$

с концами ξ_1, ξ_2, лежащими на прямой $\eta = 0$. Для непрерывной финитной функции $u \in C_0(\Omega)$ положим

$$(Pu)(x, y) = \int_{\gamma(x,y)} u(\xi, \eta) ds = g(x, y),$$

где ds - евклидов элемент длины кривой γ. Требуется по функции Pu, заданной в Ω, восстановить функцию u.

В [1] приведено доказательство единственности решения уравнения $Pu = g$ в классе непрерывных функций.

Оператор P по непрерывности распространяется на $L_1(\Omega)$.

Теорема. *Решение уравнения $Pu = g$ единственно в $L_1(\Omega)$.*

Доказательство теоремы опирается на существование решения сопряженной задачи, что в свою очередь следует из [2, теорема 1.1 для шкалы $C([0, h]; X_s)$, стр.79].

ЛИТЕРАТУРА.

1) Р.Курант. *Уравнения с частными производными* — М.:Мир, 1964

2) А.Л. Бухгейм, *Введение в теорию обратных задач*— Новосибирск, Наука, 1988.

Н.И.Шанченко. Об исследовании устойчивости автотранспортных средств

Под устойчивостью движения автотранспортных средств понимается их способность в процессе движения оставаться в пределах заданного коридора движения, т.е. устойчивость движения понимается в смысле так называемой технической устойчивости.

Исследование устойчивости основано на моделировании их движения с помощью ЭВМ. Такой подход позволяет осуществлять достаточно детальное моделирование конструктивных особенностей автотранспортных средств и их отдельных узлов.

Разработана математическая модель и создана компьютерная программа, позволяющие рассчитывать кинематические и динамические характеристики многозвенных автотранспортных средств как в эксплуатационном режиме, так и в режиме торможения. Имеется возможность моделировать активное управляемое движение при различных программах управления поворотом управляемых колес и величиной силы тяги.

Наибольшую опасность представляет движение последнего звена автотранспортного средства, т.к. в процессе движения оно совершает колебания около траектории движения тягача с наибольшей амплитудой и имеет место так называемый эффект "виляния". Он возникает при совершении криволинейных маневров или при воздействии возмущений различного рода.

Было изучено влияние на устойчивость движения таких факторов, как конструктивные решения узлов сцепления подкатных тележек и технического состояния сцепок. На основе анализа способа успокоения колебаний, заключающегося в принудительном изменение угла увода передних колес прицепов в зависимости от взаимной ориентации соседних звеньев показана возможность повышения устойчивости автотранспортных средств с помощью конструктивных решений, основанных на этом принципе.

Разработанная компьютерная модель позволяет оценить влияние на движение различных конструктивных решений и геометрических параметров отдельных устройств и может быть использована при нормировании эксплуатационных характеристик автотранспортных средств и их отдельных узлов.

Л.А.Штраус. О спектральном представлении вполне неунитарного оператора

Возможность представления линейного оператора в виде оператора умножения на независимую переменную в некотором пространстве аналитических функций исследовалась еще в работах А.И.Плеснера и М.Г.Крейна. К этим исследованиям примыкают работы А.В.Штрауса, касающиеся спектрального представления симметрических операторов (например,[1]), Б.С.-Надя и Ч.Фояша [2], которыми была построена функциональная модель сжатия. В работе автора [3] была получена связь с классической моделью Б.С.-Надя и Ч.Фояша. Здесь мы приведем соответствующий результат для случая произвольного вполне неунитарного замкнутого изометрического оператора T, действующего в гильбертовом пространстве H. Заметим, что аналогичный факт имеет место и для J - изометрического оператора в пространстве Крейна.

Для каждого $h \in H$ рассмотрим векторнозначную аналитическую внутри еди-

ничного круга функцию

$$h'(\zeta) = P_0(I - \zeta T_0^*)^{-1} h = P_\zeta h, \qquad |\zeta| < 1,$$

и линейное пространство $\{h'(\zeta)\}$ всех таких функций. Здесь T_0 – оператор, совпадающий с T на его области определения D_T, и равный нулю на $N = D_T^\perp$, P_ζ – оператор проектирования в H на $R_T^\perp$ параллельно $(T - \zeta I)D_T$. Значения $\Theta(\zeta)$ характеристической функции T оператора и P_ζ связаны соотношением

$$\Theta(\zeta) = \zeta P_\zeta \mid N. \tag{1}$$

Отображение $\Phi : h \to h'$ в соответствии с терминологией [1] назовем спектральным представлением оператора T. Если T является вполне неунитарным, то сумма дефектных пространств

$$\sum_{|\lambda| \neq 1} N_\lambda, \qquad N_\lambda = H - (T - \zeta I)D_T,$$

плотна в H. Поэтому для изучения Φ в случае вполне неунитарного оператора достаточно найти образ $\sum_{|\lambda|\neq 1} N_\lambda$ при спектральном представлении. Дадим описание $\Phi \sum_{|\lambda|\neq 1} N_\lambda$ в терминах функции P_ζ или $\Theta(\zeta)$ в соответствии с (1).

Теорема. Образом многообразия $\sum_{|\lambda|\neq 1} N_\lambda$ при представлении Φ является

$$\Phi \sum_{|\lambda|\neq 1} N_\lambda = \sum_{|\lambda|<1} \frac{I - P_\zeta P_\lambda^*}{1 - \zeta\lambda} N_0 + \sum_{|\lambda|<1} \zeta \frac{P_\zeta - P_\lambda}{\zeta - I} N$$

При этом оператору T отвечает оператор умножения на ζ в $h'(\zeta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1) Штраус А. В. *Спектральные представления линейных операторов.* // Функциональный анализ. — Ульяновск, 1993, вып .34, с. 80-93.

2) Секефальви – Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Мир, 1970

3) Штраус Л. А., Баринова И. В. *К теории представления регулярного оператора.* // Фундаментальные проблемы математики и механики. — Ульяновск, 1996, с. 24-32.

Фундаментальные проблемы
математики и механики

Выпуск 2

Учёные записки Ульяновского
государственного университета

Подписано в печать с оригинал-макета 7.10.96.
Формат 84x108/32. Усл. печ. л. 2,44. Тираж 1000 экз.
Заказ № 90/ 613

Подразделение оперативной полиграфии УлГУ.
432700, г.Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42, УлГУ.