



**Ученые записки**

Ульяновского  
государственного  
университета

**Серия**

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ И  
МЕХАНИКИ**

**Выпуск**

**2(7)**

**1999**

Министерство образования Российской Федерации

Ульяновский государственный университет

Ученые записки

Ульяновского государственного университета

Серия

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Выпуск 2(7)

Ульяновск 1999

Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
Ульяновского государственного университета

Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып.2(7) /Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. - Ульяновск: УлГУ. 1999. - 96 с.

В сборнике публикуются статьи преподавателей и аспирантов механико-математического факультета по фундаментальным проблемам математики и механики.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся проблемами алгебры и математической логики, математической кибернетики и теории вероятности, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела.

Л.В.Калинин

При решении проблемы контроля или при оценке элементов движения объекта, построение вычислительной схемы фильтрации Калмана возникает перед разработчиком как существенная задача. Время, выделенное для вычисления оценок, определяется интервалом между поступающими измерениями. Точность же в большей степени зависит от выбранной вычислительной схемы процесса калмановской фильтрации. Рассмотрим основные варианты ее построения, дающие численно устойчивые и экономичные алгоритмы обновления оценок по измерениям.

Запишем исходные уравнения в форме Калмана:

$$K_t = P(t|t-1)H_t^T(H_tP(t|t-1)H_t^T + R_t)^{-1}, \quad (1)$$

$$P_t = P(t|t-1) - K_tH_tP(t|t-1), \quad (2)$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K_t(z_t - H_t\hat{x}(t|t-1)), \quad (3)$$

с общепринятыми обозначениями величин. Ковариационную матрицу  $R_t$  измерений  $z_t$  ниже считаем диагональной:  $R_t = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$ . Если в начале работы это не так, то в предварительном нормировании измерений приводим  $R_t$  к виду  $R_t = I_m$ , где  $I_m$  - единичная матрица размера  $(m \times m)$ .

В этом предположении, следуя возможности произвольного расщепления системы наблюдений (вектора  $z_t$ ) на априорную и текущую части, вместо (1) - (3) имеем следующий алгоритм.

1) Начальное присваивание:  $\bar{P} := P(t|t-1)$ ;  $\bar{x} := \hat{x}(t|t-1)$ .

2)  $m$ -кратное повторение процедуры "скалярного" обновления:

$$\alpha := h^T \bar{P} h + r; \quad K := \bar{P} h / \alpha; \quad \bar{P} := \bar{P} - K h^T \bar{P}, \quad (4)$$

$$\bar{x} := \bar{x} + K(z - h^T \bar{x}), \quad (5)$$

с экстраполяцией между повторениями  $\bar{P} := \bar{P}$ ;  $\bar{x} := \bar{x}$ .

3) Завершающее присваивание:  $P_t := \bar{P}$ ;  $\hat{x}(t|t) := \bar{x}$ .

Таким образом, предметом задачи являются уравнения (4), (5) алгоритма, в котором:  $h$  -  $i$ -ый столбец матрицы  $H_t^T$ ;  $r = r_i$ ;  $z$  -  $i$ -ый элемент вектора  $z_t (i = 1, 2, \dots, m)$ .

### Алгоритм Поттера

Вместо матриц  $\bar{P}$  и  $\bar{P}$ , по своей природе положительно определенных, оперируют с их квадратными корнями  $\bar{S}$  и  $\hat{S}$ , отвечающими равенствам  $\bar{S}\bar{S}^T = \bar{P}$ ,  $\hat{S}\hat{S}^T = \bar{P}$ . С этими обозначениями перепишем последнее уравнение (4) в виде

$$\hat{S}\hat{S}^T := \bar{S}(I_n - ff^T/\alpha)\bar{S}^T, \quad f = \bar{S}^T h,$$

где  $n$  - размерность векторов  $\hat{x}$  и  $\bar{x}$ , и потребуется так выбрать число  $\beta$ , чтобы обеспечить тождественность:

$$I_n - ff^T/\alpha = (I_n - \beta ff^T)(I_n - \beta ff^T).$$

Из получившегося отсюда квадратного уравнения, с учетом  $\alpha = f^T f + r$ , выбираем одно решение

$$\beta = \frac{1/\alpha}{1 + \sqrt{r/\alpha}},$$

защищенное от операции вычитания положительной величины  $\sqrt{r/\alpha}$  в знаменателе. В итоге вместо (4) получаем следующую последовательность вычислений:

$$f := \bar{S}^T h; \quad \alpha := f^T f + r; \quad \gamma := \frac{1}{1 + \sqrt{r/\alpha}};$$

$$K := \bar{S} f / \alpha; \quad \hat{S} := \bar{S} - \gamma K f^T. \quad (6)$$

Теперь вычисление  $\hat{S}$  равносильно счету с двойной плотностью  $\bar{P}$  в алгоритме (4). Кроме этого устранена опасность утраты матрицей  $\bar{P}$  свойства положительной определенности, что вело бы к расходимости оценок  $\hat{x}$ . Недостатками являются: наличие операций извлечения квадратного корня и потеря специального (например, треугольного) вида матрицы  $\bar{S}$  в общем случае. Восстановление такого вида, нужное при "межповторной" экстраполяции  $\hat{S} := \hat{S}$ , потребовало бы при этом дополнительно алгоритма триангуляризации матриц  $\hat{S}$  (алгоритма Хаусхолдера или модифицированного алгоритма Грама-Шмидта).

### LD-алгоритм Вирмана

Переформируем алгоритм для нижнетреугольных факторов.

**Теорема.** (Вирман, 1975). После в калмановской процедуре скалярного обновления (4), (5) используются разложения:  $\bar{P} = \bar{L}\bar{D}\bar{L}^T$ ,  $\bar{P} = \bar{L}\bar{D}\bar{L}^T$ , где  $L$  - нижнетреугольные с единичной диагональю матрицы,  $D$  - диагональные матрицы. Тогда данная процедура эквивалентна следующему алгоритму.

Положить:

$$f = \bar{L}^T h; \quad a = \bar{D} f; \quad \alpha' = r; \quad K = (0, \dots, 0 | a_n)^T.$$

Вычислить:

$$\alpha := \alpha' + c_n f_n; \quad (7)$$

$$\gamma := 1/\alpha; \quad (8)$$

$$d_n := d_n \alpha' \gamma;$$

$$\alpha' := \alpha.$$

Если  $n = 1$ , то переход на (\*).

Для  $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$  выполнять:

(начало)

$$\lambda := -f_j \gamma;$$

$$\bar{l}_j := \bar{l}_j + \lambda K; \quad (9)$$

$$K := K + \bar{l}_j a_j; \quad (10)$$

$$\alpha := \alpha' + a_j f_j;$$

$$\gamma := 1/\alpha;$$

$$d_j := d_j \alpha' \gamma;$$

$$\alpha' := \alpha.$$

(конец)

$$(*) \quad \nu := \gamma(z - h^T \hat{x});$$

$$\hat{x} := \hat{x} + K \nu;$$

**Замечание.** Поэлементная запись двух пунктов (9) и (10) алгоритма с их совмещением в одном цикле выглядит следующим образом:

Положить:

$$K_j = a_j.$$

Для  $i = j + 1, j + 2, \dots, n$  выполнять:

$$\tilde{l}_{ij} := \bar{l}_{ij} + \lambda K_j;$$

$$K_i := K_i + \tilde{l}_{ij} a_j.$$

Здесь  $K_j, K_i$  -  $j$ -ый и  $i$ -ый элементы вектора  $K$ .

УДК 519.622

## О НЕЯВНЫХ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>10</sup>

Г.Ю. Куликов

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad (1)$$

с достаточно гладкой функцией  $g: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Для численного решения задачи (1) применим  $l$ -стадийный метод Рунге-Кутты (Р.К.) порядка  $s$  с переменным шагом интегрирования

$$t_{ki} = t_k + \tau_k c_i, \quad (2a)$$

$$x_{ki} = x_k + \tau_k \sum_{j=1}^l a_{ij} g(t_{kj}, x_{kj}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (2б)$$

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \sum_{i=1}^l b_i g(t_{ki}, x_{ki}), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (2в)$$

где  $x_0 = x^0$ ,  $t_K = t_0 + T$ , а  $a_{ij}$ ,  $b_i$  и  $c_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, l$ , — коэффициенты Р.К.-метода.

Известно, что глобальная ошибка метода (2) имеет следующее асимптотическое представление:

$$x(t_{k+1}) - x_{k+1} = \phi_s(t_{k+1}) \tau_k^s + \phi_{s+1}(t_{k+1}) \tau_k^{s+1} + \dots + \phi_S(t_{k+1}) \tau_k^S + O(\tau_k^{S+1}), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (3)$$

где  $\phi_i(t)$ ,  $i = s, s+1, \dots, S$ , являются решениями задач Коши вида

$$\phi_i'(t) = \partial_x g(t, x(t)) \phi_i(t) + \psi_{i+1}(t), \quad \phi_i(t_0) = 0,$$

в которых  $\psi_{i+1}(t)$  означает коэффициент главного члена локальной ошибки некоторого одношагового метода [1], [3].

<sup>10</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Министерства общего и профессионального образования России (научная программа "Университеты России — фундаментальные исследования", проект № 230) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00006)

Асимптотическое разложение (3) является основным для экстраполяционного процесса [1]. Предположим, что мы находимся в  $k$ -ой точке сетки и должны найти численное решение в следующей точке  $t_{k+1}$  с базовым шагом  $\tau_k$ . Возьмем монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел  $n_1 < n_2 < \dots < n_q$  и построим монотонно убывающую последовательность шагов  $\tau_k^1 > \tau_k^2 > \dots > \tau_k^q$ , где  $\tau_k^i = \tau_k/n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Проинтегрировав теперь исходную задачу (1) на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  методом (2)  $q$  раз с шагом  $\tau_k^1$ ,  $\tau_k^2$  и т.д., получим  $q$  приближенных решений  $x_{k+1}^1, x_{k+1}^2, \dots, x_{k+1}^q$  в точке  $t_{k+1}$ , которые в дальнейшем будем обозначать соответственно  $T_{1,1}, T_{2,1}, \dots, T_{q,1}$ . Для этих приближенных решений справедливы разложения

$$x(t_{k+1}) - T_{i,1} = \phi_s(t_{k+1})(\tau_k^i)^s + \phi_{s+1}(t_{k+1})(\tau_k^i)^{s+1} + \dots + \phi_S(t_{k+1})(\tau_k^i)^S + O((\tau_k^i)^{S+1}), \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (4)$$

Отбрасывая в (4) члены порядка  $O((\tau_k^i)^{S+1})$ , получаем  $n$  систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n_1^s} & \dots & -\frac{1}{n_1^S} \\ 1 & -\frac{1}{n_2^s} & \dots & -\frac{1}{n_2^S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\frac{1}{n_q^s} & \dots & -\frac{1}{n_q^S} \end{pmatrix} Y(j) = \begin{pmatrix} T_{1,1}^j \\ T_{2,1}^j \\ \vdots \\ T_{q,1}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

относительно вектора неизвестных

$$Y(j) = (\bar{x}(t_{k+1})^j, (\phi_s(t_{k+1})\tau_k^s)^j, \dots, (\phi_S(t_{k+1})\tau_k^S)^j)^T,$$

где верхний индекс  $j$  означает  $j$ -ую компоненту соответствующего вектора. Решив (5)  $n$  раз, находим приближенное решение задачи (1)  $\bar{x}(t_{k+1})$  с точностью  $O((\tau_k^S)^{S+1})$  (см. теорему 9.1 в [1]).

Итак, мы построили экстраполяционные методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений на базе асимптотического разложения глобальной ошибки (3). Однако изложенные выше результаты непосредственно применимы только если в качестве базового используется явный одношаговый метод. В случае неявного метода мы не можем вычислить точно приближенное решение, даваемое этим методом, за исключением линейного случая, и вынуждены ограничиться некоторым итерационным приближением. Но тогда прогрессивность итерационного метода может существенным образом

влиять на разложение (3), делая экстраполяционный процесс невозможным. С другой стороны, известно, что неявные методы значительно устойчивее явных [2]. По этой причине мы переходим к обоснованию неявных экстраполяционных методов.

Обозначим через  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1}(N)$  значение приближенного решения задачи (2) в точке  $t_{k+1}$ , полученное после  $N$  итераций некоторого итерационного процесса. Дополнительно введем вектор

$$X_{k+1} = ((x_{k1})^T, \dots, (x_{kl})^T, (x_{k+1})^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}$$

и определим отображение

$$\bar{G}_k^T: D \subset \mathbf{R}^{n(l+1)} \rightarrow \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

следующим образом:

$$\bar{G}_k^T X_{k+1} = \left( (\bar{x}_k + \tau_k \sum_{j=1}^l a_{1j} g(t_{kj}, x_{kj}))^T, \dots, (\bar{x}_k + \tau_k \sum_{j=1}^l a_{lj} g(t_{kj}, x_{kj}))^T, (\bar{x}_k + \tau_k \sum_{j=1}^l b_j g(t_{kj}, x_{kj}))^T \right)^T,$$

где  $t_{kj}$  вычисляются по формуле (2а).

Теперь, применяя для решения задачи (2) метод простых итераций, полный и модифицированный методы Ньютона и принимая во внимание, что задача (1) является частным случаем задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений, получаем соответственно три класса комбинированных численных методов [4].

*Метод Рунге-Кутты-простых итераций (Р.К.п.и.) с тривиальным предиктором:*

$$X_{k+1}^i = \bar{G}_k^T X_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6a)$$

$$X_{k+1}^0 = (\bar{H}_{l-1}(t_{k1})^T, \dots, \bar{H}_{l-1}(t_{kl})^T, \bar{H}_{l-1}(t_{k+1})^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad (6b)$$

$$t_{kj} = t_k + \tau_k c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad k = l-1, l, \dots, K-1, \quad (6c)$$

$$\bar{X}_k = X_k = ((x_k)^T, \dots, (x_k)^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad (6d)$$

где  $\bar{H}_{l-1}(t)$  — интерполяционный многочлен Ньютона степени  $l-1$ , построенный по последним  $l$  точкам  $\bar{x}_j$ ,  $j = k, k-1, \dots, k-l+1$ . Мы считаем, что стартовые значения  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, l-1$ , известны. Например, их нетрудно вычислить Р.К.п.и.-методом с тривиальным

предиктором, т.е. взяв в качестве начального приближения вектор  $X_{k+1}^0 = ((\bar{x}_k)^T, \dots, (\bar{x}_k)^T)^T$ .

*Метод Рунге-Кутты-Ньютона (Р.К.Н.) с нетривиальным предиктором:*

$$X_{k+1}^i = X_{k+1}^{i-1} - \partial \bar{F}_k^T (X_{k+1}^{i-1})^{-1} \bar{F}_k^T X_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7a)$$

$$X_{k+1}^0 = (\bar{H}_{l-1}(t_{k1})^T, \dots, \bar{H}_{l-1}(t_{kl})^T, \bar{H}_{l-1}(t_{k+l})^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad (7b)$$

$$t_{kj} = t_k + \tau_k c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad k = l-1, l, \dots, K-1, \quad (7c)$$

$$\bar{X}_k = X_k = ((x_k)^T, \dots, (x_k)^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad (7d)$$

где  $\bar{F}_k^T = E_{n(l+1)} - \bar{G}_k^T$  и  $\partial \bar{F}_k^T (X_{k+1}^{i-1})$  — якобиан отображения  $\bar{F}_k^T$ , вычисленный в точке  $X_{k+1}^{i-1}$ . Здесь и далее  $E_{n(l+1)}$  обозначает единичную матрицу размера  $n(l+1)$ .

*Метод Рунге-Кутты-модифицированный Ньютона (Р.К.м.Н.) с нетривиальным предиктором:*

$$X_{k+1}^i = X_{k+1}^{i-1} - \partial \bar{F}_k^T (X_{k+1}^0)^{-1} \bar{F}_k^T X_{k+1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8a)$$

$$X_{k+1}^0 = (\bar{H}_{l-1}(t_{k1})^T, \dots, \bar{H}_{l-1}(t_{kl})^T, \bar{H}_{l-1}(t_{k+l})^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad (8b)$$

$$t_{kj} = t_k + \tau_k c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad k = l-1, l, \dots, K-1, \quad (8c)$$

$$\bar{X}_k = X_k = ((x_k)^T, \dots, (x_k)^T)^T \in \mathbf{R}^{n(l+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, l-1. \quad (8d)$$

Ниже относительно стартовых значений будем предполагать, что они являются некоторым приближением к точному решению задачи (1), т.е.  $\|x(t_j) - x_j\| = O(\tau^r)$ ,  $j = 0, 1, \dots, l-1$ , и  $r \geq 1$ . Одновременно в силу очевидного неравенства

$$\|\bar{x}_j - x_j\| \leq \|\bar{x}_j - x(t_j)\| + \|x(t_j) - x_j\|$$

стартовые значения будут приближением порядка  $O(\tau^{\min(r,s)})$  для решения задачи (2) в первых  $l$  точках сетки, где  $s$  порядок Р.К.-метода, положенного в основу задачи (2). Действительно, как мы уже указывали выше, стартовые значения нетрудно вычислить методами (6)–(8), но с тривиальным предиктором. Нам нужно только выполнить достаточное число итераций, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений (см. [4] с учетом замечаний статьи [5]).

Итак, при построении неявных экстраполяционных методов наша задача заключается в изучении влияния ошибки итерационного

метода на разложение (3), т.е. фактически нас интересуют разложения глобальной ошибки методов (6)–(8).

В силу того, что (6)–(8) по сути являются комбинированными методами, то их глобальная ошибка распадается на две части

$$x(t_{k+1}) - \bar{x}_{k+1} = x(t_{k+1}) - x_{k+1} + x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}. \quad (9)$$

Для первой разности в правой части формулы (9) очевидно справедливо разложение (3). Вторая разность представляет собой ошибку соответствующего итерационного метода. Тогда для того чтобы мы смогли осуществить процесс экстраполяции, т.е. исключить некоторое число первых членов из разложения (3), нам достаточно потребовать, чтобы ошибка итерационного метода не влияла на исключаемые члены разложения глобальной ошибки. Например, если мы хотим исключить все члены разложения (3) до порядка  $S$  включительно, то для ошибки итерационного метода достаточно потребовать

$$x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} = O(\tau_k^{S+1}). \quad (10)$$

Таким образом, нам осталось выяснить при каком числе итераций мы сможем обеспечить выполнение условия (10) для методов (6)–(8).

Подобный результат легко получить из лемм 2–4 в [4] с учетом локального характера требуемых оценок и замечаний статьи [5]. Так, достаточное число итераций для Р.К.п.и.-метода должно удовлетворять неравенству

$$N \geq S + 1 - \zeta, \quad (11)$$

где  $\zeta = \min\{l, r, s, \nu\}$  и  $\nu$  означает стадийный порядок Р.К.-метода (2). Аналогично получаем оценку необходимого числа итераций для Р.К.Н.-метода

$$N \geq \log_{\beta_2} \left( \frac{S+1}{\zeta+1} \right) \quad (12)$$

и Р.К.м.Н.-метода

$$N \geq \frac{S+1}{\zeta+1} - 1. \quad (13)$$

Здесь  $\zeta$  имеет тот же самый смысл, что и в формуле (11).

## Литература

- [1] Хайер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
- [2] Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [3] Kulikov G. Yu. Revision of the theory of symmetric one-step methods for ordinary differential equations// Korean J. Comput. & Appl. Math. 1998. V. 5. № 3. P. 579-600.
- [4] Куликов Г.Ю. Численное решение задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений с помощью неявных методов Рунге-Кутты с нетривиальным предиктором// Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1998. Т. 38. № 1. С. 68-84.
- [5] Куликов Г.Ю. Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 8. С. 73-89.

УДК 519.622

## О МНОГОШАГОВОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>11</sup>

Г.Ю. Куликов, С.К. Шиндин

В настоящее время экстраполяционные методы являются, вероятно, наиболее эффективными для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Они позволяют автоматически выбирать наилучшие шаг интегрирования и порядок метода во время решения задачи, сохраняя при этом необходимую точность вычислений. Кроме того, экстраполяционные методы достаточно экономичны. Вычислительные затраты при их использовании эквивалентны затратам на реализацию диагонально неявных методов Рунге-Кутты [1]-[8].

Однако существующая теория экстраполяционных методов имеет два серьезных недостатка. Во-первых, она базируется на асимптотическом разложении глобальной ошибки одношаговых методов, и, следовательно, не может быть использована в классе многошаговых формул. Во-вторых, повышение порядка базового одношагового метода и уточнение численного решения происходит за счет повторных интегрирований исходной задачи базовым методом, но каждый раз с более мелким шагом. В результате, полученная таким образом дополнительная информация позволяет найти некоторое количество первых членов в разложении глобальной ошибки базового одношагового метода, а затем использовать эти члены для уточнения численного решения, повышая тем самым порядок базового метода. К сожалению, подобные пересчеты решения для неявных методов могут стоить достаточно дорого.

В статье разработан общий подход для построения экстраполяционного процесса в классе многошаговых методов. Новый способ повышения порядка базового многошагового метода основан на коррекции численного решения с помощью ошибки метода, найденной с высокой точностью. При этом в отличие от ранее построенной

<sup>11</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Министерства общего и профессионального образования России (научная программа "Университеты России — фундаментальные исследования", проект № 230) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00006).



теории здесь уже не требуется повторных интегрирований с более мелким шагом, что существенно экономит машинное время. Другим достоинством многошаговых экстраполяционных методов является преодоление первого барьера Далквиста, который накладывает серьезное ограничение на порядок устойчивых многошаговых методов (см. теорему 3.5 в [7, с. 351] или [9]). Наша методика, например, позволяет повысить точность формул дифференцирования назад до 10-го порядка включительно, сохраняя при этом их устойчивость.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad (1)$$

с достаточно гладкой функцией  $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Предположим, что задача (1) имеет единственное решение и применим для его нахождения устойчивый  $l$ -шаговый метод порядка  $s$

$$\sum_{i=0}^l a_i(k)x_{k+1-i} = \tau_k \sum_{i=0}^l b_i(k)g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}), \quad k = l-1, l, \dots, K-1, \quad (2)$$

где коэффициенты метода  $a_i(k)$ ,  $b_i(k)$  и шаг интегрирования  $\tau_k$  могут изменяться в процессе численного интегрирования. Далее будем считать, что стартовые значения  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ , заданы, а коэффициенты  $a_i(k)$ ,  $b_i(k)$  и отношения шагов  $\tau_{k-1}/\tau_k$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , ограничены.

Введем функцию

$$L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) = \sum_{i=0}^l (a_i(k)x(t_{k+1-i}) - \tau_k b_i(k)g(t_{k+1-i}, x(t_{k+1-i}))), \quad (3)$$

которая называется *невязкой многошагового метода (2)*. Разлагая правую часть формулы (3) в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_{k+1}$ , получаем с учетом порядка метода (2) и гладкости решения задачи (1), следующее представление для невязки многошагового метода:

$$L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) = \sum_{r=s}^S \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} x^{(r+1)}(t_{k+1}) \times \sum_{i=1}^l (a_i(k) \sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j} + (r+1)\tau_k b_i(k)) \left( \sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j} \right)^r + O(\tau^{S+2}), \quad (4)$$

где натуральное число  $S \geq s$ , а  $\tau$  — диаметр разбиения отрезка  $[t_0, t_0 + T]$ . Теперь, вычитая (2) из (3) и отбрасывая члены более высокого порядка, приходим к формуле для вычисления ошибки метода

(2) с точностью  $O(\tau^{2s-1})$

$$\Delta x_{k+1} \cong (a_0(k)E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} \times \left( \sum_{i=1}^l (\tau_k b_i(k)\partial_x g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}) - a_i(k)E_n) \Delta x_{k+1-i} + L(t_{k+1}, x(t), \tau_k) \right), \quad (5)$$

$k = l-1, l, \dots, K-1$ , где  $E_n$  — единичная матрица размера  $n$ , а  $\Delta x_{k+1-i}$  — ошибка метода (2) в точке  $t_{k+1-i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ , т.е.  $\Delta x_{k+1-i} = x(t_{k+1-i}) - x_{k+1-i}$ .

Пусть  $\Delta \tilde{x}_{k+1}$  обозначает локальную ошибку метода (2) в точке  $t_{k+1}$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , а  $\Delta_q \tilde{x}_{k+1}$  — сумму первых  $q$  членов разложения этой ошибки в ряд Тейлора. Дополнительно положим, что  $\Delta_0 \tilde{x}_{k+1} \equiv 0$ . В результате при достаточной гладкости правой части задачи (1) для любого целого  $q \geq 0$  справедливо

$$\Delta \tilde{x}_{k+1} = \Delta_q \tilde{x}_{k+1} + O(\tau^{s+q+1}), \quad k = l-1, l, \dots, K-1.$$

Обозначим  $r+1$ -ую производную численного решения в точке  $t_{k+1}$  через  $x_{k+1}^{(r+1)}$  и предположим, что

$$x^{(r+1)}(t_{k+1}) = x_{k+1}^{(r+1)} + O(\tau^{s-r+1}), \quad r = s, s+1, \dots, S. \quad (6)$$

Тогда следствием (4) и (5) будут теоремы об оценке локальной и глобальной ошибок метода (2).

**Теорема 1.** Пусть правая часть задачи (1)  $2S+1$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности решения, а порядок устойчивого  $l$ -шагового метода (2)  $s \leq S$  и его коэффициенты  $a_i(k)$ ,  $b_i(k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , ограничены. Тогда, если стартовые значения  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ , заданы с точностью  $O(\tau^{s+1})$ , а погрешность стартовых значений  $\Delta x_i = x(t_i) - x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ , известна с точностью  $O(\tau^{S+2})$ , то для всех сеток с достаточно малым диаметром  $\tau$  и ограниченными отношениями шагов  $\tau_{k-1}/\tau_k$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , итерационный процесс

$$\tilde{x}_{k+1}^{q-1} = x_{k+1} + \Delta_{q-1} \tilde{x}_{k+1}, \quad (7a)$$

$$\Delta_q \tilde{x}_{k+1} = (a_0(k)E_n - \tau_k b_0(k)\partial_x g(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}^{q-1}))^{-1} \times \sum_{r=s}^{s+q-1} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} (\tilde{x}_{k+1}^{q-1})^{(r+1)} \sum_{i=1}^l (a_i(k) \sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j} + (r+1)\tau_k b_i(k)) \left( \sum_{j=0}^{i-1} \tau_{k-j} \right)^r, \quad q = 1, 2, \dots, S-s+1, \quad (7b)$$

дает локальную ошибку метода (2) в точке  $t_{k+1}$  с точностью  $O(\tau^{S+2})$ , если численное интегрирование проводится с уточнением приближенного решения, т.е.

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} + \Delta_{S-s+1} \tilde{x}_{k+1}, \quad k = l-1, l, \dots, K-1. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что в итерационном процессе (7) условие (6) можно обеспечить, если необходимые производные вычислять с помощью интерполяционного многочлена достаточно высокой степени, построенного по уточненным значениям приближенного решения (7а) и (8).

**Теорема 2.** Пусть правая часть задачи (1)  $2S+1$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности решения, где  $s \leq S \leq 2s-3$ , а порядок устойчивого  $l$ -шагового метода (2)  $s \geq 3$  и его коэффициенты  $a_i(k)$ ,  $b_i(k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , ограничены. Тогда, если стартовые значения  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ , заданы с точностью  $O(\tau^{s+1})$ , а погрешность стартовых значений  $\Delta x_i = \tau(t_i) - x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ , известна с точностью  $O(\tau^{S+2})$ , то для всех сеток с достаточно малым диаметром  $\tau$  и ограниченными отношениями шагов  $\tau_{k-1}/\tau_k$ ,  $k = l-1, l, \dots, K-1$ , формула

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1} \cong & (a_0(k)E_n - \tau_k b_0(k) \partial_x g(t_{k+1}, x_{k+1}))^{-1} \times \\ & \times \left( \sum_{i=1}^l (\tau_k b_i(k) \partial_x g(t_{k+1-i}, x_{k+1-i}) - a_i(k)E_n) \Delta x_{k+1-i} \right) + \\ & + \Delta_{S-s+1} \tilde{x}_{k+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

дает ошибку метода (2) в точке  $t_{k+1}$  с точностью  $O(\tau^{S+1})$ , если в итерационном процессе (7) для вычисления локальной ошибки  $\Delta_{S-s+1} \tilde{x}_{k+1}$  использовать уточненное приближенное решение

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} + \Delta x_{k+1}, \quad k = l-1, l, \dots, K-1. \quad (10)$$

Итак, если правая часть задачи (1) обладает достаточной гладкостью, то формулы (9), (10) позволяют найти глобальную ошибку устойчивого многошагового метода (2) и приближенное решение с точностью  $O(\tau^{2s-2})$ . Отсюда, например, следует, что так как неявные формулы дифференцирования назад устойчивы до 6-го порядка включительно (см. теорему 3.4 в [7, с. 348]), то теорема 2 дает способ построения устойчивых многошаговых методов на базе неявных формул дифференцирования назад до 10-го порядка включительно.

Более того, из теоремы 2 и теоремы 3.5 в [7, с. 351] следует, что порядок устойчивых  $l$ -шаговых экстраполяционных методов не превышает  $2l+2$  при четных  $l$  и  $2l$  при нечетных. Таким образом, наша методика позволяет значительно ослабить первый барьер Далквиста.

Последняя проблема, которую необходимо затронуть касается неявных многошаговых методов. С одной стороны, для таких методов стоимость экстраполяционного процесса особенно невелика, так как и нахождение решения дискретной задачи (2), и вычисление локальной и глобальной ошибок по формулам (7)–(10) сводится в каждой точке сетки к решению линейных систем с одной и той же матрицей коэффициентов. Но с другой стороны, при использовании итерационного метода для решения задачи (2) мы можем нарушить асимптотику формул (4), (5) за счет внесения дополнительной погрешности. Естественно, в этом случае теоремы 1 и 2 применять нельзя. Таким образом, нам необходимо добиться, чтобы ошибка итерационного метода была согласована с точностью формул (4) и (5).

В [10] для решения систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений предложены три класса комбинированных численных методов с тривиальным и нетривиальным предиктором. Такие методы построены на основе неявных устойчивых многошаговых формул с привлечением наиболее известных итерационных процессов, а именно: метода простых итераций, полного и модифицированного методов Ньютона. В качестве нетривиального предиктора использовался интерполяционный многочлен Ньютона степени  $l-1$ . Тогда в силу формул (83), (85) и (87) из [10] и замечаний статьи [11] следующие неравенства дают оценки достаточного числа итераций  $N$  в каждой точке сетки, гарантирующего справедливость теорем 1 и 2 для приближенных решений задачи (2):

$$N \geq S - \zeta + 2 \quad \text{— для метода простых итераций,} \quad (11a)$$

$$N \geq \log_2 \left( \frac{S+3}{\zeta+1} \right) \quad \text{— для метода Ньютона,} \quad (11b)$$

$$N \geq \frac{S - \zeta + 2}{\zeta + 1} \quad \text{— для модифицированного метода Ньютона,} \quad (11c)$$

где  $\zeta = \min\{l, S\}$ .

В заключение проиллюстрируем вышесказанное на одном примере. В качестве тестовой задачи возьмем

$$x_1'(t) = 2t \cdot x_2(t)^{\frac{1}{2}} x_4(t), \quad (12a)$$

$$x_2'(t) = 10t \cdot \exp(5(x_3(t) - 1)) \cdot x_4(t), \quad (12б)$$

$$x_3'(t) = 2t \cdot x_4(t), \quad (12с)$$

$$x_4'(t) = -2t \cdot \ln(x_1(t)), \quad (12г)$$

с начальными условиями  $x_i(0) = 1, i = 1, 2, 3, 4$ . Задача (12) имеет точное решение (см. [7, с. 146])

$$x_1(t) = \exp(\sin(t^2)), \quad x_2(t) = \exp(5 \sin(t^2)), \quad (13a)$$

$$x_3(t) = \sin(t^2) + 1, \quad x_4(t) = \cos(t^2). \quad (13б)$$

Таким образом, если мы применим в качестве базового многошагового метода, например, формулу дифференцирования назад 5-го порядка и построим экстраполяционный процесс (7)–(10), то, используя формулы для точного решения (13), мы сможем понаблюдать как изменяется порядок экстраполяционного метода в зависимости от числа экстраполяций  $q = S - s + 1$ , т.е. в зависимости от того на сколько порядков мы повышаем точность базового многошагового метода. Кроме того, без учета ошибок округления формулы (13) позволяют вычислить стартовые значения с нулевой погрешностью.

Итак, для определения реального порядка экстраполяционного метода при каждом числе экстраполяций  $q$  от 0 до 3 проинтегрируем численно несколько раз задачу (12) на отрезке  $[0, 1.5]$  с постоянным, но разным шагом. Пределы для числа экстраполяций  $q$  выбраны из тех соображений, что теорема 2 дает возможность повысить точность формулы дифференцирования назад 5-го порядка до 8-го порядка включительно. Учитывая неявный характер рассматриваемого метода, для решения дискретной задачи (2) используем итерации Ньютона. Тогда из (11б) следует, что в каждой точке сетки достаточно выполнить одну итерацию.

В таблице 1 представлены глобальные ошибки многошагового экстраполяционного метода, построенного на базе формулы дифференцирования назад 5-го порядка, при числе экстраполяций от 0 до 3. Так, если мы не повышаем порядок базового многошагового метода, т.е. при  $q = 0$ , уменьшая размер шага в два раза, мы должны получить примерно 32-кратное уменьшение глобальной ошибки. Данные

Таблица 1. Глобальные ошибки экстраполяционной формулы дифференцирования назад 5-го порядка

q	$\tau$				
	$5.00 \cdot 10^{-2}$	$2.50 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$3.125 \cdot 10^{-3}$
0	$3.821 \cdot 10^{-01}$	$1.265 \cdot 10^{-02}$	$4.022 \cdot 10^{-04}$	$1.265 \cdot 10^{-06}$	$3.954 \cdot 10^{-07}$
1	$8.586 \cdot 10^{-02}$	$1.579 \cdot 10^{-03}$	$2.552 \cdot 10^{-05}$	$4.007 \cdot 10^{-07}$	$6.269 \cdot 10^{-09}$
2	$4.400 \cdot 10^{-02}$	$4.864 \cdot 10^{-04}$	$4.039 \cdot 10^{-06}$	$3.189 \cdot 10^{-08}$	$2.501 \cdot 10^{-10}$
3	$3.060 \cdot 10^{-02}$	$1.563 \cdot 10^{-04}$	$6.694 \cdot 10^{-07}$	$2.661 \cdot 10^{-09}$	$1.046 \cdot 10^{-11}$

первой строки таблицы 1 подтверждают такое поведение глобальной ошибки, что свидетельствует о том, что интегрирование ведется действительно методом 5-го порядка. При  $q = 1$  мы уже получаем сходимость 6-го порядка, так как при каждом делении шага пополам ошибка уменьшается примерно в 64 раза (см. вторую строку таблицы 1) и т.д. Как мы видим, каждое увеличение экстраполяционного числа на единицу приводит к увеличению порядка многошагового экстраполяционного метода также на единицу.

Аналогичные результаты мы будем иметь, если в качестве базовых используем формулы дифференцирования назад 3-го, 4-го и 6-го порядков. В первом случае мы сможем построить экстраполяционный процесс до 4-го порядка включительно, во втором — до 6-го, а в третьем — до 10-го порядка (см. теорему 2). Причем все результаты остаются справедливыми, если для приближенного решения задачи (2) применять и другие итерационные методы, упомянутые выше. Единственное, в каждой точке сетки надо выполнить достаточное число итераций в соответствии с формулами (11). Таким образом, данные численных экспериментов полностью подтверждают все теоретические результаты, изложенные выше, и показывают практическую работоспособность многошаговых экстраполяционных методов.

## Литература

- [1] *Bulirsch R., Stoer J.* Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods// Numer. Math. 1966. V. 8. P. 1-13.
- [2] *Deufhard P.* A semi-implicit mid-point rule for stiff systems of ordinary differential equations// Numer. Math. 1983. V. 41. P. 373-398.
- [3] *Deufhard P.* Order and stepsize control in extrapolation methods// Numer. Math. 1983. V. 41. P. 399-422.
- [4] *Deufhard P.* Recent progress in extrapolation methods for ordinary differential equations// SIAM Review. 1985. V. 27. P. 505-535.
- [5] *Gragg W.B.* On extrapolation algorithms for ordinary initial value problems// SIAM J. Numer. Anal. 1965. V. 2, Ser. B. P. 384-403.
- [6] *Gragg W.B.* Repeated extrapolation to the limit in the numerical solution of ordinary differential equations. Thesis. Univ. of California. 1964.
- [7] *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [8] *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 614 p.
- [9] *Dahlquist G.* Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations// Math. Scand. 1956. V. 4. P. 33-53.
- [10] *Kulikov G.Yu.* Numerical methods solving the semi-explicit differential-algebraic equations by implicit multistep fixed stepsize

methods// Korean J. Comput. & Appl. Math. 1997. V. 4. № 2. P. 281-318.

- [11] *Куликов Г.Ю.* Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 8. С. 73-89.

# ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПО СКАЧКООБРАЗНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ <sup>12</sup>

А.Ф. Николаев

**Введение.** В непрерывной схеме Калмана, ставшей классической, процесс, доступный наблюдению, также как и ненаблюдаемая компонента, являются непрерывными. Зачастую в приложениях не представляется возможным производить наблюдения в каждый момент времени. Доступными наблюдению оказываются лишь отдельные точки ненаблюдаемой компоненты. В этой заметке формулируется и доказывается теорема о виде уравнения фильтрации для данного случая. Отметим, что данный результат является модификацией теоремы, полученной в [6], и его доказательство проводится аналогично [6].

**Постановка задачи и формулировка результата.** На стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$  зададим процесс  $x = (x_t)_{t \geq 0}$ , имеющий представление в виде:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s(x) ds + y_t, \quad (1)$$

где в отношении процесса  $m$  предположим, что он является локальным  $(\mathbf{F}, P)$  мартингалом с непрерывными траекториями. Процесс  $a$  предполагается  $\mathbf{F}$  согласованным, причем  $E \int_0^t |a_s(x)| ds < \infty, t \geq 0$ , а случайная величина  $x_0 \sim \mathcal{F}_0$  измерима. При этом процесс  $x$  является ненаблюдаемым.

Наблюдению доступен мультивариантный точечный процесс  $\xi$ , определяемый целочисленной случайной мерой своих скачков  $\mu = \mu(\omega; dt, dv)$ . Процесс  $\xi$  предполагается квазинепрерывным слева. Обозначим  $\nu_{x\xi}(\omega; dt, dv)$  и  $\nu_\xi(\omega; dt, dv)$  компенсаторы меры  $\mu$  относительно потоков  $\mathbf{F}^{x\xi}$  и  $\mathbf{F}^\xi$  соответственно. Предположим, что существует  $\mathbf{F}^\xi$  предсказуемая функция  $\rho$ , такая что:

$$\nu_{x\xi}(dt, dv) = \rho(t, v) \nu_\xi(dt, dv). \quad (2)$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

**Теорема.** *Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка*

<sup>12</sup> работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 99-01-00185

$\pi_t(x) = E(x_t | \mathcal{F}_t^\xi)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \pi_t(x) = & \pi_0(x) + \int_0^t \pi_s(a) ds + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_0} \pi_s(x) (\rho(s, v) - 1) [\mu(ds, dv) - \nu_\xi(ds, dv)]. \end{aligned} \quad (3)$$

**Доказательство теоремы.** Далее будем обозначать  $\pi_t(x) = \pi_t$ , если это не приведет к путанице.

Из уравнения (1) следует, что

$$\pi_t = \pi_0 + E \left[ \int_0^t a_s(x) ds | \mathcal{F}_t^\xi \right] + E [m_t | \mathcal{F}_t^\xi]. \quad (4)$$

Представим правую часть (4) следующим образом:

$$\pi_t = \pi_0 + \int_0^t \pi_s(a) ds + y_t,$$

где процесс  $y = (y_t)_{t \geq 0}$  с

$$y_t = E \left[ \int_0^t a_s(x) ds | \mathcal{F}_t^\xi \right] - \int_0^t \pi_s(a) ds + E [m_t | \mathcal{F}_t^\xi]$$

является  $(\mathbf{F}^\xi, P)$  мартингалом. Действительно ( $s \leq t$ ),

$$\begin{aligned} E \left[ E \left( \int_0^t a_s(x) ds | \mathcal{F}_t^\xi \right) - \int_0^t \pi_s(a) ds | \mathcal{F}_s^\xi \right] = \\ = E \left[ \int_0^s a_u(x) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] - E \left[ \int_0^s \pi_u(a) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] + \\ + E \left[ \int_s^t a_u(x) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] - E \left[ \int_s^t \pi_u(a) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] = \\ = E \left[ \int_0^s a_u(x) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] - \int_0^s \pi_u(a) du \end{aligned}$$

в силу того, что  $E \left[ \int_s^t \pi_u(a) du | \mathcal{F}_s^\xi \right] = E \int_s^t a_u(x) du$ . Процесс  $(E(m_t | \mathcal{F}_t^\xi))_{t \geq 0}$  является  $(\mathbf{F}^\xi, P)$  мартингалом, так как имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} E \left( E(m_t | \mathcal{F}_t^\xi) | \mathcal{F}_s^\xi \right) &= E(m_t | \mathcal{F}_s^\xi) = \\ E \left( E(m_t | \mathcal{F}_t^{x\xi}) | \mathcal{F}_s^\xi \right) &= E(m_s | \mathcal{F}_s^\xi). \end{aligned}$$

Следовательно, процесс  $y - (\mathbf{F}^\xi, P)$  мартингал. Согласно теореме о представлении мартингалов (см., например, [2]) процесс  $y$  допускает представление

$$y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}_0} f(s, v) (\mu(ds, dv) - \nu_\xi(ds, dv)),$$

где  $\mathbf{F}^\xi$  предсказуемая функция  $f$  такова, что

$$E \int_0^t \int_{\mathbf{R}_0} f^2(s, v) \nu_\xi(ds, dv) < \infty, \quad t \geq 0.$$

Введем вспомогательный процесс  $z$ , являющийся  $(F^{\xi}, P)$  мартингалом и допускающий представление в виде

$$z_t = \int_0^t \int_{R_0} \lambda(s, v)(\mu(ds, dv) - \nu_{\xi}(ds, dv))$$

с ограниченной  $F^{\xi}$  предсказуемой функцией  $\lambda = \lambda(t, x)$ . Заметим, что

$$E(z_t y_t) = E \int_0^t \int_{R_0} \lambda(s, v) f(s, v) \nu_{\xi}(ds, dv). \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} E(z_t y_t) &= E(z_t(\pi_t - \pi_0 - \int_0^t \pi_s(a) ds)) = \\ &= E(z_t E(x_t | \mathcal{F}_t^{\xi})) - E(z_t \pi_0) - E \int_0^t E(z_t \pi_s(a) | \mathcal{F}_s^{\xi}) ds = \\ &= E(z_t x_t) - E \int_0^t z_s a_s(x) ds \end{aligned} \quad (6)$$

$$(E(z_t \pi_0) = 0, \text{ так как } E(z_t \pi_0) = E(\pi_0 E(z_t | \mathcal{F}_0^{\xi})) = E(\pi_0 z_0) = 0).$$

Представим процесс  $z$  в виде

$$z = z^1 - z^2, \quad (7)$$

где  $(F^{\xi}, P)$  мартингал  $z^1 = (z_t^1)_{t \geq 0}$  в каждый момент времени  $t$  имеет вид:

$$z_t^1 = \int_0^t \int_{R_0} \lambda(s, v)(\mu(ds, dv) - \nu_{\xi}(ds, dv)),$$

а процесс  $z^2 = (z_t^2)_{t \geq 0}$  допускает представление

$$z_t^2 = \int_0^t \int_{R_0} \lambda(s, v)(\nu_{\xi}(ds, dv) - \nu_{z\xi}(ds, dv)).$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} E(z_t y_t) &= E(z_t^1 x_t) - E(z_t^2 x_t) - \\ &- E \int_0^t a_s(x) z_s^1 ds + E \int_0^t a_s(x) z_s^2 ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим величину  $E(z_t^1 x_t) - E \int_0^t a_s(x) z_s^1 ds$ :

$$\begin{aligned} E(z_t^1 x_t) - E \int_0^t a_s(x) z_s^1 ds &= E(z_t^1 x_t) - E \int_0^t a_s(x) E(z_t^1 | \mathcal{F}_s^{\xi}) ds = \\ &= E(z_t^1 x_t) - E(z_t^1 \int_0^t a_s(x) ds) = E(z_t^1 (x_t - \int_0^t a_s(x) ds)). \end{aligned}$$

Из (1) следует, что

$$E(z_t^1 (x_t - \int_0^t a_s(x) ds)) = E(x_0 + m_t) = 0$$

в силу того, что  $E(z_t^1 x_0) = E(x_0 E(z_t^1 | \mathcal{F}_0^{\xi})) = E(x_0 z_0^1) = 0$ , а  $E(z_t^1 m_t) = 0$  из-за ортогональности процессов  $z$  и  $m$ . Следовательно,

$$E(z_t^1 x_t) - E \int_0^t a_s(x) z_s^1 ds = 0. \quad (9)$$

Остальные слагаемые правой части (8) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} &E \int_0^t a_s(x) z_s^2 ds - E(z_t^2 x_t) = \\ &E \int_0^t a_s(x) z_s^2 ds - E \int_0^t \int_{R_0} (x_t - x_s) \lambda(s, v) (\nu_{\xi}(ds, dv) - \nu_{z\xi}(ds, dv)) - \\ &- E \int_0^t \int_{R_0} x_s \lambda(s, v) (\nu_{\xi}(ds, dv) - \nu_{z\xi}(ds, dv)). \end{aligned} \quad (10)$$

Так как  $x_t - x_s = \int_s^t a_u(x) du + m_t - m_s$ , а случайная величина  $m_t - m_s$  не зависит от  $\nu_{\xi}([0, s] \times R_0)$  и от  $\nu_{z\xi}([0, s] \times R_0)$ , тогда во втором слагаемом в (10) разность  $x_t - x_s$  можно заменить на  $\int_s^t a_u(x) du$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} &E \int_0^t \int_{R_0} \int_s^t a_u(x) du \lambda(s, v) (\nu_{\xi}(ds, dv) - \nu_{z\xi}(ds, dv)) = \\ &= E \int_0^t a_s(x) \int_0^s \int_{R_0} \lambda(s, v) (\nu_{\xi}(ds, dv) - \nu_{z\xi}(ds, dv)) ds = \\ &= E \int_0^t a_u(x) z_u^2 du, \end{aligned}$$

и, значит, первое и второе слагаемые сократятся. Таким образом,

$$\begin{aligned} &E \int_0^t a_s(x) z_s^2 ds - E(z_t^2 x_t) = \\ &= E \int_0^t \int_{R_0} x_s \lambda(s, v) (\nu_{z\xi}(ds, dv) - \nu_{\xi}(ds, dv)). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (9) и (11) в (8):

$$E(z_t y_t) = E \int_0^t \int_{R_0} x_s \lambda(s, v) (\nu_{z\xi}(ds, dv) - \nu_{\xi}(ds, dv)).$$

Воспользовавшись представлением (2), а также свойством предсказуемости функций  $\rho$  и  $\lambda$ , получаем

$$E(z_t y_t) = E \int_0^t \int_{R_0} \pi_s \lambda(s, v) (\rho(s, v) - 1) \nu_{\xi}(ds, dv). \quad (12)$$

В силу произвольного выбора процесса  $z$  из (5) и (12) следует, что

$$f(t, v) = \pi_t(\rho(t, v) - 1)$$

и, значит, процесс  $y$  полностью определен. Таким образом, правая часть (3) получена. Теорема доказана.

Автор очень признателен Бутову А.А. за внимание, проявленное к работе.

### Литература

1. Жакоб Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. т.1. М.: Физматгиз, 1994.
2. Жакоб Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. т.2. М.: Физматгиз, 1994.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1974.
5. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1980.
6. Яшин А.И. Теоретические и прикладные задачи оценивания скачкообразных процессов. Препринт. - М., Институт проблем управления, 1978, 80 стр.

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОЦЕССА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ <sup>13</sup>

А.Е.Носова

В данной заметке изучается асимптотическое поведение процесса отношения правдоподобия в схеме серий. Эта схема порождается процессами, являющимися диффузионными аналогами случайного блуждания в случайной среде [1]. Удаётся показать асимптотическую сингулярность распределений процесса, когда размерность схемы  $d = 1$  и  $d = 2$ . При этом в двумерном случае доступной наблюдению оказывается только одна компонента.

Рассмотрим случай  $d = 1$ .

Пусть на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  задан одномерный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , имеющий стохастический дифференциал вида

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0. \quad (1)$$

Перейдем к схеме серий: для  $n = 1, 2, \dots$ , введем процесс  $x^n = (x_t^n)_{t \geq 0}$  с  $x_t^n = \frac{X_t^n}{\sqrt{n}}$ , где  $X_t^n = X_{n \cdot t}$ , при этом  $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_{n \cdot t}$ ,  $\mathbf{P}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$ . Тогда

$$dx_t^n = -\lambda n x_t^n dt + a \sqrt{n} d\bar{W}_t, \quad x_0^n = 0. \quad (2)$$

Наряду с мерой  $\mathbf{P}^n$ , по которой процесс  $x^n$  имеет представление (2) рассмотрим меру  $\bar{\mathbf{P}}^n$ , по которой процесс  $x^n$  является мартингалом. Тогда процесс отношения правдоподобия  $Z_t^n = d\mathbf{P}_t^n / d\bar{\mathbf{P}}_t^n$  имеет вид

$$Z_t^n = \exp \left\{ -\lambda n \int_0^t x_s^n dx_s^n - \frac{\lambda^2 n^2}{2} \int_0^t (x_s^n)^2 ds \right\} = \exp \varphi_t^n. \quad (3)$$

Рассмотрим процесс отношения правдоподобия в случае, когда размерность схемы равна двум. Предположим, что доступна наблюдению только одна компонента процесса. На стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  двумерный процесс  $X = (X^1, X^2)$  с  $X^i = (X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= a X_t^{(2)} dt + dW_t^{(1)}, \\ dX_t^{(2)} &= -\lambda X_t^{(2)} dt + dW_t^{(2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>13</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 99-01-00185)

где  $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$  – двумерный винеровский процесс и  $X_0^{(1)}, X_0^{(2)}$   $\mathcal{F}_0$ -измеримы.

Пусть процесс  $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T}$  не доступен наблюдению, а наблюдать можно лишь значения  $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ .

Для исследования процесса в схеме серий: для  $n = 1, 2, \dots$ , введем двумерный процесс  $x^{(n)} = (x^{1,n}, x^{2,n})$ , где  $x^{k,n} = (x_t^{k,n})_{t \geq 0}$ ,  $x_t^{k,n} = \frac{X_t^{k,n}}{\sqrt{n}}$  с  $X^{k,n} = (X_t^{k,n})_{t \geq 0}$ ,  $k = 1, 2$  при  $X_t^{k,n} = X_{n^{-1}t}^k$ , и  $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$  с  $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_{n^{-1}t}$ . Тогда

$$\begin{aligned} dx_t^{1,n} &= anx_t^{2,n} dt + dW_t^{1,n}, \\ dx_t^{2,n} &= -\lambda nx_t^{2,n} dt + dW_t^{2,n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $W_{t-n}^{(1)} = \sqrt{n} W_t^{1,n}$ . В каждый момент времени  $t$  будем оценивать (фильтровать) значения  $x_t^{2,n}$  по  $\mathcal{F}_t^{x^{1,n}} = \sigma(x_s^{1,n}, s \leq t)$ . Обозначим  $\pi_t^n = \mathbf{E}^n(x_t^{2,n} | \mathcal{F}_t^{x^{1,n}})$  и  $\gamma_t^n = \mathbf{E}^n(x_t^{2,n} - \pi_t^n)^2$  оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку для  $x_t^{2,n}$  и ошибку оценивания (фильтрации) соответственно. Запишем уравнения фильтрации для  $\pi_t^n$  и  $\gamma_t^n$  (см. [2])

$$\begin{aligned} d\pi_t^n &= -\lambda n \pi_t^n dt + an \gamma_t^n (dx_t^{1,n} - an \pi_t^n dt), \quad \pi_0 = 0, \\ \dot{\gamma}_t^n &= -2 \lambda n \gamma_t^n - a^2 n^2 (\gamma_t^n)^2 + 1, \quad \gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для  $x_t^{1,n}$  справедлива формула

$$x_t^{1,n} = an \int_0^t \pi_s^n ds + m_t^n, \quad (7)$$

где

$$m_t^n = an \int_0^t (x_s^{2,n} - \pi_s^n) ds + W_t^{1,n}.$$

Наряду с мерой  $\mathbf{P}^n$ , по которой процесс  $x^{1,n}$  имеет представление (7) рассмотрим меру  $\tilde{\mathbf{P}}^n$ , по которой процесс  $x^{1,n}$  является мартингалом. Тогда процесс отношения правдоподобия  $Z_t^n = d\mathbf{P}_t^n / d\tilde{\mathbf{P}}_t^n$  имеет вид

$$Z_t^n = \exp \left\{ an \int_0^t \pi_s^n dx_s^{1,n} - \frac{a^2 n^2}{2} \int_0^t (\pi_s^n)^2 ds \right\} = \exp \varphi_t^n \quad (8)$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

**Теорема.** Процесс отношения правдоподобия  $(Z_t^n)_{0 < t \leq T}$  в одномерной и двумерной схемах (2) и (5), заданный в (3) и (8) соответственно, слабо сходится к нулю для всех конечных  $T$ .

**Доказательство.** 1.  $d = 1$ . Рассмотрим процесс, имеющий представление (2). Отношение правдоподобия имеет вид (3). Обозначим

$$M_t^n = \lambda n \int_0^t x_s^n dx_s^n.$$

$x^n$  – мартингал по мере  $\tilde{\mathbf{P}}^n$ , таким образом,  $M_t^n$  также является локальным мартингалом по мере  $\tilde{\mathbf{P}}^n$ . Квадратичная характеристика мартингала  $M_t^n$  имеет вид

$$\langle M^n \rangle_t = \lambda^2 n^2 \int_0^t (x_s^n)^2 ds.$$

Покажем, что  $\tilde{\mathbf{P}}^n$  – п.н.

$$\langle M^n \rangle_t \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

то есть

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n \rangle_t = +\infty \} = 1 \quad \forall t > 0.$$

Воспользуемся утверждением, что если  $M$  – интеграл от квадрата гауссовской случайной величины [3], то

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \{ \langle M \rangle_\infty = \infty \} = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{E}}^n \langle M \rangle_\infty = \infty, \quad (10)$$

где  $\langle M \rangle_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle M \rangle_t$ . В нашем случае

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \langle M^n \rangle_t = \tilde{\mathbf{E}}^n (M_t^n)^2 = \lambda^2 n^2 \int_0^t \tilde{\mathbf{E}}^n (x_s^n)^2 ds = \frac{\lambda^2 n^2 t^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{E}}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 n^2 t^2}{2} = \infty,$$

что и доказывает (9).

Воспользуемся следующей сходимостью для непрерывных мартингалов: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n \rangle_t = +\infty$   $\tilde{\mathbf{P}}^n$  – п.н., то

$$\frac{M_t^n}{\sqrt{\langle M^n \rangle_t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$



и 
$$\frac{M_t^n}{\sqrt{\langle M^n \rangle_t}} = \frac{M_t^n}{\sqrt{\langle M^n \rangle_t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle M^n \rangle_t}} \rightarrow 0 \quad \tilde{P}^n - \text{п.н. при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\varphi_t^n = -M_t^n - \frac{1}{2} \langle M^n \rangle_t \rightarrow -\infty \quad \tilde{P}^n - \text{п.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Тогда из (3) и (11) получаем, что

$$\sup_{0 < \sigma \leq t \leq T} Z_t^n \rightarrow 0 \quad \tilde{P}^n - \text{п.н. при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  процесс отношения правдоподобия  $Z = (Z_t^n)_{0 < \sigma \leq t \leq T}$  слабо сходится к нулю для всех конечных  $T$ .

2.  $d = 2$ . Рассмотрим процесс, имеющий представление (5). Отношение правдоподобия имеет вид (8). Обозначим

$$M_t^n = an \int_0^t \pi_s^n dx_s^{1,n}.$$

$M^n$  — локальный мартингал по мере  $\tilde{P}^n$ , его квадратичная характеристика имеет вид

$$\langle M^n \rangle_t = a^2 n^2 \int_0^t (\pi_s^n)^2 ds.$$

$\langle M^n \rangle_t$  — интеграл от квадрата гауссовской случайной величины, поэтому, аналогично случаю  $d = 1$ , воспользуемся утверждением (10). Таким образом, надо показать, что

$$\tilde{E}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n \rangle_t = \infty. \quad (12)$$

Решение уравнения для  $\pi_t^n$  из (6) имеет вид:

$$\pi_t^n = e^{-\lambda nt} \cdot e^{-\int_0^t a^2 n^2 \gamma_s^n ds} \cdot \int_0^t e^{\lambda ns} \cdot e^{\int_0^s u' u^{-\gamma_u^n du}} \cdot an \gamma_s^n dx_s^{1,n}. \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение для  $\gamma_t^n$  (см. (6)) при  $t \rightarrow \infty$

$$-2\lambda n \gamma^n - a^2 n^2 (\gamma^n)^2 + 1 = 0.$$

В уравнении для  $\pi_t^n$  из (13) величину  $\gamma_t^n$  можно заменить на  $\gamma^n$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\gamma^n = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + a^2}}{n} = \frac{c_1}{n}$ . Подставляя  $\gamma^n$  в (13), получим

$$\tilde{\pi}_t^n = ac_1 \cdot e^{-\lambda nt - a^2 n c_1 t} \cdot \int_0^t e^{\lambda ns + a^2 n c_1 s} dx_s^{1,n},$$

$$\tilde{E}^n (\tilde{\pi}_t^n)^2 = \frac{ac_1(1 - e^{-2nt(\lambda + a^2 c_1)})}{2n(\lambda + a^2 c_1)}. \quad (14)$$

Из (14) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^2 n^2 \int_0^t \tilde{E}^n (\tilde{\pi}_s^n)^2 ds = \infty,$$

что и доказывает (12).

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично случаю  $d = 1$ . Таким образом, в случае  $d = 2$  процесс отношения правдоподобия  $(Z_t^n)_{0 < \sigma \leq t \leq T}$  слабо сходится к нулю для всех конечных  $T$ . Теорема доказана.

Автор выражает признательность Бутову А.А. за внимание к работе.

### Литература

1. Butov A.A. Random walks in random environments of a general type. Stoch. and Stoch. Reports. - 1994 - v.48. - p.145-160.
2. Лунцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974.
3. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.

**К МЕТОДУ СРАВНЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ  
УСТОЙЧИВОСТИ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА <sup>14</sup>**

Перегудова О.А.

Целью работы является развитие метода сравнения и исследование свойств устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения с конечным запаздыванием с использованием предельных уравнений.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа :

$$\dot{x} = X(t, x_t), \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $t \in R^+ = [0, +\infty)$ ,  $x_t = x(t+s)$ ,  $-h \leq s \leq 0$ ,  $x_t \in C_H$ ,  $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H, \|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0\}$ , функция  $X : R^+ \times C_H \rightarrow R^n$  определена, вполне непрерывна в области  $R^+ \times C_H$  и удовлетворяет условиям существования и единственности решения  $x(t; t_0, \varphi_0)$ , где  $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times C_H$ .

Пусть для системы (1) существует вектор-функция Ляпунова  $V(t, x) = (V^1(t, x), \dots, V^k(t, x))^T$ ,  $V : R^+ \times R^n \rightarrow R^k$ , удовлетворяющая векторному дифференциальному неравенству :

$$\dot{V}_{(1)}[t, \varphi] \leq f_1(t, V(t, x)), \quad \varphi \in \Omega_t[V], \quad (2)$$

где  $\Omega_t[V] = \{\varphi \in C_H : \sup(V(t+s, \varphi(s)), -h \leq s \leq 0) \leq V(t, x)\}$ ,  $\dot{V}_{(1)}[t, \varphi] = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} X(t, x_t)$  - производная по времени в силу системы (1), где  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$  - вектор-столбец,  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$  -  $k \times n$ -матрица.

Будем предполагать, что функция  $V(t, x)$  и вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = f_1(t, u), u \in R^k \quad (3)$$

<sup>14</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ N 99-01-01005, гранта РФФИ N 98-01-03284, программы "Университеты России-Фундаментальные исследования" (проект N3769)

являются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для уравнения (1), т.е. выполнены условия

$$f_1(t, V) \in W(\Omega), \quad f_1(t, 0) \equiv 0,$$

где  $W(\Omega)$  - класс функций, определенных, непрерывных в открытой области  $\Omega \subset T \times R^k$  и квазимонотонных в следующем смысле : каждая вещественная функция  $f^s$  является неубывающей по совокупности внедиагональных переменных  $(y^1, \dots, y^{s-1}, y^{s+1}, \dots, y^k)$  в области  $\Omega$  (Условие Важевского) [1,2].

Далее предположим, что :

- 1) система (3) имеет единственное решение  $u = u(t, t_0, v_0)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $u(t_0, t_0, v_0) = v_0$ , где  $v_0 = v(t_0, \varphi_0)$ ,  $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times C_H$ ;
- 2) матрица  $\Phi(t, t_0, v_0) = \frac{\partial u(t, t_0, v_0)}{\partial v_0}$  существует, непрерывна и ограничена  $\forall t \geq 0$ ,  $\det|\Phi(t, t_0, v_0)| \neq 0 \forall t \geq 0$ , и обратная матрица  $\Phi^{-1}(t, t_0, v_0)$  ограничена при всех  $t \geq 0$ .

Определим функцию  $w(t, x)$  следующим образом

$$V(t, x) = u(t, t_0, w(t, x)), \quad (4)$$

$t \geq t_0$ ,  $x \in R^n$ ,  $w(t_0, \varphi_0) = v_0$ . Дифференцируя равенство (4) по  $t$  в силу системы (1), получаем

$$\dot{V}_{(1)}[t, \varphi] = \frac{\partial u(t, t_0, w(t, x))}{\partial t} + \frac{\partial u(t, t_0, w(t, x))}{\partial v_0} \cdot \dot{w}_1[t, \varphi]$$

Учитывая неравенство (2) обозначим :

$$f_2(t, V(t, x), \varphi) = f_1(t, V(t, x)) - \dot{V}_{(1)}[t, \varphi], \quad \varphi \in \Omega_t[v]$$

и таким образом, получаем

$$\dot{w}_{(1)}[t, \varphi] = -\Phi^{-1}(t, t_0, w(t, x)) f_2(t, V(t, x), \varphi), \quad \varphi \in \Omega_t[v].$$

Обозначим  $W(t, w(t, x), \varphi) = \Phi^{-1}(t, t_0, w(t, x)) f_2(t, V(t, x), \varphi)$ .

Относительно функций  $X, V, W$  будем предполагать, что они удовлетворяют условиям предкомпактности [4].

Определим множества

$$N(t, c) = \{\varphi \in C : \sup_{-h \leq s \leq 0} V^*(t+s, \varphi(s)) = u^*(t, t_0, c) \quad \forall t \geq 0\}$$

$$M(t, c) = \{\varphi \in N(t, c) : V^*(t, \varphi(0)) = u^*(t, t_0, c) \quad \forall t \geq 0\}$$

Используя результаты работ [3,4], можно доказать следующие теоремы.

**Теорема 1** (о локализации положительного предельного множества)

Предположим, что :

1) решение  $(x(t, \alpha, \varphi_0))$  системы (1) ограничено некоторым компактом  $K \forall t \geq \alpha - h$ ;

2)  $f_1(t, v(t, x)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$

Тогда существует число  $c = const$  такое, что для  $\forall$  предельной точки  $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$  существуют предельная тройка  $(X^*, V^*, W^*)$  и решение  $y = y(t, 0, \psi)$  предельного уравнения  $\dot{y} = X^*(t, y_t)$  такие, что  $y_t(0, \psi) \in N(t, c)$ , при этом для каждого  $t \in R^+$  при котором  $y_t \in M(t, c)$ , выполнено  $y_t \in \{\varphi \in C : f_2^*(t, v(t, x), \varphi) = 0, \quad \varphi(0) = x, \forall t \geq 0\}$ .

**Теорема 2** (об асимптотической устойчивости)

Предположим, что :

1) Функция  $\bar{v}(t, x)$  определено-положительна ( и, соответственно,  $v^1(t, x), \dots, v^k(t, x)$  допускают бесконечно малый высший предел );

2) Нулевое решение системы сравнения (2)  $u = 0$  устойчиво (соответственно устойчиво равномерно по  $t_0$ ) относительно  $u^1, \dots, u^l$  ( $1 \leq l \leq k$ ) при условии  $u_0 = v(t_0, \varphi_0) = v_0$ ;

3) Выполняется неравенство

$$f_1(t, v(t, x)) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0$$

4) Для  $\forall$  предельной тройки  $(X^*, V^*, W^*)$  множество  $\{f_2^*(t, v^*(t, x), \varphi) = 0, \quad \varphi(0) = x\}$  не содержит решений предельной системы  $\dot{x} = X^*(t, x_t)$ , кроме  $x^* \equiv 0$ .

Тогда нулевое решение  $x = 0$  системы (1) асимптотически устойчиво ( асимптотически устойчиво равномерно по  $(t_0, \varphi_0)$ ).

**Пример**

Рассмотрим уравнение [5]

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x(t-h),$$

где  $a(t), b(t)$  - непрерывные ограниченные функции,  $b(t) \leq 0$ . Пусть  $V = \frac{1}{2}x^2$  -функция Ляпунова. Тогда  $\dot{V}(x_{th}, t) = a(t)x^2 + b(t)xx(t-h)$ .

В рассматриваемом случае  $R(x, t) = \sup\{a(t)x^2 + b(t)xx(t-h) \mid x^2(t-h) \leq x^2(t)\} = \sup\{a(t)x^2 + b(t)xx(t-h) \mid |x(t-h)| \leq |x(t)|\}$ .

Для интегральных линий уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x(t-h)$$

справедливо условие Липшица :

$$|x(t) - x(t-h)| \leq L^{(0)}h,$$

где  $L^{(0)}(x(t)) = \sup\{|\dot{x}(\theta)| \mid |x(\theta)| \leq |x(t)|\} = \sup\{|a(t)x + b(t)x(t-h)| \mid |x(t-h)| \leq |x(t)|\} \leq \max_{t \geq 0} \{|a(t)| + |b(t)|\} \cdot |x(t)| = c|x(t)|$ .

В силу условия Липшица для функции  $R(x, t)$  имеет место неравенство :

$$R(x, t) \leq \sup\{a(t)x^2 + b(t)x(t)y(t-h) \mid |y(t-h)| \leq |x(t)|, |x(t) - y(t-h)| \leq c|x(t)|h\},$$

поскольку множество

$$Y_v^{(0)}(x) = \{y_{t,h} : |y(t-h)| \leq |x(t)|, |x(t) - y(t-h)| \leq c|x(t)|h\}$$

таково, что его подмножеством является воронка интегральных линий  $\mu_v(x, t)$ .

Условие  $b(t)xx(t-h) \leq 0$  или эквивалентное этому условию равенство  $\text{sgn}(x(t-h)) = \text{sgn}x(t)$  следует из условия  $\text{sgn}y(t-h) = \text{sgn}x(t)$ .

Последнее равенство справедливо при всяких значениях величины запаздывания  $h$ , удовлетворяющих условию  $h \in [0, 1/c]$ , где  $c = \max_{t \geq 0} \{|a(t)| + |b(t)|\}$ .

Допустим, что нулевое решение системы сравнения  $\dot{u} = 2a(t)u$  устойчиво. Тогда условие асимптотической устойчивости решения  $x = 0$  следует из условия  $b^*(t) \neq 0$ .

## Литература

1. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А.Воронова В.М.Матросова. М.:Наука, 1987.

2. Лакшмикантам, Ванджипурам. Устойчивость движения : метод сравнения. Киев, 1991.

3. Громова П.С. Метод векторных функций Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск, Наука. 1981.

4. Андреев А.С., Лысяков В.Н., Хусанов Д.Х. К методу функций Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения. // Ученые записки УдГУ. Фундаментальные проблемы математики и механики. Часть 2. Выпуск 1. Ульяновск. 1996.

5. Разумихин Б.С. Устойчивость эрмитарных систем. М.: Наука. 1988.

## ЭКОНОМИЧНАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Петрищев В.В.

Одним из эффективных методов решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений является метод нормальных сплайнов [1, 2, 3]. Метод заключается в частичной дискретизации исходных функциональных уравнений и построения нормального решения полученной конечной коллокационной системы. При этом искомое решение считается элементом гильбертово-соболевского пространства  $W_2^l[0,1]$  где  $l$  - порядок производной, используемой в норме. Для систем уравнений с первыми производными достаточно выбрать  $l = 2$ , и для интегральных уравнений можно ограничиться порядком  $l = 1$ . Этим обеспечивается непрерывность получаемых при дискретизации точечных и интегральных функционалов от искомого решения. Канонические образы этих функционалов, отвечающие выбранной норме (имеющие вид скалярных произведений), образуют базисную (координатную) систему функций для нормального решения коллокационной системы, аппроксимирующего решение исходной задачи и называемого нормальным сплайном. Коэффициенты представления нормального сплайна в этой системе определяются системой линейных уравнений с симметричной матрицей Грама.

Данная работа посвящена проблеме численной реализации канонического преобразования интегральных функционалов. В относительно простых случаях такое преобразование можно делать аналитически, однако в общем случае для этого требуется численное интегрирование, и это существенно более трудоемко, чем нахождение коэффициентов представления решения. Излагаемый здесь алгоритм учитывает специфику функции Грина вспомогательной краевой задачи [2] (воспроизводящего ядра) и позволяет получить сравнимую сложность вычисления коэффициентов матрицы Грама и определения коэффициентов представления сплайна.

Изложим технику численного построения канонических обра-

зов на примере интегрального уравнения 3 рода:

$$a(t)x(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1]. \quad (1)$$

Функции  $a(t)$  и  $f(t)$  непрерывны. Ядро  $K(t,s)$  непрерывно по  $t$  и кусочно непрерывно по  $s$ .

Стандартный метод решения уравнений (1) - метод квадратурных сумм [4]. При этом количество интегралов дискретизации как по внутренней так и по внешней переменной должно совпадать, что ведет либо к большим размерностям, либо к грубому решению, в частности, когда правая часть (1) является результатом физических измерений. В таких задачах значения внешней переменной обычно определены на экспериментальной сетке, которая может быть неравномерной. Метод нормальных сплайнов позволяет сразу ставить задачу о нормальном решении, не прибегая к интерполяции сеточных данных.

Рассмотрим коллокационную сетку  $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$ . Согласно [1] канонические образы точечных и интегральных функционалов строятся с помощью воспроизводящего ядра. Для пространства  $W_2^1[0,1]$  с нормой

$$\|x\| = \left[ x^2(0) + \int_0^1 [x'(s)]^2 ds \right]^{1/2}$$

такое ядро имеет вид

$$G(s,t) = \begin{cases} 1+s, & 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ 1+t, & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

Образами линейных непрерывных функционалов  $a(t_k)x(t_k)$  в  $W_2^1[0,1]$  будут функции этого пространства  $a(t_k)G(s,t_k)$  и образами интегральных функционалов с ядрами  $K(t_k,s)$  - функции

$$h_k(s) = \int_0^1 K(t_k,\tau)G(s,\tau)d\tau, \quad k=1,\dots,m. \quad (2)$$

Элементы матрицы Грама  $\Gamma = \{g_{ij}\}$ ,  $i,j \in \{0,\dots,m\}$ , вычисляются по формуле

$$g_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle = \int_0^1 K(t_i,s)h_j(s)ds, \quad i,j=1,\dots,m. \quad (3)$$

Таблица 1

Формула	Вычислений ядра	Количество операций /,*
(2)	$m(S+1)(T+1)$	не существенно
(3)	$m^2(S+1)$	не существенно
(5)	-	зависит от выбранного алгоритма, порядок - $m^3$
(6)	-	$m(s+1)$

Весовые коэффициенты находятся из системы

$$\Gamma u = f^m, \quad (4)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $f^m = (f(t_1), \dots, f(t_m))$ . Нормальный сплайн, аппроксимирующий искомое решение, представляется в виде

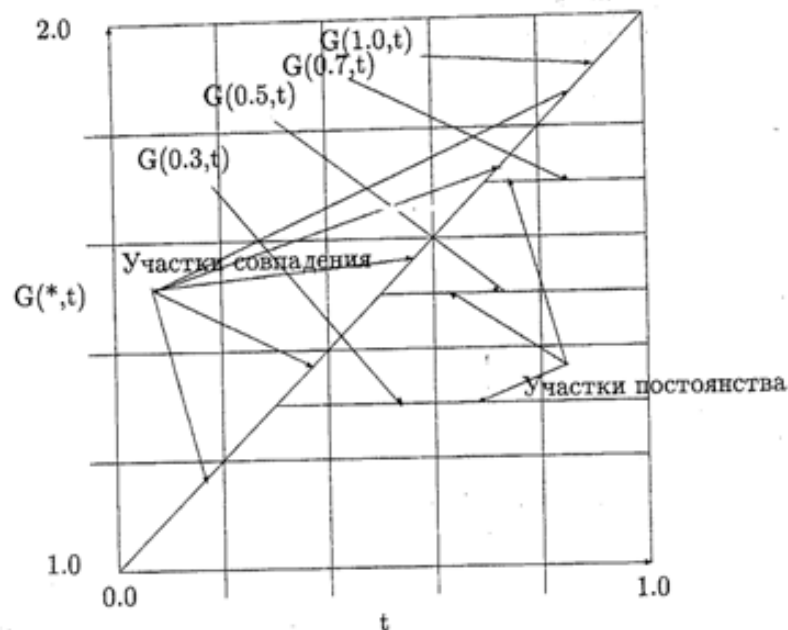
$$x^m(s) = \sum_{i=1}^m u_i h_i(s). \quad (5)$$

Пусть мы ведем вычисления по формулам (2)-(5) на сетке из  $m$  узлов коллокаций. Количество интервалов интегрирования по переменным  $\tau$  и  $s$  обозначим, соответственно,  $T$  и  $S$ . По соображениям точности следует брать  $T \gg S$ . Рассмотрим распределение количества вычислений. Под трудоемкостью алгоритма естественно считать количество произведенных вычислений функции ядра в узлах квадратурных формул. Сравнительные данные для формул (2)-(5) приведены в таблице 1.

Поскольку в большинстве задач  $m \ll S \ll T$ , то из данной таблицы следует, что основная трудоемкость приходится на формулу (2), соответственно, основные усилия по снижению трудоемкости следует сосредоточить на ней. Прямой подход к численному построению элементов  $h_k(s_i)$ ,  $0 \leq k \leq m$ ,  $0 \leq i \leq S$ , заключается в нахождении их значений для каждого  $k$  и для каждого  $i$  отдельно. Однако, используя специфику воспроизводящего ядра, можно одновременно находить эти значения для каждого  $k$  и для всех  $i \in \{1, \dots, S\}$  более экономно. Это достигается следующим образом.

Прежде всего заметим, что для различных  $s$  существуют участки совпадения воспроизводящего ядра, а на участках несовпадения это ядро постоянно (рис.1).

Рисунок 1



Рассмотрим более подробно формулу (2):

$$h_k(s) = \int_0^1 K(t_k, \tau) G(s, \tau) d\tau =$$

$$\int_0^s K(t_k, \tau) (1 + \tau) d\tau + (1 + s) \int_s^1 K(t_k, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Для снижения трудоемкости численная реализация построения квадратур должна обеспечить независимость вычисления интегралов

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} K(t_k, \tau) (1 + \tau) d\tau \quad \text{и} \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} K(t_k, \tau) d\tau$$

путем согласования сеток по  $s$  и по  $\tau$ . В общем случае (например, при интегрировании методом трапеций) достаточно, чтобы сетка по  $s$  была подсеткой сетки по  $\tau$ .

Одним из основных методов численного интегрирования является метод Симпсона. При интегрировании этим методом на равномерной сетке согласования можно добиться, взяв сетку по  $\tau$  кратной

сетке по  $s$  с четным коэффициентом. Возьмем  $T = 2nS$ ,  $n \in N$ . Обозначим  $R(j) = j \bmod 2 + 1$ . Применяя к (2) квадратурную формулу Симпсона, получим:

$$h_k(s_i) \approx (\rho_k^1(s_i) + \rho_k^2(s_i)) \frac{2}{3T}, \quad (7)$$

где

$$\rho_k^1(s_i) = 0.5K(t_k, 0) + \sum_{j=1}^{in} R(j) K(t_k, \tau_j) (1 + \tau_j); \quad (8)$$

$$\rho_k^2(s_i) = (1 + s_i) \left( \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j) K(t_k, \tau_j) + 0.5K(t_k, 1) \right); \quad (9)$$

Аналогично для узла  $s_{i+1}$

$$\rho_k^1(s_{i+1}) = 0.5K(t_k, 0) + \sum_{j=1}^{(i+1)n} R(j) K(t_k, \tau_j); \quad (10)$$

$$\rho_k^2(s_{i+1}) = (1 + s_{i+1}) \left( \sum_{j=(i+1)n+1}^{T-1} R(j) K(t_k, \tau_j) + 0.5K(t_k, 1) \right). \quad (11)$$

Из формул (8), (10) получаем

$$\rho_k^1(s_{i+1}) = \rho_k^1(s_i) + \sum_{j=in+1}^{(i+1)n} (1 + \tau_j) R(j) K(t_k, \tau_j). \quad (12)$$

Исследуем соотношения (9), (11). Обозначим

$$\omega_i = \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j) K(t_k, \tau_j), \quad i = 0, \dots, S-1, \quad \omega_S = 0, \quad (13)$$

тогда

$$\omega_{i-1} = \omega_i + \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} R(j) K(t_k, \tau_j), \quad (14)$$

$$\rho_k^2(s_i) = \omega_i (1 + s_j). \quad (15)$$

Мы получили рекуррентное соотношение (12) для вычислений  $\rho_k^1(s_i)$ . Значения  $\rho_k^2(s_{i+1})$  определяются также рекуррентными соотношениями (14)-(15). Таким образом, оптимизационные формулы позволяют вычислять элементы  $h_k(s_i)$  для каждого  $k$  и для всех  $i$  за 2 прохода алгоритма: при первом (прямом) вычисляются  $\rho^1$  и при втором (обратном) - значения  $\rho^2$ .

Трудоёмкость такого алгоритма близка к теоретическому минимуму. Легко видеть, что если мы имеем сетку размерности  $mT$ , то минимальная трудоёмкость (количество вычислений функций ядра) составляет  $mT$ . При применении изложенного алгоритма для достижения такой эффективности следует при первом проходе сохранять значения функций ядра в массиве с тем, чтобы при втором не производить повторных вычислений.

## Литература

- [1] Горбунов В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации // ЖВМ и МФ, 1989, т.29, N2, с.212-224.
- [2] Горбунов В.К. Экстремальные задачи обработки результатов измерений. - Фрунзе: Илим, 1990.
- [3] Горбунов В.К., Петрищев В.В. Метод нормальных сплайнов в вырожденных системах дифференциальных уравнений. // Уч. Записки УлГУ. Фунд.проблемы математики и механики. Вып.3. 1997. С125-132.
- [4] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев.: Наукова думка, 1986.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕСТИРОВАНИЯ БАЗ ДАННЫХ

Л.Н. Полякова

Интенсивное развитие функциональных и интеллектуальных возможностей информационных систем выдвигает на первый план вопросы обеспечения высокой надежности разрабатываемых систем.

Методы и средства технической диагностики представляют значительный резерв повышения надежности и производительности сложных информационных систем. Актуальность задач технического диагностирования не снижается, так как на всех этапах жизненного цикла информационных систем, как в процессе их создания, так и в процессе эксплуатации возникают ошибки за счет нарушений в функционировании отдельных компонент системы.

Основу технического диагностирования [1] составляет получение информации для решения задач проверки работоспособности объекта диагностирования, поиска и распознавания дефектов в нем, а также обеспечение информацией процессов восстановления и модификации информационных систем.

Одним из направлений технического диагностирования является тестовое диагностирование, при котором на исследуемый объект, называемый объектом диагностирования (ОД), подается тестовое воздействие. Для решения задач тестового диагностирования необходимо: построение математической модели объекта диагностирования в работоспособном состоянии и при наличии дефектов; разработка методов и алгоритмов диагностирования; построение тестовых воздействий на объект для проверки работоспособности и поиска дефектов; разработка методов логического анализа диагностической информации.

Построение модели ОД необходимо для получения проверяющих тестов и тестов поиска дефектов, а также для составления алгоритмов диагностирования. Моделирование является универсальным инструментом исследования сложных систем. При моделировании часто приходится решать задачу минимизации сложности модели при ограничении на степень адекватности полученной модели. Адекватность предполагает воспроизведение моделью с необходимой полнотой всех свойств объекта, существенных для данного исследо-

вания.

В процедуре диагностирования считается, что до подачи теста ОД находился в одном из следующих состояний: ОД исправен или ОД неисправен из-за возникновения в нем некоторых дефектов. Процесс диагностирования определяется следующим образом. Если  $M'$  - модель исследуемого ОД,  $M_0$  - модель исправного ОД и  $M_i$  - модель объекта с дефектом из некоторого множества дефектов  $i \in I$ , то процесс диагностирования сводится к процессу отождествления  $M'$  с одной из моделей  $M = M_0 \cup \{M_i\}$ , где  $i \in I$ .

Для установления эквивалентности  $M' \equiv M_0$  применяется проверяющий тест, а эквивалентности  $M' \equiv M_i, i \in I$  - тест поиска дефектов.

Поскольку в качестве объекта диагностирования рассматривается информационная система, основным носителем знаний в которой является база данных, обратимся к модели базы данных, описанной в [2].

Определение базы данных предполагает указание ее схемы, в которую входят отображение  $n: X \rightarrow \Gamma$  и множество символов отношений  $\Phi$ . Также необходимо рассматривать и правило  $f$ , по которому каждый  $\varphi \in \Phi$  реализуется в качестве отношения.

Отображение  $n: X \rightarrow \Gamma$  задано для некоторого множества переменных  $X$  и разбивает переменные по сортам  $X = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_k$ , где  $k$  - мощность множества  $\Gamma$  - множества сортов переменных. Переменные одного сорта пробегают один и тот же домен. Одновременно множество  $\Gamma$  представляет собой множество имен доменов.

Для каждой системы множеств данных  $D = (D_i, i \in \Gamma)$  символ отношения  $\varphi \in \Phi$  реализуется как подмножество-отношение в декартовом произведении  $D = D_{i_1} \times D_{i_2} \times \dots \times D_{i_n}$ , причем  $\varphi: D \rightarrow \{0, 1\}$  - двоичная функция.

Элементарная формула имеет вид:  $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ , где  $\varphi$  - символ отношения,  $x_{i_1}$  - переменная сорта  $i_1$ ,  $x_{i_2}$  - переменная сорта  $i_2$  и т.д. Все возможные формулы строятся из элементарных с использованием булевых связей и кванторов.

Функция  $f$ , сопоставляющая каждому  $\varphi \in \Phi$  некоторое подмножество  $f(\varphi)$  в  $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_n}$ , трактуется как состояние базы данных  $f$  в рассматриваемой схеме при заданной системе  $D$ .

Реализация всех  $\varphi$  в  $D$  означает, что система  $D = (D_i, i \in \Gamma)$  рас-



считается как модель относительно набора отношений  $\Phi$  с учетом состояния  $f$ . Соответствующая модель обозначается  $(D, \Phi, f)$ .

Покажем модель базы данных на примере. Пусть множество переменных  $X$  разбито на два сорта и представлено двумя доменами:

$$D_1 = \{x_1, x_2\} \text{ и } D_2 = \{z_1, z_2, z_3\}. \quad (1)$$

Тогда  $D = D_1 \times D_2 = \{(x_1, z_1), (x_2, z_1), \dots, (x_2, z_3)\}$ . На множестве  $D$  заданы символы отношений  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}, \varphi_1 = \overline{\varphi_2}$ . В результате заполнения данных и на основе содержательного истолкования каждого  $\varphi$  приходим к соответствующему правилу  $f$ . На множестве  $D$  возможны следующие состояния:

$$f(\varphi_1) = \{(x_1, z_1)\} \quad (2)$$

$$f(\varphi_2) = \{(x_2, z_1), (x_1, z_2), (x_2, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_3)\}$$

или

$$f(\varphi_1) = \{(x_1, z_1), (x_1, z_3), (x_2, z_3)\} \quad (3)$$

$$f(\varphi_2) = \{(x_2, z_1), (x_1, z_2), (x_2, z_2)\}$$

или

$$f(\varphi_1) = \{(x_1, z_1), (x_2, z_1), (x_1, z_3), (x_2, z_3)\} \quad (4)$$

$$f(\varphi_2) = \{(x_1, z_2), (x_2, z_2)\}$$

и т.д.

Пользователь взаимодействует с базой данных путем реализации вопросно-ответного отношения между языком запросов и языком ответов. Как вопрос, так и ответ интерпретируются во "внешнем" мире. Поэтому анализ модели базы данных включает и представление запросов.

Ответ на запрос  $u$  в состоянии  $f$  обозначается  $f * u$ . Соответствующий ответ  $f * u$  вычисляется как подмножество в  $D$ . Запрос  $u$  записывается некоторой элементарной формулой:  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Множество всех подмножеств множества  $D$  обозначается  $M_D$ , а множество всех возможных запросов в рассматриваемой схеме обозначается  $U$ . Для каждого  $u \in U$  и каждого состояния  $f$  ответ  $f * u$  есть элемент в  $M_D$  т.е. для каждого состояния  $f$  имеем отображение  $f : U \rightarrow M_D$ , сопоставляющее запросу  $u$  ответ на него  $f * u$ . Формула определяет некоторый запрос, а ответ на этот запрос выдается в зависимости от состояния системы - реализации элементарных формул.

При реляционном подходе к базам данных информация хранится и выдается в виде отношений, а запрос записывается языком формул исчисления предикатов первого порядка.

Пусть некоторый запрос  $u$  к базе данных записывается формулой:

$$u = (\exists z)(\exists x)(\overline{\varphi_2(x, z)}), \text{ где } x \in D_1, z \in D_2 \text{ из (1)}. \quad (5)$$

Квантор всеобщности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, а квантор существования - как обобщение дизъюнкции. Тогда запрос  $u$  можно записать:

$$u = (\exists z)(\forall x)(\overline{\varphi_2(x, z)}) = (\exists z)(\forall x)\varphi_1(x, z) =$$

$$= (\exists z)(\varphi_1(x_1, z) \& \varphi_1(x_2, z)) =$$

$$\varphi_1(x_1, z_1) \& \varphi_1(x_2, z_1) \vee \varphi_1(x_1, z_2) \& \varphi_1(x_2, z_2) \vee \varphi_1(x_1, z_3) \& \varphi_1(x_2, z_3). \quad (6)$$

Ответ  $f * u$  соответствует пустому подмножеству в состоянии (2), подмножеству  $\{(x_1, z_3), (x_2, z_3)\}$  в состоянии (3) и подмножеству  $\{(x_1, z_1), (x_2, z_1), (x_1, z_3), (x_2, z_3)\}$  в состоянии (4).

Итак, модель базы данных представлена доменами, отношениями и состоянием  $(D, \Phi, f)$ , а формулы записываются на языке исчисления предикатов первого порядка. Модель базы данных определяет и модель дефектов. Физические дефекты задаются искажением символов математической модели. Множество дефектов  $I$  является объединением множества дефектов предметных переменных и множества дефектов символов отношений.

Дефекты предметных переменных рассматриваются как замена переменной  $x_i$  на  $x_j$ , причем  $x_i$  и  $x_j$  принадлежат разным доменам. Дефекты символов отношений также представляют собой замену одного символа  $\varphi_i$  на другой  $\varphi_j$  и  $\varphi_i, \varphi_j \in \Phi$ .

Например, запрос, представленный формулой (5), при наличии дефектов может быть записан в следующем виде:

$$u' = (\forall z)(\exists x)(\varphi_2(x, z)) \quad (7)$$

или

$$u'' = (\exists z)(\forall x)(\overline{\varphi_1(x, z)}) \quad (8)$$

и т.д.

Необходимо определить тестовые воздействия т.е. состояния базы данных, при которых по ответу  $f * u$  можно будет отличить запросы  $u'$  и  $u''$  от  $u$ .

Представление запроса на языке исчисления предикатов первого порядка делает возможным использование для построения тестов хорошо известного в теории тестирования комбинационных схем аппарата булевых производных.

Производная первого порядка  $\frac{df}{dx_i}$  от булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определяет условия, при которых эта функция изменяет значение при переключении переменной  $x_i$  (при изменении значения  $x_i$  на противоположное).

Использование аппарата булевых производных определяет достаточно простую процедуру диагностирования и анализа диагностической информации. Так как запрос  $u$  является булевой функцией, а ответ на запрос  $f * u$  представлен подмножеством в  $D$ , то изменение значения функции  $u$  при изменении состояния  $f$  засчет переключения некоторой переменной  $x_i$  на противоположное приведет к тому, что ответ  $f * u$  окажется пустым множеством.

Построим производную первого порядка для формулы (6). Обозначим:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, z_1), y_2 = \varphi_1(x_2, z_1), y_3 = \varphi_1(x_1, z_2), y_4 = \varphi_1(x_1, z_2), y_5 = \varphi_1(x_1, z_3), \\ y_6 = \varphi_1(x_2, z_3).$$

Тогда

$$u = y_1 \& y_2 \vee y_3 \& y_4 \vee y_5 \& y_6. \\ \frac{du}{dy_1} = y_2 \bar{y}_3 \bar{y}_5 \vee y_2 \bar{y}_3 \bar{y}_6 \vee y_2 \bar{y}_4 \bar{y}_5 \vee y_2 \bar{y}_4 \bar{y}_6.$$

Первый терм производной определяет следующие два состояния базы данных:

при  $y_1 = \varphi_1(x_1, z_1) = 1$  получаем состояние  $f_1$ :

$$f_1(\varphi_1) = \{(x_1, z_1), (x_2, z_1)\},$$

$$f_1(\varphi_2) = \{(x_1, z_2), (x_1, z_3)\};$$

при  $y_1 = \varphi_1(x_1, z_1) = 0$  получаем состояние  $f_0$ :

$$f_0(\varphi_1) = \{(x_2, z_1)\},$$

$$f_0(\varphi_2) = \{(x_1, z_1), (x_1, z_2), (x_1, z_3)\}.$$

Ответ  $f * u$  на запрос  $u$  в состоянии  $f_1$  соответствует подмножеству  $\{(x_1, z_1), (x_2, z_1)\}$ , а в состоянии  $f_0$  ответ представляет собой

пустое множество. В то время как для запроса, представленного формулой (7), и в состоянии  $f_1$ , и в состоянии  $f_0$  ответы - пустые множества.

В примере на первом же тестовом воздействии удалось отличить запрос  $u$  от запроса с нарушениями. Однако для доказательства правильности запроса потребуется построить тестовые воздействия по булевому производным для всех переменных.

Мощность множества переменных, образующих домены, и количество состояний  $f$  базы данных, построенных по булевым производным, можно сократить, т.к. на заданном пространстве всегда может быть найдена та или иная вычислительная схема, позволяющая выразить целое подмножество одним элементом (или представителем), отражающим общие свойства всего подмножества.

Предложенный подход позволяет построить тестовые взаимодействия и провести логический анализ диагностической информации при тестировании реляционных баз данных посредством запросов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. -М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1994. - 448 с.
2. Методы кибернетики и информационные технологии: Сборник научных трудов /Под ред. А.М.Богомолова. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1994. Вып.1. - 152 с.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Ю.Н. Санкин, Н.А. Юганова

Предлагается частотный метод решения задачи о поперечных колебаниях стержней ступенчато-переменного сечения с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием.

Данному вопросу посвящена работа [1], в которой рассматриваются нестационарные колебания ступенчатой балки при сотрясении опор. Для получения соответствующих величин, преобразованных по Лапласу используется метод начальных параметров, а затем коэффициенты разлагаются в ряды по степеням параметра преобразования Лапласа, что в определенной степени облегчает получение оригинала. Однако трудности при этом стремительно растут при увеличении числа участков стержня. Предлагаемый в данной работе метод обладает тем преимуществом, что вычислительные трудности по нахождению оригинала не зависят от степени сложности стержневой системы. При этом, разумеется, сохраняются трудности решения задач больших размерностей.

Уравнение поперечных колебаний стержня преобразуется по Лапласу при наличии ненулевых начальных условий. Для полученного неоднородного дифференциального уравнения решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил, как функций краевых перемещений. Затем составляются уравнения равновесия узлов, которые представляют собой систему уравнений для неизвестных узловых перемещений. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня не ограничена. Решая полученную систему уравнений при  $p = i\omega$ , где  $p$  — параметр преобразования Лапласа,  $\omega$  — частотный параметр, строим амплитудо-фазо-частотные характеристики (АФЧХ) для интересующих сечений стержня. Эти АФЧХ можно рассматривать как графический образ одностороннего преобразования Фурье. Поскольку все особые точки соответствующих выражений лежат левее мнимой оси, обратное преобразование можно осуществлять полагая  $p = i\omega$ ,

т.е. используя построенные АФЧХ. Задача по построению АФЧХ, где в качестве силового воздействия фигурирует поле начальных скоростей, умноженное на погонную плотность стержня, является вспомогательной. Обычно АФЧХ строятся от воздействия возмущающих сил, затем численным интегрированием или каким-либо иным способом осуществляется обратное преобразование Лапласа. Известно, что каждому витку АФЧХ соответствует один член ряда в энергетическом решении. Между экстремальными точками АФЧХ и коэффициентами соответствующих членов ряда в энергетическом решении существует однозначная связь, которая используется в настоящей работе для осуществления обратного преобразования Лапласа. Описанный выше подход позволяет решать задачи динамики стержней ступенчато-переменного сечения при наличии неограниченного количества упруго присоединенных масс, при произвольном силовом воздействии, приложенном на концах и по длине стержня, т.е. в условиях когда непосредственное обращение соответствующих формул практически невыполнимо.

Уравнения динамики линейной вязко-упругой системы в операторной форме можно записать следующим образом:

$$D\sigma + R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\frac{\partial u}{\partial t} - f = 0$$

$$CD^*u + C_1D^*\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$  — вектор обобщенных сил или тензор напряжений,  $u$  — вектор обобщенных смещений,  $R$  — матрица инерционных характеристик или удельная масса,  $T$  — матрица внешнего рассеяния энергии,  $f$  — вектор-функция внешних нагрузок,  $C$  и  $C_1$  — соответственно матрицы или тензоры упругих постоянных и коэффициентов внутреннего трения.

Граничные условия

$$n_\sigma \sigma = f_s \text{ на } S_1,$$

$$n_u u = u_s \text{ на } S_2, \quad (2)$$

где  $n_\sigma$  и  $n_u$  соответствующие операторы статической и геометрической совместимости на поверхности тела,  $f_s$  — нагрузка на участке поверхности  $S_1$ ,  $u_s$  — граничное перемещение на  $S_2$ .

Условие совместности на границах конечных элементов

$$\begin{aligned} n_{\sigma+}\sigma_+ + n_{\sigma-}\sigma_- &= 0 \text{ на } S'_1, \\ n_{u+}u_+ &= n_{u-}u_- \text{ на } S'_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Знаки "+" и "-" соответствуют различным сторонам границы сопряжения элементов  $S' = S'_1 \cup S'_2$ .

Начальные условия

$$u|_{t=0} = a_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a_1.$$

Операторы  $D$  и  $D^*$  сопряженные в смысле Лагранжа:

$$\int_V (D\sigma)^T u dV = \int_V \sigma^T D^* u dV - \int_S \sigma_s u_s dS,$$

где  $\sigma_s = n_{\sigma}\sigma$ ,  $u_s = n_u u$ ;  $V$  — объем конечного элемента. В общем случае граница элемента  $S = S_1 \cup S_2 \cup S'_1 \cup S'_2$ .

Для пространственного тела

$$D = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k}; \quad D^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right),$$

где  $\alpha_k$  — пространственные координаты;  $\sigma = \sigma_{ij}$ ;  $u = u_i$ ;  $n = n_i$ ;  $c = c_{ijkl}$ .

Уравнения (1), граничные условия (2) и условия совместности (3), преобразованные по Лапласу, записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} D\sigma + R(p^2 - pa_0 - a_1) + T(pu - a_0) - f &= 0, \\ (C + C_1 p)D^* u - C_1 D^* a_0 &= \sigma \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} n_{\sigma}\sigma &= f_s \text{ на } S_1, \quad n_{\sigma+}\sigma_+ + n_{\sigma-}\sigma_- = 0 \text{ на } S'_1, \\ n_u u &= u_s \text{ на } S_2, \quad n_{u+}u_+ = n_{u-}u_- \text{ на } S'_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u = u(p)$ ;  $u(p) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt$ ,  $\sigma = \sigma(p)$ ;  $\sigma(p) = \int_0^{\infty} \sigma(t)e^{-pt} dt$ .

В уравнениях (4) для изображений сохранены те же самые обозначения, что и для оригиналов.

Исключим в уравнениях (4) обобщенные силы:

$$p^2 Ru + pBu + Ku = f + (pR + B)a_0 + Ra_1, \quad (6)$$

где  $B = DC_1 D^* + T$ ,  $K = DCD^*$ .

Условия сопряжения (3) будем считать выполненными. Граничные условия (2) примут вид:

$$n_{\sigma}((C + C_1)D^* u - pC_1 D^* u_0) = f_s \text{ на } S_1,$$

$$n_u u = u_s \text{ на } S_2.$$

Согласно уравнению (6) нагрузочными членами является правая часть этого уравнения. Поэтому и АФЧХ следует строить от каждого воздействия, входящего в эту правую часть, т.е. согласно выражению  $f + (pR + B)a_0 + Ra_1$ , где  $f$  — распределенная нагрузка,  $a_0$  — поле начальных перемещений,  $a_1$  — поле начальных скоростей. В рассматриваемых нами задачах  $a_0 \equiv 0$ .

В случае стержневой системы уравнения (1) выполняются точно, причем возможно решение задачи Коши. Предполагается, что известен вектор начальных перемещений  $u_0$  и вектор начальных сил  $\sigma_0$ . Т.к. рассматриваются гармонические колебания, модель одномерна, и поэтому исходные уравнения (1) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, поэтому в общем случае это решение можно записать так [2]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K_{uu}(\alpha) & K_{u\sigma}(\alpha) \\ K_{\sigma u}(\alpha) & K_{\sigma\sigma}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum \begin{pmatrix} K_{uu}(\alpha - \alpha_n) & K_{u\sigma}(\alpha - \alpha_n) \\ K_{\sigma u}(\alpha - \alpha_n) & K_{\sigma\sigma}(\alpha - \alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_n \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{S_1}^{S_2} \begin{pmatrix} K_{uu}(\alpha - s) & K_{u\sigma}(\alpha - s) \\ K_{\sigma u}(\alpha - s) & K_{\sigma\sigma}(\alpha - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(s) \end{pmatrix} dS \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\begin{pmatrix} K_{uu}(\alpha) & K_{u\sigma}(\alpha) \\ K_{\sigma u}(\alpha) & K_{\sigma\sigma}(\alpha) \end{pmatrix}$  — матрица переноса начальных параметров. Рассмотрим верхнюю строку матричного соотношения (7) для начала и конца стержня. Обозначим их индексами  $i$  и  $j$  соответственно.

$$u_j = K_{uu}(l)u_i + K_{u\sigma}(l)\sigma_i + \sum K_{u\sigma}(l - \alpha_n)\sigma_n + \sum_{S_1}^{S_2} K_{u\sigma}(l - s)\sigma(s)dS,$$

$$\sigma_i = K_{\sigma u}^{-1}(l)K_{uu}(l)u_i - K_{\sigma u}^{-1}(l)u_j + K_{\sigma u}^{-1}(l)[u_j],$$

где  $[u_j] = -\sum K_{\sigma u}(l - \alpha_i)\sigma_n - \sum_{S_1}^{S_2} K_{\sigma u}(l - s)\sigma(s)dS$ .

Обозначим  $K_{\text{уст}}^{-1}(l)K_{\text{ун}}(l) = A^0$ ,  $K_{\text{уст}}^{-1}(l) = B^0$ .

Для краевых усилий получим формулу [2]:  $\sigma_i = A^0 u_i - B^0 u_j + B^0 [u_j]$ , где  $A^0$ ,  $B^0$  — матрицы динамических жесткостей стержня,  $[u_j]$  — вектор перемещений от местных нагрузок. Затем составляются уравнения равновесия узлов:

$$-B_{k-1k}U_{k-1} + (A_{k-1k} + A_{kk} + 1) \cdot U_k - B_{kk+1}U_{k+1} + (C_k - \omega^2 I_k) \cdot U_k = R_k - B_{k-1k}[u_{k-1}] - B_{kk+1}[u_{k+1}], \quad (8)$$

которые представляют собой линейную систему для неизвестных узловых параметров. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня не ограничена. Решая полученную систему уравнений при  $p = i\omega$ , строим АФЧХ для интересующих сечений стержня. Рассмотрим применение этого метода на примере решения задачи о поперечных колебаниях балки длины  $l$  с жестко заделанным концом.

Полученные результаты будем сравнивать с известным энергетическим решением:

$$U(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \int_V [f + (pR + B)a_0 + Ra_1]^T u_n dV}{(T_{n2}^2 + T_{n1}p + 1) \|u_n\|^2} u_n(\alpha), \quad (9)$$

где  $U(\alpha p)$  — решение операторного уравнения (6),  $u_n(\alpha)$  — собственные формы колебаний,  $\lambda_n = \frac{1}{\omega_n^2}$ ,  $\lambda_n = T_{n2}^2$ .

Применительно к данной задаче имеем:  $T_{n1} = 0$ ; или  $T_{n1} = \gamma$ ,  $\omega_1 = 1.875$ ,  $\omega_2 = 4.694$  и др. находятся по таблицам [3],  $f^T = -\mu \cdot V_0$ ,  $u_n = sh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) + \gamma \cdot (ch(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))$ , где

$$\gamma_n = -\frac{sh(\beta_n l) + \sin(\beta_n l)}{ch(\beta_n l) + \cos(\beta_n l)}, \quad \beta_n = \frac{\pi}{2l}(2n - 1),$$

$$\int_V f^T u_n dV = -\frac{\mu \cdot V_0}{\beta_n} (ch(\beta_n l) + \cos(\beta_n l) + \gamma_n sh(\beta_n l) - \gamma_n \sin(\beta_n l) - 2),$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^l \rho \cdot u_n^2 dx = \frac{\rho}{\beta} \left\{ (1 + \gamma_n^2) \cdot ch(\beta_n l) \cdot \left( \frac{1}{2} sh(\beta_n l) - \sin(\beta_n l) \right) + (1 - \gamma_n^2) \times \right. \\ \left. \times \cos(\beta_n l) \cdot \left( -\frac{1}{2} \sin(\beta_n l) + sh(\beta_n l) \right) + \gamma (sh(\beta_n l) - \sin(\beta_n l))^2 \right\} + \rho \cdot \gamma_n^2 l,$$

Подставив все в формулу (9) получим при  $p = i\omega$  передаточную функцию упругой системы. На рис.1 показаны колебания сечений

$x = 0.5$  и  $x = 0.8$ .

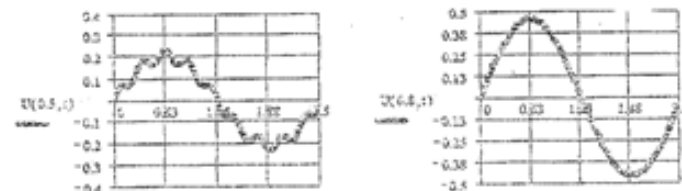


Рис.1. Колебания сечений  $x = 0.5$  и  $x = 0.8$

При решении частотным методом этой задачи, в случае балки ( $\kappa = 1$ ) система (8) представляет собой систему двух линейных уравнений:

$$A_{01}W1 = -B_{01}[w_0]. \quad (10)$$

Для двух разбиений условия равновесия узлов таковы ( $\kappa = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} (A_{01} + A_{12})W1 - B_{12}W2 &= -B_{01}[w_0] - B_{12}[w_2], \\ -B_{12}W1 + A_{12}W2 &= -B_{12}[w_1]. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате решения систем (10) и (11) получаем графики АФЧХ (рис.2). Каждый виток АФЧХ соответствует одному члену ряда (9). Решения полученные из уравнения (10) и системы (11) и построенные по формуле (9) для конца балки практически совпадают, что позволяет сделать вывод о правильности предлагаемых формул.

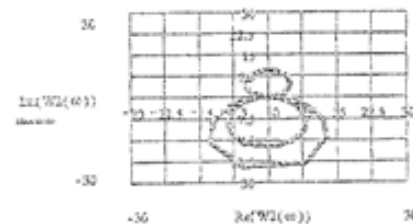


Рис.2. АФЧХ для перемещений конца балки ( $x = 1$ )

Данный подход уже реализован в задаче о продольных колебаниях стержней ступенчато-переменного сечения при соударении о препятствие [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кошутин М. П. Определение напряжений в балках, вызванных кратковременным сотрясением их опор // Динамика и прочность машин, 1960, N240. с. 141 - 154.

2. Санкин Ю. Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами. Изд-во Саратовского ун-та, 1977, 312с.

3. Ананьев И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946.

4. Санкин Ю.Н., Лебедева Н.А. Продольные колебания стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жестким препятствием // Механика и процессы управления. Ульяновск: Изд-во Ульяновского Гос. Техн. Университета, 1998, с.64-72.

## ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОТОТИПНОГО ПОДХОДА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ КОНТАКТНОЙ АППАРАТУРЫ

В.В.Угаров

### Проблемы проектирования АИС.

Выполнение современных научных исследований и комплексных испытаний новой техники невозможно без получения в большом объеме измерительной информации высокой степени достоверности. Эта проблема достаточно полно решается применением автоматизированных измерительных систем (АИС). Они эффективны при проведении измерений большого объема.

Так как конфигурация и состав АИС, используемых в науке, существенно зависят от типа исследуемого объекта, от целей исследования, от условий проведения испытаний, то по этим причинам АИС в принципе не являются объектом массового производства. В частности, условия проведения испытаний сильноточной контактной аппаратуры, а следовательно и условия эксплуатации АИС значительно отличаются от условий испытаний слаботочной аппаратуры высоким уровнем электромагнитных помех, воздействующих на компоненты АИС. В результате при ее проектировании должны быть учтены и эти факторы. Кроме того, критичными характеристиками проектируемой АИС являются время разработки до ввода ее в эксплуатацию, качество проектирования, т.е. соответствие задачам пользователя, а также время обучения обслуживающего персонала.

Известно, что традиционная схема проектирования состоит из следующих этапов: анализ задания, проектирование системы, внедрение, эксплуатация. Процесс проектирования АИС по данной жесткой методике оказывается долгим и дорогостоящим. Это связано с тем, что обнаруженные на поздних этапах ошибки проектирования и расхождения с требованиями пользователя приводят к необходимости больших временных и трудовых затрат по их исправлению или корректировке.

Недостатки традиционного подхода к проектированию АИС привели к появлению методик, позволяющих корректировать задания на более ранних этапах проектирования и резко сократить так

называемый "тенево́й" период ошибки (время существования ошибки или расхождения в реализуемом проекте). К ним относятся партиципативный (т.е. с участием пользователей), эволюционный и прототипный методы проектирования. Из них последний, являясь развитием эволюционного метода, предполагает создание прототипов на начальных этапах проектирования системы. Прототип - это первая реально функционирующая версия нового продукта (системы), хотя и обладающая ограниченными функциями или худшими параметрами.

В этом случае испытания прототипа в реальной среде определяют направление его совершенствования, а также позволяют избежать серьезных ошибок в проектировании. На основе полученной информации создается прототип следующего уровня, который также исследуется во время опытной эксплуатации.

Учет некоторых особенностей работы АИС при испытании контактной аппаратуры требует разработки и обоснования методики проектирования измерительной системы для этих условий. Для оптимизации АИС под конкретные условия эксплуатации нужна многовариантная проверка прототипа, а это связано, как правило, с большими затратами.

Поэтому прототипный подход, являясь прогрессивным при проектировании АИС, требует дальнейшего развития. Опыт разработки конкретной АИС [2] предлагает на каждом уровне проектирования создавать не только прототип, но и его математическую модель.

В этом случае модель, обладая большей вариативностью по сравнению с натурным макетом, позволит решить вопросы оптимизации на следующем уровне, а с помощью макета будет получена информация о поведении системы в реальных условиях.

#### Особенности создания моделей прототипов и их исследования.

Проводимый вычислительный эксперимент предполагает многократные изменения программного продукта, реализующего математическую модель прототипа данного уровня. Эти изменения требуют существенно меньших затрат, чем изменения в натурном прототипе. Следует отметить, что процесс проектирования собственно

математической модели требует несколько циклов доводки до состояния, при котором ее можно использовать в вычислительном эксперименте. Если для типовой прикладной программы этого достаточно, чтобы ввести ее в эксплуатацию, то программа, предназначенная для вычислительного эксперимента, заранее должна создаваться как экспериментальная установка, конфигурация и составные элементы которой будут меняться на протяжении всего времени эксплуатации модели. Необходимость создания многочисленных вариантов моделирующей программы для процесса экспериментального исследования требует дальнейшего сокращения затрат уже на уровне создания этой модели.

Поэтому в моделирующую программу изначально должны встраиваться специальные инструментальные средства, позволяющие "безболезненно" [1] проводить эти изменения. В это понятие входит следующее:

- 1) Существенное уменьшение затрат на изменение программы путем встраивания в программную реализацию модели специальных инструментальных средств.
- 2) При внесении изменений не должна нарушаться работоспособность ранее отлаженных вариантов программы.
- 3) Поддерживается текущее соответствие документации на все версии программного пакета.
- 4) Создается протокол как процесса создания вариантов, так и процесса экспериментального исследования текущего варианта модели.
- 5) Выполняется корректная ликвидация вариантных ветвей программы.

Особенностью разработки моделирующих программ для вычислительного эксперимента является не только совершенствование отдельных частей программ на пути к большему соответствию заданию, но и развитие программы в основном за счет добавления новых вариантных частей с учетом их "безболезненного" включения.

**Пример использования прототипного подхода при создании АИС для испытания контактной аппаратуры.**

При испытании в научных целях контактных аппаратов важной характеристикой является мощность, выделяемая при горении дуги в процессе разрыва контактной пары и время ее горения. Проектной задачей [2] подсистемы АИС являлось получение измерительных данных в ходе испытания контактора.

Процесс создания АИС был разбит на несколько этапов или уровней, на каждом из которых выполнялась реализация как натурального макета — прототипа, так и математической модели прототипа или наиболее важной его компоненты.

На первом уровне был реализован макет АИС, позволяющий измерять время горения дуги. Отсчет времени проводился прибором при превышении током определенного порога. Данные по цифровому каналу связи поступали на вычислительное устройство, в котором проходили предварительную обработку по специальной программе. На математической модели этого канала связи были проведены исследования по оптимизации быстродействия АИС. На натурном макете были получены данные по помехоустойчивости канала в условиях очень сильных электромагнитных помех, т.к. реализация математической модели электромагнитных полей и определение степени их влияния на канал связи чрезвычайно трудоемка и экономически невыгодна. В то же время модель канала связи, обладая большей вариативностью, чем макет, позволила на основе исследования нескольких альтернативных структур этого канала получить оптимальные оценки его быстродействия и выявить значимые факторы, влияющие на этот параметр. Кроме того, модели на всех уровнях использовались для обучения персонала работе с АИС [3].

После получения результатов исследований объектов первого уровня по критериям помехоустойчивости и быстродействия при сохранении заданной точности измерений были созданы прототип второго уровня и модель канала связи.

На первом уровне решалась задача получения данных о времени горения дуги. На втором — получение осциллограммы процесса горения дуги, по которой затем численными методами определялись все остальные параметры, в том числе время горения, мощность, выделяемая в процессе разрыва контакта, временные распределения тока и т.д. Поскольку для получения осциллограммы необходимо высокоскоростное аналого-цифровое преобразование, а компьютер не способен обрабатывать данные с такой скоростью, необходимо было

создать структурную схему канала с отдельными циклами считывания и передачи данных. На модели канала исследовалось несколько структурных схем, из которых была выбрана оптимальная по быстродействию. Вот ее краткое описание. На вход высокоскоростного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) подается в аналоговой форме сигнал с датчика тока или напряжения. После преобразования в цифровую форму данные о переходном процессе записываются в буферное быстродействующее запоминающее устройство (ЗУ). По окончании одного цикла испытания эти данные с меньшей скоростью, определяемой пропускной способностью канала связи, передаются в компьютер, где и проводится их обработка.

Эта структура позволяет решить несколько проблем при реализации АИС. Во-первых, разнесение по времени цикла считывания и цикла передачи данных позволило резко повысить помехозащищенность, т.к. в цикле считывания канал закрыт, а АЦП и ЗУ экранированы от помех. Кроме того, скорость считывания данных в ЗУ теперь не зависит от пропускной способности канала и быстродействия компьютера. Во-вторых, разнесение в пространстве устройства считывания данных (датчик, АЦП и ЗУ) и компьютера позволило, кроме повышения помехоустойчивости, собирать данные с нескольких датчиков, а затем последовательно передавать их по нескольким каналам в компьютер для совместной обработки.

В результате техническое задание на проектирование прототипа третьего уровня включает в себя функцию сбора информации с нескольких датчиков и передачи их в компьютер по каналам связи в условиях сильных электромагнитных помех. Кроме того, математическая модель третьего уровня должна содержать несколько вариантов ветвей, специфицированных для обучения персонала работе на АИС.

Применение прототипного подхода к проектированию нетиповой измерительной системы с применением математических моделей на каждом уровне позволило сократить время создания АИС, уменьшить затраты, устранить ошибки и расхождения на ранних этапах проектирования, а также получить работающую версию АИС задолго до окончания всех работ.



## Литература

- [1] Горбунов-Посадов М. М. *Конфигурации программ*. // Москва "Малип". 1993.
- [2] Верник А. Н., Угаров В. В., Чунаева М. С., Эткин А. Е. *Исследование параметров помехоустойчивости канала связи в системе измерения временной характеристики в процессе отключения коммутационной аппаратуры*. // N гос. регистрации: 01.84.0022513. Инвентарный номер: 02.8.90.015921. УДК 681.327.8:621.391.823. х/д 29-84-1. 1984 г.
- [3] Верник А. Н., Кулагин С. А., Угаров В. В. *Моделирование фундаментальных физических опытов на персональной ЭВМ*. // Научно-методический журнал Министерства просвещения "Физика в школе". — 1987. — N 3. — с. 44-47.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. \*

Е.В.Филаткина

В работе исследованы некоторые виды устойчивости почти периодических систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t, x) \quad (1)$$

$P(t, x) \in C(D \times R, R^n)$ , где  $D$  - открытая область в  $R^n$ .

**Определение 1** [1]. Непрерывная функция  $P(t, x) \in C(D \times R, R^n)$  называется почти периодической по  $t$  равномерно по  $x$ , если существует относительно плотное множество почти периодов  $\tau$  функции  $P(t, x)$  с точностью до  $\epsilon$ , то есть существует положительное число  $l = l(\epsilon)$  такое, что любой отрезок  $[a, a + l]$  содержит по меньшей мере одно число  $\tau$ , для которого выполнено неравенство:

$$|(P(t + \tau, x) - P(t, x))| < \epsilon \quad \forall t, \forall x \in D$$

**Утверждение 1** [1]. Предположим, что  $P(t, x) \in C(D \times R, R^n)$  - почти периодическая функция, тогда  $P(t, x)$  ограничена и равномерно непрерывна на любом множестве  $M \times R$ , где  $M$  - компакт в  $D, M \times D$ .

**Утверждение 2** [1]. Пусть  $h_q \rightarrow \infty$  - произвольная последовательность действительных чисел. Тогда существует подпоследовательность  $\{h_p\} \subset \{h_q\}$  для которой последовательность  $P(t + h_p, x)$  сходится к функции  $G(t, x)$  равномерно по совокупности переменных  $(t, x)$  на любом множестве  $M \times R$ , где  $M$  - компакт в  $D$ , то есть

$$G(t, x) = \lim_{h_p \rightarrow \infty} P(t + h_p, x) \quad (2)$$

и функция  $G(t, x)$  будет равномерно непрерывна по  $x$  на каждом множестве  $M \times R$ , почти периодична по  $t$  равномерно по  $x$  на этом множестве и, следовательно, непрерывна по совокупности переменных  $(t, x)$  на  $M \times D$ .

Определим систему дифференциальных уравнений предельную к (1):

$$\dot{x} = G(t, x) \quad (3)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005) и программы "Университеты России-Фундаментальные исследования" (проект N3769)

Используя методику исследований из работы [1] можно получить следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть существует такая функция  $V(t, x)$ , что:

- 1)  $V(t, x)$ -определенно положительная и почти периодическая по  $t$ .
- 2)  $\dot{V}(t, x) \leq W(t, x) \leq 0$ , где  $W(t, x)$ -почти периодическая функция по  $t$ .
- 3) Множество  $\{W(t, x) = 0\}$  содержит только нулевое решение системы (1)  $x = 0$ .

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво равномерно по  $x_0$ .

Можно сформулировать аналогичную теорему о неустойчивости.

**Теорема 2.** Пусть  $P(t, x)$ -почти периодическая по  $t$  и пусть существует такая функция  $V(t, x)$ , что:

- 1)  $V(t, x)$ -почти периодическая по  $t$ , принимающая при некотором  $t = t_0 > 0$  в любой малой окрестности  $x = 0$  положительные значения.
- 2)  $\dot{V}(t, x) \geq W(t, x) \geq 0$  в области  $V > 0$
- 3) Множество  $\{W(t, x) = 0\}$  не содержит решений системы (1).

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

**Теорема 3.** Пусть в условиях (1)-(2) Теоремы 1 выполняется так же условие (3) для каждой предельной к  $(P, W)$  пары  $(G, \Omega)$  множество  $\{\Omega(t, x) = 0\}$  не содержит решений системы (3) кроме нулевого  $x=0$ .

Тогда решение  $x=0$  системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим почти периодическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \Omega^2 \sin x = f(t), \quad (4)$$

где  $f(t)$ -почти периодическая по  $t$  функция. Пусть  $x = x_0(t)$  - почти периодическое решение этого уравнения. Введем возмущение  $y = x - x_0(t)$ . Подставляя в (4), получим уравнение возмущенного движения:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + 2\Omega^2 \sin \frac{y}{2} \cos \left( \frac{y + 2x_0(t)}{2} \right) = 0 \quad (5)$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде:

$$V(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\dot{y}^2}{\Omega^2 \cos(\frac{y}{2} + x_0(t))} + \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{y}{2})$$

$\dot{V}(t, y)$  в силу системы (5), при условии

$$|\cos x_0(t)| \geq l > 0, k > 0 \quad (6)$$

имеем оценку

$$\dot{V}(t, y) \leq \frac{-2ky^2}{\Omega^2 l} \leq 0$$

Отсюда находим:

$$W(t, y) = \frac{-2ky^2}{\Omega^2 l} = 0 \Leftrightarrow \{y = 0\}$$

На основании Теоремы 3 получим, что при условии (6) невозмущенное движение  $x = x_0$  является равномерно асимптотически устойчивым.

Рассмотрим некоторые замечания об равномерной асимптотической устойчивости. Устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения  $x=0$  системы (1) не влечет равномерную и равномерную асимптотическую устойчивость. Миллером в работе [3] был найден пример почти периодической системы дифференциальных уравнений для которой нулевое решение асимптотически устойчиво, но неравномерно устойчиво. Рассмотрим пример, который покажет, что даже при усилении условий, то есть при наличии у нулевого решения равномерной устойчивости и асимптотической устойчивости равномерная асимптотическая устойчивость будет отсутствовать. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{x} = -f(t)x, \quad (8)$$

где  $f(t)$ - равномерная почти периодическая функция.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t),$$

где непрерывная периодическая функция с периодом  $T = 2^{n+1}$ . Рассмотрим решение системы (8), оно будет иметь вид:

$$\varphi(t, x_0, t_0) = x_0 \exp \left( - \int_{t_0}^t f \right),$$

Покажем, что:

- 1)  $\varphi(t, x_0, t_0) = 0$ -равномерно устойчиво.

2)  $\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \infty$ , при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство.

1) Так как  $f(t) > 0 \quad \forall t$ , то  $\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau > 0 \quad \forall t \Rightarrow \int_{t_0}^t f(t) dt > -1$

$$|\varphi(t, x_0, t_0)| = |x_0| \exp(1) < 3|x_0| \Rightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \sigma = \epsilon/6 > 0 : |x_0| < \sigma \Rightarrow |\varphi(t, x_0, t_0)| < 3|x_0| < 3\epsilon/6 = \epsilon/2 < \epsilon$$

то есть  $\varphi(t, x_0, t_0) = 0$  - равномерно устойчиво.

2) Так как  $f(t)$  - равномерная почти периодическая функция, то для нее существует среднее значение  $m_n = \frac{1}{T} \int_0^T g_n$ .

Введем  $a_n = \sum_{j=0}^n m_j$ , тогда  $\int_0^{2^{n+1}} f = 2^{n+1} a_n$ . Найдем  $m_n$  и  $a_n$ :

$$m_n = \frac{1}{T} \int_0^T g_n(t) dt = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{2^n} g_n(t) dt + \frac{1}{2^{n+1}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} 2^{-n} dt = -\frac{1}{2^{n+1}};$$

$$m_0 = 1; a_n = \sum_{j=0}^n m_j = 1 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j+1}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(2^{-n} - 1)}{1/2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Наше условие (2) для  $f(t)$  требует, чтобы  $2^{n+1} a_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $2^{n+1} a_n = 2^{n+1} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}) = 1 + 2^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . То есть имеется асимптотическая устойчивость.

Покажем, что при выполнении условий (1)-(2) не будет в нашем примере равномерной асимптотической устойчивости. Для доказательства данного факта построим предельную систему.

Для последовательности  $\{\tau_n\}$  с  $\tau_n \rightarrow \infty$   $f(\tau_n + t) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

И предельное уравнение к (8) будет иметь вид:

$$\dot{x} = 0 \quad (9)$$

Наличие предельного уравнения  $\dot{x} = 0$  для которого отсутствует асимптотическая устойчивость, оказывается достаточным для отсутствия у свойства асимптотической устойчивости нулевого решения равномерности по  $t_0$  [1]. Это может быть также проверено непосредственным интегрированием.

Литература.

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. - М. ПММ. 1994, N2.

2. Демидович Б.П. лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. 472 с.

3. Conley C.C. and Miller R.K. Asymptotic Stability without Uniform Stability : Almost Periodic Coefficients // J.Differ. Equat. 1965. N1. P 333-336.

# КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОСТИ КОДЛИНЫ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Ханина И.Р

В данной статье речь пойдет о многообразиях ассоциативных алгебр с инволюцией над полем нулевой характеристики.

Пусть  $F$  - поле нулевой характеристики и  $R$  - некоторая ассоциативная  $F$ -алгебра с инволюцией  $*$ . Инволюция, которая действует на элементах алгебры  $R$  следующим образом

$$(ab)^* = b^*a^*, \quad (a^*)^* = a, \quad a, b \in R,$$

вместе с тождественным отображением образует группу второго порядка. Обозначим ее через  $G$ .

Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру с инволюцией  $F(X, *)$  над алфавитом  $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ .

Полином  $f(x_1, x_1^*, \dots, x_m, x_m^*)$  из алгебры  $F(X, *)$  называется  $*$ -тождеством для алгебры  $R$ , если при подстановке любых элементов  $r_1, r_1^*, \dots, r_m, r_m^*$  из алгебры  $R$  в ней выполняется равенство  $f(r_1, r_1^*, \dots, r_m, r_m^*) = 0$ . Алгебра  $R$ , в которой выполняются некоторые  $*$ -тождества, называется  $*$ -P.I. алгеброй. Идеал  $*$ -тождеств алгебры  $R$  обозначим  $Id(R, *)$ , а многообразие, порожденное алгеброй  $R$ , через  $var(R, *)$ . В общем случае, многообразие ассоциативных алгебр с инволюцией будем обозначать через  $(V, *)$ ,

далее, в алгебре  $F(X, *)$  рассмотрим подпространство  $V_n(x, *) = V_n(x_1, \dots, x_n, *)$  полиномов степени  $n$  от  $n$  переменных. Хорошо известно, что в случае поля характеристики 0 пространство

$$V_n(R, *) = \frac{V_n(x, *)}{V_n(x, *) \cap Id(R, *)}$$

содержит в себе всю информацию о многообразии  $var(R, *)$ . Рост данного многообразия определяется ростом числовой последовательности  $*$ -коразмерностей  $c_n(R, *) = \dim V_n(R, *)$ . Будем говорить, что рост многообразия полиномиальный, если существуют константы  $c_1, c_2$ , такие что для любого  $n$  верно  $c_n(R, *) < c_1 n^{c_2}$ . Многообразие обладает почтиполиномиальным ростом, если его рост не является полиномиальным, а рост любого его подмногообразия полиномиален.

В данной статье нам понадобятся два многообразия ассоциативных алгебр с инволюцией почти полиномиального роста.

Многообразие  $var(G_2, *)$  порождается двумерной ассоциативной алгеброй  $G_2 \simeq F \oplus F$  с инволюцией, действующей следующим образом  $(a, b)^* = (b, a)$ . В алгебре  $G_2$  выполняется  $*$ -тождество

$$[x_1, x_2] \equiv 0, \tag{0.1}$$

рост  $*$ -коразмерностей следующий  $c_n(G_2, *) = 2^n$ . Всю информацию об алгебре  $G_2$  можно найти в работе [1].

Многообразие  $var(M, *)$  порождается четырехмерной ассоциативной алгеброй с инволюцией  $M \simeq F \oplus F \oplus J$  и со следующей таблицей умножения:

	$a$	$b$	$c$	$c^*$
$a$	$a$	$0$	$c$	$0$
$b$	$0$	$b$	$0$	$c^*$
$c$	$0$	$c$	$0$	$0$
$c^*$	$c^*$	$0$	$0$	$0$

В алгебре  $M$  выполняется  $*$ -тождество  $x_1 x_2 \equiv 0$ . Подробное описание алгебры  $M$  дано в работе [3].

Далее, нам понадобится понятие кодлыны  $l_n(V)$  многообразия  $(V, *) = var(R, *)$ . Для этого обратимся к теории представлений гипероктаэдральной группы  $H_n$ , в случае без инволюции мы бы имели дело с представлением симметрической группы  $S_n$ .

Рассмотрим нашу группу  $G$ , ее порядок равен двум. Можно установить изоморфизм между группой  $G$  и группой  $Z_2$ . Гипероктаэдральная группа  $H_n = Z_2 \sim S_n$  состоит из пар  $\{g \otimes \sigma | g \in G^{(n)}, \sigma \in S_n\}$ . Произведение элементов в группе подчиняется следующему правилу

$$(g_1 \otimes \sigma_1)(g_2 \otimes \sigma_2) = g_1 \sigma_1(g_2) \otimes \sigma_1 \sigma_2,$$

где  $g_1, g_2 \in G^{(n)}, \sigma_1, \sigma_2 \in S_n, \sigma(g) = g_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma^{-1}(n)} \equiv (g_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n)})$ . Введем на пространстве  $V_n(R, *)$  структуру  $H_n$ -модуля

$$(g \otimes \sigma)x_{i_1} \dots x_{i_n} = x_{\sigma(i_1)}^{g_{\sigma(i_1)}} \dots x_{\sigma(i_n)}^{g_{\sigma(i_n)}}.$$

Более подробно о гипероктаэдральной группе  $H_n$  можно найти в работе [4].

В пространстве  $V_n(R, *)$  удобнее работать не с переменными  $x$  и  $x^*$ , а с симметрическими и кососимметрическими переменными  $u$  и

$z$ , где переменные  $y$  удовлетворяют равенству  $y^* = y$ , а переменные  $z$  равенству  $z^* = -z$ .

Из общей теории модуль  $V_n(R, *)$  раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Количество всех слагаемых в разложении модуля  $V_n(R, *)$  на неприводимые называется кодлинной многообразия  $(V, *)$  и обозначается  $l_n(V)$ . Будем говорить, что многообразие имеет *конечную кодлину*, если существует константа  $c$ , такая что для любого  $n$  выполняется неравенство  $l_n(V) < c$ .

Для многообразий ассоциативных алгебр с инволюцией конечность кодлины и полиномиальность роста являются эквивалентными условиями. Этот результат сформулирован в виде Теоремы 1 и является основным в данной работе. Для его доказательства нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

**Л е м м а 1.** Кодлина многообразия  $\text{var}(G_2, *)$  равна  $n + 1$ .

$$l_n(\text{var}(G_2, *)) = n + 1.$$

**Л е м м а 2.** Пусть многообразие  $(V, *)$  ассоциативных алгебр с инволюцией удовлетворяет условию  $M \notin (V, *)$ , тогда для любых положительных целых чисел  $k, m$  в нем выполняется тождество

$$y^{k+M} x y^{m+N} \equiv \sum_{i < M} \gamma_i y^i x y^{k+m+N+M-i} \quad (0.2)$$

где  $M, N$  - некоторые константы, коэффициенты  $\gamma_i \in F$  и переменная  $x$  может быть как симметрической так и коссимметрической.

**З а м е ч а н и е 1.** Кодлины многообразий  $\text{var}(G_2, *)$ ,  $\text{var}(M, *)$  не являются конечными.

Сформулируем критерий конечности кодлины многообразий ассоциативных алгебр с инволюцией.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $(V, *) = \text{var}(R, *)$  - многообразие ассоциативных алгебр с инволюцией над полем нулевой характеристики.

Следующие условия эквивалентны:

- (i) многообразии имеет конечную кодлину;
- (ii) многообразии имеет полиномиальный рост.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

Пусть многообразии имеет конечную кодлину. Рассмотрим кодлины многообразий  $\text{var}(G_2, *)$  и  $\text{var}(M, *)$ , согласно Лемме

1 и Следствию 1 [3] соответственно, они зависят от  $n$ . Отсюда выполняются следующие условия:

$$G_2 \notin (V, *); M \notin (V, *). \quad (0.3)$$

Из последнего свойства (Теорема 1, (ii)) следует полиномиальность роста многообразии  $(V, *)$ . Мы показали, что из условия (i) следует выполнение условия (ii). Теперь докажем обратное.

Пусть многообразии  $(V, *)$  ассоциативных алгебр с инволюцией имеет полиномиальный рост. Тогда [5] существует такая константа  $c$ , что все  $H_n$ -модули,  $n = m_1 + m_2$ , соответствующие парам  $(m_1, m_2)$  - разбиений  $\lambda, \mu, |\lambda| - \lambda_1 > c$  или  $|\mu| > c$ , являются нулевыми. Иными словами, при любом  $n$  количество ненулевых неизоморфных подмодулей в разложении модуля  $V_n(R, *)$  на неприводимые не превосходит некоторой константы, не зависящей от  $n$ .

Из полиномиальности роста многообразии  $(V, *)$  следует также выполнимость условия  $M \notin V$ . Тогда из Леммы 2 в многообразии  $V$  выполняется тождество (0.2), благодаря которому количество переменных  $y$  между переменными  $x_i$  можно сделать не большим некоторой константы  $M$ . Возьмем произвольный элемент вида  $y^{\alpha_0} x_1 y^{\alpha_1} x_2 \dots x_t y^{\alpha_t}$ ,  $t$  - любое натуральное число, и начиная с  $x_1$  "перегоним" переменные  $y$  слева направо, затем используя тождество ассоциативности выделим в скобки слово  $y \dots y x_2 y \dots y$  и уже в нем "перегоним" переменные  $y$  слева направо и т.д. В результате мы получим что исходный элемент линейно выражается через конечное число элементов вида  $y^{\alpha'_0} x_1 y^{\alpha'_1} x_2 \dots x_t y^{\alpha'_t}$ , где  $\alpha'_i \leq N, i = 0, \dots, t - 1$ . Отсюда, любой неизоморфный  $H_n$ -подмодуль разлагается в прямую сумму конечного числа неприводимых подмодулей, причем это число или кратность вхождения ограничено константой, не зависящей от числа  $n$ .

Таким образом, что при любом  $n$  кодлина  $l_n(V, *)$  многообразии  $(V, *)$  ограничена произведением двух не зависящих от  $n$  констант, первая из которых ограничивает число неизоморфных подмодулей в разложении  $H_n$ -модуля  $V_n(R, *)$  на неприводимые, а вторая ограничивает кратность вхождения этих подмодулей. Отсюда, многообразии  $(V, *)$  имеет конечную кодлину.

Мы показали, что из условия (ii) следует выполнение условия (i).

Теорема доказана.

Работа частично поддержана грантом "Университеты России  
- фундаментальные исследования" 1999 года.

## Литература

- [1] A. Giambruno and S. Mishchenko, *New results on identities of algebras with involution*, preprint.
- [2] V. Drensky and A. Giambruno, *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for  $2 \times 2$  matrices with involution*, Canadian J. Math. 46 (1994), 718-733.
- [3] S. Mischenko and A. Valenti, *A star-variety with almost polynomial growth*, preprint.
- [4] A. Giambruno and A. Regev, *Wreath products and P.I. Algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra 35 (1985) 133 - 149.
- [5] A. Giambruno and S. Mischenko *Polynomial boundness of the  $*$ -codimensions and Young diagrams*, preprint.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ МОДЕЛЬНЫМИ ПОГРЕШНОСТЯМИ

Ю.В.Цыганова

Рассмотрим системы, представимые уравнениями:

$$x(t_{i+1}) = [\Phi + \Delta\Phi(t_i)]x(t_i) + \Psi u(t_i) + \Gamma w(t_i); \quad x(t_i) \in \mathbb{R}^n; \quad w(t_i) \in \mathbb{R}^q, \quad (1)$$

$$z(t_i) = [H + \Delta H(t_i)]x(t_i) + v(t_i); \quad i = 1, 2, \dots; \quad z(t_i) \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

$$u(t_i) = f_r(z^{t_i-j}); \quad j = 0, 1, \dots; \quad u(t_i) \in \mathbb{R}^r, \quad (3)$$

где  $x(t_i)$  — вектор состояния системы (1)–(3);  $z(t_i)$  — вектор измерения;  $u(t_i)$  — управляющее входное воздействие системы;  $f_r(\cdot)$  — функция;  $z^{t_i-j} = (\dots, z(t_{i-2}), z(t_{i-1}), z(t_i)) \in \mathbb{R}^{m \times j}$ ;  $\{w(t_0), w(t_1), \dots\}$ ,  $\{v(t_1), v(t_2), \dots\}$ ,  $\{\{\Delta\Phi_{ij}(t_0)\}, \{\Delta\Phi_{ij}(t_1)\}, \dots\}$ ,  $\{\{\Delta H_{ij}(t_1)\}, \{\Delta H_{ij}(t_2)\}, \dots\}$  — независимые белые последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и конечными ковариациями  $Q$ ,  $R$ ,  $\text{cov}(\Delta\Phi)$ ,  $\text{cov}(\Delta H)$  соответственно. (Заметим, что  $\dim \text{cov}(\Delta\Phi) = n^2 \times n^2$ ,  $\dim \text{cov}(\Delta H) = mn \times mn$ .) Все указанные последовательности также не зависят от начального состояния  $x(t_0)$  с математическим ожиданием  $\bar{x}_0$  и ковариацией  $P_0$ .

Предположим, что ковариации шумов объекта (1)  $Q$  и измерителя (2)  $R$ , ковариации модельных погрешностей  $\text{cov}(\Delta\Phi)$  и  $\text{cov}(\Delta H)$ , а также матрица  $\Gamma$  неизвестны, и следовательно, могут отличаться от их номинальных значений  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\text{cov}(\Delta\bar{\Phi})$ ,  $\text{cov}(\Delta\bar{H})$  и  $\bar{\Gamma}$ .

Для вычисления оптимальных управляющих воздействий  $u(t_i)$  на систему (1)–(3) вводится следующий критерий управления:

$$J_c = \lim_{j \rightarrow -\infty} E \left\{ \frac{1}{2} x^T(t_{N+1}) X_f x(t_{N+1}) + \sum_{i=j}^N \frac{1}{2} [x^T(t_i) X_x x(t_i) + u^T(t_i) V_u u(t_i)] \right\} \quad (4)$$

где  $t_j$  — начальный момент времени, а  $t_{N+1}$  — конечный момент времени интервала управления. Отличие между истинными и номинальными значениями неизвестных матриц приводит к задаче адаптации обратной связи, которая рассматривается как задача идентификации оптимальных значений неизвестных параметров системы управления.

Предположим, что истинные и номинальные параметры удовлетворяют следующим стандартным предположениям:

A1. Матрица  $R$  — положительно-определенная ( $R > 0$ ).

A2. Измерения могут быть неполными ( $\text{rank } H < n$ ).

A3. Пара матриц  $(\Phi, S_w)$ , где  $S_w S_w^T = \Gamma Q \Gamma^T$ , — стабилизируемая, а пара матриц  $(\Phi, H)$  — полностью наблюдаемая. Последнее означает, что  $\text{rank } W(H, \Phi, n) = n$ , где  $W(P, F, k)$  определяется как

$$W(P, F, k) = [P^T | (PF)^T | \dots | (PF^{k-1})^T]^T$$

для любой прямоугольной матрицы  $P$  и любой квадратной матрицы  $F$ ,  $k \geq 1$ .

A4. Матрицы  $V_u > 0$ ,  $X_f \geq 0$  и  $X_x > 0$ .

A5. Пара матриц  $(\Phi, \Psi)$  полностью управляемая, т. е.  $\text{rank } W^T(\Psi^T, \Phi^T, n) = n$  и пара матриц  $(\Phi, S_x)$ , где  $S_x S_x^T = X_x$  — детектируемая.

В случае, когда значения матриц  $Q$ ,  $R$ ,  $\text{cov}(\Delta\Phi)$ ,  $\text{cov}(\Delta H)$  и  $\Gamma$  точно известны, оптимальным по критерию (4) является разделение обратной связи на фильтр и регулятор [2].

Оптимальный фильтр для задачи (1)–(3) известен из [1] и дается следующей последовательностью уравнений:

$$\hat{x}(t_i^+) = \hat{x}(t_i^-) + K \nu(t_i) = \Phi \hat{x}(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}) + K \nu(t_i), \quad (5)$$

$$\hat{x}(t_i^-) = \Phi \hat{x}(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}), \quad z(t_i) - H \hat{x}(t_i^-) = \nu(t_i), \quad (6)$$

где  $K = \Sigma H^T R_v^{-1}$ ,  $\Sigma$  и  $R_v$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Sigma = \Phi(I - KH)\Sigma\Phi^T + E\{\Delta\Phi X \Delta\Phi^T\} + \Gamma Q \Gamma^T, \quad (7)$$

$$X = \Phi X \Phi^T + E\{\Delta\Phi X \Delta\Phi^T\} + \Gamma Q \Gamma^T, \quad (8)$$

$$R_v = H \Sigma H^T + E\{\Delta H X \Delta H^T\} + R. \quad (9)$$

Оценки  $\hat{x}(t_i^+)$  используются регулятором для вычисления управляющих воздействий

$$u(t_i) = -G_r \hat{x}(t_i^+), \quad (10)$$

где  $G_r = L\Phi$ ,  $L = (\Psi^T \Pi \Psi + V_u)^{-1} \Psi^T \Pi$ ,  $\Pi$  удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати:

$$\Pi = \Phi^T (\Pi - \Pi \Psi (\Psi^T \Pi \Psi + V_u)^{-1} \Psi^T \Pi) \Phi + X_x \quad (11)$$

(существование и единственность матриц  $\Sigma$  и  $\Pi$  обеспечивается предположениями А1, А3 и А4, А5).

В условиях априорной неопределенности вышеуказанных параметров системы обратная связь не может быть сформирована, исходя из (5)–(11), однако ее можно построить путем последовательного подключения к системе (1)–(2) субоптимального фильтра (оптимального по структуре) и субоптимального регулятора с заранее выбранной функцией  $f_r(\cdot)$

$$u(t_i) = f_r(\hat{x}(t_i^+)), \quad (12)$$

$$\hat{x}(t_i^+) = \hat{x}(t_i^-) + \bar{K}\bar{v}(t_i) = \Phi\hat{x}(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}) + \bar{K}\bar{v}(t_i), \quad (13)$$

$$\bar{v}(t_i) = z(t_i) - H\hat{x}(t_i^-), \quad \hat{x}(t_i^-) = \Phi\hat{x}(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}). \quad (14)$$

Матрица  $\bar{K}$  может быть получена из уравнений (7)–(9), в которых неизвестные матрицы заменяются на их номинальные значения. Если функция регулятора  $f_r(\cdot)$  выбирается линейной, то

$$u(t_i) = -G_r\hat{x}(t_i^+), \quad (15)$$

Из условия экспоненциальной устойчивости  $2n$ -мерной системы (1)–(3), (12)–(14) получаем последнее предположение. В случае линейной обратной связи (12)–(15), оно выглядит следующим образом:

**А6.** Спектральный радиус  $\rho[\cdot]$  переходной матрицы

$$\begin{bmatrix} \Phi & | & -\Psi G_r \\ \bar{K}H\Phi & | & (I - \bar{K}H)\Phi - \Psi G_r \end{bmatrix}$$

для составного вектора  $(x(t_i), \hat{x}(t_i^+))$  строго меньше 1.

**Постановка задачи.** Задан исходный функционал качества (определяющий предельную среднеквадратическую ошибку фильтрации)

$$J_0 = \lim_{j \rightarrow -\infty} E\{e^T(t_j^+)e(t_j^+)|Z(t_j, t_i)\} \quad (16)$$

с областью определения, состоящей из всех возможных оценок  $\hat{x}_{EST}(t_i^+)$  вектора  $x(t_i)$ , при условии множества предыдущих измерений, полученных от замкнутых систем (1)–(3) и (12)–(14) или (13)–(15), где

$$Z(t_j, t_i) = [z(t_j)|z(t_{j+1})|\dots|z(t_i)]^T \quad (17)$$

составной вектор измерений для  $i > j$ , а  $e(t_i^+)$  — ошибка оценивания, полученная в результате работы некоторого фильтра,

$$e(t_i^+) = x(t_i) - \hat{x}_{EST}(t_i^+). \quad (18)$$

Минимум (16) достигается тогда и только тогда, когда  $\hat{x}_{EST}(t_i^+)$  совпадает с  $\hat{x}(t_i^+)$ , полученной от оптимального фильтра. Однако, минимизация (16) известными методами (например, методом стохастической аппроксимации) не возможна по причине нереализуемости ошибки (18). Это приводит к необходимости формирования некоторого вспомогательного функционала качества [3], зависящего только от доступных величин  $u(t_i)$  и  $z(t_i)$ , с условием одновременного достижения его минимума с минимумом (16) при одинаковых значениях аргумента минимизации в точке минимума.

**Решение задачи.** Перепишем систему (1)–(3) в следующем виде:

$$x(t_{i+1}) = \Phi x(t_i) + y(t_i) + \Psi u(t_i) + \Gamma w(t_i),$$

$$z(t_i) = Hx(t_i) + p(t_i) + v(t_i); \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$u(t_i) = f_r(z^{t_i-j}); \quad j = 0, 1, \dots,$$

где  $\{y(t_i) = \Delta\Phi(t_i)x(t_i)\}$  и  $\{p(t_i) = \Delta H(t_i)x(t_i)\}$  — последовательность не зависящих от  $\{w(t_i)\}$ ,  $\{v(t_i)\}$  и  $x_0$  случайных величин (ввиду независимости  $\Delta\Phi(t_i)$  и  $\Delta H(t_i)$  с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями  $E\{\Delta\Phi(t_i)X(t_i)\Delta\Phi^T(t_i)\}$ ,  $E\{\Delta H(t_i)X(t_i)\Delta H^T(t_i)\}$  соответственно, где  $X(t_i) = E\{x(t_i)x^T(t_i)\}$ ).

Рассмотрим фильтр (5)–(11) в качестве оптимальной модели  $\gamma M(\Theta)$  системы (1)–(3), где  $\Theta = K$ ,  $K = K(\Gamma, Q, R, \text{cov}(\Delta\Phi), \text{cov}(\Delta H))$  — неизвестный параметр, который подлежит идентификации. Присоединим к системе (1)–(3) адаптивную модель  $\gamma M(\hat{\Theta})$ , описываемую уравнениями:

$$g(t_i^-) = \Phi g(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}), \quad (19)$$

$$g(t_i^+) = g(t_i^-) + D\eta(t_i) = \Phi g(t_{i-1}^+) + \Psi u(t_{i-1}) + D\eta(t_i), \quad (20)$$

$$z(t_i) = Hg(t_i^-) + \eta(t_i). \quad (21)$$

Модель дополним условием экспоненциальной устойчивости:  $\rho((I - DH)\Phi) < 1$ . В процессе адаптации модель должна идентифицировать фильтр (5)–(11), т. е. модельный параметр  $\hat{\Theta} = D$  должен по окончании этого процесса совпадать с оптимальным значением  $\Theta = K$ .



Из уравнений (1)–(3) запишем рекуррентные соотношения для  $x(t_{i+j})$  и  $z(t_{i+j})$  через  $x(t_i)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} x(t_{i+j}) &= \Phi^j x(t_i) + F_j Y(t_i, t_{i+j-1}) + S_j U(t_i, t_{i+j-1}) + G_j W(t_i, t_{i+j-1}), \\ z(t_{i+j}) &= H \Phi^j x(t_i) + H F_j Y(t_i, t_{i+j-1}) + H S_j U(t_i, t_{i+j-1}) + \\ &+ H G_j W(t_i, t_{i+j-1}) + p(t_{i+j}) + v(t_{i+j}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_j &= [\Phi^{j-1} | \Phi^{j-2} | \dots | \Phi | I], \\ S_j &= [\Phi^{j-1} \Psi | \Phi^{j-2} \Psi | \dots | \Phi \Psi | \Psi], \\ G_j &= [\Phi^{j-1} \Gamma | \Phi^{j-2} \Gamma | \dots | \Phi \Gamma | \Gamma], \end{aligned}$$

$Y(t_i, t_{i+j-1})$ ,  $U(t_i, t_{i+j-1})$ ,  $W(t_i, t_{i+j-1})$  определяются также, как и в (17). Тогда для  $j = 1, \dots, n$  получаем:

$$Z(t_{i+1}, t_{i+n}) = A \Phi x(t_i) + F Y(t_i, t_{i+n-1}) + S U(t_i, t_{i+n-1}) + \\ + G W(t_i, t_{i+n-1}) + P(t_{i+1}, t_{i+n}) + V(t_{i+1}, t_{i+n}), \quad (22)$$

где  $A = W(H, \Phi, n)$ ;  $P(t_{i+1}, t_{i+n})$ ,  $V(t_{i+1}, t_{i+n})$  определяются как в (17), а матрицы  $F$ ,  $S$ ,  $G$  выглядят следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ H\Phi & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H\Phi^{n-1} & H\Phi^{n-2} & \dots & H \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} H\Psi & 0 & \dots & 0 \\ H\Phi\Psi & H\Psi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H\Phi^{n-1}\Psi & H\Phi^{n-2}\Psi & \dots & H\Psi \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} H\Gamma & 0 & \dots & 0 \\ H\Phi\Gamma & H\Gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H\Phi^{n-1}\Gamma & H\Phi^{n-2}\Gamma & \dots & H\Gamma \end{bmatrix}.$$

Дополним описание (19)–(21) уравнениями:

$$g(t_{i+k}^-) = \Phi g(t_{i+k-1}^-) + \Psi u(t_{i+k-1}), \quad (23)$$

$$\tilde{z}(t_{i+k}^-) = H g(t_{i+k}^-), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

где  $g(t_{i+1}^-) = g(t_{i+1})$ . Используя уравнения (23), (24), получаем

$$\tilde{Z}(t_{i+1}, t_{i+n}) = A g(t_{i+1}^-) + S_1 U(t_i, t_{i+n-1}),$$

где  $\tilde{Z}(t_{i+1}, t_{i+n}) = [\tilde{z}(t_{i+1}^-), \dots, \tilde{z}(t_{i+n}^-)]$ ,

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H\Psi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H\Phi\Psi & H\Psi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & H\Phi^{n-2}\Psi & H\Phi^{n-1}\Psi & \dots & H\Psi \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $g(t_{i+1}^-) = \Phi g(t_i^+) + \Psi u(t_i)$ , то

$$\tilde{Z}(t_{i+1}, t_{i+n}) = A \Phi g(t_i^+) + S U(t_i, t_{i+n-1}). \quad (25)$$

Наблюдаемый процесс  $\varepsilon(t_i)$  запишем в виде:

$$\varepsilon(t_i) = \Phi^{-1} A^+ [Z(t_{i-n+1}, t_i) - \tilde{Z}(t_{i-n+1}, t_i)],$$

где  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  — псевдообратная матрица, которая существует в силу предположения АЗ (т. к.  $A = W(H, \Phi, n)$ ).

Используя уравнения (22) и (25), получим

$$\varepsilon(t_i) = (x(t_{i-n}) - g(t_{i-n}^+)) + \Psi^{-1} A^+ F Y(t_{i-n}, t_{i-1}) + \\ + \Phi^{-1} A^+ G W(t_{i-n}, t_{i-1}) + \Phi^{-1} A^+ P(t_{i-n+1}, t_i) + \\ + \Phi^{-1} A^+ V(t_{i-n+1}, t_i). \quad (26)$$

**Теорема.** Минимум вспомогательного функционала качества

$$J_a = \lim_{j \rightarrow -\infty} E\{\varepsilon^T(t_i) \varepsilon(t_i) | Z(t_j, t_i)\}$$

в каждый момент времени  $t_i$  по неизвестному параметру  $\hat{\Theta} = D$  в (23), (24) является необходимым и достаточным условием минимума (16).

**Доказательство.** Пусть  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  — множества векторов, составляющих каждое из пяти слагаемых (26). Тогда

$$T_1 = W(t_j, t_{i-n-1}) \cup V(t_j, t_{i-n}) \cup P(t_j, t_{i-n}) \cup Y(t_j, t_{i-n-1});$$

$$T_2 = Y(t_{i-n}, t_{i-1});$$

$$T_3 = W(t_{i-n}, t_{i-1});$$

$$T_4 = P(t_{i-n+1}, t_i);$$

$$T_5 = V(t_{i-n+1}, t_i).$$

Так как каждое  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  образовано множеством независимых случайных векторов и  $\bigcap_{i=1}^5 T_i = \emptyset$ , то  $E\{T_k T_j} = 0$ ,  $k \neq j$ ,  $k, j = 1, \dots, 5$ . Поэтому  $J_a$  будет достигать своего минимума тогда и только тогда, когда предельная среднеквадратическая ошибка

$$J = \lim_{j \rightarrow -\infty} E\{[x(t_k) - g(t_k^+)]^T [x(t_k) - g(t_k^+)] | Z(t_j, t_k)\}$$

при  $k = i - n$  будет иметь минимальное значение. Это выполняется при условии  $g(t_{i-n}^+) = \hat{x}(t_{i-n}^+)$ . Выбор  $\hat{x}_{EST}(t_{i-n}^+) = g(t_{i-n}^+)$  в (18) дает

равенство  $J = J_0$  на интервале  $(t_j, t_{i-n})$ . Поскольку  $j \rightarrow -\infty$ , и с учетом стационарности процессов, получаем

$$J_a = J_0 + \text{Const}_i,$$

где

$$\begin{aligned} \text{Const}_i = & \text{Sp}[\Phi^{-1}A^+FE\{Y(t_{i-n}, t_{i-1})Y^T(t_{i-n}, t_{i-1})\}F^T(A^+)^T\Phi^{-T}] + \\ & \text{Sp}[\Phi^{-1}A^+GQ_nG^T(A^+)^T\Phi^{-T}] + \\ & \text{Sp}[\Phi^{-1}A^+E\{P(t_{i-n+1}, t_i)P^T(t_{i-n+1}, t_i)\}(A^+)^T\Phi^{-T}] + \\ & \text{Sp}[\Phi^{-1}A^+R_n(A^+)^T\Phi^{-T}], \end{aligned}$$

$$Q_n = \begin{bmatrix} Q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q \end{bmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} R & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R \end{bmatrix},$$

$$E\{Y(t_{i-n}, t_{i-1})Y^T(t_{i-n}, t_{i-1})\} = M_1, \quad E\{P(t_{i-n+1}, t_i)P^T(t_{i-n+1}, t_i)\} = M_2,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} E\{\Delta\Phi(t_{i-n})X(t_{i-n})\Delta\Phi^T(t_{i-n})\} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & E\{\Delta\Phi(t_{i-1})X(t_{i-1})\Delta\Phi^T(t_{i-1})\} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} E\{\Delta H(t_{i-n+1})X(t_{i-n+1})\Delta H^T(t_{i-n+1})\} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & E\{\Delta H(t_i)X(t_i)\Delta H^T(t_i)\} \end{bmatrix},$$

$\text{Const}_i$  не зависит от параметров фильтра (19)–(21). •

## Литература

- [1] Hampton R. L. T. *On unknown state-dependent noise, modeling errors, and adaptive filtering*. Comput. & Elect. Engng. Vol. 2, pp. 195–201. Pergamon Press, 1975.
- [2] Саридис Дж. *Самоорганизующиеся стохастические системы управления*. М., Наука, 1980.
- [3] Семушин И. В. *Адаптивные схемы идентификации и контроля при обработке случайных сигналов*. Изд-во Саратов. ун-та, 1985.

# К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. \*\*

О.Д.Юрьева

В работе выводятся условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия материальной точки, движущейся относительно вращающейся с переменной угловой скоростью системы координат.

Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия материальной точки массы  $m$  с потенциальной энергией  $\Pi = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)$ , движущейся относительно подвижной системы отсчета  $xyz$ , которая вращается с переменной угловой скоростью  $\omega = \omega(t)$  ( $0 < \omega_1 \leq \omega(t) \leq \omega_2$   $\omega_1, \omega_2$  - некоторые постоянные) относительно оси  $z$ ; вращение происходит по отношению к инерциальной системе отсчета  $x_1y_1z_1$ . Предполагается, что на точку действует сила вязкого трения  $Q_x = -l_1\dot{x}$ ,  $Q_y = -l_2\dot{y}$ ,  $Q_z = -l_3\dot{z}$  в проекциях на оси подвижной системы отсчета  $xyz$ .

Составим уравнения Лагранжа, описывающие движение данной точки. Запишем проекции абсолютной скорости точки на подвижные оси:

$$v_x = \dot{x} - \omega y; \quad v_y = \dot{y} + \omega x; \quad v_z = \dot{z}.$$

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{1}{2}m\{(\dot{x} - \omega(t)y)^2 + (\dot{y} + \omega(t)x)^2 + \dot{z}^2\}$$

или

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(t)(xy - yx) + \frac{1}{2}m\omega^2(t)(x^2 + y^2).$$

Отсюда движение точки описывается уравнениями Лагранжа

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} - 2\omega(t)\dot{y} - \omega^2(t)x - \dot{\omega}(t)y) &= -l_1\dot{x} - k_1x; \\ m(\ddot{y} + 2\omega(t)\dot{x} + \omega^2(t)y + \dot{\omega}(t)x) &= -l_2\dot{y} - k_2y; \\ m\ddot{z} &= -l_3\dot{z} - k_3z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из этих уравнений находим, что система имеет положение равновесия

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad x = y = z = 0.$$

\*\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005) и программы "Университеты России-Фундаментальные исследования" (проект N3769)

Определим условия асимптотической устойчивости этого положения равновесия на основе функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}x(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{x}(t) \quad \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}y(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{y}(t) \right) C^{-1}(t) \cdot \left( \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}x(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{x}(t) \quad \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}y(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{y}(t) \right)^T + \frac{\omega(t)}{2}(x^2(t) + y^2(t)) + \frac{1}{2}\dot{z}^2(t) + \frac{k_3}{2m}z^2(t), \quad (2)$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} \frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^2} - \frac{\ddot{\omega}}{2\omega} - \omega^2 + \frac{l_1\dot{\omega}}{2m\omega} + \frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^2} - \frac{\ddot{\omega}}{2\omega} - \omega^2 + \frac{l_2\dot{\omega}}{2m\omega} + \frac{k_2}{m} \end{pmatrix}.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a(t) &= 3\dot{\omega}^2(t)m - 2\ddot{\omega}(t)\omega(t)m - 2\omega^4(t)m + 2l_1\omega(t)\dot{\omega}(t) + 4k_1\omega^2(t), \\ b(t) &= 3\dot{\omega}^2(t)m - 2\ddot{\omega}(t)\omega(t)m - 2\omega^4(t)m + 2l_2\omega(t)\dot{\omega}(t) + 4k_2\omega^2(t), \end{aligned}$$

находим, что функция Ляпунова (2) будет определено положительной и допускать бесконечно малый высший предел при выполнении следующих условий

$$0 < \delta_1 = \text{const} \leq a(t) \leq c_1 = \text{const}; \quad 0 < \delta_2 = \text{const} \leq b(t) \leq c_2 = \text{const} \quad (3)$$

Производная этой функции в силу системы (1) имеет следующий вид

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}x(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{x}(t) \quad \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}y(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{y}(t) \right) S(t) \cdot \left( \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}x(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{x}(t) \quad \frac{\dot{\omega}(t)}{2\sqrt{\omega(t)}}y(t) + \sqrt{\omega(t)}\dot{y}(t) \right)^T - \frac{l_3}{m}\dot{z}^2(t),$$

где

$$S(t) = \begin{pmatrix} s_{11} & \frac{8\omega^3(t)m}{b(t)} - \frac{8\omega^3(t)m}{a(t)} \\ \frac{8\omega^3(t)m}{b(t)} - \frac{8\omega^3(t)m}{a(t)} & s_{22} \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = \frac{8\omega^2(t)l_1a(t) - 16m\dot{\omega}(t)\omega(t)a(t) + 4m\omega^2(t)\dot{a}(t)}{a^2(t)}$$

$$s_{22} = \frac{8\omega^2(t)l_2b(t) - 16m\dot{\omega}^2(t)\omega(t)b(t) + 4m\omega^2(t)\dot{b}(t)}{b^2(t)}$$

Производная функции Ляпунова  $\dot{V}$  будет положительной, если матрица  $S(t)$  — положительно определена.

Запишем условия положительной определенности матрицы  $S(t)$ , используя обобщенный критерий Сильвестра.

Получим следующие условия:

$$8\omega^2(t)l_1a(t) - 16m\dot{\omega}(t)\omega(t)a(t) + 4m\omega^2(t)\dot{a}(t) \geq \delta_3 = \text{const} > 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (8\omega^2(t)l_1a(t) - 16m\dot{\omega}(t)\omega(t)a(t) + 4m\omega^2(t)\dot{a}(t)) \cdot \\ & \cdot (8\omega^2(t)l_2b(t) - 16m\dot{\omega}^2(t)\omega(t)b(t) + 4m\omega^2(t)\dot{b}(t)) - \\ & - 64m^2\omega^6(t)(a(t) - b(t))^2 \geq \delta_4 = \text{const} > 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Используя теорему для линейной системы о равномерной асимптотической устойчивости из работы [1], заключаем, что условия (4), (5) будут являться достаточными условиями равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия  $x = y = z = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$  системы (1).

В случае, когда  $l_1 = l_2 = l$ ,  $k_1 = k_2 = k$  условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия рассматриваемой системы принимают следующий вид

$$0 < \delta_5 = \text{const} \leq a_1(t) \leq c_3 = \text{const}$$

$$8\omega^2(t)la_1(t) - 16m\dot{\omega}(t)\omega(t)a_1(t) + 4m\omega^2(t)\dot{a}_1(t) \geq \delta_6 = \text{const} > 0,$$

где  $a_1(t) = 3\dot{\omega}^2(t)m - 2\ddot{\omega}(t)\omega(t)m - 2\omega^4(t)m + 2l\omega(t)\dot{\omega}(t) + 4k\omega^2(t)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Юрьева О.Д. Об устойчивости линейных систем. // Ученые записки Ульяновского государственного университета "Фундаментальные проблемы математики и механики". Ульяновск: Ульян. гос. унив. 1996. Часть 2. Вып. 1. С. 134-139.

## AN OVERVIEW OF METHODS FOR ADDITIVE CHANGES DETECTION IN THE LINEAR STOCHASTIC TIME INVARIANT MODELS

O.U.Gorokhov

**Introduction.** The change detection problem has received extensive research attention. Mathematically, the change detection problem can be formulated as that of the *quickest detection of abrupt changes in stochastic systems*.

**Definition.** *Fault* is an unpermitted deviation of at least one characteristic property or variable of a system from standard behavior.

**Definition.** *Fault detection* is determination of the faults present in a system and the time when they occur.

**Problem statement.** We consider the following linear time invariant stochastic state-space model in discrete time:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + \omega_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x_k, \omega_k \in R^n \quad (1)$$

$$x_0 \sim N(0, P_0)$$

$$y_k = Hx_k + \nu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_k, \nu_k \in R^m \quad (2)$$

where  $\omega_k, \nu_k$  are two independent Gaussian white noise sequences whose covariance matrices are  $Q$  and  $R$  respectively.

Additive changes can be modelled as follows:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + \omega_k + \Gamma Y_x(k, t_0) \quad (3)$$

$$y_k = Hx_k + \nu_k + \Xi Y_y(k, t_0) \quad (4)$$

where  $\Gamma$  and  $\Xi$  are matrices of dimensions  $n \times \bar{n}$  ( $\bar{n} \leq n$ ) and  $m \times \bar{m}$  ( $\bar{m} \leq m$ ),  $Y_x(k, t_0)$  and  $Y_y(k, t_0)$  are the *dynamic profiles* of the assumed changes. The assumptions about  $\Gamma$  and  $\Xi$  depend on the level of available *a priori* information. The instant  $t_0$  is the unknown change time, so  $Y_x(k, t_0) = 0, k < t_0$ , and  $Y_y(k, t_0) = 0, k < t_0$ .

The problem is to determine the presence of change and time of its occurrence using formal description of additive changes in LTI state-space

model as fast as it is possible for fixed frequency of false alarms before instant  $t_0$ . This problem may be split into two steps: (1) *generation of residuals*, which are ideally close to zero under no-fault conditions and minimally sensitive to noise and maximally sensitive to faults; (2) *residual evaluation* or design of decision rules based on these residuals.

The residual generation function  $g_k(Z_k) = g_k(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k)$  is responsible for the first step in the above scheme and decision has a form of the stopping rule:

$$t_a = \inf_n \{g_n(Z_n) \geq \lambda\} \quad (5)$$

where  $\lambda$  is the certain threshold, so the problem is to construct the function  $g_n(Z_n)$  and choose threshold  $\lambda$ . This is the general framework not only for additive changes in LTI models but for non-additive faults in nonlinear models too.

**Statistical approaches.** The main idea of statistical approach is solving the additive change problem by first using the *transformation from observations to innovations*, which can be achieved with the aid of Kalman filter, and the relevant corresponding basic problem of monitoring the mean value of innovation process.

Kalman filter for estimating the state  $x_k$  of model (3) can be summarized in the following manner:

$$\hat{x}_{k+1|k} = F\hat{x}_{k|k} + Gu_k$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \varepsilon_k$$

$$\varepsilon_k = y_k - H\hat{x}_{k|k-1}$$

where  $K_k$  - the Kalman gain is given by

$$K_k = P_{k|k-1} H^T \Sigma_k^{-1}, \quad P_{k+1|k} = F P_{k|k-1} F^T + Q, \quad P_{1|0} = P_0$$

$$P_{k|k} = (I_n - K_k H) P_{k|k-1}, \quad \Sigma_k = H P_{k|k-1} H^T + R$$

The linear feature of the model and the additive effect of change  $(\Gamma Y_x, \Xi Y_y)$  in (3) and (4) lead to the following decomposition of the state, its estimate and the innovation:

$$x_k = x_k^0 + \alpha(k, t_0), \quad \hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^0 + \beta(k, t_0)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^0 + \rho(k, t_0)$$

where the exponent 0 is for quantities corresponding to the unchanged model (1),(2),  $t_0 \leq k$ . The functions  $\alpha, \beta, \rho$  are computed with the aid of following recursions [3]:

$$\alpha(k, t_0) = F\alpha(k-1, t_0) + \Gamma Y_x(k-1, t_0)$$

$$\beta(k, t_0) = (I - K_k H) F \beta(k-1, t_0) + K_k [H\alpha(k, t_0) + \Xi Y_y(k, t_0)]$$

$$\rho(k, t_0) = H[\alpha(k, t_0) - F\beta(k-1, t_0)] + \Xi Y_y(k, t_0)$$

with the initial conditions  $\alpha(t_0, t_0) = 0, \quad \beta(t_0 - 1, t_0) = 0$

Due to last recursive equations for innovation process  $\varepsilon_k$ , the  $\varepsilon_k$  has the following distribution when no change occurs  $\mathcal{L}(\varepsilon_k) = N(0, \Sigma_k)$  and  $\mathcal{L}(\varepsilon_k) = N(\rho(k, t_0), \Sigma_k)$  after change.

The problem of detection additive changes in LTI models is reduced to monitoring the mean value of innovation process  $\varepsilon_k$ .

Consider the detection of a change in mean vector  $\theta$  of independent Gaussian sequence  $\varepsilon_k \sim N(\theta, \Sigma)$ . Until time  $t_0 - 1$  included, the vector  $\theta$  is equal  $\theta_0$ . and then from time  $t_0$  the vector  $\theta$  is equal  $\theta_1$ . Moreover, parameter  $\theta_1$  is possibly a function of time, as it can be seen from the dynamic profiles.

We distinguish three cases:  $\theta_0$  and  $\theta_1$  are both known,  $\theta_1$  is unknown after change, known  $\theta_0$  and dynamic profile of the change, but unknown magnitude of dynamic profile.

**Known  $\theta_0$  and  $\theta_1$ .** The classical solution of the reduced problem is so-called CUSUM algorithm (cumulative sum algorithm) for mean value change detection of independent Gaussian sequence. In this case

$$g_k = (g_{k-1} + s_k)^+ \quad (8)$$

where  $s_k = \ln \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}}$ , is the log-likelihood ration for the  $\varepsilon_k$  observation and  $g_0 = 0$ . Because of Gaussian p.d.f  $s_k$  can be represented as

$$s_k = (\theta_1 - \theta_0)^T \Sigma^{-1} [\varepsilon_k - \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1)] = (\theta_1 - \theta_0)^T \Sigma^{-1} (\varepsilon_k - \theta_0) - \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_0)^T \Sigma^{-1} (\theta_1 - \theta_0) \quad (9)$$

The last equation can be treated as correlation between the known magnitude of change and the shifted observations  $\varepsilon_k - \theta_0$  "the innovation of innovation process". The expression (8) can be rewrote as following:

$$g_k = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \{S_j^k\}$$

$$S_j^k = \sum_{i=j}^k s_i$$

The stopping rule is given by

$$t_a = \min_{k \geq 1} \{g_k > h\}$$

For innovation process  $\varepsilon_k$  (6),(7)  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = \rho(k, t_0)$ , moreover the estimated covariance matrix  $\Sigma$  is time-varying, so  $S_j^k$  may be calculated as:

$$S_j^k = \ln \frac{\prod_{i=j}^k p_{\rho(i,j)}(\varepsilon_i)}{\prod_{i=j}^k p_0(\varepsilon_i)} = \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \rho(i, j)$$

Some recursive modifications of last expression for evaluating  $S_j^k$  can be found in [3].

Finally, the estimation of the change time is achieved through

$$\hat{t}_0 = \arg \max_{j \in [1, \dots, k]} \{S_j^k\}$$

as the time instant at which the correlation between the innovations  $\varepsilon_k$  of Kalman filter and the signatures of changes is maximal.

**Known  $\theta_0$  and dynamic profile of the change, but unknown magnitude.** The example of such changes can be found in [10]. And again, while we have the reduced problem of monitoring the mean value of independent Gaussian sequence, let's solve this reduced problem and result may be applied to detection the additive changes in LTI models. In this particular case  $\theta_1$  may be treated as  $\theta_0 + \nu \Upsilon(k, t_0)$ . Here  $\Upsilon(k, t_0)$  is the known dynamic profile but  $\nu$  should be estimated. The corresponding GLR (generalized likelihood ratio) can be applied:

$$g_k = \max_{j \in [1, \dots, k]} \left\{ \ln \frac{\sup_{\nu} \left\{ \prod_{i=j}^k p_{\theta_0 + \nu \Upsilon(i, j)}(\varepsilon_i) \right\}}{\prod_{i=j}^k p_{\theta_0}(\varepsilon_i)} \right\}$$

It is straightforward to obtain

$$g_k = \max_{j \in [1, \dots, k]} \left\{ \left[ \hat{\nu}_k(j) \sum_{i=j}^k \Upsilon(i, j)^T \Sigma^{-1} (\varepsilon_i - \theta_0) - \frac{\hat{\nu}_k^2(j)}{2} \sum_{i=j}^k \Upsilon(i, j)^T \Sigma^{-1} \Upsilon(i, j) \right] \right\}$$

where

$$\hat{\nu}_k(j) = \frac{\sum_{i=j}^k \Upsilon(i, j)^T \Sigma^{-1} (\varepsilon_i - \theta_0)}{\sum_{i=j}^k \Upsilon(i, j)^T \Sigma^{-1} \Upsilon(i, j)}$$

Using such ideas as in the case of known  $\theta_0$  and  $\theta_1$  we may replace in last formulas  $\varepsilon_i - \theta_0$  with  $\varepsilon_i$ ,  $\Upsilon$  with  $\rho$  finally, taking into account that  $\Sigma$  is the time-varying estimated covariance matrix of innovation process of Kalman filter for LTI model, we can modify obtained equation for our current case as following:

$$\begin{aligned} g_k &= \max_{j \in [1, \dots, k]} \{ \sup_{\nu} \{ S_j^k \} \} \\ \sup_{\nu} \{ S_j^k \} &= \hat{\nu}_k(j) \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} (\varepsilon_i) - \frac{\hat{\nu}_k^2(j)}{2} \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} \rho(i, j) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left( \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i \right)^2}{\sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} \rho(i, j)} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_k(j) &= \frac{\sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i}{\sum_{i=j}^k \rho^T(i, j)^T \Sigma_i^{-1} \rho(i, j)} \\ \hat{t}_{0k} &= \arg \max_{j \in [k-M+1, \dots, k]} \{ S_j^k \} \end{aligned}$$

where  $M$  is length of finite window of fixed size. In other words we search for maximum value of  $S_j^k$  inside  $M$  past observations only in order to increase speed of search procedure.

$$\hat{\nu}_k = \hat{\nu}_k(j)$$

**Unknown parameter after change.** The GLR solution to this problem is based upon the following decision function:

$$g_k = \max_{j \in [1, \dots, k]} \left\{ \ln \frac{\sup_{\theta} \prod_{i=j}^k p_{\theta}(\varepsilon_i)}{\prod_{i=j}^k p_{\theta_0}(\varepsilon_i)} \right\}$$

In this case  $\theta$  - the parameter to be estimated is  $\Upsilon$  vector of dynamic profile. Last statement may be rewritten as

$$g_k = \max_{j \in [1, \dots, k]} \{ \sup_{\Upsilon} \{ S_j^k \} \}$$

where

$$S_j^k = \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i \right]^T \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \rho(i, j) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i \right]$$

The estimate of the change direction at time  $k$ , assuming a change at time  $j$  is

$$\hat{\Upsilon}_k(j) = \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \rho(i, j) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \varepsilon_i \right]$$

$$\hat{t}_{0_k} = \arg \max_{j \in [k-M+1, \dots, k]} \{ S_j^k \}$$

and the estimate of magnitude

$$\hat{\Upsilon}_k(j) = \hat{\Upsilon}_k(\hat{t}_{0_k})$$

After the detection of change, the reason for updating the initial estimates is to give the Kalman filter more appropriate initial values after the detection of a change than the initial values given at the beginning of the processing. One possible solution was given by Willsky and Jones:

$$\hat{x}_{k|k, \text{update}} = \hat{x}_{k|k}^0 + [\alpha(k, \hat{t}_{0_k}) - \beta(k, \hat{t}_{0_k})] \hat{\Upsilon}_k$$

for the estimation of state variables, and

$$\hat{P}_{k|k, \text{update}} = \hat{P}_{k|k}^0 + [\alpha(k, \hat{t}_{0_k}) - \beta(k, \hat{t}_{0_k})] \left[ \sum_{i=j}^k \rho^T(i, j) \Sigma_i^{-1} \rho^T(i, j) \right]^{-1} [\alpha(k, \hat{t}_{0_k}) - \beta(k, \hat{t}_{0_k})]$$

for the covariance matrix of the state estimation error.

**Geometrical approach.** Definition. At first, we define parity checks for initial model without faults - model (1), (2).

The parity space of order  $l$ , ( $1 \leq l \leq n_j$ ) is the left null space of the observability matrix:

$$S_l = \text{span} \{ v | v^T O_l(H, F) = 0 \}$$

Define

$$Y_{k-n+1}^k = (y_{k-n+1}, y_{k-n+2}, \dots, y_k)^T$$

$$U_{k-l+1}^k = (u_{k-n+1}, u_{k-n+2}, \dots, u_k)^T$$

$$J_l(G, J) = \begin{pmatrix} J & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ HG & J & \dots & 0 & \dots & \dots \\ HFG & HJ & J & \dots & \dots & \dots \\ HF^2G & HFG & HJ & J & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF^{n-2}G & \dots & \dots & HFG & HG & J \end{pmatrix}$$

when  $Y_{k-l+1}^k$  can be calculated as

$$Y_{k-l+1}^k = O_l(H, F)x_{k-l+1} + J_l(G, U)U_{k-l+1}^k + J_l(I_n, 0)W_{k-l+1}^k + V_{k-l+1}^k$$

This equation may be rewritten as regression model:

$$\tilde{Y}_{k-l+1}^k = O_l x_{k-l+1} + \tilde{V}_{k-l+1}^k$$

where observation is

$$\tilde{Y}_{k-l+1}^k = Y_{k-l+1}^k - J_l(G, U)U_{k-l+1}^k$$

and the noise input

$$\tilde{V}_{k-l+1}^k = J_l(I_n, 0)W_{k-l+1}^k + V_{k-l+1}^k$$

that has the covariance matrix:

$$R_l = J_l(I_n, 0)(I_l \otimes Q)J_l^T(I_n, 0) + I_l \otimes R$$

Definition. Parity check  $\zeta_k$  defined by  $\zeta_k = v^T \tilde{Y}_{k-l+1}^k$  where  $v \in S_l$

$$\zeta_k = v^T \tilde{Y}_{k-l+1}^k = [\tilde{Y}_{k-l+1}^k - J_l(G, J)U_{k-l+1}^k]$$

One way to compute parity check consists of the orthogonal projection of the input-adjusted observations  $\tilde{Y}_{k-l+1}^k - J_l(G, J)U_{k-l+1}^k$  onto  $S_l$ . So the matrix associated with this projection is given by

$$\tilde{P}_l = A_l P_l A_l^{-1}$$

where

$$P_l = I - A_l^{-1} O_l (O_l^T R_l^{-1} O_l)^{-1} O_l^T A_l^{-T}$$

and  $A_l$  is obtained from covariance factorization  $R_l = A_l A_l^T$

We need to ensure the invertibility of the matrix  $O_l^T R_l^{-1} O_l$ , which depends on the choice of  $l$ . It is sufficient to choose the order of parity space equal the observability index. Define corresponding residual vector as

$$e_k = \tilde{P}_l \tilde{Y}_{k-l+1}^k$$

For model with possible additive faults - model (3),(4) we define following vectors:

$$(\Psi_x)_{(k-l+1)}^k = (\Upsilon_x(k-l+1, t_0), \Upsilon_x(k-l+2, t_0), \dots, \Upsilon_x(k, t_0))^T$$

$$(\Psi_y)_{(k-l+1)}^k = (\Upsilon_y(k-l+1, t_0), \Upsilon_y(k-l+2, t_0), \dots, \Upsilon_y(k, t_0))^T$$

and residual

$$e_k = \tilde{P}_l \tilde{Y}_{k-l+1}^k = \tilde{P}_l \tilde{V}_{k-l+1}^k + \tilde{P}_l J_l(\Gamma, 0)(\Psi_x)_{(k-l+1)}^k + \tilde{P}_l (I_l \otimes \Xi)(\Psi_y)_{(k-l+1)}^k$$

And all the problem is reduced to comparing the squared norms of residuals  $e_k$  under fault and no-fault hypothesis. Log-likelihood ratio can be written as

$$s_k = \tilde{\rho}_k^T \tilde{R}_l^{-1} e_k - \frac{1}{2} \tilde{\rho}_k^T \tilde{R}_l^{-1} \tilde{\rho}_k$$

where

$$\tilde{\rho}_k = \tilde{P}_l [J_l(\Gamma, 0)(\Psi_x)_{(k-l+1)}^k + (I \otimes \Xi)(\Psi_y)_{(k-l+1)}^k]$$

$$g_k = (g_{k-1} + s_k)^+, \quad g_0 = 0$$

$$t_a = \min_{k \geq 1} \{g_k > h\}$$

**Parameters tuning.** Actually, in each change detection algorithm, there exist free parameters that must be chosen before using algorithm on real data. These values are typically *threshold* for the decision function, *window sizes*, *weights*, nominal values for parameter  $\theta_0$  before change, or may be in some cases expected values of parameter  $\theta_1$  after change. We make use of the following notation:

$$\delta = \{h, \lambda, N, \dots\}$$

for the vector of tuning parameters such as thresholds, sample size (size of window), and so on.

Definition. *Mean time between false alarms* is the expectation  $\bar{T} = E_{\theta_0}(t_a)$  Definition. *Mean delay* is the quantity  $\bar{\tau} = E_{\theta_1}(t_a)$  Definition. *Average run length function* is the function  $L(\theta) = E_{\theta}(t_a)$

In the case of known parameter  $\theta_0$  and  $\theta_1$ . Mean time between false alarms and mean delay for detection are functions of tuning parameters:

$$\bar{T} = \bar{T}(\delta), \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(\delta)$$

In this case we need to choose a penalty function  $\omega = \omega(\bar{T}, \bar{\tau})$  And tuning parameters are to be obtained with the aid of an optimization algorithm:

$$\delta^* = \arg \inf_{\delta} \omega(\bar{T}, \bar{\tau})$$

and then compute  $\bar{T}^* = \bar{T}(\delta^*)$  and  $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}(\delta^*)$  In more general case of unknown parameters  $\theta_0$  and  $\theta_1$  functions  $\bar{T}$  and  $\bar{\tau}$  may be presented as

$$\bar{T} = \bar{T}(\theta, \delta), \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(\theta, \delta)$$

And after choosing weighting functions  $\omega_T$  and  $\omega_{\tau}$ , denote

$$\bar{T}_{\omega} = \int_{\theta \in \Theta_0} \omega_T(\theta) \bar{T}(\theta, \delta) d\theta$$

$$\bar{\tau}_{\omega} = \int_{\theta \in \Theta_1} \omega_{\tau}(\theta) \bar{\tau}(\theta, \delta) d\theta$$

$$\delta^* = \arg \inf_{\delta} \omega(\bar{T}_{\omega}, \bar{\tau}_{\omega})$$



## Bibliography

- [1] M. Basseville and I.V. Nikiforov (1996). *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*. Prentice-Hall International, London.
- [2] B. Delyon, A. Juditsky, A. Benveniste (1997). *On the relationship between identification and local tests*. Research report Insitut de recherche en informatique et systéms al éatoires (Irisa) no 1104.
- [3] M. Basseville (1996). *Information criteria for residual generation and fault detection and isolation*. Research report Insitut de recherche en informatique et systéms al éatoires (Irisa) no 1008.
- [4] M. Basseville (1999). *On fault detectability and isolability*. Research report Insitut de recherche en informatique et systéms al éatoires (Irisa) no 1240.
- [5] C. Carlemalm (1998). *On model-based detection and estimation schemes in statistical signal processing*. Department of signals, sensors and systems Royal Institute of technology Stockholm, Sweden.
- [6] I. V. Nikiforov (1993). *Optimal sequential detection and isolation of changes in stochastic systems*. Research report Insitut de recherche en informatique et systéms al éatoires (Irisa) no 753.
- [7] R. D. De Veaux, L.H. Ungar, Jh. M. Vison (1992). *Statistical approach to fault analysis in multivariate process control*. University of Pennsylvania and Princeton Univerisity technical report.
- [8] E. Frisk (1998). *Residual generation for fault diagnosis: Nominal and Robust design*. Linköping studies in science and technology thesis no. 739.
- [9] M. Nyberg (1999). *Model based fault diagnosis. Methods, Theory, and Automative engine applications*. Linköping studies in science and technology dissertations no. 591.
- [10] И.В.Семущин,Л.В.Калинин,А.Г.Сковиков(1997) *Разработка эффективных алгоритмов обнаружения нарушений в моделях систем //Сборник научных трудов "Алгоритмы управления и идентификации"*, Москва,Московский государственный университет.

## Оглавление

Л.В.Калинин. Эффективные алгоритмы обновления оценок по измерениям .....	3
Г.Ю.Куликов. О нелинейных экстраполяционных методах для обыкновенных дифференциальных уравнений .....	7
Г.Ю.Куликов, С.К.Шиндин. О многошаговой экстраполяции для обыкновенных дифференциальных уравнений .....	13
А.Ф.Николаев. Оптимальная нелинейная фильтрация по скачкообразным наблюдениям .....	22
А.Е.Носова. Об одном свойстве процесса отношения правдоподобия .....	27
О.А.Перегудова. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа .....	32
В.В.Петрищев. Экономичная схема вычисления канонических образов интегральных функционалов метода нормальных сплайнов .....	37
Л.Н.Полякова. Математическая модель тестирования баз данных .....	44
Ю.Н.Санкин, Н.А.Юганова. Нестационарные колебания стержневых систем .....	50
В.В.Угаров. Опыт реализации прототипного подхода при проектировании автоматизированной измерительной системы для испытаний контактной аппаратуры .....	57
Е.В.Филаткина. Об асимптотической устойчивости почти периодической системы дифференциальных уравнений .....	63
И.Р.Ханина. Критерий конечности коdimы многообразий ассоциативных алгебр с инволюцией .....	68
Ю.В.Цыганова. Идентификация неизвестных параметров в стохастических системах управления с неизвестными случайными модельными погрешностями .....	74
О.Д.Юрьева. К вопросу об устойчивости линейной нестационарной механической системы .....	82
O.U.Gorokhov. An overview of methods for additive changes detection in the linear stochastic time invariant models .....	85

## Ученые записки Ульяновского государственного университета

### Серия **Фундаментальные проблемы математики и механики**

Выпуск 2(7)

Под редакцией академика РАН, проф.  
*А.С.Андреева*

Оформление обложки *Р.А.Воденина*

Подписано в печать 17.11.99. Формат 60x84/16.  
Усл.печ.л. 5,45. Уч.-изд.л. 5,5. Тираж 100 экз. Заказ №137/11

Отпечатано с оригинал-макета  
в подразделении оперативной полиграфии  
Ульяновского государственного университета  
432700, г.Ульяновск, ул.Л.Толстого, 42