

УЛЬЯНОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Ученые записки

ОБРАЗОВАНИЕ

ЭКОЛОГИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

КЛИНИЧЕСКАЯ МЕДИЦИНА

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И СОЦИАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

БИОЛОГИЯ И МЕДИЦИНА

ЛИНГВИСТИКА

ГОСУДАРСТВО И ПРАВО



Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный университет

**Ученые записки
Ульяновского государственного университета**

Серия
***ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ***

Выпуск 1(10)

*Печатается по решению Ученого совета
механико-математического факультета
Ульяновского государственного университета*

**Ученые записки Ульяновского государственного университета.
Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Выпуск
1(10) / Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. – Ульяновск: УлГУ,
2001. 118 с.**

В сборнике публикуются статьи преподавателей и аспирантов механико-математического факультета по фундаментальным проблемам математики и механики.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся проблемами алгебры и математической логики, математической кибернетики и теории вероятностей, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела.

К ЗАДАЧЕ ОБ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ¹

А.С.Андреев, И.А.Чудинова

В работе решается задача об ориентации спутника переменной структуры относительно инерциальной и неинерциальной системы координат.

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ есть абсолютная система координат, $Oxyz$ - система координат, неизменно связанная со спутником T_0 . Точка O совпадает с центром масс спутника, $O\alpha\beta\gamma$ - система координат, совершающая поступательное движение относительно $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть далее заданы два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$, причём орт $\bar{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ занимает неизменное положение в системе $Oxyz$.

Рассмотрим задачу об ориентации спутника, при которой ось $\bar{r}_0$ направлена по оси $\bar{s}_0$.

В качестве уравнений движения возьмём уравнения в форме из [1]

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K} = \bar{M} + \bar{M}_., \quad (1)$$

где $\bar{\omega}$ - угловая скорость спутника, $\bar{K} = I\omega$ - кинетический момент относительно центра масс - точки O , I - тензор инерции, $\bar{M}_.$ - управляющий момент гиросилового стабилизатора, $\bar{M}$ - главный момент внешних сил, действующих на спутник. Управляющим моментом будем считать момент $\bar{M}_. = \bar{M} + \bar{M}_.$ Поставим задачу определения $\bar{M}_.$, который стабилизировал бы орт $\bar{r}_0$ в направлении $\bar{s}_0$. При решении данной и последующих задач будем учитывать передвижение масс в космическом аппарате, вызванное либо изменением режима работы гиросиловых стабилизаторов, либо иными перемещениями масс в аппарате, т.е. примем $I = I(t)$. В принятой постановке уравнения вращательного движения (1) в системе координат $Oxyz$ могут быть записаны в виде [1, 2]

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} = \bar{M}_., \quad \dot{I}(t) = \frac{dI(t)}{dt}. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005 и грант 00-15-96150 ведущей научной школы).

Обозначим через s_i, r_i ($i = 1, 2, 3$) проекции векторов $\bar{s}_0, \bar{r}_0$ на оси системы $Oxyz$. Тогда вектор $\bar{s}_0$ вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}$. Следовательно,

$$\dot{\bar{s}}_0 = -\bar{\omega} \times \bar{s}_0. \quad (3)$$

Покажем, что решения задачи можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\bar{M} = -B\bar{\omega} + \bar{s}_0 \times \text{grad} U(\bar{s}_0, \bar{r}_0), \quad (4)$$

где $-B\bar{\omega}$ - составляющая момента, линейная относительно $\bar{\omega}$, соответственно $B = B(t)$ - есть матрица вида 3×3 , а U - некоторая силовая функция. В частности, можно принять

$$U = \frac{1}{2}\alpha(\bar{s}_0 - \bar{r}_0)^2 = \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=1}^3 (s_i - r_i)^2, \quad \alpha > 0$$

Уравнения движения (2)-(3) при таком управлении имеют вид

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} = -B\bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0), \quad \dot{\bar{s}}_0 = -\bar{\omega} \times \bar{s}_0. \quad (5)$$

Система (5) имеет два положения равновесия:

- 1) $\bar{\omega} = 0, \quad \bar{s}_0 = \bar{r}_0$ и
- 2) $\bar{\omega} = 0, \quad \bar{s}_0 = -\bar{r}_0$.

Других решений система (5) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет.

Возьмём функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} (\bar{\omega}^T I \bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{s}_0)^2). \quad (6)$$

Производная этой функции в силу системы (5) будет иметь следующий вид:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\bar{\omega}^T (B + B^T) \bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega}^T \dot{I} \bar{\omega}. \quad (7)$$

Допустим, что управляющий момент создаётся таким образом, что имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\bar{\omega}^T (B + B^T + \dot{I}) \bar{\omega} \geq b_0 \|\bar{\omega}\|^2, \quad b_0 > 0,$$

тогда для (7) получим:

$$\dot{V} \leq -b_0 \|\bar{\omega}\|^2 \leq 0.$$

Уравнения, предельные к (5), имеют аналогичный вид [3]

$$I^* \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}^* \bar{\omega} + \bar{\omega} \times I^* \bar{\omega} = -B^* \bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0), \quad \dot{\bar{s}}_0 = -\bar{\omega} \times \bar{s}_0, \quad (8)$$

где I^* , B^* , $\dot{I}^*$ - есть матрицы, предельные к I , B , $\dot{I}$, например,

$$B^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \int_0^{\tau} B(t_n + \tau) d\tau$$

Множество, на котором оценка производной равна нулю, есть множество $\{\omega = 0\}$, система (8) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ и $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$, поэтому на основании теоремы из работы [3] получим, что положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ устойчиво, и притом асимптотически, а положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова. Отсюда имеем следующий результат.

Теорема 1. *Управляющий момент $\bar{M}$ (2) можно выбрать так, чтобы спутник T_0 был ориентирован в заданном направлении $\bar{s}_0$. При этом любое движение спутника асимптотически приближается к состоянию покоя $\bar{\omega} = 0$, $(\bar{s}_0 \times \bar{r}_0) = 0$. Состояние покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову, а состояние покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво по Ляпунову.*

Рассмотрим задачу о трёхосной ориентации спутника.

Пусть заданы два ортогональных орта $\bar{s}_{01}$, $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два ортогональных орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Рассмотрим задачу об ориентации спутника, при которой орт $\bar{r}_{01}$ будет стабилизирован в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ в направлении $\bar{s}_{02}$. Положим $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$, $\bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}$.

Поставим задачу определения управляющего момента $\bar{M}$, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ в направлении

$\bar{s}_{02}$. Тогда, соответственно, орт $\bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{03}$. Для составляющих векторов $\bar{s}_{0i}$ в системе координат $Oxyz$ имеем уравнения:

$$\dot{\bar{s}}_{0i} = -\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Покажем, что решения задачи можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\bar{M} = -B\bar{\omega} + \sum_{i=1}^3 \bar{s}_{0i} \times \text{grad}_{\bar{s}_{0i}} U, \quad (9)$$

где $-B\bar{\omega}$ - составляющая момента, линейная относительно $\bar{\omega}$, соответственно $B = B(t)$ - есть матрица 3×3 , а U - некоторая силовая функция. В частности, можно принять

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{s}_{0i} - \bar{r}_{0i})^2, \quad \alpha > 0.$$

Уравнения движения при таком управлении имеют вид

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} = -B\bar{\omega} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}), \quad \dot{\bar{s}}_{0i} = -\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i}. \quad (10)$$

Система (10) будет отличаться от системы (5) лишь тем, что в правой части вместо компонент одного вектора $\bar{s}_0 \times \text{grad} U$ выписывается сумма трёх аналогичных векторов $\bar{s}_{0i} \times \text{grad} U$. Поэтому система (10) имеет положения равновесия

$$\omega = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm \bar{r}_{01}, \quad \bar{s}_{02} = \pm \bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02},$$

и при этом других положений равновесия на множестве $\{\omega = 0\}$ в системе (10) не будет.

Возьмём функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} \left(\bar{\omega}^T I \bar{\omega} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{r}_{0i} - \bar{s}_{0i})^2 \right). \quad (11)$$

Производная этой функции в силу системы (10) будет иметь следующий вид:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \bar{\omega}^T (B + B^T + \dot{I}) \bar{\omega}. \quad (12)$$

Вновь допустим, что управляющий момент создаётся таким образом, что имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\bar{\omega}^T(B+B^T+\dot{I})\bar{\omega} \geq b_0\|\bar{\omega}\|^2, \quad b_0 > 0,$$

тогда для (12) имеем:

$$\dot{V} \leq -b_0\|\bar{\omega}\|^2 \leq 0.$$

Уравнения, предельные к (10), имеют аналогичный вид [3], как и выше

$$I^*\frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}^*\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I^*\bar{\omega} = -B^*\bar{\omega} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i(\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}), \quad \dot{\bar{s}}_{0i} = -\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i}. \quad (13)$$

Множество, на котором оценка производной равна нулю, есть множество $\{\omega = 0\}$, система (13) на множестве $\{\omega = 0\}$ не содержит других решений, кроме

$$\omega = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm \bar{r}_{01}, \quad \bar{s}_{02} = \pm \bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02},$$

поэтому на основании теоремы из работы [3] получим, что положение равновесия $\bar{\omega} = 0, \bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво. Тем самым, имеем следующий результат.

Теорема 2. При управлении (9) любое движение спутника либо является состоянием покоя, либо стремится к такому состоянию, причём положение равновесия $\bar{\omega} = 0, \bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$) равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, будет неустойчивым.

Рассмотрим задачу ориентации спутника относительно вращающейся системы координат.

Пусть система координат $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$, относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть заданы два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$, причём орт $\bar{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ занимает неизменное положение в системе $Oxyz$.

Рассмотрим задачу об ориентации спутника, при которой орт $\bar{r}_0$ направлен по оси $\bar{s}_0$.

Уравнение вращательного движения спутника под действием управляющего момента $\bar{M}$ можно записать в виде:

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \dot{I}\bar{\omega} = A(\bar{\omega})\bar{\omega} + \bar{M}, \quad (14)$$

где

$$A(\bar{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y - I_z\omega_z & -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z & 0 & -I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{xy}\omega_x - I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z & I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ орт $\bar{r}_0$ совпадает с ортом $\bar{s}_0$, то под действием момента

$$\bar{M}^0 = \frac{d}{dt}(I\bar{\omega}_0) - A(\bar{\omega}_0(t))\bar{\omega}_0(t) \quad (15)$$

орт $\bar{r}_0$ будет стабилизирован в направлении $\bar{s}_0$.

При наличии начальных отклонений или при действии возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы ориентацию орта $\bar{r}_0$ по отношению к $\bar{s}_0$.

Обозначим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0(t) + \bar{x}, \quad (16)$$

где $\bar{x}$ - возмущение, $\bar{M} = \bar{M}^0 + \bar{M}$. Подставляя (16) в (14), получим уравнение возмущённого движения :

$$I \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_0(t) + \bar{x}) + \dot{I}(\bar{\omega}_0(t) + \bar{x}) = A(\bar{\omega}_0(t) + \bar{x})[\bar{\omega}_0(t) + \bar{x}] + \bar{M}^0(t) + \bar{M}.$$

или

$$I \frac{d\bar{x}}{dt} = A(\bar{x})(\bar{\omega}_0(t) + \bar{x}) + A(\bar{\omega}_0(t))\bar{x} - \dot{I}\bar{x} + \bar{M}. \quad (17)$$

К этим уравнениям добавим уравнения для $\bar{s}_0$

$$\dot{\bar{s}}_0 = -(\bar{\omega}_0(t) + \bar{x}) \times \bar{s}_0. \quad (18)$$

Покажем, что поставленная задача решается, если стабилизирующий момент определить в виде :

$$\bar{M} = -B(t)\bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0), \quad \alpha > 0, \quad (19)$$

где $B(t)$ - матрица, которая выбирается из условия:

$$\bar{x}^T A(\bar{x})\bar{\omega}_0(t) - \frac{1}{2}\bar{x}^T \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\bar{x}^T (B(t) + B^T(t))\bar{x} \leq -C_0 \|x\|^2 \leq 0, \quad C_0 > 0. \quad (20)$$

Возьмём функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} (\bar{x}^T I \bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{s}_0)^2)$$

Используя уравнение (17), найдём производную функции Ляпунова и её оценку:

$$\dot{V} = \bar{x}^T A(\bar{x})\bar{\omega}_0(t) - \frac{1}{2}\bar{x}^T \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\bar{x}^T (B(t) + B^T(t))\bar{x} \leq -C_0 \|x\|^2 \leq 0.$$

Уравнения, предельные к (17) - (19), имеют вид:

$$I^* \frac{dx}{dt} = A(x) (\bar{\omega}_0^*(t) + x) + A(\bar{\omega}_0^*(t))x - \dot{I}^* \bar{x} - B^*(t)x + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0),$$

$$\dot{\bar{s}}_0 = -(\bar{\omega}^*(t) + \bar{x}) \times \bar{s}_0.$$

Полагая в этих уравнениях $x = 0$, находим, что множество $\{C_0 \|x\|^2 = 0\}$ содержит лишь те решения системы, для которых следует коллинеарность векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{s}_0$. Согласно теореме из работы [3], получим следующий результат.

Теорема 3. Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M} = \bar{M}^0 + \bar{M}$, где $\bar{M}^0$ и $\bar{M}$ определяются, соответственно, из (15) и (19), решает задачу об ориентации оси $\bar{r}_0$ в направлении орта $\bar{s}_0$.

Пусть теперь некоторый трёхгранник $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Рассмотрим задачу об ориентации спутника относительно вращающейся системы координат $O\alpha\beta\gamma$.

Так же, как в предыдущем случае, находим, что если в начальный момент времени $t = 0$ трёхгранник $Oxyz$ совпадает с $O\alpha\beta\gamma$, то под действием момента (15) спутник будет ориентирован по отношению к вращающейся системе координат $O\alpha\beta\gamma$ ($Ox \parallel O\alpha$, $Oy \parallel O\beta$, $Oz \parallel O\gamma$).

При наличии начальных отклонений или при действии возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы ориентацию спутника по отношению к $O\alpha\beta\gamma$.

Покажем, что поставленная задача решается, если стабилизирующий момент определить в виде :

$$\bar{M} = -B(t)\bar{x} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}), \quad \alpha_i > 0, \quad (21)$$

где $B(t)$ - матрица, которая выбирается из условия:

$$\bar{x}^T A(\bar{x}) \bar{\omega}_0(t) - \frac{1}{2} \bar{x}^T \dot{I} \bar{x} - \frac{1}{2} \bar{x}^T (B(t) + B^T(t)) \bar{x} \leq -C_0 \|x\|^2 \leq 0, \quad C_0 > 0. \quad (22)$$

Возьмём функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} \left(\bar{x}^T I \bar{x} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{r}_{0i} - \bar{s}_{0i})^2 \right)$$

Используя уравнение (17), найдём производную функции Ляпунова и её оценку:

$$\dot{V} = \bar{x}^T A(\bar{x}) \bar{\omega}_0(t) - \frac{1}{2} \bar{x}^T \dot{I} \bar{x} - \frac{1}{2} \bar{x}^T (B(t) + B^T(t)) \bar{x} \leq -C_0 \|x\|^2 \leq 0.$$

Уравнения, предельные к (17), (18), (21), имеют вид:

$$I^* \frac{dx}{dt} = A(x) (\bar{\omega}_0^*(t) + x) + A(\bar{\omega}_0^*(t))x - \dot{I}^* \bar{x} - B^*(t)x + \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{s}_{0i}),$$

$$\dot{\bar{s}}_{0i} = -(\bar{\omega}_0(t)^* + \bar{x}) \times \bar{s}_{0i}.$$

Полагая в этих уравнениях $x = 0$, находим, что множество $\{C_0 \|x\|^2 = 0\}$ содержит лишь те решения системы, для которых следует коллинеарность векторов $\bar{r}_{0i}$ и $\bar{s}_{0i}$. Согласно теореме из работы [3], имеем следующий результат.

Теорема 4. Пусть трёхгранник $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M} = \bar{M}^0 + \bar{M}$, где $\bar{M}^0$ и $\bar{M}$ определяются, соответственно, из (15) и (21), решает задачу об ориентации спутника относительно $O\alpha\beta\gamma$.

Теоремы 1 — 3 представляют собой новое математическое обоснование в задаче конструирования систем ориентации космических аппаратов относительно неинерциальной системы координат, что является развитием результатов работ [1, 4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Раушенбах В.В., Токарь В.И. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974, 598 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М., 1990.
3. Андреев А.С. Об устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы//ПММ, 1984. Т.48. Вып.2.
4. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495с.
5. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. М.: Наука, 1976. 301с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ²

Т.А.Бойкова, К.Ризито

В работе исследуется задача об устойчивости обобщенных стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, внешняя рамка которого вращается с переменной угловой скоростью.

Гироскоп в кардановом подвесе представляет собой систему нескольких тел, соединенных последовательно с помощью цилиндрических шарниров. Вокруг неподвижной вертикальной оси L_1 может вращаться внешняя рамка S_1 карданова подвеса. На рамке S_1 укреплены подшипники, в которых установлена ось L_2 поворота внутренней рамки S_2 карданова подвеса. Относительно рамки S_2 вокруг оси L вращается ротор S .

Рассмотрим совершенный гироскоп, в котором оси L , L_1 , L_2 пересекаются в одной точке O , ось L_1 ортогональна оси L_2 , ось L ортогональна оси L_2 , оси L , L_2 являются главными осями инерции тела S_2 для точки O и центр тяжести G_2 тела S_2 расположен на оси L (ось L - главная центральная ось инерции для тела S).

Обозначим через $A = B, C$ главные моменты инерции ротора (для точки O), A_2, B_2, C_2 - главные моменты инерции внутренней рамки, A_1 - момент инерции внешнего кольца относительно оси L_1 ; M - масса ротора и внутреннего кольца; z_0 - координата центра масс ротора в системе координат, ось z которой направлена по оси L .

Введем традиционные для гироскопии эйлеровы углы: ψ - угол поворота внешней рамки S_1 , угол прецессии; ϑ - угол поворота внутренней рамки, угол между осями L_1 и L , угол нутации; φ - угол поворота ротора относительно внутренней рамки S_2 вокруг оси L , угол собственного вращения гироскопа.

Имеем следующую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \left((A + A_2) \dot{\vartheta}^2 + (A \sin^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta + C_2 \cos^2 \vartheta + A_1) \dot{\psi}^2 + \right.$$

²Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-01005.

$$+ C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2) - Mgz_0 \cos \vartheta.$$

Предположим, что под действием некоторого момента M_ψ внешняя рамка S_1 вращается по некоторому закону $\psi = \psi(t)$, где $\psi(t)$ – заданная непрерывная функция времени. Функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L(t, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left((A + A_2) \dot{\vartheta}^2 + (A \sin^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta + C_2 \cos^2 \vartheta + A_1) \dot{\psi}^2(t) + \right. \\ \left. + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}(t) \cos \vartheta)^2 \right) - Mgz_0 \cos \vartheta.$$

Так как координата φ является циклической, имеем первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C (\dot{\varphi} + \dot{\psi}(t) \cos \vartheta) = c = \text{const.}$$

Обозначим

$$\mu = \frac{c}{C}$$

Тогда

$$\mu = \dot{\varphi} + \dot{\psi}(t) \cos \vartheta.$$

Отсюда находим

$$\dot{\varphi} = \mu - \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (1)$$

Составим функцию Рауса:

$$R(t, \vartheta, \dot{\vartheta}, \mu) = \frac{1}{2} (A + A_2) \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} ((A + B_2) \sin^2 \vartheta + C_2 \cos^2 \vartheta + A_1) \dot{\psi}^2(t) + \\ + \mu C \dot{\psi}(t) \cos \vartheta - Mgz_0 \cos \vartheta.$$

Соответственно измененная потенциальная энергия имеет вид:

$$W = Mgz_0 \cos \vartheta - \frac{1}{2} ((A + B_2) \sin^2 \vartheta + C_2 \cos^2 \vartheta + A_1) \dot{\psi}^2(t) - \mu C \dot{\psi}(t) \cos \vartheta.$$

Из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \left(Mgz_0 + (A + B_2 - C_2) \dot{\psi}^2(t) \cos \vartheta - \mu C \dot{\psi}(t) \right) = 0$$

находим, что при любых значениях параметра μ и $\dot{\psi}(t) \neq \text{const}$ система имеет два положения относительного равновесия:

$$\dot{\vartheta} = 0, \vartheta = 0;$$

$$\dot{\vartheta} = 0, \vartheta = \pi.$$

Им соответствуют обобщенные стационарные движения[1], в которых плоскость внутренней рамки совпадает с плоскостью внешней и соответственно ее плоскости и ось ротора вертикальны. Без ограничения общности рассмотрим задачу об устойчивости обобщенного стационарного движения, соответствующего второму положению относительного равновесия. Ему согласно (1) соответствует обобщенное стационарное движение[1]:

$$\vartheta = \pi, \dot{\vartheta} = 0, \dot{\varphi} = \mu + \dot{\psi}(t). \quad (2)$$

Достаточные условия равномерной устойчивости этого движения можно определить из условий согласно[1]: функция $\Omega(t, \vartheta, \mu) = W(t, \vartheta, \mu) - W(t, \pi, \mu)$ должна быть определенно-положительной, её производная по времени $\frac{\partial \Omega(t, \vartheta, \mu)}{\partial t} \leq 0$ в окрестности $\vartheta = \pi$ при всех $t \in R^+$.

Преобразуя, имеем

$$\Omega(t, \vartheta, \mu) = \left(Mgz_0 - \mu C \dot{\psi}(t) \right) (1 + \cos \vartheta) + \frac{1}{2} (C_2 - A - B_2) \dot{\psi}^2(t) \sin^2 \vartheta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Omega(t, \vartheta, \mu)}{\partial t} = \left((C_2 - A - B_2) \dot{\psi}(t) \sin^2 \vartheta - \mu C (1 + \cos \vartheta) \right) \ddot{\psi}(t), \quad (4)$$

Отсюда находим условия равномерной устойчивости в зависимости от различных предположений.

Вначале допустим, что $z_0 > 0$, т.е. центр тяжести ротора G расположен ниже точки подвеса O , функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям:

$$|\dot{\psi}(t)| \leq L = \text{const}, |\ddot{\psi}(t)| \leq N = \text{const} \text{ для всех } t \in R^+. \quad (5)$$

Случай 1. Пусть моменты инерции внутренней рамки и ротора таковы, что $C_2 = A + B_2$.

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$, условия (3) и (4) выполнены, если

$$0 \leq \mu < \frac{Mgz_0}{CL},$$

при $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$, достаточно выполнения неравенства

$$-\frac{Mgz_0}{LC} < \mu \leq 0.$$

Случай 2. $C_2 > A + B_2$

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$, условия (3) и (4) выполнены, если

$$\frac{2L}{C}(C_2 - A - B_2) \leq \mu < \frac{Mgz_0}{LC},$$

при $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$, достаточно выполнения неравенства

$$-\frac{Mgz_0}{LC} < \mu \leq -\frac{2L}{C}(C_2 - A - B_2).$$

Случай 3. $C_2 < A + B_2$

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$, условия (3) и (4) выполнены, если

$$\frac{2L}{C}|C_2 - A - B_2| \leq \mu < \frac{Mgz_0 - L^2|C_2 - A - B_2|}{CL},$$

при $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$, достаточно выполнения неравенства

$$-\frac{Mgz_0 - L^2|C_2 - A - B_2|}{CL} < \mu \leq -\frac{2L}{C}|C_2 - A - B_2|.$$

Если сравнить полученные условия равномерной устойчивости, можно заметить, что неравенство для первого случая выполнимо при любом ограничении $|\dot{\psi}(t)| \leq L$, а во втором и третьем случаях только при ограничении $|\dot{\psi}(t)| \leq L$, зависящем от значения z_0 , соответственно, $L^2 < \frac{Mgz_0}{2(C_2 - A - B_2)}$ и $L^2 < \frac{Mgz_0}{3|C_2 - A - B_2|}$.

Теперь допустим, что $z_0 \leq 0$, т.е. центр тяжести ротора G расположен выше точки подвеса O , функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям:

$$l \leq \dot{\psi}(t) \leq L = \text{const} (0 < l < L) \text{ для всех } t \in R^+. \quad (6)$$

Моменты инерции внутренней рамки и ротора удовлетворяют одному из следующих случаев.

Случай 1. $C_2 = A + B_2$

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$ и $\mu \geq 0$, устойчивость обобщенного стационарного движения согласно [1] не определяется, так как в этом случае

$$\Omega(t, \vartheta, \mu) = (Mgz_0 - \mu C \dot{\psi}(t))(1 + \cos \vartheta) \leq (Mgz_0 - \mu Cl)(1 + \cos \vartheta) \leq 0.$$

При $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$ и $\mu \leq 0$, функция

$$\Omega(t, \vartheta, \mu) = (Mgz_0 - \mu C\dot{\psi}(t))(1 + \cos \vartheta) \geq (Mgz_0 - \mu Cl)(1 + \cos \vartheta)$$

удовлетворяет условию определенно-положительности при значениях параметра

$$\mu < -\frac{Mg|z_0|}{Cl},$$

а $\frac{\partial \Omega(t, \vartheta, \mu)}{\partial t} \leq 0$ при всех $t \in R^+$.

Случай 2. $C_2 > A + B_2$

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$, устойчивость обобщенного стационарного движения согласно [1] не определяется, так как неравенство

$$\frac{2L}{C}(C_2 - A - B_2) \leq \mu < \frac{-Mg|z_0| + l^2(C_2 - A - B_2)}{CL}$$

не выполнимо. При $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$, для равномерной устойчивости достаточно выполнения неравенства:

$$\mu \leq \min \left(\frac{2l}{C}(C_2 - A - B_2), \frac{-Mg|z_0| + L^2(C_2 - A - B_2)}{CL} \right).$$

Случай 3. $C_2 < A + B_2$

При $\ddot{\psi}(t) \geq 0$ для всех $t \in R^+$, для равномерной устойчивости достаточно выполнения неравенства:

$$-\frac{2l}{C}|C_2 - A - B_2| \leq \mu < -\frac{Mg|z_0| + L^2|C_2 - A - B_2|}{CL},$$

что возможно только при условии $L^2 < 2l^2$. При $\ddot{\psi}(t) \leq 0$ для всех $t \in R^+$, равномерная устойчивость по $\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ достигается, если

$$\mu \leq \min \left(-\frac{2L}{C}|C_2 - A - B_2|, -\frac{Mg|z_0| + L^2|C_2 - A - B_2|}{Cl} \right).$$

Литература

1. Risito C. Metodi per lo studio della stabilita' di sistemi con integrali primi noti // Annali di Mat. Pura ed Appl. 1976. V. 107. P.49-94.

О ВЛИЯНИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ С ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ³

Т.А. Борисова, О.Д. Юрьева

В работе рассмотрена задача о влиянии на устойчивость положения равновесия линейных гироскопических и линейных диссипативных сил с частичной диссипацией. Полученные достаточные условия асимптотической устойчивости сформулированы в терминах теории управления.

Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q \in R^n$. Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}$, где вектор $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ — есть вектор-столбец, $A(q)$ — $n \times n$ - матрица, положительно-определенная для всех $q \in R^n$, так что имеет место матричное неравенство $A(q) \geq A = a_0 E$, $a_0 = \text{const} > 0$, E — единичная матрица. Значок $(\quad)^T$ означает транспонирование, $\|q\|$ — норма в R^n , $\|q\|^2 = q^T q = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2$.

Предположим, что на систему действуют линейные гироскопические $\Gamma(t)\dot{q}$ и линейные диссипативные силы с частичной диссипацией $-S(t)\dot{q}$. Движение такой системы может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода. Представим их в виде, разрешенном относительно $\ddot{q}$:

$$\ddot{q} = \Gamma(t)\dot{q} - S(t)\dot{q}, \quad (1)$$

здесь $\Gamma^T = -\Gamma$; $S^T = S$, — $n \times n$ - матрицы, ограниченные вместе со своими частными производными по t, q до порядка n включительно. Допустим, что диссипативные силы являются силами с частичной диссипацией по первым k координатам:

$$\dot{q}^T S(t) \dot{q} \leq k_0 \|\dot{q}\|_k^2; \quad \|\dot{q}\|_k^2 = \dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_k^2, \quad (1 \leq k \leq n), \quad k_0 = \text{const}.$$

³Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-01005.

Переобозначим координаты:

$$q^1 = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k)^T; \quad q^2 = (q_{k+1} \ \dots \ q_n)^T.$$

Тогда уравнения движения системы запишутся в виде:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \Gamma_{11}(t)\dot{q}^1 + \Gamma_{12}(t)\dot{q}^2 - S_{11}(t)\dot{q}^1 - S_{12}(t)\dot{q}^2 \\ \ddot{q}_2 = \Gamma_{12}^T(t)\dot{q}^1 + \Gamma_{22}(t)\dot{q}^2 - S_{12}^T\dot{q}^1 - S_{22}(t)\dot{q}^2. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) предкомпактны и регулярны [1, 2], предельные к ним уравнения имеют аналогичный вид [1]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \Gamma_{11}^*(t)\dot{q}^1 + \Gamma_{12}^*(t)\dot{q}^2 - S_{11}^*(t)\dot{q}^1 - S_{12}^*(t)\dot{q}^2 \\ \ddot{q}_2 = \Gamma_{12}^{T*}(t)\dot{q}^1 + \Gamma_{22}^*(t)\dot{q}^2 - S_{12}^{T*}\dot{q}^1 - S_{22}^*(t)\dot{q}^2 \end{cases}, \quad (3)$$

где $\Gamma_{11}^*(t), S_{11}^*(t), \Gamma_{12}^*(t), S_{12}^*(t), \Gamma_{12}^{T*}(t), \Gamma_{22}^*(t), S_{12}^{T*}, S_{22}^*(t)$ — предельные к соответствующим матрицам из (2), в частности [2],

$$\Gamma_{11}^*(t) = \frac{d}{dt} \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^t \Gamma_{11}(t_{k_j} + \tau) d\tau. \quad (4)$$

Введем функцию Ляпунова вида:

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} = \frac{1}{2} \|\dot{q}\|^2.$$

Ее производная при достаточно малых $\|q\|$ и $\|\dot{q}\|$, в силу уравнений (2), имеет оценку

$$\dot{V} = -\dot{q}^T S(t) \dot{q} \leq 0.$$

Функция $\Omega(t, \dot{x})$, предельная к $\dot{V}$, имеет аналогичный вид:

$$\Omega(t, \dot{x}) = -\dot{q}^T S^*(t) \dot{q} \leq 0,$$

здесь $S^*(t)$ — предельная матрица к $S(t)$, определяемая аналогично. Рассмотрим множество $\{\Omega(t, \dot{x}) = 0\} = \{\dot{q}^T S^*(t) \dot{q} = 0\} = \{S^*(t) \dot{q} = 0\} \subset \{\dot{q}^1 = 0\}$. Если при определенных условиях множество $\{S^*(t) \dot{q} = 0\} \subset \{\dot{q}^1 = 0\}$ не будет содержать движений системы (3), кроме $\dot{q} = 0$, то по теореме об асимптотической устойчивости из работы [1] нулевое положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы (1) будет равномерно

асимптотически устойчивым по $\dot{q}$. Из системы (3) находим, что такие движения системы должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^*(t)\dot{q}^2(t) \equiv 0 \\ \ddot{q}_2(t) \equiv \Gamma_{22}^*(t)\dot{q}^2(t). \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы по t и подставим в него $\ddot{q}(t)$ из второго уравнения, получим:

$$\frac{d\Gamma_{12}^*}{dt}(t)\dot{q}^2(t) + \Gamma_{12}^*(t)\Gamma_{22}^*(t)\dot{q}^2(t) \equiv 0.$$

Продолжив этот процесс далее, приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно $\dot{q}^2(t)$. Если эта система может содержать только решения $\dot{q}^2(t) = 0$, тогда положение равновесия рассматриваемой механической системы (1) будет асимптотически устойчивым по $\dot{q}$.

Более точно этот результат можно выразить в терминах теории управления. Составим матрицу $L = (L_1, L_2, \dots, L_{n-k})^T$,

$$L_1 = \Gamma_{12}^*(\tau), L_2 = \frac{dL_1(\tau)}{dt} + L_1(\tau)\Gamma_{22}^*(\tau), L_3 = \frac{dL_2(\tau)}{dt} + L_2(\tau)\Gamma_{22}^*(\tau), \dots, \\ L_{n-k} = \frac{dL_{n-k-1}(\tau)}{dt} + L_{n-k-1}(\tau)\Gamma_{22}^*(\tau), \tau \in R^+.$$

Определение 1. [3] Матрица $L(t)$ называется наблюдаемой, если ранг этой матрицы равен $n - k$ для любой точки $t \in R^+$.

Теорема 1. Если каждая матрица $L(t)$ является наблюдаемой, то нулевое положение равновесия системы (1) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$.

Доказательство. Продифференцируем тождество $\Gamma_{12}^*(t)\dot{q}^2(t) \equiv 0$ $n - k$ раз. Получим следующую систему алгебраических уравнений

$$L^{T*}(t, \dot{q}^2(t)) \equiv 0,$$

из которой следует, что $\dot{q}^2(t) \equiv 0$. По теореме 3.4 из работы [4] имеем требуемый результат.

Основной результат исследования можно получить в предположениях относительно исходных матриц, входящих в систему (2).

Определение 2. [3] Составим матрицу $L(t) = (L_1, L_2, \dots, L_{n-k})^T$ следующим образом:

$L_1 = \Gamma_{12}(\tau), L_2 = \frac{dL_1(\tau)}{dt} + L_1(\tau)\Gamma_{22}(\tau), L_3 = \frac{dL_2(\tau)}{dt} + L_2(\tau)\Gamma_{22}(\tau), \dots,$
 $L_{n-k} = \frac{dL_{n-k-1}(\tau)}{dt} + L_{n-k-1}(\tau)\Gamma_{22}(\tau), \tau \in R^+.$ Матрица $L(t)$ называется строго наблюдаемой, если ранг этой матрицы равен $n - k$. Это определяется некоторым минором этой матрицы $\Delta_{n-k}(t), |\Delta_{n-k}| \geq \Delta_0 > 0$.

Теорема 2. Если матрица $L(t)$ является строго наблюдаемой, то нулевое положение равновесия системы (1) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. – 1984. – Т.48. Вып.2. – С.225-232.
2. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equat. 1977. V.23. N.2. P.216-223.
3. Юрьева О.Д. Об устойчивости линейных систем // Ученые записки Ульяновского государственного университета "Фундаментальные проблемы математики и механики". Ульяновск: УлГУ. 1996. Ч.2. Вып.1. С.134-139.
4. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных // Докл. АН УзССР. – 1982. – N5. – С.9-12.

ТЕОРЕМА ДЛЯ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦЫ ПРОСТЫМ МОНОТОННЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПРОЦЕССОМ ⁴

А.А. Бутов

В работе получены оценки вероятностей пересечения границы простым монотонным дифференцируемым процессом, которые можно обобщить на случай диффузионных процессов вместо винеровского методами замены меры.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – стохастический базис с обычными условиями Деллашери [1], на котором задан стандартный винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$. Рассмотрим для константы $a > 0$ монотонный дифференцируемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с

$$X_t = \int_0^t I(W_s > a) ds, \quad (1)$$

где $I(\cdot)$ – индикаторная функция.

Для числа $b > 0$ определим первый момент пересечения процессом $X = (X_t)_{t \geq 0}$ границы b как момент остановки

$$\tau = \inf\{t : t > 0, X_t \geq b\}, \inf\{\emptyset\} = +\infty. \quad (2)$$

Таким образом, τ есть момент достижения уровня b временем пребывания винеровского процесса в области "выше a ". Исследования распределений такого рода моментов остановки важно как с теоретической точки зрения (поскольку допускает очевидные обобщения на случай диффузионных процессов вместо винеровского методами замены меры), так и с прикладной (во время превышения критическими параметрами системы пороговых величин происходит накопление необратимых повреждений системы, и их сумма при достижении своего порога приводит к разрушению системы: в случае биостатистики – смерти существа, в случае финансовой математики – разорению и т.п.)

⁴Работа выполнена при частичной поддержке грантов ИНТАС-99-00016 и РФФИ 01-01-00735.

Теорема. Пусть $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс. Тогда существуют такие константы $c_1 = c_1(b) > 0$ и $c_2 = c_2(b) > 0$, что $\forall t > b$ (для $t \leq b$ очевидно $P\{\omega : \tau(\omega) > t\} = 1$) :

$$\sqrt{t}P\{\omega : \tau(\omega) > t\} \leq c_1, \quad (3)$$

$$\sqrt{t}P\{\omega : \tau(\omega) > t\} \geq c_2. \quad (4)$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество

$$A_t = \left\{ \int_0^t I(W_s > a) ds < b \right\}.$$

Используя замену времени, получаем

$$A_t = \left\{ \int_0^1 I(W_{u \cdot t} > a) du < \frac{b}{t} \right\} = \left\{ \int_0^1 I\left(\frac{1}{\sqrt{t}}W_{u \cdot t} > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{b}{t} \right\}. \quad (5)$$

Обозначим $\widehat{W}_u = \frac{1}{\sqrt{t}}W_{u \cdot t}$. Отметим, что процесс $\widehat{W} = (\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ также является винеровским. Из (5) получаем

$$A_t = \left\{ \int_0^1 I\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{b}{t} \right\} \supset \left\{ \int_0^1 I(\widehat{W}_u > 0) du < \frac{b}{t} \right\} \quad (6)$$

Для доказательства нижней оценки теперь достаточно применить закон арксинуса [2]:

$$P\left\{ \int_0^1 I(\widehat{W}_u > 0) du < y \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{y}{t}},$$

откуда и получаем с константой $c_1 = \frac{2}{\pi}\sqrt{b}$ неравенство

$$P\{A_t\} \geq \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{b}{t}} \geq \frac{c_1}{\sqrt{t}}, \quad (7)$$

из которого и вытекает неравенство (3).

Докажем теперь второе неравенство теоремы. Введем момент остановки

$$\sigma = \sigma_x = \inf \left\{ s : s > 0, \widehat{W}_s = x = \frac{a}{\sqrt{t}} \right\}. \quad (8)$$

Зафиксируем положительное число $\varepsilon < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} A_t &= \left\{ \left(\int_0^{\sigma \wedge \varepsilon} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du + \int_{\sigma \wedge \varepsilon}^1 \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du \right) < \frac{b}{t} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\int_0^{\sigma \wedge \varepsilon} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du + \int_{\sigma \wedge \varepsilon}^1 \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du \right) < \frac{b}{t} \right\} \cap \{\sigma \leq \varepsilon\} \cup \\ &\cup \left\{ \left(\int_0^{\sigma \wedge \varepsilon} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du + \int_{\sigma \wedge \varepsilon}^1 \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du \right) < \frac{b}{t} \right\} \cap \{\sigma > \varepsilon\} \subset \end{aligned}$$

и поскольку $\sigma \wedge \varepsilon + (1 - \varepsilon) \leq 1$

$$\begin{aligned} &\subset \left\{ \int_{\sigma \wedge \varepsilon}^1 \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du < \frac{b}{t} \right\} \cap \{\sigma \leq \varepsilon\} \cup \{\sigma > \varepsilon\} \subset \\ &\subset \left\{ \int_{\sigma \wedge \varepsilon}^{\sigma \wedge \varepsilon + (1 - \varepsilon)} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du < \frac{b}{t} \right\} \cap \{\sigma \leq \varepsilon\} \cup \{\sigma > \varepsilon\} \subset \\ &\subset \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma + (1 - \varepsilon)} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du < \frac{b}{t} \right\} \cap \{\sigma \leq \varepsilon\} \cup \{\sigma > \varepsilon\} \subset \\ &\subset \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma + (1 - \varepsilon)} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du < \frac{b}{t} \right\} \cup \{\sigma > \varepsilon\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P \{A_t\} \leq P \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma + (1 - \varepsilon)} \mathbf{I} \left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}} \right) du < \frac{b}{t} \right\} + P \{\sigma > \varepsilon\}. \quad (10)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (10). Заметим, что $P\{\sigma < \infty\} = 1$ и $\widehat{W}_\sigma = \frac{a}{\sqrt{t}}$ P-п.н. (см.(8)). Применяя случайную замену времени, получаем (см., например, §4 гл. II [2]), что процесс $\overline{W} = (\overline{W}_u)_{u \geq 0}$ с

$$\overline{W}_u = \widehat{W}_{u+\sigma} - \frac{a}{\sqrt{t}} \quad (11)$$

является винеровским относительно $(\overline{F}, P)$, $\overline{F} = (\overline{\mathcal{F}}_u)_{u \geq 0}$ с $\overline{\mathcal{F}}_u = \mathcal{F}_{u+\sigma}$.

Таким образом,

$$\int_{\sigma}^{\sigma+v} I\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du = \int_0^v I(\overline{W}_u > 0) du. \quad (12)$$

Откуда, с учетом закона арксинуса, получаем, что

$$\begin{aligned} P\left\{\int_{\sigma}^{\sigma+t} I\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < y \middle| \mathcal{F}_{\sigma}^{\widehat{W}}\right\} &= P\left\{\int_0^t I(\overline{W}_u > 0) du < y\right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{y}{t}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) получаем, что существует константа d_1 такая, что

$$P\left\{\int_{\sigma}^{\sigma+(1-\varepsilon)} I\left(\widehat{W}_u > \frac{a}{\sqrt{t}}\right) du < \frac{b}{t}\right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{b}{(1-\varepsilon)t}} \leq \frac{d_1}{\sqrt{t}}. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (10). Заметим, что из определения σ (8) следует (см., например, Теорему II.3.12 в [2])

$$P\{\sigma_x \leq \varepsilon\} = \int_0^{\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds.$$

Откуда, применяя замену времени, получаем с некоторой константой d_2

$$P\{\sigma > \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds =$$

$$= \int_{\varepsilon t a^{-2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp \left\{ -\frac{1}{2u} \right\} du \leq \frac{d_2}{\sqrt{t}} . \quad (15)$$

Выбирая $c_2 = d_1 + d_2$ из (10), (14) и (15), получаем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Shiryaev, A.N., (1981) Martingales: recent developments, results and applications, *International Statistical Review* **49**: 199-233
- [2] Krylov, N.V., (1996) *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*, AMS

ОДНА ЗАДАЧА ОБ УСЛОВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦ ТОЧЕЧНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ⁵

М.А. Волков

В работе рассматривается задача о нахождении условного математического ожидания "совокупности траекторий" некоторого процесса до их пересечения некоторой границы. Получены оценки для винеровского процесса и процесса Орнштейна-Уленбека. Полученные результаты используются при построении моделей в биостатистике.

При построении математических моделей в биостатистике момент гибели организма часто рассматривается как момент пересечения траектории некоторого процесса (например, уровень метаболизма) критической границы.

Пусть задан некоторый стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ с обычными условиями, [1], на котором определен некоторый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$. В данной работе рассматривается задача о нахождении условного математического ожидания "совокупности траекторий" процесса X до их пересечения некоторой границы a (не ограничивая общности, полагаем $a > 0$ и $X_0 = 0$ P -п.н.).

Определим момент остановки (м.о.) $\tau = (\tau(\omega))$, $\omega \in \Omega$,

$$\tau = \inf\{t : t > 0; X_t \geq a\}, \quad (1)$$

тогда условное математическое ожидание обозначим

$$r_t = E(X_t | \tau > t). \quad (2)$$

Заметим, что

$$r_t = \frac{E(X_t \cdot I(t < \tau))}{P(t < \tau)} = \frac{E(X_{t \wedge \tau} \cdot I(t < \tau))}{P(t < \tau)} = \frac{E(X_{t \wedge \tau} \cdot (1 - I(t \geq \tau)))}{P(t < \tau)} =$$

и, следовательно,

$$= \frac{EX_{t \wedge \tau}}{P(t < \tau)} - \frac{E(X_{\tau} \cdot I(t \geq \tau))}{P(t < \tau)}. \quad (3)$$

⁵Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00735)

Поскольку $X_\tau = a$ на множестве $\{t \geq \tau\}$, то

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{EX_{t \wedge \tau}}{P(t < \tau)} - \frac{a \cdot (1 - P(t < \tau))}{P(t < \tau)} = \\ &= \frac{EX_{t \wedge \tau}}{1 - F_\tau(t)} - a \cdot \frac{F_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F_\tau(t) = P(\tau < t)$ - функция распределения м.о. $\tau = (\tau(\omega))$.

1. В мартингальном случае справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ - мартингал с $X_0 = 0$, тогда

$$r_t = -a \cdot \frac{F_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)}. \quad (5)$$

Доказательство. Очевидно следует из формулы (4) и того факта, что $EX_{t \wedge \tau} = 0$.

Отдельного внимания требует случай, при котором X - стандартный винеровский процесс. Тогда распределение времени первого прохождения процессом $X = (X_t)_{t \geq 0}$ границы a

$$F_\tau(t) = P(\tau \leq t) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq a\right) = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds,$$

и оценка

$$\begin{aligned} r_t &= -a \cdot \frac{\int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds}{\int_t^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds}. \\ F_\tau(t) &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds = 1 - \int_t^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$: $1 - \varepsilon(t) < e^{-\frac{a^2}{2t}} < 1$, следовательно,

$$\int_t^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds \sim \int_t^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} ds = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{s^3}} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{t^{1/2}} \rightarrow 0,$$

(где $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \infty$ означает $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

Значит

$$F_\tau(t) \sim 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{t^{1/2}}$$

и оценка

$$r_t \sim -a \frac{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{t^{1/2}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{t^{1/2}}} = a - \frac{a}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{t^{1/2}}} \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot t^{1/2} \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно верно следующее

Следствие 1. Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ - стандартный винеровский процесс, тогда при $t \rightarrow \infty$

$$r_t \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot t^{1/2}. \quad (6)$$

2. Пусть $\tilde{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ - решение уравнения Ланжевена (процесс Орнштейна-Уленбека)

$$X_t = -\lambda \int_0^t X_s ds + \sqrt{2\lambda} W_t, \quad 0 < \lambda < 1,$$

т.е.

$$X_t = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sqrt{2\lambda} dW_s = e^{-\lambda t} \cdot m_t,$$

где $m_t = \int_0^t e^{\lambda s} \sqrt{2\lambda} dW_s$, его квадратичная характеристика, [1], $\langle m_t \rangle = e^{2\lambda t} - 1$. Обозначим $f(t) = e^{\lambda t}$, и тогда момент остановки в данном случае записывается так:

$$\tau = \inf\{t : t > 0; m_t \geq a \cdot f(t)\}$$

$$r_t = E(X_t | t < \tau) = E\left(\frac{m_t}{f(t)} | t < \tau\right) = \frac{1}{f(t)} E(m_t | t < \tau) =$$

$$= \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{-a}{P(t < \tau)} \cdot E(f(\tau) \cdot I(\tau \leq t)) =$$

$$= \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{-a}{1 - F_\tau(t)} \cdot \int_0^t f(s) dF_\tau(s), \quad (7)$$

следовательно,

$$r_t = \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{-a}{1 - F_\tau(t)} \cdot \left(f(t)F_\tau(t) - \int_0^t F_\tau(s)f'(s)ds \right). \quad (8)$$

При $t \rightarrow \infty$, не забывая о том, что r_t отрицательно, рассмотрим для асимптотического оценивания $\ln(-r_t)$

$$\begin{aligned} \ln(-r_t) &= \ln \left(\frac{1}{f(t)} \cdot \frac{a}{1 - F_\tau(t)} \cdot \left(f(t)F_\tau(t) - \int_0^t F_\tau(s)f'(s)ds \right) \right) = \\ &= \ln\left(\frac{1}{f(t)}\right) + \ln(a) - \ln(P(t < \tau)) + \ln \left(f(t)F_\tau(t) - \int_0^t F_\tau(s)f'(s)ds \right) \sim \end{aligned}$$

используя то, что $F_\tau(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$

$$\sim -\lambda t + \ln a - \ln(P(t < \tau)) + \ln \left(e^{\lambda t} - \int_0^t \lambda e^{\lambda s} ds \right) =$$

исходя из того, что $\ln(P(t < \tau)) \sim -t$, [2],

$$= -\lambda t + t + \ln a + \ln(e^{\lambda t} - e^{\lambda t} + 1) = -\lambda t + t + \ln a + \ln 1 \sim t(1 - \lambda).$$

Значит верно следующее

Следствие 2. Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ - процесс Орнштейна-Уленбека с $X_0 = 0$, тогда при $t \rightarrow \infty$ и $0 < \lambda < 1$

$$\ln(-r_t) \sim t(1 - \lambda). \quad (9)$$

Автор выражает благодарность профессору Бутову А.А. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов.-М.: Наука.-1986.-512 с.

[2] Арбеев К.Г., Бутов А.А., Яшин А.И. К вопросу о применении оценок вероятностей пересечения границ случайными процессами в моделях страхования //Труды математического интститута имени В.А. Стеклова. М.: ТВП (в печати).

ОБУЧАЮЩАЯ СИСТЕМА "ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ"

Д.Р.Воденин, А.Е.Русанова

Создана компьютерная обучающая система по курсу "Теория случайных процессов", позволяющая строить модели важнейших случайных процессов и проводить тестирование обучаемых.

В настоящее время большое внимание уделяется использованию современных технологий в учебном процессе. Широкое распространение получают электронные справочники, учебники и компьютерные обучающие системы. Достоинством такого рода систем по сравнению с традиционными средствами обучения является возможность визуального представления текстовой и графической информации. Кроме того, они предоставляют пользователю полный набор средств тестирования с целью контроля знаний.

На языке Delphi 5 была разработана обучающая система "Случайные процессы", полностью отвечающая требованиям построения программных продуктов такого рода. Она предназначена для изучения курса теории случайных процессов и в полной мере дает возможность использования интерактивного метода работы с материалом [3].

Система представляет собой структурированный материал в виде набора отдельных глав, выход на которые осуществляется из общего оглавления, и модуля, позволяющего строить компьютерные модели случайных процессов. Весь теоретический курс представлен в виде файлов в формате Html, что дает широкие возможности его использования при дистанционном обучении с помощью Internet-технологий. Он состоит из введения и трех разделов, в которых рассматриваются основные понятия теории случайных процессов, стохастического исчисления. Каждая глава содержит текстовую информацию и сопровождается иллюстративными примерами. Для облегчения процесса усвоения специфических понятий курса была реализована возможность построения компьютерных моделей

некоторых случайных процессов, таких, как пуассоновский и винеровский процессы, процесс Орнштейна - Уленбека. Для изучения влияния параметров на траекторию случайных процессов был создан "Мастер построения траекторий". Он позволяет пользователю самому задавать требуемые значения параметров.

Компьютерная модель пуассоновского процесса строится по формуле [2]:

$\pi_{s+1} = \sum_{i=1}^{[NT]} \xi_i$, где $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые одинаково распределенные с.в., такие, что

$$P\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n}, \quad P\{\xi_i = 1\} = \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda/n \ll 1.$$

Для построения винеровского процесса используется следующая конструкция [1]:

$$W_{s+1} = W_s + \Delta W_s,$$

где приращение стандартного винеровского процесса $\Delta W_s = \xi_i \sqrt{\Delta}$, $\xi \sim N(0,1)$. Это можно также записать в следующем виде:

$$W_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{[NT]} \xi, \quad \xi \sim N(0,1), \quad W_0 = 0.$$

С помощью мастера можно строить и компьютерную модель процесса Орнштейна-Уленбека. Для этого рассматривается уравнение с постоянными коэффициентами [1]:

$$dX_1 = -\lambda X_t + \sigma dW_t, \quad X = (X_t)_{t \geq 0},$$

где параметры $\lambda, \sigma > 0$ - фиксированы, $\sigma = \sqrt{2\lambda}$;

X_0 - начальное значение процесса, имеет нормальное распределение с параметрами 0, 1;

W_t - стандартный винеровский процесс.

Для построения модели необходимо перейти к дискретному случаю. Шаг дискретизации определяется по формуле $\Delta = 1/N$, где N - количество точек, задаваемое пользователем. Траектории рассматриваются на временном интервале $[0, T]$, являющемся совокупностью точек $[N * t]$. Таким образом, уравнение, которое

определяет вид траектории, перепишется в виде: $X_{s+1} = X_s - \lambda X_s \Delta + \sqrt{2\lambda} \Delta W_s$, где s принадлежит интервалу $[0, T]$.

Кроме того, в обучающей системе предусмотрена возможность контроля знаний по курсу теории случайных процессов с помощью тестов. Режим тестирования предполагает выбор одного или нескольких ответов из предложенных вариантов. После обработки пользователь может узнать свою оценку и ознакомиться с краткими рекомендациями по дальнейшему изучению курса.

Данная обучающая система имеет возможности дальнейшего развития. Она может быть расширена путем добавления к уже существующим главам новых разделов из теории случайных процессов. Потенциал программы позволяет также создавать на основе имеющегося модуля более сложные многовопросные тестовые системы. Расширение иллюстративного материала возможно с помощью построения новых компьютерных моделей процессов.

В дальнейшем на базе данной системы предполагается создать систему для дистанционного обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1989.
3. Приложение к журналу "КомпьютерПресс", 2001, №3.
4. Бутов А.А. Элементы стохастического исчисления. Методическое пособие. Ульяновск, УлГУ, 1996.

ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ ⁶

В.К. Горбунов, К.С. Македонский

1. Введение. Функция полезности является одним из центральных понятий экономической теории [1]. На ней или её ординалистском аналоге - отношении предпочтения - основаны теории потребительского спроса и общего экономического равновесия, составляющие вместе с теорией производства основные разделы микроэкономики и теории цен. Функция полезности используется также как целевая функция в теории экономической динамики. Кроме того, модель рационального потребления (РП) имеет существенный прикладной потенциал решения проблем анализа и регулирования рынков конечной продукции.

Модифицированная неоклассическая модель РП заключается в максимизации ординальной функции полезности $u(x)$, определенной в пространстве товаров R_n^+ , при бюджетном ограничении $\{ \langle p, x \rangle \leq b, x \geq 0 \}$, где p - положительный вектор цен и b - расходы потребителей на исследуемом сегменте рынка. Прикладной потенциал модели РП определяется возможностью построения функций спроса $x(p, b)$ и обратных функций спроса $p(x, b)$. Последние позволяют повысить эффективность государственного и административного регулирования, компенсирующего недостаточность рыночных механизмов и обеспечивающего реализацию общественных целей. Для реализации этого потенциала необходимо решение обратной задачи РП, т.е. построение функции полезности, объясняющей наблюдаемый (статистический) спрос $\{p^t, x^t, : t = 0, \dots, T\}$. Для удобства использования функций спроса желательно обеспечить их однозначность и дифференцируемость [2]. Для этого достаточно, чтобы функция полезности была дифференцируемой и её множества уровней были строго выпуклыми. Возможность объяснения наблюдаемого спроса моделью РП с дифференцируемой функцией полезности исследовалась в [3]. Для охвата экономики в целом необходимо корректное агрегирование статистической информации. Важную роль в этом также играет модель РП.

⁶Работа поддержана Российским Гуманитарным Научным Фондом, проект 01-02-00448а.

До последних десятилетий прикладной потенциал модели РП не был в достаточной степени реализован из-за отсутствия эффективных методов решения обратной задачи. Классический метод решения обратных задач заключается в параметризации искомой функции и применении метода наименьших квадратов к системе регрессионных уравнений, представляющих равенства расчетных и наблюдаемых значений спроса. В общем случае такая задача очень трудоемка, вычислительно плохо обусловлена и трудно обосновать выбор параметрического класса искомых функций, хотя в ряде случаев могут быть веские соображения, основанные на ожидаемых свойствах спроса.

Первые результаты, позволившие существенно продвинуть отмеченные проблемы, связаны с работами С.Африата [4] и Х.Вэриана [5, 6]. Они рассмотрели проблему рационального потребления в рамках "теории выявленных предпочтений" П.Самуэльсона. Эта теория имеет в основном аналитическую направленность и не исследует реальных проблем вычислений спроса в предполагаемых условиях. Был разработан "непараметрический метод" анализа наблюдаемого спроса с целью выявления его рациональности и построения объясняющей функции полезности в классе кусочно линейных функций. Такие функции порождают многозначные функции спроса, необратимые и неудобные для прикладных целей. Основное значение теории Африата-Вэриана заключается в развитии проблемы построения экономических индексов. Непараметрический метод используется в [7] и других работах российских исследователей. Отметим, что проблема приближённости торговой статистики в рамках "непараметрического метода" исследована недостаточно глубоко.

Данная работа посвящена изложению опыта реализации новых методов решения обратной задачи РП, развитых в работах [8 - 11]. При этом неоклассическая модель РП исследуется в рамках теории выпуклого программирования и функция полезности строится в классе непрерывно дифференцируемых функций.

2. Непараметрический метод Африата-Вэриана. В работе [4] Африат методом локального анализа модели РП показал, что существование непрерывной, монотонной, ненасыщаемой и вогнутой функции полезности, объясняющей данную торговую статистику, эквивалентно нетривиальной разрешимости системы

линейных неравенств, определяющей значения функции полезности $u_t = u(x^t)$ и множителя Лагранжа прямой задачи $\lambda_t = \lambda(p^t, b_t)$:

$$u_s - u_t - \lambda_t(b_{ts} - b_t) \leq 0, \quad 0 \leq s, t \leq T. \quad (1)$$

Здесь $b_{st} = \langle p^s, x^t \rangle$, $b_t = b_{tt}$. Нетривиальность решения алгебраически однородной системы (1) обеспечивается (в случае ее совместности) дополнительным условием $\lambda_0 = 1$. Проблема дифференцируемости объясняющей функции полезности осталась открытой.

В случае однородности отношения предпочтения на исследуемом рынке выполняется условие $u(x) = b\lambda(p, b)$. При этом общая система Африата (1) приводится к двум специальным эквивалентным системам, определяющим совокупности переменных $\{u_t\}$ и $\{\lambda_t\}$ соответственно. Первая из них

$$u_s b_t \leq u_t b_{ts}, \quad 0 \leq s, t \leq T. \quad (2)$$

Здесь нетривиальность решения обеспечивается условием $u_0 = b_0$. Отметим, что решение конечных систем неравенств в общем случае неединственно.

В однородной системе предпочтений все товары равноценны (по Энгелю) и спрос на них пропорционален затратам покупателей. Такая ситуация может иметь место только на некоторых сегментах рынка. Поэтому для решения реальных проблем анализа и регулирования рынков в общем случае требуется решать обратную задачу в классе неоднородных функций полезности. Выделение однородных сегментов необходимо для агрегирования информации, т.е. снижения размерности пространства товаров [7, 8].

Вариантом в [5, 6] были предложены быстрые алгоритмы решения систем (1) и (2). В случае совместности им построены кусочно линейные функции полезности, объясняющие данные $\{p^t, x^t\}$. В общем случае

$$\bar{u}(x) = \min_t \{u_t + \lambda_t \langle p^t, x - x^t \rangle\}, \quad (3)$$

и в однородном

$$\hat{u}(x) = \min_t \{\lambda_t \langle p^t, x \rangle\}. \quad (4)$$

В работах [8, 10] системы Африата выводятся непосредственно из условий экстремума для прямой задачи РП и свойств однородных

функций (для однородных предпочтений). В [10, 12] также предложен "релаксационно-штрафной" метод получения решения, и в несовместном случае - псевдорешения этих систем. Псевдорешение систем Африата необходимо в силу неизбежных погрешностей исходной информации для оценки адекватности используемой модели. Именно модель РП можно считать адекватной наблюдениям, если получаемая при решении этих систем невязка может быть объяснена влиянием погрешностей с помощью обычной техники оценок погрешностей решения. Более адекватный (и более сложный) подход к анализу адекватности модели РП основан на решении задачи расширенной минимизации штрафной функции системы по искомым переменным и параметризованным виртуальным данным, эквивалентным по точности известной реализации [8, 13].

3. О дифференцируемости функции полезности. Результаты Африата и Вериана существенно упрощают обратную задачу РП, сводя ее к двум последовательным этапам. На первом находится некоторое решение или псевдорешение специальной (2) или общей (1) системы Африата. Это решение представляет систему "чисел Африата" $\{u_t, \lambda_t : t = 0, \dots, T\}$. Числа $\{u_t\}$ определяют систему интерполяционных условий

$$u(x^t) = u_t, \quad t = 0, \dots, T. \quad (5)$$

Ввиду конечности исходных данных $\{p^t, x^t\}$ обратной задачи РП функция $u(x)$ может быть определена неоднозначно. Интуитивно ясно, что непрерывно дифференцируемые функции полезности $u(x)$, рационализирующие данную статистику, существуют, если существуют рационализирующие кусочно линейные функции (3) или (4). Действительно, любая вогнутая функция имеет выпуклый "подграфик" [14] и для кусочно линейной функции $\bar{u}(x)$ или $\hat{u}(x)$ это будет многогранное множество (для линейно однородной $\hat{u}(x)$ – конус). Такое множество можно "вписать" в выпуклое множество с гладкой поверхностью, являющейся графиком вогнутой непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$. Разумеется, эти эвристические соображения требуют обоснования в рамках дифференциальной геометрии. Другим способом обоснования является эффективное решение проблемы путем построения дифференцируемой функции

в допустимом классе непрерывных, монотонных, ненасыщаемых и вогнутых функций.

Для дифференцируемых функций $u(x)$ в соответствии с условиями экстремума [8, 10] выполняются дополнительные условия на градиент в точках наблюдаемого спроса:

$$\frac{\partial u(x^t)}{\partial x_i} = \lambda_t p_i^t, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Эти дополнительные условия, состоящие из $n \times (T + 1)$ уравнений, связывают искомую функцию с ценами и предельными полезностями потребительских затрат $\{\lambda_t\}$. Интерполяция с условиями на производные (6) называется эрмитовской.

4. Метод нормальных сплайнов. Первый из реализованных методов построения дифференцируемых функций полезности - метод нормальных сплайнов (НС) [10, 15]. Это многомерное обобщение метода нормальной сплайн-коллокации, разработанного ранее В.К. Горбуновым для обыкновенных интегральных и дифференциальных уравнений. Метод основан на использовании пространства Соболева - Слободецкого с дробным индексом дифференцирования:

$$H_\epsilon^d(R^n) = \{\varphi \in S' : (\epsilon + |x|^{d/2})F[\varphi] \in L_2(R^n)\}.$$

Здесь $\epsilon > 0$, S' - пространство обобщённых функций медленного роста, $F[\varphi]$ - преобразование Фурье функции φ и ξ - его аргумент. Индекс $d > 0$ дробный. Если $d > n/2 + 1$, то линейные точечные функционалы системы (5), (6)

$$l_{t0}(u) = u(x^t), \quad l_{ti}(u) = \frac{\partial u(x^t)}{\partial x_i}$$

будут непрерывными и согласно теореме Ф.Рисса они могут быть представлены в канонической форме как скалярное произведение пространства $H^d(R^n)$. Канонические образы этих функционалов являются воспроизводящим ядром этого пространства и его производными.

Опуская подробности канонического преобразования линейных непрерывных функционалов в пространстве H_ϵ^d (см. [10, 15]), приведем их вид при $d = (n + 3)/2$. Для функционалов l_{t0} каноническими

образами будут функции

$$h_t(\xi) = (1 + \epsilon|\xi - x^t|) \exp(-\epsilon|\xi - x^t|). \quad (7)$$

Канонические образы функционалов l_{ti} , $1 \leq i \leq n$ представляются функциями

$$h'_{ti}(\xi) = -\epsilon^2(\xi_i - x_i^t) \exp(-\epsilon|\xi - x^t|). \quad (8)$$

После канонического преобразования система (5), (6) принимает вид

$$\begin{cases} \langle h_t, u \rangle = u_t, & t = 0, 1, \dots, T; \\ \langle h'_{ti}, u \rangle = \lambda_t p_i^t, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Нормальное решение линейной системы (9) в гильбертовом пространстве определяется системой линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама функций (7), (8). Эта матрица симметричная и неотрицательно определенная. Ее невырожденность (положительная определенность) обеспечивается линейной независимостью коэффициентов $\{h_t, h'_{ti}\}$. Это имеет место, если все точки $\{x^t\}$ различны. Решение такой системы – это коэффициенты разложения нормального решения системы (9) по системе функций (7), (8).

Приведем некоторые эвристические рекомендации, направленные на решение наиболее сложной проблемы аппроксимации функций полезности методом НС - обеспечения их вогнутости и монотонного возрастания. Колоколообразность функций (7), очевидно, не позволяет обеспечить эти свойства глобально в R_t^n . Однако следующие соображения позволяют ожидать и активно обеспечивать эти свойства для восстанавливаемых функций локально в области, представляющей интерес для анализа и регулирования спроса.

Локальная вогнутость функции $u(x)$ может обеспечиваться вблизи точек x^t благодаря "дискретной вогнутости" интерполяционных данных $\{u_t, \lambda_t\}$, заложенной в соответствующей системе Африата. Этому должно способствовать то, что каждая из координатных функций (7) обладает локальной вогнутостью в некоторой области с "центром- x^t ". Эта область тем больше, чем меньше $\epsilon \geq 0$.

Для обеспечения возрастания (локального) неоднородной функции $u(x)$ можно использовать кусочно линейную функцию Вериана (3), обладающую глобальной монотонностью (как и вогнутостью).

4. Метод барицентрической интерполяции. Вторым реализованным методом - локальная барицентрическая интерполяция (БИ)[11]. Здесь функция полезности строится в произвольной точке некоторого симплекса в R^n , определяемого набором $n + 1$ афинно независимых точек из статистического набора $\{x^0, x^1, \dots, x^n\}$. Назовём такой симплекс базисным. В вершинах базисного симплекса на первом этапе определены значения функции $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и ее градиенты $\{q^t = \lambda_t p^t : t = 0, \dots, n\}$ (дефлированные цены). Для избранной точки x определяются ее барицентрические координаты $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$, по которым строится линейная интерполянта градиента $q(\mu)$. После этого нетрудно восстановить значение $u(x(\mu))$, вычислив интеграл градиента по отрезку, соединяющему некоторую вершину симплекса, например, x^0 с выбранной точкой $x(\mu)$. Исходя из известного значения восстанавливаемой функции u_0 , получим формулу

$$u(x(\mu)) = u_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^n \mu_s q_i^s x_i^0 (\mu_0 - 1) + \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^n \mu_s q_i^s x_i^r \mu_r.$$

Восстановленная барицентрическим методом функция полезности, очевидно, будет квадратичной. Нетрудно убедиться, что она будет вогнутой на рёбрах симплекса. Вопрос о глобальной вогнутости этой функции остаётся открытым.

Сравним методы НС и БИ. Первый метод существенно сложнее. Система линейных уравнений, определяющих коэффициенты разложения искомого нормального сплайна, может быть плохо обусловленной. Очевидным преимуществом метода НС перед БИ является его глобальность. Здесь решение строится во всей области определения с использованием всех исходных данных. В методе БИ функция полезности и её градиент строятся в одной точке по их известным значениям в точках (в количестве $n + 1$), определяющих вершины базисного симплекса.

Следует отметить, что при вычислении значений спроса в прямой задаче РП с дифференцируемой функцией полезности используются лишь её частные производные (предельные полезности).

Соответственно, в методе БИ при решении прикладных задач можно ограничиться лишь простой процедурой интерполяции градиента. В методе НС градиент функции полезности можно вычислять после определения коэффициентов сплайна.

5. Решение примеров. Описанные методы реализованы на тестовых примерах для двух функций полезности: постоянной эластичности замещения (ПЭЗ)

$$u(x) = (\beta_1 x_1^{-\rho} + \beta_2 x_2^{-\rho})^{-1/\rho}$$

с параметрами $\beta_1 = 0.34$, $\beta_2 = 0.66$, $\rho = 0.1$, и аддитивной логарифмической (ЛОГ)

$$u(x) = a_1 \ln(1 + b_1 x_1) + a_2 \ln(1 + b_2 x_2)$$

с параметрами $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.15$, $a_2 = 4$, $b_2 = 0.1$. Метод НС реализован в двух вариантах: интерполяционном (НСИ) с использованием только интерполяционной системы (5) и эрмитовском (НСЭ) с использованием всех условий (5) и (6).

В качестве исходных данных задавались объёмы продаж $\{x^t\}$ и значения градиентов тестовых функций $\{q_i^t = \partial u(x^t)/\partial x_i\}$. Эти данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные

Симплекс			ПЭЗ		ЛОГ	
t	x_1^t	x_2^t	q_1^t	q_2^t	q_1^t	q_2^t
t=0	1.0	1.0	0.34	0.66	0.026087	0.36363
t=1	1.1	1.0	0.31723	0.68387	0.025701	0.36363
t=2	1.05	1.1	0.35167	0.648599	0.026053	0.36036

В таблицах 2 и 3 представлены результаты восстановления функций $u(x)$ и их производных $q(x)$. Приведены относительные значения погрешностей (в %) в точках $x^{(i)}$ равномерного разбиения отрезка биссектрисы положительного ортанта ($x_1 = x_2$), принадлежащего базисному симплексу (треугольнику). Отметим, что этот отрезок начинается в вершине (1.0; 1.0). В контрольных точках выполнялась проверка вогнутости восстанавливаемой функции вычислением

скалярных произведений разностей градиентов и их аргументов $\langle q^{(i)} - q^{(t)}, x^{(i)} - x^{(t)} \rangle$, $t = 0, 1, 2$. Для вогнутых функций они должны быть неположительными. Нарушений этого свойства в приводимых и других примерах не отмечалось.

Можно отметить лучшее качество аппроксимации метода БИ. Однако естественно ожидать, что при использовании большего числа точек (узлов интерполяции) метод нормальных сплайнов будет улучшать это качество, в то время как при барицентрической интерполяции информация в точках вне базисного симплекса не используется.

Таблица 2. Погрешность функции

	ПЭЗ			ЛОГ		
i	БИ	НСИ	НСЭ	БИ	НСИ	НСЭ
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.027	0.085	0.007	0.001	0.003	0.098
2	0.001	0.156	0.370	0.051	0.087	0.123
3	0.019	0.215	0.694	0.170	0.230	0.219
4	0.056	0.265	0.974	0.347	0.421	0.368
5	0.100	0.308	1.215	0.570	0.649	0.560
6	0.150	0.346	1.426	0.835	0.906	0.786
7	0.205	0.379	1.611	1.134	1.187	1.040
8	0.263	0.408	1.775	1.463	1.487	1.315
9	0.325	0.435	1.821	1.820	1.804	1.609
10	0.389	0.458	1.911	1.920	1.934	1.919

Таблица 3. Погрешность производных

	ПЭЗ				ЛОГ			
	БИ		НСИ		БИ		НСИ	
i	$q_1^{(i)}$	$q_2^{(i)}$	$q_1^{(i)}$	$q_2^{(i)}$	$q_1^{(i)}$	$q_2^{(i)}$	$q_1^{(i)}$	$q_2^{(i)}$
0	0.00	0.00	3.43	0.44	0.00	0.00	0.65	0.44
1	0.08	0.09	3.27	0.36	0.00	0.00	0.74	0.51
2	0.14	0.19	3.14	0.29	0.05	0.01	2.14	1.46
3	0.17	0.31	3.03	0.23	0.13	0.05	3.53	2.41
4	0.19	0.43	2.94	0.18	0.25	0.11	4.92	3.36
5	0.19	0.57	2.86	0.14	0.41	0.18	6.31	4.31
6	0.19	0.70	2.79	0.10	0.61	0.27	7.70	5.26
7	0.17	0.85	2.73	0.07	0.85	0.38	9.09	6.21
8	0.15	0.99	2.67	0.04	1.13	0.50	10.5	7.16
9	0.12	1.14	2.63	0.01	1.45	0.65	11.9	8.11
10	0.08	1.29	2.58	0.00	1.81	0.81	13.3	9.06

ЛИТЕРАТУРА

1. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1974.
2. Debreu G. Smooth preferences // *Econometrica*. 1972. V.40. №4. P.603-615.
3. Chiappori P.-A., Rochet J.-C. Revealed preferences and differentiable demand // *Econometrica*. 1987. V.55. №3. P.687-691.
4. Afriat S.N. The construction of utility functions from expenditure data // *International Economic Review*. 1967. V.8. P.67-77.
5. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // *Econometrica*, 1982. V50. №4. P.945-973.
6. Varian H. Non-parametric tests of consumer behaviour // *The Review of Economic Studies*. 1983. V.50. P.99-100.
7. Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // *Матем. моделирование*. 1998. Т.10. №4. С.105-116.
8. Горбунов В.К. Индексы рационального потребления // *Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер."Финансовая и страховая математика"*. - М.: Изд. "ТВП". Т.4. Вып.1. 1997. С.66-85.
9. Горбунов В.К. О представлении линейно однородных функций полезности // *Уч. зап. УлГУ. Фунд. проблемы матем. и механики*. Вып. 1(6). 1997. С. 70-75.
10. Горбунов В.К. Обратная задача рационального потребления. - Ульяновск, УлГУ, 1999.
11. Горбунов В.К. Обратная задача рационального потребления в классе дифференцируемых функций полезности // *Труды XII межд. Байкальской школы-семинара*. Иркутск, 2001 (в печати).
12. Горбунов В.К. Релаксационно-штрафной метод решения экстремальных задач // *Докл. акад. наук*. 2001. Т.377. №5 (в печати).
13. Горбунов В.К. Регуляризация компактно разрешимых задач // *Вестник Моск. ун-та. Сер.15. ВМК*. 1999. N1. С.20-23.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
15. Кохановский И.И. Нормальные сплайны в вычислительной томографии // *Автометрия*. 1995. №2. С.84-89.

К ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ⁷

М.В.Дмитриева, Е.Б.Ким

В работе исследуется задача о стабилизации движения управляемой системы при ограничении на управление.

Основой многих исследований по решению задач о стабилизации и оптимальной стабилизации движения управляемой системы с помощью функции Ляпунова являются методы, представленные в [1]. В работе [2] дано решение задачи об оптимальной стабилизации устойчивого невозмущенного движения дополнительными силами, минимизирующими некоторый функционал специального вида в форме, близкой к задаче обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов [3].

В работе [4] дано развитие результатов из [2] для задачи при ограничении на управление.

Постановка задачи о стабилизации движения с гарантированной оценкой качества управления [5] и ее решение позволяет развить некоторые результаты из [2—5]. Такое развитие излагается в данной работе.

1. Пусть возмущенное движение управляемой системы при отсутствии управления описывается системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0 \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ есть вектор линейного действительного пространства R^n с нормой $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}'\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ($()'$ — операция транспонирования), $\mathbf{X} : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^n$ есть непрерывная вектор-функция ($R^+ = [0, +\infty)$, $\Gamma = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| < H\}$, $0 < H \leq +\infty$).

Пусть для системы (1.1) известна некоторая определенно-положительная, допускающая бесконечно малый высший, бесконечно большой при $\|\mathbf{x}\| \rightarrow H$ функция $V : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^+$ (т.е. функция $V(t, \mathbf{x})$ такова, что $h_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq h_2(\|\mathbf{x}\|)$ для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$, где h_1, h_2 — функции типа Хана [6], причем $h_1 \rightarrow +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \rightarrow H$), $V \in$

⁷Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-01005.

C^1 , производная которой в силу системы (1.1) $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ неположительна, $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$.

Пусть к рассматриваемой системе приложены управляющие силы вида $M(t, \mathbf{x})\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in R^r$ с нормой $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}'\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_r^2$, $M : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^{n \times r}$ есть непрерывная матрица размерности $n \times r$. И соответственно, управляемое движение системы описывается системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + M(t, \mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1.2)$$

При $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ система совершает невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, которое в силу предположения о существовании функции $V = V(t, \mathbf{x})$ с указанными свойствами равномерно устойчиво.

Рассмотрим задачу о стабилизации $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ управлением вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^r$, $\mathbf{u} \in C$ с критерием качества управления в виде

$$I = \int_{t_0}^{\infty} (F(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}'Q(t, \mathbf{x})\mathbf{u})dt \quad (1.3)$$

где $F : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^+$ есть некоторая непрерывная функция, $Q : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^{r \times r}$ есть непрерывная положительно-определенная матрица.

Для случая неограниченного управления $\mathbf{u} \in R^r$ и согласно [2] имеет место следующий результат.

Пусть

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}Q^{-1}(t, \mathbf{x})M'(t, \mathbf{x})\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}), \quad (1.4)$$

где Q^{-1} — матрица, обратная к Q , функция F — составляющая в подынтегральном выражении (1.3) равна

$$F(t, \mathbf{x}) = F_0(t, \mathbf{x}) = -\dot{V}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}))'Q(t, \mathbf{x})\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}), \quad (1.5)$$

функция

$$W_0(t, \mathbf{x}) = -\dot{V}(t, \mathbf{x}) - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \right)' M(t, \mathbf{x})\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) \quad (1.6)$$

является определено-положительной, $W(t, \mathbf{x}) \geq h_3(\|\mathbf{x}\|)$ для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$.

Тогда управление (1.4) решает задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1.2) до равномерной

асимптотической устойчивости в целом в области Γ , доставляя минимум функционалу (1.3) с функцией $F(t, x)$, определяемой равенством (1.5).

2. Рассмотрим задачу о стабилизации $x = 0$ с критерием качества (1.3) при ограничении на стабилизирующее управление

$$\|u(t, x)\| \leq q_0 = \text{const} > 0 \quad (2.1)$$

для каждого $(t, x) \in R^+ \times \Gamma$.

На основании [2,4,5] можно получить следующий результат.

Определим подобласть $\Gamma_0(t) \subset \Gamma$ как множество точек $x \in \Gamma$, таких, что $\|u^0(t, x)\| < q_0$, $\Gamma_1(t) = \Gamma \setminus \Gamma_0(t)$.

Теорема 2.1. Предположим, что:

1) управление $u^1(t, x)$ определяется в виде

$$u^1(t, x) = \begin{cases} u^0(t, x) & \text{для } (t, x) \in R^+ \times \Gamma_0(t) \\ q_0 u^0(t, x) / \|u^0(t, x)\| & \text{для } (t, x) \in R^+ \times \Gamma_1(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

2) функция $F(t, x)$ в (1.3) определяется в виде $F(t, x) = F_0(t, x)$ для $(t, x) \in R^+ \times \Gamma_0(t)$ и является произвольной непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенствам

$$\begin{aligned} 0 \leq F(t, x) \leq -\dot{V}(t, x) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right)' M(t, x) u^1(t, x) - \\ - (u^1(t, x))' Q(t, x) u^1(t, x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

для $(t, x) \in R^+ \times \Gamma_1(t)$.

3) функция

$$W_1(t, x) = -\dot{V}(t, x) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right)' M(t, x) u^1(t, x) \quad (2.4)$$

является определенно-положительной.

Тогда управление (2.2) является стабилизирующим до равномерной асимптотической устойчивости в области Γ в целом, при этом:

оно является оптимальным в подобласти $\Gamma_0(t)$, доставляя минимум функционалу (1.3) с функцией $F(t, x)$ из (1.5);

дает гарантированную оценку $V(t_0, x_0)$ качества функционала (1.3) с произвольной функцией $F(t, x)$, удовлетворяющей неравенствам (2.3), во всей области Γ .

3. Рассмотрим случай, когда функция $W_1(t, \mathbf{x})$, определенная из (2.4) является постоянно-положительной. Асимптотическая устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в этом случае может быть найдена на основе построения предельных систем и предельных функций Ляпунова [5,7].

Допустим, что при управлении (2.2) правая часть системы (1.2)

$$\mathbf{X}^1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + M(t, \mathbf{x})\mathbf{u}^1(t, \mathbf{x})$$

удовлетворяет условиям предкомпактности системы [5,7], например, ограничена и удовлетворяет условию Липшица на каждом компактном множестве $K \subset \Gamma$. Тогда предельные свойства движений системы определяются семейством предельных систем [7]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_*^1(t, \mathbf{x}), \quad X_*^1(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \lim_{t_j \rightarrow +\infty} \int_0^t \mathbf{X}^1(t_j + \tau, \mathbf{x}) d\tau$$

Допустим также, что функция $W_1(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет аналогичным условиям предкомпактности ее сдвигов $W_1^\tau(t, \mathbf{x}) = W(\tau + t, \mathbf{x})$, и соответственно для нее можно определить семейство предельных функций $W_1^*(t, \mathbf{x})$.

Теорема 3.1. Предположим, что:

1) управление $\mathbf{u}^1(t, \mathbf{x})$ и функция $F(t, \mathbf{x})$ определяются согласно условиям 1) и 2) теоремы 2.1;

2) функция W_1 из (2.4) неотрицательна, $W_1(t, \mathbf{x}) \geq 0$ для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$;

3) для каждой предельной пары $(W_1^*, \mathbf{X}_*^1)$ множество $\{W_1^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_*^1(t, \mathbf{x})$, кроме нулевого, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Тогда утверждение теоремы 2.1 остается верным.

Литература

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С.475—514.

2. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т.34. Вып.3. С.440—456.

3. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.

4. Блинов А.П. К оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1982. Т.46. Вып.3. С.366—373.

5. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т.61. Вып.1. С.44—51.

6. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300с.

7. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225—232.

/

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦЫ МОНОТОННЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПРОЦЕССОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ⁸

С.С. Константинов

В работе получены оценки вероятности пересечения границы монотонным дифференцируемым процессом, имеющим вид функционала от винеровского процесса со сносом. Полученные результаты могут быть использованы в таких областях, как физика и химия полимеров, финансовая математика, физиология и т.д.

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ с обычными условиями Деллашери задан стандартный винеровский процесс $W_t = (W_t)_{t \geq 0}$. Рассмотрим $H_t = (H_t)_{t \geq 0}$ – монотонный неубывающий дифференцируемый процесс с

$$H_t = \int_0^t I(W_s + f_s > a) ds, \quad (1)$$

где a – некоторая константа ($a > 0$);

$I(\cdot)$ – индикаторная функция;

f_t – детерминированная функция, подчиняющаяся условиям:

$$f_0 = 0, f'_t \in C[0, T], f'_t \in L_2[0, T], \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (f'_s)^2 ds \right\} < \infty \quad \forall T > 0. \quad (2)$$

Определим для числа b ($b > 0$) первый момент пересечения процессом $H_t = (H_t)_{t \geq 0}$ границы b как $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ – момент остановки $\tau(\omega) = \inf(t : t > 0, H_t \geq b)$. Таким образом τ есть момент достижения уровня b временем пребывания винеровского процесса W_t со сносом f_t в области "выше a ". С прикладной точки зрения исследования распределений таких моментов остановки представляют большой интерес. И это связано с тем, что во время превышения

⁸Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 01-01-00735.

критическими параметрами системы пороговых величин происходит накопление необратимых повреждений системы и их сумма при достижении своего порога приводит к разрушению системы: в случае физики и химии полимеров – к их разрушению, в случае финансовой математики – к разорению, в случае физиологии и биологии – к смерти существа и т.п.

Обозначим $A_t = \{\omega : \tau > t\} = \{H_t < b\}$. Необходимо оценить вероятность $P(A_t)$. Задача такого рода в случае $f_t \equiv 0 \forall t$ подробно рассматривалась в работе [1]. Там же получены оценки для вероятности:

$$P\left\{\int_0^t I(W_s > a)ds < b\right\} \quad (3)$$

В данной работе получены оценки вероятности $P(A_t)$. Ключевую роль в получении этих оценок играет теорема Гирсанова [2], позволяющая с помощью абсолютно непрерывной замены мер [3] – [6], свести задачу к оценкам вероятности (3), полученным в [1]. При выводе оценок $P(A_t)$ используются технические приемы из работ [7] – [9].

Теорема. При выполнении условий (2) $\forall t > b$ существуют такие константы $c_1 = c_1(b)$ и $c_2 = c_2(b)$, что

$$P(A_t) \leq \left(\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{m^*}} \exp\left\{\frac{1}{2(m^* - 1)} \int_0^t (f'_s)^2 ds\right\}, \quad (4)$$

$$P(A_t) \geq \left(\frac{c_2}{\sqrt{t}}\right)^{p^*} \exp\left\{\frac{p^*}{2(1 - p^*)} \int_0^t (f'_s)^2 ds\right\}, \quad (5)$$

где $(p^*, m^* > 1)$,

$$p^* = 1 + \sqrt{\frac{\int_0^t (f'_s)^2 ds}{-2 \ln \frac{c_2}{\sqrt{t}}}}, \quad (6)$$

$$m^* = \frac{\ln \frac{c_1}{\sqrt{t}} - \sqrt{-\frac{1}{2} \ln \frac{c_1}{\sqrt{t}} \int_0^t (f'_s)^2 ds}}{\frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds + \ln \frac{c_1}{\sqrt{t}}}. \quad (7)$$

Доказательство.

При выполнении условий (2) сделаем замену меры, воспользовавшись теоремой Гирсанова с

$$Z_{(X_t,t)} = \exp \left\{ \int_0^t f'_s dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 d[X, X]_s \right\}, \quad (8)$$

где

$$X_t = W_t + f_t = W_t + \int_0^t f'_s ds, \quad P_t \quad (9)$$

$$X_t = \bar{W}_t, \quad \tilde{P}_t \quad (10)$$

и $\tilde{P} \sim P$. Так определенная плотность $Z_{(X_t,t)}$ является неотрицательным мартингалом [см.2-5]. При замене меры получим:

$$P(A_t) = \tilde{E} \left[I(A_t) Z_{(X_t,t)} \right], \quad (11)$$

$$E \left[I(A_t) Z_{(X_t,t)}^{-1} \right] = \tilde{P}(A_t). \quad (12)$$

Применим к (11) справа и к (12) слева неравенство Гельдера:

$$P(A_t) \leq \tilde{E} \left[I(A_t) \right]^{\frac{1}{m}} \tilde{E} \left[Z_{(X_t,t)}^n \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (13)$$

$$E \left[I(A_t) \right]^{\frac{1}{p}} E \left[Z_{(X_t,t)}^{-q} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \tilde{P}(A_t), \quad (14)$$

где $(p, q, m, n > 1)$

$$p^{-1} + q^{-1} = 1, m^{-1} + n^{-1} = 1. \quad (15)$$

Запишем неравенства (13) и (14) соответственно в следующем виде:

$$P(A_t) \leq \left[\tilde{P}(A_t) \right]^{\frac{1}{m}} \tilde{E} \left[Z_{(X_t,t)}^n \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (16)$$

$$P(A_t) \geq \left[\tilde{P}(A_t) \right]^p \tilde{E} \left[Z_{(X_t,t)}^{1-q} \right]^{-\frac{p}{q}}, \quad (17)$$

Учитывая (показывается с помощью формулы Ито [см.2]), что

$$\tilde{E} Z_{(X_t,t)}^n = \exp \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}, \quad (18)$$

$$\tilde{E}Z_{(X_t,t)}^{1-q} = \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}, \quad (19)$$

неравенства (15), (16) после подстановки (17), (18) будут следующими:

$$P(A_t) \leq [\tilde{P}(A_t)]^{\frac{1}{m}} \exp \left\{ \frac{(n-1)}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}, \quad (20)$$

$$P(A_t) \geq [\tilde{P}(A_t)]^p \exp \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}. \quad (21)$$

Выражая n через m , q через p из (14), получим вместо (20) и (21):

$$P(A_t) \leq [\tilde{P}(A_t)]^{\frac{1}{m}} \exp \left\{ \frac{1}{2(m-1)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}, \quad (22)$$

$$P(A_t) \geq [\tilde{P}(A_t)]^p \exp \left\{ \frac{p}{2(1-p)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}. \quad (23)$$

Теперь, используя известные оценки из [1], получим:

$$P(A_t) \leq \left(\frac{c_1}{\sqrt{t}} \right)^{\frac{1}{m}} \exp \left\{ \frac{1}{2(m-1)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}, \quad (24)$$

$$P(A_t) \geq \left(\frac{c_2}{\sqrt{t}} \right)^p \exp \left\{ \frac{p}{2(1-p)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\}. \quad (25)$$

Эти неравенства справедливы при всех $m, n > 1$. Для получения более точных оценок, найдем m^* и p^* , при которых в (4) правая часть достигает своего минимума, а в (5) правая часть достигает своего максимума. Для этого необходимо найти точки экстремума и проверить их на максимум и минимум. Возьмём в (24) производную по m в правой части и приравняем к нулю:

$$\left(\frac{c_1}{\sqrt{t}} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \ln \left(\frac{c_1}{\sqrt{t}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{m^2} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2(m-1)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\} +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \cdot \left(\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2(m-1)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\} \cdot \left(-\frac{1}{(m-1)^2} \right) = 0.$$

Откуда получаем, что при (введём обозначение $m = m^*$)

$$m^* = \frac{\ln \frac{c_1}{\sqrt{t}} - \sqrt{-\frac{1}{2} \ln \frac{c_1}{\sqrt{t}} \int_0^t (f'_s)^2 ds}}{\frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds + \ln \frac{c_1}{\sqrt{t}}}$$

правая часть в (24) достигает своего минимума. Аналогично в (25):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_2}{\sqrt{t}}\right)^p \cdot \ln \left(\frac{c_2}{\sqrt{t}}\right) \cdot \exp \left\{ \frac{p}{2(1-p)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds \cdot \frac{1}{(p-1)^2} \cdot \left(\frac{c_2}{\sqrt{t}}\right)^p \cdot \exp \left\{ \frac{p}{2(1-p)} \int_0^t (f'_s)^2 ds \right\} = 0 \end{aligned}$$

Откуда при ($p = p^*$)

$$p^* = 1 + \sqrt{\frac{\int_0^t (f'_s)^2 ds}{-2 \ln \frac{c_2}{\sqrt{t}}}}$$

правая часть в (25) достигает своего максимума, что доказывает теорему. Следует отметить, что условие $p^*, m^* > 1$ требует выполнения в (7) неравенства:

$$\frac{1}{2} \int_0^t (f'_s)^2 ds < -\ln \left(\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right).$$

В качестве простого примера можно рассмотреть функцию $f_t \equiv const$. Для этой функции $f'_t = 0$ и оценки вероятности приобретают следующий вид:

$$\frac{c_2}{\sqrt{t}} \leq P \left\{ \int_0^t I(W_s > a - const) ds < b \right\} \leq \frac{c_1}{\sqrt{t}}.$$

Значения констант c_1, c_2 в других обозначениях получены в [1].

Автор выражает благодарность проф. Бутову А. А. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бутов А. А. Теорема для оценок вероятностей пересечения границы простым монотонным дифференцируемым процессом // Учёные записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып.1(10) - Ульяновск: УлГУ, 2001.

[2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Р. Статистика случайных процессов // М.: Наука, 1974.

[3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Р. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской // Изв. АН СССР, сер. матем., 1972. – Т.36, В.4. – С.874 – 889.

[4] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Р. К вопросу об абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер // Матем. сб., 1977. – Т.104, В.2. – С.227 – 247.

[5] Новиков А. А. Об условиях равномерной интегрируемости непрерывных неотрицательных мартингалов // Теория вероятностей и ее применения, 1979. – Т.24, В.4. – С.821 – 825.

[6] Новиков А. А. Об условиях абсолютной непрерывности вероятностных мер // Матем.сб., 1978. – Т.107, В.3. – С.435 – 445.

[7] Новиков А. А. Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей пересечения подвижных границ суммами независимых случайных величин // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980. – Т.44, В.4. – С.868 – 885.

[8] Новиков А. А. О времени выхода сумм ограниченных случайных величин из криволинейной полосы // Теория вероятностей и ее применения, 1981. – Т.26, В.2. – С.287 – 301.

[9] Новиков А. А. Мартингальный подход в задаче о времени первого пересечения нелинейных границ // Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1981. – Т.158. – С.130 – 152.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В.Л.Леонтьев, А.Ю.Мелентьев.

В данной статье предлагается метод решения задач динамики криволинейных стержней, основанный на применении ортогональных финитных функций первой степени.

Предлагается и исследуется проекционно-сеточный метод решения динамических задач теории криволинейных стержней, основанный на применении ортогональных финитных функций первой степени [1, 2]. Рассматривается задача о колебаниях упругого криволинейного стержня длины ℓ , которые описываются системой уравнений [3]

$$\partial \vec{Q} / \partial s - \rho F \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 - f \partial \vec{u} / \partial t + \vec{q} = 0, \quad \partial \vec{M} / \partial s - c \partial^2 \vec{\theta} / \partial t^2 + \vec{\tau} \times \vec{Q} + \vec{\mu} = 0,$$

$$\partial \vec{u} / \partial s - \bar{\bar{b}} \cdot \vec{Q} + \vec{\tau} \times \vec{\theta} = 0, \quad \partial \vec{\theta} / \partial s - \bar{\bar{\beta}} \cdot \vec{M} = 0.$$

Здесь s - естественная координата, t - время, c - диагональная матрица погонных массовых моментов инерции. Используются обозначения векторов: $\vec{Q}$ - сил, $\vec{M}$ - моментов, $\vec{u}$ - перемещений, $\vec{\theta}$ - углов поворота сечения, $\vec{\tau}$ - орта касательной к оси стержня, $\vec{q}$ и $\vec{\mu}$ - внешних сил и моментов, а также тензоров податливости стержня $\bar{\bar{b}}$ и $\bar{\bar{\beta}}$ и скалярных величин: ρ - плотности, F - площади поперечного сечения, f - коэффициент вязкого трения.

Применяется метод Канторовича, основанный на использовании проекционных условий, подобных проекционным уравнениям вариационного принципа Рейсснера. Приближенное решение разыскивается в виде линейных комбинаций

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^N \vec{u}^i(t) \varphi_i(s), \quad \vec{\theta} = \sum_{i=1}^N \vec{\theta}^i(t) \varphi_i(s),$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{Q}^i(t) \varphi_i(s), \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}^i(t) \varphi_i(s). \quad (1)$$

Здесь $\vec{u}^i$, $\vec{\theta}^i$, $\vec{Q}^i$, $\vec{M}^i$ - векторы, компоненты которых - неизвестные функции, зависящие от времени, $\varphi_i(s)$ - базисные ортогональные финитные функции [1, 2], связанные с равномерной сеткой $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = \ell$. Линейные комбинации (1) подставляются в проекционные уравнения

$$\int_0^\ell \left(\partial \vec{Q} / \partial s - \rho F \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 - f \partial \vec{u} / \partial t + \vec{q} \right) \varphi_i(s) ds = 0,$$

$$\int_0^\ell \left(\partial \vec{M} / \partial s - c \partial^2 \vec{\theta} / \partial t^2 + \vec{\tau} \times \vec{Q} + \vec{\mu} \right) \varphi_i(s) ds = 0,$$

$$\int_0^\ell \left(\partial \vec{u} / \partial s - \bar{b} \cdot \vec{Q} + \vec{\tau} \times \vec{\theta} \right) \varphi_i(s) ds = 0,$$

$$\int_0^\ell \left(\partial \vec{\theta} / \partial s - \bar{\beta} \cdot \vec{M} \right) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (i = \overline{1, N}).$$

В результате получается система сеточных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \vec{Q}^j(t) \int_0^\ell \varphi_i(s) \frac{d\varphi_j(s)}{ds} ds - \sum_{j=1}^{N-1} \rho_j F_j \left[\frac{\partial^2 \vec{u}^j(t)}{\partial t^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \vec{u}^{j+1}(t)}{\partial t^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(s) \varphi_{j+1}(s) ds \right] -$$

$$- f \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{u}^j(t)}{\partial t} \int_0^\ell \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \int_0^\ell \vec{q} \varphi_i(s) ds = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N \vec{M}^j(t) \int_0^\ell \varphi_i(s) \frac{d\varphi_j(s)}{ds} ds - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \left[\frac{\partial^2 \vec{\theta}^j(t)}{\partial t^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \vec{\theta}^{j+1}(t)}{\partial t^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(s) \varphi_{j+1}(s) ds \right] + \sum_{j=1}^N \int_0^\ell \vec{\tau} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds \times \vec{Q}^j(t) +$$

$$-f \sum_{j=i-1}^{i+1} \frac{\partial \vec{u}^j(t)}{\partial t} \int_0^\ell \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \int_0^\ell \vec{q} \varphi_i(s) ds / [\rho F \int_0^\ell \varphi_i(s)^2 ds],$$

$$\partial^2 \vec{\theta}^i / \partial t^2 = [\sum_{j=i-1}^{i+1} \vec{M}^j(t) \int_0^\ell \varphi_i(s) \frac{d\varphi_j(s)}{ds} ds + \vec{\mu}] / [c \int_0^\ell \varphi_i(s)^2 ds] +$$

$$+ \frac{1}{c} \vec{\tau} \times \vec{Q}^i(t), \quad \vec{u}^i(0) = \vec{u}_0^i, \quad \vec{\theta}^i(0) = \vec{\theta}_0^i, \quad (i = \overline{1, N}).$$

Уравнения записаны для случая постоянных вдоль оси стержня функций s , ρ , F . Используются классические программные средства численного решения задачи Коши.

Для тестирования метода была решена задача о колебаниях стального полукольца, расположенного в плоскости Oxy , свободного в начале и жестко заземленного в конце, с приложенной в начальный момент, равномерно распределённой нагрузкой q_y , параллельной оси Oy . В начальный момент времени $\vec{u}_0^i = \vec{0}$, $\vec{\theta}_0^i = \vec{0}$ ($i = \overline{1, N}$). Графики компонент Q_x и θ_z векторов $\vec{Q}, \vec{\theta}$ представлены на рисунках 1 - 4 в момент времени 3 сек., близкий к началу переходного процесса, и на рисунках 5 - 8 - в момент времени 100 сек., к которому движение является уже практически установившимся. Рисунки 1, 3, 5, 7 иллюстрируют решения, связанные с сеткой, состоящей из 25 узлов, рисунки 2, 4, 6, 8 - решения, связанные с сеткой, содержащей 250 узлов. Полученные результаты показывают, что решения динамической задачи, в которой учитывается затухание колебаний, при $t = 100$ незначительно отличаются от точных решений аналогичной статической задачи. Сравнение форм колебаний, полученных на двух указанных сетках, подтверждает сходимость приближенных решений. Такие же выводы относятся ко всем компонентам векторов $\vec{Q}, \vec{M}, \vec{u}, \vec{\theta}$. Таким образом, метод является эффективным средством решения задач динамики криволинейных стержней.

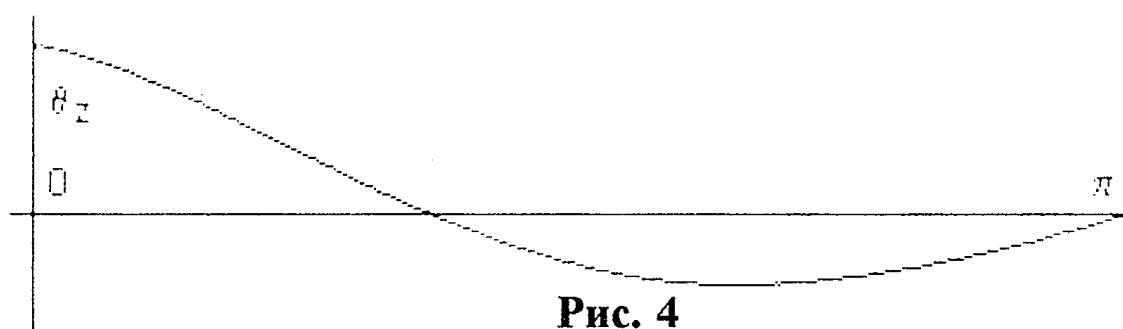
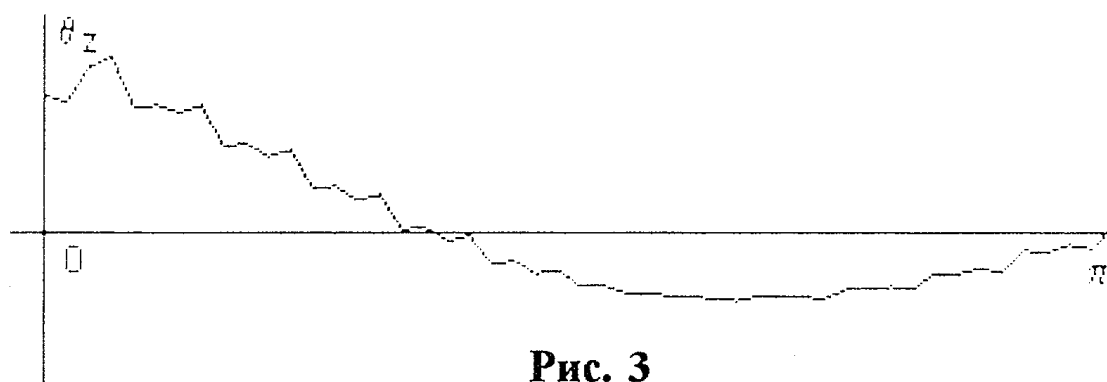
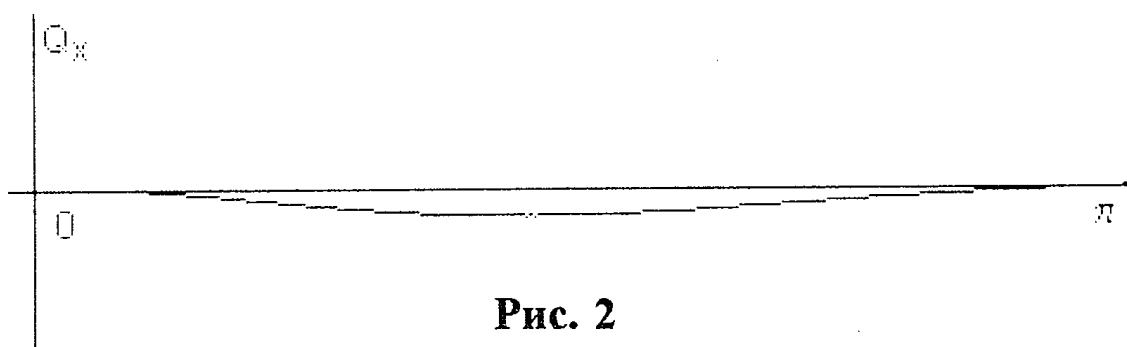
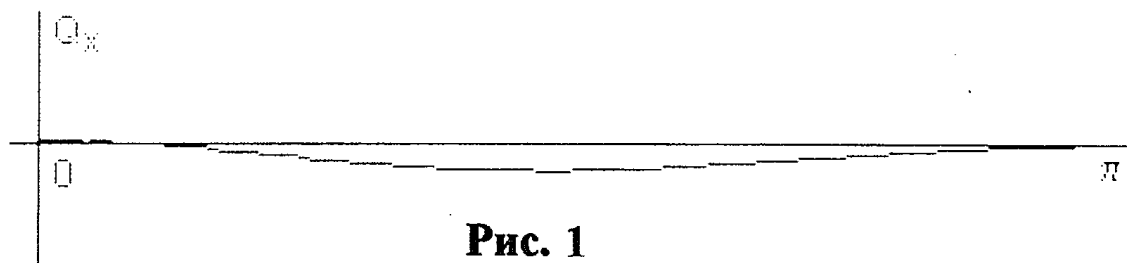
ЛИТЕРАТУРА

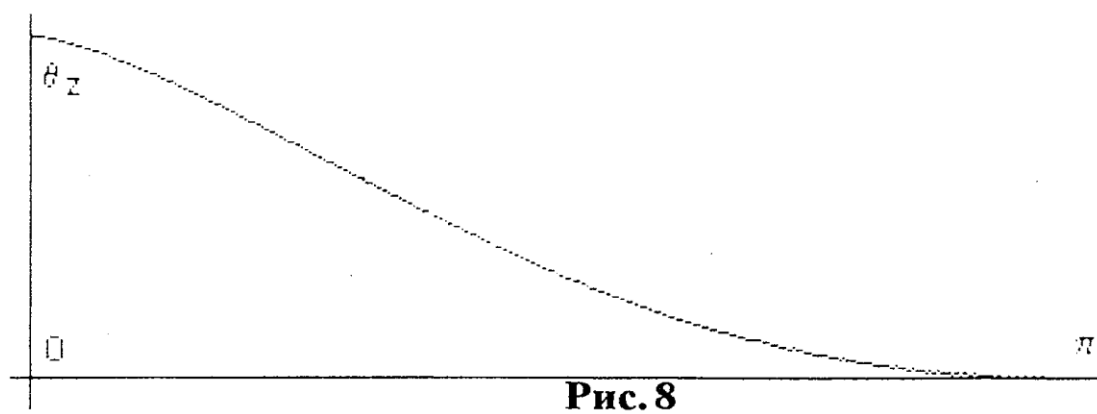
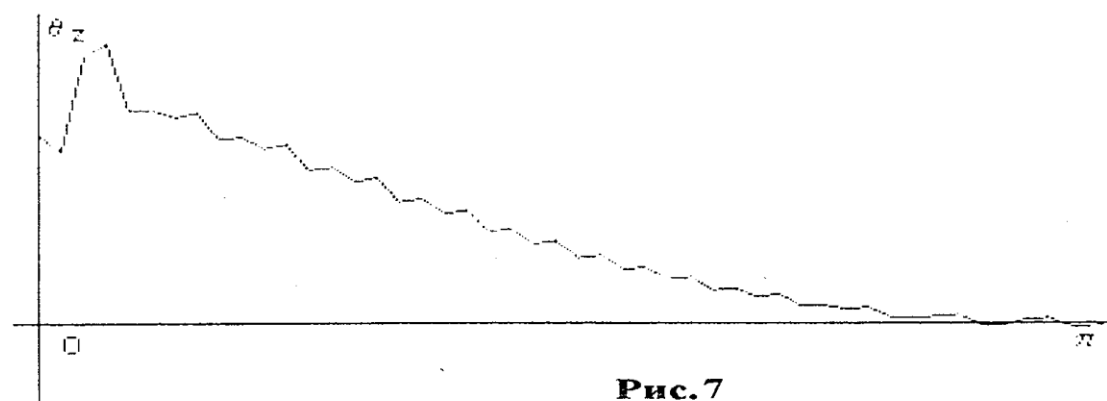
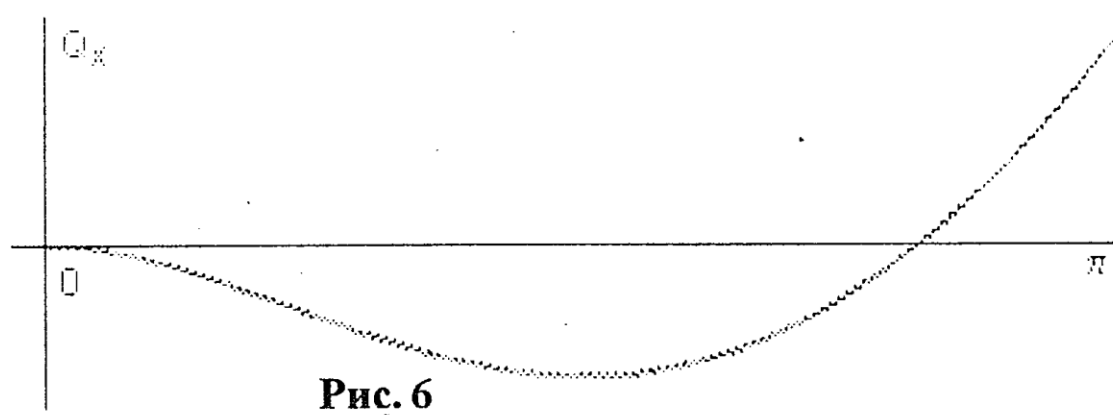
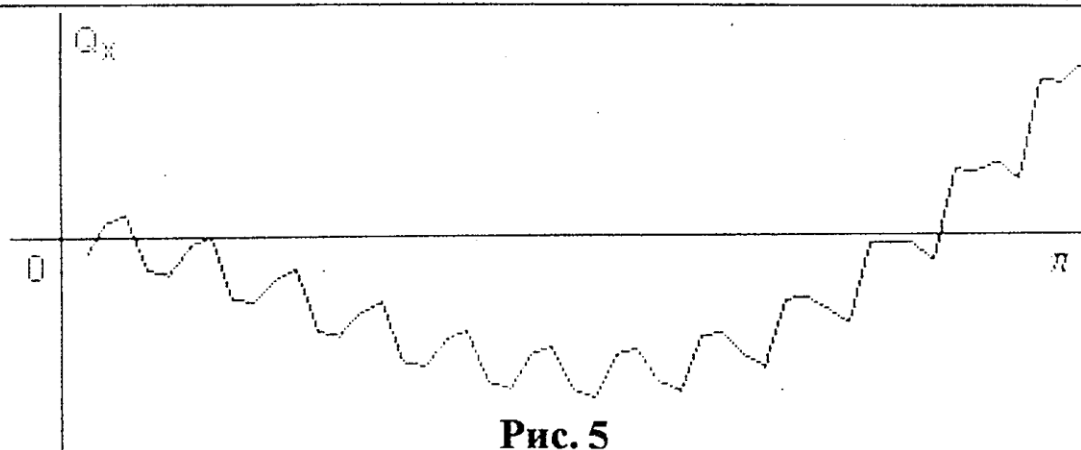
1. Леонтьев В.Л. Об одном обобщении функций Куранта // Теория функций и приближений. Труды 7-й Саратовской зимней школы 30 января - 4 февраля 1994 года (памяти проф. А.А. Привалова). Часть 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1995. С. 36-40.

2. Leontjew V.L., Ziplov M.P. Über eine projektionen netzlichen Methode, die mit der Anwendung der miteinander orthogonalen ununterbrochen

en Basisfunktionen mit dem endlichen Trager verknupfen ist. Des. 1 Russisch-Deutschen Symposiums "Intelligente informationstechnologien in der entscheidungsfindung". 24-28 November. 1995. Moskau. 169-173.

3. Вибрации в технике. Т. 3. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.





О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ В.М.АЛЕКСЕЕВА ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ⁹

О.А. Перегудова

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где $x \in R^n$, X – вектор-функция, $X(t, x) = (X^1(t, x), \dots, X^n(t, x))^T$, определенная в области $\Gamma = R^+ \times G = \{(t, x) : t \geq 0, \|x\| < \nu, \nu = \text{const} > 0 \text{ или } \nu = +\infty\}$. Будем предполагать, что функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решений.

Пусть существует вектор-функция Ляпунова $V = V(t, x)$, $V = (V^1, \dots, V^k)^T$, $V : \Gamma \rightarrow R^k$, непрерывно дифференцируемая в области Γ , $\bar{V} = \sum_{i=1}^k V^i$, и производная по времени от $V(t, x)$ в силу системы (1) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dV}{dt} = f_1(t, V) - f_2(t, V, x), \quad (2)$$

где $f_1 \in W(\Omega)$, $W(\Omega)$ – класс непрерывных квазимоноотонных функций, определенных в некоторой открытой области Ω , $f_1(t, 0) = 0$, $\Omega = \{(t, y) \in R^+ \times R^k : t \geq 0, \|y\| < K_1\}$, $K_1 = +\infty$ или $\sup_{(t,x) \in \Gamma} \|V(t, x)\| = K < K_1 < +\infty$; а $f_2(t, V, x) \geq 0 \forall t \geq 0, \|V\| < K_1, \|x\| < \nu$. [3]

Иными словами, вектор-функция $V(t, x)$ и система дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f_1(t, u), \quad u \in R^k \quad (3)$$

являются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для системы (1) [3].

Пусть функция $f_1(t, u)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения $u = u(t, t_0, u_0)$ системы (3) с начальным

⁹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005 и грант 00-15-96150 ведущей научной школы).

условием $(t_0, u_0) \in R^+ \times R^k$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1.[3] Если функция $V(t, x)$ и уравнение (3) являются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для системы (1), то для любых $(t_0, x_0) \in \Gamma$ и решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) на промежутке $[t_0, \tau(x))$ существует решение $u(t, t_0, u_0)$ уравнения (3) с $u_0 = V(t_0, x_0)$ на $[t_0, \tau(u))$ и выполняется неравенство :

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq u(t, t_0, u_0), \quad t \in [t_0, \tau),$$

где $\tau = \min[\tau(x), \tau(u)] > t_0$.

Следствием этой теоремы являются все основные теоремы сравнения для устойчивости, в частности, справедлива теорема для устойчивости.

Теорема 2.[3] Для устойчивости (соответственно, равномерной устойчивости) невозмущенного движения $x = 0$ системы (1) необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $\bar{\Gamma}_0^1$ и $l (1 \leq l \leq k)$ ($\bar{\Gamma}_0^1 = \{(t, x) \in \Gamma : t \geq 0, \|x\| \leq \nu_0^1\}, 0 < \nu_0^1 < \nu$), существовала вектор-функция Ляпунова $V(t, x)$, обладающая в $\bar{\Gamma}_0^1$ следующими свойствами:

1. Функция $\bar{V}(t, x)$ определенно-положительна (соответственно и $V^1(t, x), \dots, V^k(t, x)$ допускают бесконечно малый высший предел);
2. Нулевое решение системы сравнения (3) устойчиво (соответственно равномерно устойчиво) относительно $u^1, \dots, u^l$ при условии $u_0 = V(t_0, x_0)$ для $(t_0, x_0) \in \bar{\Gamma}_0^1$ (в частности, устойчиво при условии $u_0^1 \geq 0, \dots, u_0^l \geq 0$, если $V^1(t, x) \geq 0, \dots, V^l(t, x) \geq 0$ при $(t, x) \in \bar{\Gamma}_0^1$).

Рассмотрим решение $u = (u^1, \dots, u^k)^T$ системы сравнения (3) $u^1 = u^1(t, t_0, u_0^1, \dots, u_0^k)$, $u^2 = u^2(t, t_0, u_0^1, \dots, u_0^k), \dots, u^k = u^k(t, t_0, u_0^1, \dots, u_0^k)$. Из теоремы 1 следует, что функции $u^i (i = 1, \dots, k)$ являются неубывающими функциями переменных $u_0^1, \dots, u_0^k$, то есть справедливы неравенства $\frac{\partial u^i}{\partial u_0^j} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, k$.

Составим матрицу

$$\Phi(t, t_0, u_0) = \frac{\partial u(t, t_0, u_0)}{\partial u_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u_0^1} & \frac{\partial u^1}{\partial u_0^2} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial u_0^k} \\ \frac{\partial u^2}{\partial u_0^1} & \frac{\partial u^2}{\partial u_0^2} & \cdots & \frac{\partial u^2}{\partial u_0^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^k}{\partial u_0^1} & \frac{\partial u^k}{\partial u_0^2} & \cdots & \frac{\partial u^k}{\partial u_0^k} \end{pmatrix}.$$

Все элементы этой матрицы неотрицательны, и $\Phi(t, t_0, u_0)$ является решением уравнения

$$y' = H(t, t_0, u_0)y,$$

где $H(t, t_0, u_0) = \frac{\partial f_1}{\partial u}(t, u(t, t_0, u_0))$, причем $\Phi(t_0, t_0, u_0) = E$ – единичная матрица.

Поставим задачу локализовать положительное предельное множество $\Omega^+(x(t, t_0, x_0))$, используя свойства матрицы $\Phi(t, t_0, u_0)$ и вектор-функции $f_2(t, V, x)$, которую можно рассматривать как возмущение.

Задачу будем решать на основе метода вариации параметров, используя известную формулу В.М.Алексеева. Согласно этой формуле мы можем установить следующее соотношение :

$$V(t, t_0, V_0) = u(t, t_0, V_0) - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, V(\tau, t_0, V_0)) \cdot f_2(\tau, V(\tau, t_0, V_0), x(\tau, t_0, x_0)) d\tau \quad (4)$$

Интеграл, стоящий в правой части выражения (4), является неотрицательной функцией времени.

Относительно функций X , V и f_2 предположим, что они удовлетворяют условиям предкомпактности [1]. То есть $\forall t_n \rightarrow +\infty$ $\exists$ подпоследовательность $t_{n_k} \rightarrow +\infty$: $X(t + t_{n_k}, x) \rightarrow X^*(t, x)$, $V(t + t_{n_k}, t_0, V_0) \rightarrow V^*(t, t_0, V_0)$, $u(t + t_{n_k}, t_0, V_0) \rightarrow u^*(t, t_0, V_0)$, $f_2(t + t_{n_k}, V, x) \rightarrow f_2^*(t, V, x)$ равномерно соответственно на компактах $K^1 \in G$, $K^2 \in R^+ \times G_1$, $K^3 \in G_1$, $K^4 \in R^k \times G_1 \times G$, где $G_1 = \{V \in R^k : \|V\| < K_1\}$.

Относительно матрицы $\Phi(t, \tau, V)$ будем предполагать, что все элементы матрицы непрерывные, ограниченные функции.

Предположим, что нулевое решение $u = 0$ системы (3) устойчиво, но не асимптотически, тогда функции $V(t, t_0, V_0)$, $u(t, t_0, V_0)$ будут ограничены, а значит интеграл

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, V(\tau, t_0, V_0)) \cdot f_2(\tau, V(\tau, t_0, V_0), x(\tau, t_0, x_0)) d\tau$$

будет сходящимся.

Запишем формулу В.М.Алексеева в виде

$$V(t_{n_k}, t_0, V_0) = u(t_{n_k}, t_0, V_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_{n_k}} \Phi(t_{n_k}, \tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0))) \cdot f_2(\tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0)), x(\tau, t_0, x_0)) d\tau \quad (5)$$

и аналогично

$$V(t_{n_k} + t, t_0, V_0) = u(t_{n_k} + t, t_0, V_0) - \int_{t_0}^{t_{n_k} + t} \Phi(t_{n_k} + t, \tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0))) \cdot f_2(\tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0)), x(\tau, t_0, x_0)) d\tau. \quad (6)$$

Вычитая из равенства (6) равенство (5), получаем

$$V(t_{n_k} + t, t_0, V_0) - V(t_{n_k}, t_0, V_0) = u(t_{n_k} + t, t_0, V_0) - u(t_{n_k}, t_0, V_0) - \int_{t_{n_k}}^{t_{n_k} + t} \Phi(t_{n_k} + t, \tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0))) \cdot f_2(\tau, V(\tau, x(\tau, t_0, x_0)), x(\tau, t_0, x_0)) d\tau. \quad (7)$$

Переходя к пределу при $t_{n_k} \rightarrow +\infty$ в равенстве (7), получаем

$$V^*(t) - V_0^* = u^*(t) - u_0^*,$$

где $V^*(t) = \lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} V(t_{n_k} + t, t_0, V_0)$, $u^*(t) = \lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} u(t_{n_k} + t, t_0, V_0)$, $V_0^* = \lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} V(t_{n_k}, t_0, V_0)$, $u_0^* = \lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} u(t_{n_k}, t_0, V_0)$. А это значит, что справедливо следующее равенство

$$\Phi^*(t, \tau, u^*(\tau) + c) \cdot f_2^*(\tau, u^*(\tau) + c, x^*(\tau)) = 0,$$

где $c = const$, $\Phi^*(t, \tau, u^*) = \lim_{t_{n_k} \rightarrow +\infty} \Phi(t + t_{n_k}, \tau + t_{n_k}, u^*)$.

Иными словами, мы получили множество, локализирующее положительное предельное множество $\Omega^+(x(\tau, t_0, x_0))$.

$$\Omega^+ \subset \{\Phi^*(t, \tau, u^*(\tau) + c) \cdot f_2^*(\tau, u^*(\tau) + c, x^*(\tau)) = 0\}$$

Справедлива следующая теорема об асимптотической устойчивости.

Теорема 3. Предположим, что

- 1) $\bar{V}$ определено-положительна (и соответственно $V^1, \dots, V^k$ допускают бесконечно малый высший предел);
- 2) Нулевое решение $u = 0$ системы сравнения устойчиво (равномерно

устойчиво);

3) $\forall$ предельной пары (X^*, f_2^*) множество $\{\Phi^*(t, \tau, u^*(\tau) + c)f_2^*(\tau, u^*(\tau) + c, x^*(\tau)), x^*(\tau) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{x} = X^*(t, x)$, кроме $x = 0$.

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).

Доказательство этой теоремы очевидным образом следует из предыдущих рассуждений.

Отличие полученных результатов от работы [4] состоит в том, что здесь уже не требуется диагональность матрицы Φ .

Пример

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^n \{a_{ij}d_{1j}(t) + b_{ij}d_{2j}(t)\}x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где a_{ij}, b_{ij} – действительные постоянные, $d_{1j} : R^+ \rightarrow R$, $d_{2j} : R^+ \rightarrow R$ – непрерывные ограниченные функции.

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, \quad \text{где } \lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{v}(t, x) &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \{-(a_{ii}d_{1i} + b_{ii}d_{2i})|x_i| + \sum_{j=1, j \neq i}^n (|a_{ij}||d_{1j}| + |b_{ij}||d_{2j}|)|x_j|\} \leq \\ &\leq - \sum_{j=1}^n \lambda_j (a_{jj}d_{1j} + b_{jj}d_{2j})|x_j| + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1, i \neq j}^n \lambda_i (|a_{ij}||d_{1j}| + |b_{ij}||d_{2j}|)|x_j| \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$(a_{jj}d_{1j} + b_{jj}d_{2j}) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (|a_{ij}||d_{1j}| + |b_{ij}||d_{2j}|) \geq c(t),$$

где $c(t)$ – некоторая непрерывная ограниченная функция времени.

Следовательно, находим

$$\dot{v}(x) \leq -c(t)v(x)$$

Получаем уравнение сравнения

$$\dot{y} = -c(t)y$$

Предположим, что решение $y = 0$ уравнения сравнения устойчиво, но не асимптотически.

Тогда условие асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы можно записать в виде

$$c^*(t) \neq a_{ii}d_{1i}^*(t) + b_{ii}d_{2i}^*(t) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (|a_{ij}| |d_{1j}^*(t)| + |b_{ij}| |d_{2j}^*(t)|)$$

$$\forall j = 1, \dots, n, \text{ где } c^*(t) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} c(t + t_n), d_{ij}^*(t) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} d_{ij}(t_n + t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ, 1984. Т.48. Вып.2. С.225-232.
2. Лакшмикантам В., Лиля С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения : метод сравнения. Киев.: Наукова думка. 1991. 248с.
3. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312с.
4. Перегудова О.А. Метод векторных функций Ляпунова и вариация параметров // Ученые записки УлГУ. Сер. Фунд. проблемы математики и механики / Под ред. акад. РАЕН, проф. А.С.Андреева. Вып. 1(5) Ульяновск: УлГУ. 1998. С.104-109.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛЕТОК ПО ДЛИНАМ ТЕЛОМЕР ¹⁰

Ю.Г.Савинов, С.А.Хрусталеv

В работе построена имитационная стохастическая модель динамики распределения популяции клеток по длинам их теломер, являющихся концевыми структурами ДНК. Выявлены качественные соответствия моделируемых эмпирических функций распределения с экспериментальными данными, полученными на культурах фибробластов человека.

Наличие проблем в репликации концов линейной ДНК было осознано в начале 70-х годов. Тогда же возникли предположения, что эти проблемы должны приводить к укорочению ДНК при последовательных митозах, что, в свою очередь, может вызвать прекращение пролиферации нормальных клеток в культуре и ограничивать продолжительность жизни организмов, у которых есть жизненно важные обновляемые клеточные популяции. Следующим шагом было выделение и исследование различных факторов, влияющих на изменение длин теломер. Так, отсутствие активности теломеразы (фермента, поддерживающего длину теломер на уровне, свойственном данному конкретному организму) в соматических клетках считается причиной, по которой после укорочения теломер до критически малой длины пролиферация таких клеток прекращается. Но до сегодняшнего дня нет единого мнения о том, какой фактор является наиболее существенным, и можно ли по длине теломеры судить о пролиферативной истории клеток.

Экспериментально полученные распределения клеток по длинам их теломер могут быть аппроксимированы как распределением Вейбула, так и гамма-распределением или логнормальным распределением [2], [3]. В отсутствии ясности о виде распределения можно утверждать лишь то, что теломеры весьма гетерогенны по длине, и что это является результатом не только чисто случайного разброса или ошибки измерения, но и каких-то систематических обстоятельств. Поэтому

¹⁰Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 01-01-00735.

естественно представление о том, что любое конкретное распределение теломер по длине должно соответствовать конкретному предположению о механизмах укорочения теломер.

Целью данной работы является математическое описание и построение компьютерной имитационной модели для анализа влияния различных факторов на распределение клеток по длинам их теломер и последующего сравнения с экспериментально полученными распределениями. Модель основана на математическом описании в семимартингальных терминах [5].

В модели рассматриваются следующие механизмы, происходящие при делении клеток и влияющие на длины теломер. Во-первых, учитывается регулярное (при каждом удвоении ДНК) укорочение теломер на одну условную единицу из-за недорепликации концов ДНК. Длина условной единицы составляет десятки или сотни нуклеотидов, в зависимости от типа исследуемой ткани. Так, длина теломер, например, у человека составляет порядка 5-15 тыс. нуклеотидов, при этом число условных единиц - примерно 50-60. Во-вторых, возникают достаточно редкие ситуации, когда происходит укорочение теломер более чем на одну условную единицу вследствие случайных повреждений. В-третьих, возможно также (крайне редкое) удлинение теломер за счет механизма неравного кроссинговера (в результате чего одна из дочерних клеток получает хромосому с более длинной теломерой, чем была у материнской клетки, - за счет того, что другая клетка получает более короткую). В модели также учитываются стохастические процессы, приводящие клеточную популяцию к потере способности к пролиферации.

Клеточная популяция включает в себя три пула клеток: стволовые, полустволовые и дифференцированные постмитотические. Количество стволовых и дифференцированных постмитотических клеток с длиной теломеры $k \in [m, M]$ в момент $t \geq 0$ обозначим соответственно $N_{p+1}^k(t)$ и $N_0^k(t)$. Здесь и далее m и M - минимальный и максимальный пределы длин теломер (в условных единицах), характерных для рассматриваемого вида ткани. Класс полустволовых клеток неоднороден и включает в себя клетки, находящиеся на разных стадиях продвижения к конечной дифференцировке. Пусть $N_i^k(t)$, $i = 1..p$, $k \in [m, M]$ - число полустволовых клеток в момент

времени $t \geq 0$, которым осталось i циклов деления до потери способности к пролиферации (при моделировании p бралось равным 7). Следовательно, обозначив за $N^k(t)$ общее число клеток в популяции с длиной теломеры k в момент времени $t \geq 0$, имеем:

$$N^k(t) = N_{p+1}^k(t) + \sum_{i=1}^p N_i^k(t) + N_0^k(t), \quad k \in [m, M],$$

где $N^k(0)_{k=m}^M$ - начальное распределение клеток по длине теломер.

Опишем $N_i^k(t), i = 0..p+1, k \in [m, M]$:

$$\begin{cases} N_{p+1}^k(t) = N_{p+1}^k(0) + A^k(t) + 2B_{p+1}^{k+1}(t) - B_{p+1}^k(t) - B_p^k(t) + R^k(t) + C^k(t), \\ N_p^k(t) = N_p^k(0) + B_p^k(t) - B_{p-1}^k(t), \\ N_i^k(t) = N_i^k(0) + B_i^{k+1}(t) - B_{i-1}^k(t), i = 1..p-1, \\ N_0^k(t) = N_0^k(0) + B_0^{k+1}(t). \end{cases}$$

Здесь значение точечного процесса $A^k(t)$ с компенсатором $\tilde{A}^k(t)$ (см., например, [4], [5]) в момент времени $t \geq 0$ есть число клеток, прибавившихся к подклассу стволовых клеток с длиной теломеры k за счет репликации ДНК без укорочения теломеры, $\tilde{A}^k(t) = \int_0^t a N_{p+1}^k(s) ds$, где a - положительная постоянная.

Точечный процесс $B_{p+1}^k(t)$ с компенсатором $\tilde{B}_{p+1}^k(t)$ - есть число стволовых клеток с длиной теломеры k , поделившихся за время $t \geq 0$ с укорочением длины теломеры на одну условную единицу при каждой репликации ДНК, $\tilde{B}_{p+1}^k(t) = \int_0^t \beta_{p+1} N_{p+1}^k(s) ds$, где β_{p+1} - положительная постоянная.

Точечный процесс $B_p^k(t)$ с компенсатором $\tilde{B}_p^k(t)$ представляет собой число стволовых клеток с длиной теломеры k , вставших на путь потери способности к пролиферации за время $t \geq 0$, $\tilde{B}_p^k(t) = \int_0^t \beta_p N_{p+1}^k(s) ds$, где β_p - положительная постоянная.

Точечный процесс $B_i^k(t), i = 0..p-1$, с компенсатором $\tilde{B}_i^k(t)$ - есть число полустволовых клеток с длиной теломеры k , которым осталось i циклов деления до потери способности к пролиферации, поделившихся за время $t \geq 0$ с укорочением длины теломеры на одну условную единицу при каждой репликации ДНК, $\tilde{B}_i^k(t) = \int_0^t \beta_i N_{i+1}^k(s) ds$, где $\beta_i, i = 0..p-1$ - положительные постоянные.

Далее, процесс $R^k(t)$ - есть число стволовых клеток с длиной теломеры k , образовавшихся за время $t \geq 0$ за счет совокупности

случайных обрывов теломер в стволовых клетках с длиной теломер, большей или равной k :

$$R^k(t) = 2 \sum_{i=k+2}^M R_i^k(t) - R_k^h(t).$$

Здесь точечный процесс $R_i^j(t), i, j \in [m, M]$ - есть число стволовых клеток с длиной теломеры i , поделившихся за время $t \geq 0$ с обрывом теломеры до длины j . Уравнение для компенсатора $\tilde{R}_i^j(t)$ имеет вид:

$$\tilde{R}_i^j(t) = r \int_0^t N_{p+1}^i(s) I(h_s^i(\omega) < i, h_s^i(\omega) = j) ds,$$

где r - положительная постоянная, случайная величина $h = h_t^i(\omega)$ равномерно распределена на $[m, M]$, т.е. предполагается независимая от длины теломеры стохастичность обрывов, $I(\cdot)$ - индикаторная функция.

Аналогично, процесс $C^k(t)$ представляет собой число стволовых клеток с длиной теломеры k , появившихся за время $t \geq 0$ за счет неравного кроссинговера в стволовых клетках:

$$C^{k+1}(t) = \sum_{i=m}^{k-1} C_i^k(t) + \sum_{i=k+2}^{(M+k)/2} C_i^k(t) - \sum_{j=m+1}^{\min(k, M-k)} C_k^j(t).$$

Здесь значение точечного процесса $C_i^j(t), i, j \in [m, M]$ в момент времени $t \geq 0$ представляет собой число стволовых клеток с длиной теломеры i , поделившихся за время $t \geq 0$ по механизму неравного кроссинговера, так что хромосома одной из дочерних клеток получает теломеру длины j . Уравнение для компенсатора $\tilde{C}_i^j(t)$ имеет вид:

$$\tilde{C}_i^j(t) = \int_0^t \exp(-c \frac{|i-j-1|}{i}) N_{p+1}^i(s) ds,$$

где c - положительная постоянная.

Моделирование на ЭВМ развития клеточной популяции позволило проследить динамику распределений клеток по длинам их теломер при различных параметрах, которые соответствуют предположениям

о приоритете тех или иных факторов, определяющих характер этих распределений. Такими факторами могут быть либо регулярное укорочение теломер из-за недорепликации концов ДНК, либо случайные разрывы, происходящие вследствие нерепарации свободнорадикальных повреждений или, например, воздействия ионизирующей радиации.

Так теломеры человека и других млекопитающих укорачиваются со временем в разных тканях с разной скоростью. Скорость укорочения возрастает при усилении пролиферативных процессов, например, в печени при циррозах. При этом, учитьвание влияния только сразу обоих факторов позволяет в процессе моделирования повторить особенности реально наблюдаемых распределений. В некоторых же тканях ведущую роль в укорочении теломер может играть неспособность клеток репарировать свободнорадикальные повреждения, т.е. фактором, определяющим динамику распределений клеток по длинам их теломер будет являться механизм случайных разрывов.

Построенные эмпирические функции распределения клеток по длинам их теломер сравнивались с экспериментальными данными, полученными на культурах фибробластов человека [2], [3]. Качественное соответствие характеров моделируемых и реальных экспериментальных распределений свидетельствует о возможности дальнейшего применения и развития данного подхода к моделированию воздействий различных факторов на популяции клеток, в частности, на раковые клетки при действии лекарственных препаратов или ионизирующего излучения.

Авторы признательны профессору А.А.Бутову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Elizabeth H. Blackburn. Telomere states and cell fates. Nature, vol.408, 53-56 (2000).

[2] Konrad Oexle. Telomere length distribution and Southern Blot analysis, J.theor. Biology, vol. 190, 367-377 (1998).

[3] Ivica Rubelj, Zoran Vondracheck. Stochastic Mecanism of cellular aging-abrupt telomere shortening as a model for stochastic nature of cel-

lular aging, J.theor. Biology, vol. 197, 425-438 (1999).

[4] Липцер Р. Ш, Ширяев А. Р. Статистика случайных процессов. М.:Наука, 1974.

[5] Липцер Р. Ш, Ширяев А. Р. Теория мартингалов. М.:Наука, 1986.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА¹¹

И.А. Санников

В работе построена простая семимартингальная модель циркадного ритма на примере изменения артериального давления. Полученные результаты могут быть использованы в физиологии для своевременного выявления качественных изменений в системе регулирования АД.

Целью настоящей работы является построение простой семимартингальной модели циркадного ритма на примере изменения артериального давления.

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ с обычными условиями Делашери [1] задан некоторый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – изменение артериального давления (АД). Циркадный ритм АД (низкочастотная составляющая, основная гармоника которой имеет период, близкий к суткам) обозначим $\bar{X} = (\bar{X}_t)_{t \geq 0}$. Тогда суточный профиль АД может быть записан в виде:

$$X_t = \bar{X}_t + V_t, \quad (1)$$

где процесс $V = (V_t)_{t \geq 0}$ – высокочастотная составляющая давления. Представляется целесообразным рассмотреть эволюцию циркадного ритма как гармоническую функцию:

$$\bar{X}_t = A \cdot \sin(\varphi + F_t), \quad (2)$$

где F_t – неубывающая функция, так называемая "фаза" давления, A – амплитуда колебания АД, φ – начальная фаза. Высокочастотная составляющая в первом приближении может рассматриваться, как процесс типа Орнштейна-Уленбека со стохастическим дифференциалом:

$$dV_t = -\lambda(V_t) \cdot V_t dt + \sigma dW_t, \quad V_0 = 0, \quad (3)$$

¹¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 01-01-00735.

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс, σ – коэффициент диффузии, функция $\lambda(V_t)$ определяется как:

$$\lambda(x) = \lambda^{(+)} \cdot I(x > 0) + \lambda^{(-)} \cdot I(x < 0), \quad (4)$$

и ее значения являются характеристикой той составляющей системы регулирования АД, которая не "позволяет" давлению "далеко" отклониться от его циркадного ритма. По-видимому, эти значения, являющиеся коэффициентами обратной связи, определяют степень "жесткости" регуляции АД. Если допустить, что система может находиться только в одном из двух режимов (прессорная и депрессорная составляющая) и переключаться между ними по определению (4), то уравнение (3) может быть записано в виде:

$$dV_t = -(\lambda^{(+)} \cdot V_t^+ - \lambda^{(-)} \cdot V_t^-)dt + \sigma dW_t. \quad (5)$$

Оценки для параметров $\lambda^{(+)}$ и $\lambda^{(-)}$ строятся методом максимума правдоподобия, функция правдоподобия находится из теоремы Гирсанова [2] и равна:

$$z_t = \frac{dP_t}{d\tilde{P}_t} = \exp\left\{\int_0^t \frac{[-\lambda^{(+)} \cdot V_s^+ + \lambda^{(-)} \cdot V_s^-]}{\sigma^2} \cdot dV_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{[-\lambda^{(+)} \cdot V_s^+ + \lambda^{(-)} \cdot V_s^-]^2}{\sigma^2} \cdot ds\right\}.$$

Тогда при совместном решении уравнений

$$\frac{\partial \ln z_t(\lambda^{(+)}, \lambda^{(-)})}{\partial \lambda^{(+)}} = 0 \quad \frac{\partial \ln z_t(\lambda^{(+)}, \lambda^{(-)})}{\partial \lambda^{(-)}} = 0$$

относительно $\lambda^{(+)}$ и $\lambda^{(-)}$ получим оценки

$$\hat{\lambda}_t^{(+)} = -\frac{\int_0^t V_s^+ dV_s}{\int_0^t (V_s^+)^2 ds},$$

и

$$\widehat{\lambda}_t^{(-)} = - \frac{\int_0^t V_s^- dV_s}{\int_0^t (V_s^-)^2 ds}.$$

Если допустить, что переключение системы регулирования происходит в случайные моменты времени $\tau = \tau(w)$, $\tau \in \Omega$ (моменты разладки), то уравнение (5) примет следующий вид:

$$dV_t = -\lambda^{(+)} \cdot (V_t - N_t)^+ dt + \lambda^{(-)} \cdot (V_t - N_t)^- dt + \\ + [\sigma^0(1 - N_{t-}) + \sigma^1(N_{t-})] dW_t,$$

где

$$N_t = N_0 + \int_0^t (1 - N_{s-}) d\pi_s^0 - \int_0^t N_{s-} d\pi_s^1$$

процесс типа "телеграфный сигнал" с начальным значением $N_0 \in \{0, 1\}$ и компенсаторами $\widetilde{\pi}_t^0 = \mu^0 t$, $\widetilde{\pi}_t^1 = \mu^1 t$. Оценки для $\lambda^{(+)}$ и $\lambda^{(-)}$ выглядят следующим образом:

$$\widehat{\lambda}_t^{(+)} = - \frac{\int_0^t (V_s - N_s)^+ dV_s}{\int_0^t [(V_s - N_s)^+]^2 ds},$$

и

$$\widehat{\lambda}_t^{(-)} = - \frac{\int_0^t (V_s - N_s)^- dV_s}{\int_0^t [(V_s - N_s)^-]^2 ds}.$$

Оценки коэффициентов обратной связи могут послужить для выявления качественных изменений в системе регулирования АД. Как следствие этих изменений — гипертоническая болезнь.

Для нахождения значений функции F_t в уравнении (2) можно использовать фильтр Калмана. Запишем высокочастотную составляющую как:

$$V_t = V_0 - \int_0^t \lambda(V_s) \cdot V_s ds + \sigma dW_t$$

и введем в описание вспомогательный процесс $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ с $Y_t = A \cdot \cos(\varphi + F_t)$ являющийся скоростью изменения $\bar{X} = (\bar{X}_t)_{t \geq 0}$. Тогда

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t Y_s dF_s \quad Y_t = Y_0 - \int_0^t \bar{X}_s dF_s$$

– ненаблюдаемые компоненты, а процесс

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s dF_s - \int_0^t \lambda(X_s - \bar{X}_s) \cdot (X_s - \bar{X}_s) ds + \sigma W_t$$

является наблюдаемым.

Если в качестве процесса изменения АД (1) использовать дифференциальную запись функции синуса со случайными изменениями:

$$\begin{cases} dx_t = wy_t dt + \sigma dW_t, \\ dy_t = -wx_t dt \end{cases},$$

где $w \equiv w_t$ – период, амплитуда колебания $t = E(x_t^2 + y_t^2)$, с начальным значением $A_0 = x_0^2 + y_0^2$, то при имитационном моделировании возникает проблема увеличения "размаха амплитуды" на σ^2 . Применим формулу Ито:

$$\begin{cases} dx_t^2 = 2x_t dx_t + \sigma^2 dt = 2x_t wy_t dt + 2x_t \sigma dW_t + \sigma^2 dt, \\ dy_t^2 = 2y_t dy_t = -2y_t wx_t dt \end{cases},$$

тогда приращение амплитуды $dA_t = \sigma^2 dt$.

Автор выражает благодарность профессору Бутову А.А. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1974.
- [2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

К ВОПРОСУ О ПОЛНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА ¹²

Н.О.Седова

1. Введение

В исследовании устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений основным методом является, как известно, прямой метод Ляпунова, позволяющий делать выводы о качественном поведении решений, не находя их в явном виде. Этот метод является особенно ценным для уравнений с запаздыванием, которые аналитически решаются лишь в исключительных случаях.

Классические теоремы прямого метода дают достаточные условия как устойчивости, так и неустойчивости положения равновесия системы, описываемой дифференциальным уравнением. Однако ценность этих теорем с практической точки зрения неравнозначна. Действительно, если для рассматриваемого положения равновесия установлена устойчивость в смысле Ляпунова, это гарантирует, что любое движение системы, начавшееся в достаточной близости к положению равновесия, будет происходить все время в заданной окрестности этого положения. Если же мы доказали неустойчивость, это означает, что какими бы малыми ни были начальные отклонения от положения равновесия, по крайней мере одно из них приведёт к выходу соответствующего движения за пределы заданной окрестности. Однако в реальной системе вовсе не любое начальное состояние может оказаться допустимым, и положение равновесия, неустойчивое в смысле Ляпунова, может оказаться устойчивым по отношению к более узкому классу реально возможных возмущений.

Если же в каждой окрестности положения равновесия удастся указать конкретное подмножество состояний, по отношению к которым это положение будет неустойчиво, такой результат будет более ценным для прикладных задач. В данной работе предлагается теорема о неустойчивости для функционально-дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием, в которой указанное подмножество

¹²Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-01005.

определяется при помощи вспомогательных функции и функционала с заданными свойствами. Иллюстративные примеры демонстрируют применение полученного результата.

2. Основные определения и предположения

Пусть B — действительное векторное пространство либо

(i) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n , и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо

(ii) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n , и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

Предположим, что в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что пространство $(B, |\cdot|_B)$ является банаховым. Норму в пространстве R^n будем обозначать $|\cdot|$.

Для функции $x : (-\infty, A) \rightarrow R^n$, $0 < A \leq +\infty$, для каждого $t \in [0, A)$ функция $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow R^n$ традиционно определяется формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (9,11). Пространство B назовём допустимым, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \leq a < A \leq \infty$. Если $x : (-\infty, A) \rightarrow R^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$

(B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $|\cdot|_B$;

(B2) $|x_t|_B \leq K \max_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t-a)|x_a|_B$;

(B3) $|\varphi(0)| \leq J|\varphi|_B$ для всех $\varphi \in B$.

Далее будем считать, что пространство B удовлетворяет дополнительному условию [11]:

$$M(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $M(t)$ — функция в (B2), и, кроме того,

(B4) если φ ограничена и непрерывна на $(-\infty, 0]$, то $\varphi \in B$ и все функции φ_{-t} , $t \geq 0$, ограничены по норме пространства B , $|\varphi_{-t}|_B \leq L$ для некоторого $L > 0$ [8]. Такие допустимые пространства в литературе называются пространствами с исчезающей памятью.

Определённое таким образом допустимое пространство позволяет, с одной стороны, охватить целый ряд различных по структуре нормированных пространств, а с другой стороны, обладает многими

"хорошими" свойствами, и уравнение, в которых оно используется в качестве фазового, удобно для изучения (см., например, [8], [9], [14]).

Итак, пусть B — допустимое пространство, $B_H = \{\varphi \in B : |\varphi|_B < H\}$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} X : R^+ \times B_H \rightarrow R^n \text{ есть непрерывное отображение, ограниченное} \\ \text{на каждом множестве } R^+ \times D', \quad |X(t, \varphi)| \leq m(D') \\ \text{для всех } (t, \varphi) \in R^+ \times D', \end{aligned} \quad (3)$$

где D' — произвольное ограниченное подмножество B_H .

Тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (2), определённое для $t \in [-\infty, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$, то есть непрерывное, удовлетворяющее уравнению (2) на $[\alpha, \beta)$ и такое, что $x_\alpha = \varphi$, кроме того, если $x(t)$ — непродолжаемое решение (2) на $[\alpha, \beta)$ и $\{x_t : \alpha < t < \beta\}$ содержится в замкнутом и ограниченном подмножестве B_H , то $\beta = \infty$ [9].

Допустим также, что для правой части уравнения (2) имеют место следующие предположения.

Предположение 1. Функционал $X(t, \varphi)$ равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset B_H$ — компакт, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для всех $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in K$ из неравенств $|t_2 - t_1| < \delta$, $|\varphi_2 - \varphi_1|_B < \delta$ следует $|X(t_2, \varphi_2) - X(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon$.

В этом случае семейство функционалов $\{X_\tau(t, \varphi) = X(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$, называемых сдвигами функционала $X(t, \varphi)$, предкомпактно в пространстве непрерывных функционалов, определённых на $R^+ \times K$, и уравнению (2) можно сопоставить семейство предельных уравнений [12, 16]:

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x_t), \quad (4)$$

где $X^*(t, \varphi)$ есть предельный к X функционал, определяемый компактом K и последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$, $X^*(t, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} X(t + t_k, \varphi)$, $(t, \varphi) \in R^+ \times K$ (при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0, T] \times K'$, где $T > 0$, $K' \subseteq K$ — компакт).

Предположение 2. Функционал $X(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица: для каждого компакта $K \subset B_H$ существует $l = l(K) > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство:

$$|X(t, \varphi_2) - X(t, \varphi_1)| \leq l|\varphi_2 - \varphi_1|_B. \quad (5)$$

В силу условия (5) решения уравнений (2) и (4) единственны для каждой начальной точки из области определения правой части.

Взаимосвязь решений уравнений (2) и (4) определяется следующей леммой:

Лемма 1. Пусть $t_n \rightarrow +\infty$, последовательность $\{\varphi_n\} \in K \subset B_H$, $\varphi_n \rightarrow \varphi \in B_H$, при $n \rightarrow \infty$, и $x(t; t_n + \alpha, \varphi_n)$ — решения (2). Тогда последовательность $\{x^n(t) = x(t + t_n; t_n + \alpha, \varphi_n)\}$ содержится в некотором компакте $K_x \subset B_H$, и если функционал $X^*(t, x_t)$ является предельным к $X(t, x_t)$ относительно последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ и компакта K_x , $x^*(t; \alpha, \varphi)$ — решение соответствующего уравнения (4), определённое на $(-\infty, \beta)$, то последовательность $\{x^n(t)\}$ сходится к $x^*(t; \alpha, \varphi)$, а $x_t^n \rightarrow x_t^*$ равномерно по $t \in [\alpha, \gamma]$ для каждого $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Доказать эту лемму можно по той же схеме, что и аналогичный результат для уравнений с конечным запаздыванием [2]. Заметим лишь, что предкомпактность семейства функций $\{x^n(t)\}$ следует из свойств (B1)–(B4) допустимого фазового пространства и предположений относительно правой части уравнения.

Функцией Ляпунова будем называть функцию $V(t, x) \in C^1(R^+ \times G_H, R)$, где множество $G_H = \{x \in R^n : |x| < H\}$. Производная этой функции в силу уравнения (2) определяется по формуле

$$V'(t, x_t) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} X_i(t, x_t),$$

то есть представляет собой функционал $V' : R^+ \times B_H \rightarrow R$.

На множестве $R^+ \times B_H$ определим непрерывный функционал W со значениями в R .

Определение 2. Для функции V и функционала W обозначим $P(V, W)$ подмножество из $R^+ \times B_H$ такое, что $(t, \varphi) \in P(V) \Leftrightarrow 0 < V(t, \varphi(0)) = W(t, \varphi)$.

Всюду ниже будем предполагать V и W такими, что пересечение множеств $P(V, W)$ и $R^+ \times B_\delta$ непусто для любого $\delta > 0$ (функция V не предполагается знакопостоянной). Кроме того, будем считать выполненными следующие предположения:

Предположение 3. Для каждого $\rho > 0$, $t \geq \rho$ и $\varphi \in B_H$ такой, что $\varphi_{-\rho} \in B_H$ и φ непрерывна на $[-\rho, 0]$, выполняется

$$V(t, \varphi(0)) \leq W(t, \varphi) \leq \max\left\{\max_{-\rho \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s)), W(t-\rho, \varphi_{-\rho})\right\}, \quad (\text{LR1})$$

$$\text{если } (t, \varphi) \in P(V, W), \text{ то } V'(t, \varphi) \geq 0. \quad (\text{LR2})$$

Допустим, что для V и W выполнены следующие предположения:

Предположение 4. Функция $V(t, x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $R^+ \times \bar{G}_q$, $\bar{G}_q = \{x \in R^n : |x| \leq q < H\}$.

Предположение 5. Функционалы $W(t, \varphi)$ и $U(t, \varphi) = V'(t, \varphi)$ равномерно непрерывны и ограничены на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset B_H$ — компакт.

В этом случае семейства сдвигов $\{V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x), \tau \in R^+\}$, $\{U_\tau(t, \varphi) = U(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$ и $\{W_\tau(t, \varphi) = W(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактны в пространствах $C(R^+ \times G_H, R)$, $C(R^+ \times K, R)$ и $C(R^+ \times K, R)$ соответственно (здесь K — компакт из B_H) с компактно-открытой топологией.

Определение 3. Функция $V^* : R \times G_H \rightarrow R$ называется предельной к функции V , если существует последовательность $\{t_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, такая, что последовательность $\{V_n(t, x) = V(t_n + t, x)\}$ сходится равномерно на множествах $[0, T] \times \bar{G}_q$ к функции V^* .

Функционалы, предельные к $W(t, \varphi)$ и $U(t, \varphi)$, определяются по аналогии с $X^*(t, \varphi)$.

Таким образом, последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ и компакт $K \subset B_H$ однозначно определяют предельные функционалы X^* , V^* , W^* , и U^* .

Замечание 1. Если допустимое пространство B является сепарабельным, то семейства сдвигов функционалов X , W и

U являются предкомпактными в $C(R^+ \times B_H \rightarrow R^n)$, то есть соответствующий предельный функционал определён во всём пространстве $R^+ \times B_H$ и зависит лишь от последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ (см. [14]). Этим же свойством обладают многие функционалы, определённые в несепарабельном пространстве.

Наконец, для $c_0 \in R$ и последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ мы определим множество:

$$L(K, U^*) = \{(t, \varphi) \in R^+ \times K : U^*(t, \varphi) = 0\}.$$

3. Теорема о неустойчивости

В статье [5] приведена теорема, в которой в терминах функции V и функционала W , удовлетворяющих предположениям 3–5, формулируются достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (2). Но оказывается, что существование пары V, W с описанными свойствами достаточно для получения более общего утверждения о поведении решений.

Для формулировки соответствующего результата используем следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть D — некоторое подмножество $R^+ \times B_H$, такое, что $R^+ \times \{0\} \subset \bar{D}$. Нулевое решение уравнения (2) называется вполне неустойчивым относительно множества D , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$ и любых $\varphi \in B_\delta$, $\alpha > 0$ таких, что $(\alpha, \varphi) \in D$, решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (2) удовлетворяет неравенству $|x(t^*; \alpha, \varphi)| \geq \varepsilon$ для некоторого $t^* > \alpha$.

Подобное определение использовалось в статье [10], с той разницей, что запаздывание в уравнении предполагалось ограниченным (и, соответственно, другим было фазовое пространство), кроме того, рассматривались автономные уравнения и функции V , не зависящие от времени, и множество D представляло собой подмножество фазового пространства.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему:

ТЕОРЕМА 1. Пусть S — положительно инвариантное подмножество S_H относительно уравнения (2) и $0 \in \bar{S}$. Предположим, что существует пара (V, W) , удовлетворяющая предположениям 3–5 и такая, что:

1. множество $R^+ \times S \cap P(V, W)$ непусто;
2. $V'(t, \varphi) = U(t, \varphi) \geq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times S \cap P(V, W) \cap G$ ($G = R^+ \times B_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$);
3. существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ такая, что для каждого компакта $K \subset B_H$ множество $P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*) \cap G$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$.

Тогда нулевое решение уравнения (2) вполне неустойчиво относительно множества $R^+ \times S \cap P(V, W)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\delta \in (0, \varepsilon)$ и выберем φ_0, α_0 : $|\varphi_0|_B < \delta, (\alpha_0, \varphi_0) \in P(V, W) \cap R^+ \times S$. Предположим, что $x(t) = x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ — решение (2), ограниченное числом ε по норме R^n для всех $t \geq \alpha_0$. Тогда множество $\{x_t(\alpha_0, \varphi_0) : t \geq \alpha_0\}$ содержится в некотором компакте $K_x \subset B_H$. Так как $(\alpha_0, \varphi_0) \in P(V, W) \cap G$, то $0 < V(\alpha_0, \varphi_0(0)) = W(\alpha_0, \varphi_0)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $V'(\alpha_0, \varphi_0) = V'(\alpha_0, x_{\alpha_0}) \geq 0$. Из неотрицательности производной следует, что $V(t) = V(t, x(t))$ не убывает в точке α_0 , и, следовательно, $V(t, x(t)) \geq V(\alpha_0, x(\alpha_0))$, где $t \in [\alpha_0, \beta]$ для некоторого $\beta > \alpha_0$. Используя соотношение (LR1), получаем:

$$W(\alpha_0, x_{\alpha_0}) = V(\alpha_0, x(\alpha_0)) \leq V(t, x(t)) \leq W(t, x_t),$$

то есть $W(\alpha_0, x_{\alpha_0}) \leq W(t, x_t)$ для $t \in [\alpha_0, \beta]$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) \leq W(t, x_t) &\leq \max\left\{\max_{\alpha_0-t \leq s \leq 0} V(t+s, x(t+s)), W(\alpha_0, x_{\alpha_0})\right\} = \\ &= \max_{\alpha_0-t \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s)) = V(t, x(t)). \end{aligned}$$

Следовательно, $V(t, x(t)) = W(t, x_t)$ для $t \in [\alpha_0, \beta]$ и (t, x_t) остаётся в множестве $P(V, W)$ при $t \in [\alpha_0, \beta]$. Рассуждая таким образом, получаем, что

$$(t, x_t) \in P(V) \cap G \text{ при всех } t \geq \alpha_0, \quad (*)$$

а функция V не убывает вдоль решения $x(t; \alpha_0, \varphi_0)$. В силу ограниченности $V(t, \varphi(0))$ на множестве $P(V, W) \cap G$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t, \alpha_0, \varphi_0)) = c_0 \geq V(\alpha_0, \varphi_0(0)) > 0. \quad (**)$$

Пусть $t_k \rightarrow +\infty$ — последовательность, определяемая из условий теоремы, и $X(t + t_k, \varphi) \rightarrow X^*(t, \varphi)$, $U(t + t_k, \varphi) \rightarrow U^*(t, \varphi)$ равномерно по $[0, T] \times K_x$ для каждого $T > 0$, $V(t + t_k, x) \rightarrow V^*(t, x)$, а $x_{t_{k_n}} \rightarrow \psi$ для некоторой подпоследовательности $k_n \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 1 последовательность $\{x_{k_n}(t) = x(t_{k_n} + t; \alpha_0, \varphi_0)\}$ сходится к решению $x^*(t; 0, \psi)$ уравнения $\dot{x}(t) = X^*(t, x_t)$ (при этом $x_t^* \in K_x$ для всех t). Из неубывания функции $V(t, x(t))$ и соотношений (*) и (**) вытекает, что для всех t $(t, x_t^*) \in P(V^*, W^*) \cap G$, кроме того, $V^*(t, x^*(t; 0, \psi)) \equiv c_0 = \text{const}$, следовательно, $(t, x_t^*) \in P(V^*, W^*) \cap L(K_x, U^*) \cap G$. Осталось заметить, что $x_t^* \in S$ для всех t в силу положительной инвариантности множества S . Полученное противоречие с условием 3 завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что

1. при проверке условия 3 множество $P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*)$ можно заменить на множество $\{\varphi \in B : V^*(t + s, \varphi(s)) \equiv c_0 > 0\}$ в силу монотонности функции V вдоль соответствующего решения;
2. если $V'(t, \varphi) \geq 0$ на множестве $M: R^+ \times S \cap P(V, W) \subset M \subset \{(t, \varphi) \in R^+ \times B_H : V(t, \varphi(0)) > 0\}$, то нулевое решение уравнения (2) вполне неустойчиво относительно множества $R^+ \times S \cap M$. В частности, если функция $V(t, x)$ положительно определена и $V'(t, \varphi) \geq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times B_H$, а $S = B_H$, то получаем полную неустойчивость нулевого решения.
3. если производная функции V строго положительна на множестве $P(V, W)$ и $U^*(t, \varphi) = 0 \iff \varphi = 0$ для любого предельного функционала U^* , то условие 3 теоремы выполняется автоматически. При этом в формулировке теоремы не фигурируют предельные уравнения. Заметив, что функция V в доказательстве теоремы монотонно возрастает вдоль выбранного решения, можно завершить доказательство по стандартной схеме, не используя решений предельного уравнения. Полученный таким образом результат будет справедлив для более широкого класса неавтономных уравнений, правая часть которых удовлетворяет лишь условию (3).

4. Примеры

Рассмотрим два важных класса допустимых пространств (см. [9]).

1. Пусть

$g : (-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$ — непрерывная невозрастающая функция, $g(0) = 1$. (g1)

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ , отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n , таких, что $\sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s) < \infty$. Тогда C_g с нормой $|\varphi|_g = |\varphi|_{C_g} = \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s)$ есть банахово пространство.

Рассмотрим следующее подпространство в C_g :

$$UC_g = \{\varphi \in C_g : \varphi/g \text{ равномерно непрерывна на } (-\infty, 0]\}. \quad (6)$$

Пусть g удовлетворяет условию (g1) и

$$[g(s+u)/g(s)] \rightarrow 1 \text{ равномерно на } (-\infty, 0] \text{ при } u \rightarrow 0-. \quad (g2)$$

Тогда пространство UC_g допустимо. При этом условие (1) эквивалентно условию $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{s \leq 0} [g(s)/g(s-T)] = 0$.

2. Пусть $\gamma \geq 1$ — постоянная, а $k : (-\infty, 0] \rightarrow (0, \infty)$ — измеримая функция, такая, что

$$\int_{-\infty}^0 k(s) ds < \infty, \quad (7)$$

$$\sup_{s \leq 0} k(s-T)/k(s) \leq L(T) \quad (8)$$

для некоторой непрерывной функции $L : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Пусть M_0 — пространство измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n , и φ эквивалентна ψ в M_0 , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. Определим множества

$$M_{k,\gamma} = \left\{ \varphi \in M_0 : \int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds < \infty \right\},$$

$$M_{k,\gamma}^r = \{\varphi \in M_{k,\gamma} : \varphi \text{ непрерывна на } [-r, 0]\},$$

($r > 0$) с нормами

$$\|\varphi\|_{M_{k,\gamma}} = \|\varphi\|_{k,\gamma} = \max \left\{ |\varphi(0)|, \left[\int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds \right]^{1/\gamma} \right\}; \quad (9)$$

$$\|\varphi\|_{M_{k,\gamma}^r} = \|\varphi\|_{k,\gamma}^r = \max \left\{ \max_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|, \left[\int_{-\infty}^0 k(s) |\varphi(s)|^\gamma ds \right]^{1/\gamma} \right\}. \quad (10)$$

Можно показать (см. [9]), что пространства $M_{k,\gamma}$ и $M_{k,\gamma}^r$ являются допустимыми. При этом условие (1) для пространства $M_{k,\gamma}^r$ эквивалентно условию $\lim_{T \rightarrow \infty} L(T) = 0$ в (8).

В рассмотренных ниже примерах определённые выше пространства используются в качестве фазовых.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) - \int_{-\infty}^0 p(t,s)x(t+s)ds + x(t) \int_{-\infty}^0 q(t,s)x^2(t+s)ds, \quad (11)$$

где функции $a(t)$, $p(t,s)$, $q(t,s)$ определены для всех $t \geq 0$ и равномерно непрерывны (по t),

$$1 \leq a(t) \leq a_0, \quad 0 < p(t,s) \leq p_1(s), \quad 0 \leq q(t,s) \leq q_1(s);$$

для любых $s \in (-\infty, 0]$, $\alpha, \beta \in R^+$, $\alpha < \beta$ существует $t \in (\alpha, \beta)$, такое, что $q(t,s) > \delta > 0$ (δ зависит от разности $\beta - \alpha$); функции $p_1(s)$ и $q_1(s)$ измеримы,

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq 0} p_1(s-T)/p_1(s) &\leq L_p(T), \\ \sup_{s \leq 0} q_1(s-T)/q_1(s) &\leq L_q(T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} L_q(T) = 0 \end{aligned}$$

и $\sup_{s \leq 0} p(t, s-\rho)/p(t-\rho, s) + \int_{-\rho}^0 p(t,s)ds \leq 1$ для всех $\rho \geq 0$, $t \geq \rho$. Этим условиям удовлетворяют, например, функции $p(t,s) = e^{(t+1)s}$ и $q(t,s) = e^s \cos^2 t$.

В качестве пространства B возьмём $M_{p_1,1} \cap M_{q_1,2}$.

Пусть $V(t, x) = V(x) = x^2$, $W(t, \varphi) = \max \left\{ \varphi^2(0), \left(\int_{-\infty}^0 p(t, s) |\varphi(s)| ds \right)^2 \right\}$. Проверим, что V и W удовлетворяют предположению 3.

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^2(t) &\leq \max \left\{ x^2(t), \left(\int_{-\infty}^0 p(t, s) |x(t+s)| ds \right)^2 \right\} = W(t, \varphi) = \\
 &= \max \left\{ x^2(t), \left(\int_{-\infty}^{-\rho} p(t, s) |x(t+s)| ds + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{-\rho}^0 p(t, s) |x(t+s)| ds \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq \max \left\{ x^2(t), \left(\int_{-\infty}^0 \frac{p(t, s-\rho)}{p(t-\rho, s)} p(t-\rho, s) |x(t-\rho+s)| ds + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \max_{-\rho \leq s \leq 0} |x(t+s)| \int_{-\rho}^0 p(t, s) ds \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq \max \left\{ x^2(t), \left(\int_{-\infty}^0 p(t-\rho, s) |x_{-\rho}(t+s)| ds \right)^2, \right. \\
 &\quad \left. \max_{-\rho \leq s \leq 0} x^2(t+s) \right\} = \\
 &= \max \left\{ \max_{-\rho \leq s \leq 0} V(x(t+s)), W(t-\rho, x_{t-\rho}) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad V'(t, \varphi) &= 2a(t)\varphi^2(0) - 2\varphi(0) \int_{-\infty}^0 p(t, s) \varphi(s) ds + \\
 &\quad + 2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q(t, s) \varphi^2(s) ds \geq \\
 &\geq 2\varphi^2(0) - 2|\varphi(0)| \int_{-\infty}^0 p(t, s) |\varphi(s)| ds + \\
 &\quad + 2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q(t, s) \varphi^2(s) ds.
 \end{aligned}$$

При условии $V(\varphi(0)) = W(t, \varphi)$ получаем $\varphi^2(0) \geq \left(\int_{-\infty}^0 p(t, s) |\varphi(s)| ds \right)^2$, то есть $|\varphi(0)| \geq \int_{-\infty}^0 p(t, s) |\varphi(s)| ds$. Тогда $V'(t, \varphi) \geq 2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q(t, s) \varphi^2(s) ds \geq 0$.

Функции, предельные к V и W , имеют вид: $V^*(x) = x^2$, $W^*(t, \varphi) =$

$\max \left\{ \varphi^2(0), \left(\int_{-\infty}^0 p^*(t, s) |\varphi(s)| ds \right)^2 \right\}$, где $p^*(t, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(t_n + t, s)$ для некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ (ясно, что предел не зависит от компакта $K \subset B_H$).

Наконец, для произвольного компакта $K \subset B_H$ и произвольной последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ на множестве $P(V^*, W^*) \cap R^+ \times K$ выполняется соотношение $U^*(t, \varphi) = 2a^*(t)\varphi^2(0) - 2\varphi(0) \int_{-\infty}^0 p^*(t, s)\varphi(s)ds + 2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q^*(t, s)\varphi^2(s)ds \geq 2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q^*(t, s)\varphi^2(s)ds \geq 0$ (здесь предельный функционал также не зависит от компакта $K \subset B_H$). Таким образом, для функций φ из множества $P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*)$ должно выполняться $2\varphi^2(0) \int_{-\infty}^0 q^*(t, s)\varphi^2(s)ds = 0$. Если $x^*(t)$ — решение предельного уравнения, то все функции x_t^* равномерно непрерывны и содержатся в некотором компакте $K \subset B_H$, а значит, в силу свойств функции $q(t, s)$, для $x_t^* \in P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*)$ должно выполняться $x^*(t) = 0$. Но тогда $V^*(x^*(t)) = 0$ и $x_t^* \notin P(V^*, W^*)$. Таким образом, множество $P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*)$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения. Следовательно, выполнены все условия Теоремы 1, и нулевое решение уравнения (11) вполне неустойчиво относительно множества $P(V, W)$.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-h) - x(t) \int_{-\infty}^0 p(t, s)x(t+s)ds, \quad (12)$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ равномерно непрерывны и ограничены, $p(t, s)$ равномерно непрерывна по t ,

$$0 < p(t, s) \leq p_1(s), \quad \int_{-\infty}^0 p_1(s)ds = 1, \quad a(t) \geq a_0 > 0, \quad b(t) \geq 0;$$

$$\sup_{s \leq 0} p_1(s-T)/p_1(s) \leq L(T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} L(T) = 0;$$

$$\sup_{s \leq 0} p(t, s-\rho)/p(t-\rho, s) + \int_{-\rho}^0 p(t, s)ds \leq 1 \text{ для всех } \rho \geq 0, t \geq \rho.$$

В качестве пространства B возьмём $M_{p_1,1}^h$.

Пусть $S = \{\varphi \in B : \varphi(s) > 0 \ \forall s < 0\}$. Нетрудно убедиться, что множество S инвариантно относительно уравнения (12). Положим $V(t, x) = x$, $W(t, \varphi) = \max \left\{ \varphi(0), \int_{-\infty}^0 p(t, s) \varphi(s) ds \right\}$.

Рассуждая аналогично примеру 1, получаем, что условие (LR1) выполняется.

При условии $0 < V(\varphi(0)) = W(t, \varphi)$ получаем $\varphi(0) \geq \int_{-\infty}^0 p(t, s) \varphi(s) ds$. Тогда для $(t, \varphi) \in R^+ \times S \cap P(V, W)$

$$\begin{aligned} V'(t, \varphi) &= a(t)\varphi(0) + b(t)\varphi(-h) - \varphi(0) \int_{-\infty}^0 p(t, s) \varphi(s) ds \geq \\ &\geq \varphi(0)(a(t) - \varphi(0)) \geq \varphi(0)(a_0 - \varphi(0)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $G = R^+ \times B_{a_0}$, тогда $V'(t, \varphi) > 0$ на множестве $R^+ \times S \cap P(V, W) \cap G$.

Наконец, для любого компакта $K \subset S$ и любой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ на множестве $P(V^*, W^*) \cap R^+ \times K$ выполняется соотношение $U^*(t, \varphi) = a^*(t)\varphi(0) + b^*(t)\varphi(-h) - \varphi(0) \int_{-\infty}^0 p^*(t, s) \varphi(s) ds \geq \varphi(0)(a^*(t) - \varphi(0)) \geq \varphi(0)(a_0 - \varphi(0))$ (здесь $a^*(t)$, $b^*(t)$ и $p^*(t, s)$ — предельные функции, соответствующие последовательности $t_k \rightarrow +\infty$).

Поэтому множество $P(V^*, W^*) \cap L(K, U^*) \cap G$, определяемое произвольной последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$ и произвольным компактом $K \subset S$, не содержит решений соответствующего предельного уравнения. В силу теоремы 1 нулевое решение уравнения (12) вполне неустойчиво относительно множества $P(V, W) \cap R^+ \times S$.

Пример. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра:

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t)) + \int_0^t H(t, s, x(s)) ds, \quad (13)$$

где $G : R^+ \times R^n \rightarrow R^n$, $H : D \times R^n \rightarrow R^n$ — непрерывны, $D = \{(t, s) \in R^+ \times R : s \leq t\}$. Предположим, что:

$$G(t, 0) = H(t, s, 0) = 0 \text{ для всех } t \in R^+, s \in R;$$

$$G_1(t)|x| \leq |G(t, x)| \leq G_K \text{ для всех } (t, x) \in R^+ \times K, \quad (14)$$

K — компактное подмножество R^n ;

$$|H(t, s, x)| \leq |Q(t, s)| |x|, \quad \int_{-\infty}^t |Q(t, s)| ds \leq Q_0(t) \text{ для всех } t \in R^n$$

(здесь $G_1(t)$ и $Q_0(t)$ — неотрицательные, равномерно непрерывные и ограниченные функции, G_K — положительные постоянные). Тогда существует (см. [7]) функция $g : (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$, удовлетворяющая условиям (g1), (g2) и такая, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{s \leq 0} [g(s)/g(s-T)] = 0, \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^0 |Q(t, t+s)| g(s) ds \leq Q_0(t) \text{ для всех } t \in R^n.$$

В качестве допустимого фазового пространства B возьмём UC_g . Для каждого $\alpha_0 \geq 0$ определим фактор-пространство $UC_g(\alpha_0) = UC_g / |\cdot|_{\alpha_0}$, где $|\varphi|_{\alpha_0} = \sup_{-\alpha_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s)$.

Предположим теперь, что функции $G(t, x)$ и $H(t, s, x)$ локально липшицевы по x , тогда для каждого $\alpha_0 \geq 0$ и каждой начальной точки $\varphi \in UC_g$ существует единственное решение уравнения (13), такое, что $x_{\alpha_0} = \varphi$ (при этом если $|\varphi - \psi|_{\alpha_0} = 0$, то два решения уравнения (13) $x_t(\alpha_0, \varphi)$ и $x_t(\alpha_0, \psi)$ совпадают как элементы пространства $UC_g(t)/|\cdot|_t$: для $t \geq \alpha_0$ $|x_t(\alpha_0, \varphi) - x_t(\alpha_0, \psi)|_t = 0$).

Рассмотрим теперь следующее условие:

$G(t, x)$ равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$;
для любого $\varepsilon > 0$ и для любых компактов $K \subset R^n$, $K^- \subset (-\infty, 0]$
существует $\delta(\varepsilon, K, K^-) > 0$ такое, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in K$
и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|H(t_1, t_1 + s, x_1) - H(t_2, t_2 + s, x_2)| < \varepsilon$ для всех $s \in K^-$;
для любого $\varepsilon > 0$ существует $S(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{t-S(\varepsilon)} |Q(t, s)| ds < \varepsilon \text{ для всех } t \in R^+.$$

(16)

Условия (16) вместе с (14) обеспечивают предкомпактность семейств сдвигов правой части уравнения. Эти условия являются обобщением предположений [13], где рассматриваются условия предкомпактности

для линейного уравнения Вольтерра с почти периодической правой частью. Если последовательность $\{G(t + t_k, x)\}$ сходится к функции $G^*(t, x)$ равномерно на $R^+ \times K$, а последовательность $\{H(t + t_k, t + t_k + s, x)\}$ сходится к $H^*(t, t + s, x)$ равномерно на $R^+ \times K^- \times K$ ($t_k \rightarrow +\infty$), то уравнение, предельное к (13), имеет вид:

$$\dot{x}(t) = G^*(t, x(t)) + \int_{-\infty}^t H^*(t, s, x(s)) ds. \quad (17)$$

(Ясно, что для предельного уравнения (17) фазовым пространством в нашем примере также будет UC_g , и его решение будет единственным в UC_g для каждой начальной точки $\varphi \in UC_g$).

Рассмотрим теперь пару (V, W) , где $V(x) = x^2$, $W(t, \varphi) = |\varphi|_g^2$. Нетрудно убедиться, что условие (LR1) выполняется. При условии $V(t, \varphi(0)) = W(t, \varphi)$ получаем $|\varphi(0)| \geq \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s)$. Посчитаем производную функции V вдоль решений уравнения и оценим её снизу для функций φ , удовлетворяющим последнему неравенству:

$$\begin{aligned} V'(t, \varphi) &= \varphi(0)G(t, \varphi(0)) + \varphi(0) \int_{-t}^0 H(t, t+s, \varphi(s)) ds \geq \\ &|\varphi(0)|^2 G_1(t) - |\varphi(0)| \int_{-t}^0 |Q(t, t+s)| g(s) \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} ds \geq \\ &|\varphi(0)|^2 G_1(t) - |\varphi(0)| |\varphi|_g^2 \int_{-t}^0 |Q(t, t+s)| g(s) ds \geq \\ &|\varphi(0)|^2 G_1(t) - |\varphi(0)|^2 Q_0(t). \end{aligned}$$

Если теперь $G_1(t) - Q_0(t) \geq 0$, то последнее неравенство означает, что $V'(t, \varphi) \geq 0$. Если, кроме того, для некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ выполняется условие $G_1^*(t) - Q_0^*(t) \neq 0$, то рассуждая по аналогии с предыдущими примерами, делаем вывод о полной неустойчивости нулевого решения уравнения (13) относительно множества $P(V, W)$.

5. Заключение

В исследовании устойчивости и неустойчивости для уравнений с запаздыванием широко используется другой прямой метод —

метод функционалов, когда вместо вспомогательной функции строится функционал $V(t, \varphi)$ и изучается его поведение вдоль решений (см., например, [1], [3], [15]). Этот метод является в некотором смысле более естественным для таких уравнений, однако в приложениях иногда он оказывается необоснованно сложным. Использование функций для уравнений с запаздыванием было впервые предложено Б.С.Разумихиным [4] для случая ограниченного запаздывания и для неограниченного запаздывания обобщалось различными способами ([17], [18], [19] и др.). Многие из этих способов представляют собой частные случаи изложенного здесь подхода, предлагая различные варианты конкретных функционалов W , зависящих от функции V , например, аналогичных функционалу $\sup_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s))$, используемому для уравнений с ограниченным запаздыванием $r > 0$ (здесь V — функция Ляпунова) [18], [19]; или вид W определялся выбором фазового пространства уравнения [17].

Рассматривая пару функция + функционал, мы для функции вычисляем производную в силу уравнения (это проще, чем для функционала!), а при построении W учитываем особенности фазового пространства конкретного уравнения. Использование такой пары было, по видимому, впервые предложено в работе [9] для автономного случая. Отметим также, что в случае ограниченного запаздывания $0 < r < \infty$ мы можем положить $W(t, \varphi) = \sup_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s))$, и тогда для этого функционала предположение 5 и условие (LR1) в предположении 3 выполняются автоматически, а условие (LR2) представляет собой условие типа Разумихина относительно производной $V'(t, \varphi)$, обеспечивающее неустойчивость нулевого решения (см. [6]). В этом смысле использование пары V, W является естественным обобщением метода функций на случай неограниченного запаздывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения. // ПММ. — 1999. — Т.63. Вып.1. — С.3-12.
2. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об

устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Диффер. уравнения. – 1998. – Т.34, N 4. – С.435-440.

3. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Диффер. уравнения. – 1998. – Т.34, N 7. – С.876-885.
4. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием. // ПММ. – 1956. – Т.20, N 4. – С.500–512.
5. Седова Н.О. К задаче о неустойчивости для уравнений с неограниченным запаздыванием. // Уч. записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. – 1998. — Вып.5. – С.133-141.
6. Andreev A., Sedova N. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations. // Func. Diff. Equations (Israel). 1998. – Vol. 5, N 1-2. – p.21–37.
7. Atkinson F. and Haddock J. On determining phase spaces for functional differential equations. // Funkcial.Ekvac. **31**(1988), p.331–348.
8. Haddock J. and Hornor W. Precompactness and convergence in norm of positive orbits in a certain fading memory space. // Funkcial.Ekvac., **31** (1988), p.349–361.
9. Haddock J. and Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay. // J. Differential equations, **86** (1990), p.1–32.
10. Haddock J. and Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay. // Funkcialaj Ekvacioj, **39** (1996), p.553–570.
11. Hale J. and Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay. // Funkcialai Ekvacioj, **21**(1978), p.11–41.
12. Hino Y. Stability properties for functional differential equations with infinite delay. // Tohoku Math. J., **35** 1983, p.597–605.
13. Hino Y., Murakami S. Stability properties of linear Volterra equations, // J. Differential equations, **89** (1991), p.121–137.

14. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay. // Lecture Notes Math., 1982, N 1017, p.300–312.
15. *Kato J.* Stability problem in functional differential equations with infinite delay. // Funkcial. Ekvac., **21** (1978), p.63–80.
16. *Murakami S.* Perturbation Theorem for functional differential equations with infinite delay via limiting equations, // J. Differential equations, **59** (1985), p.314–335.
17. *Parrott M.* Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space of continuous functions, // in "Lecture Notes in Mathematics", Vol.846, Springer-Verlag, New-York, 1981.
18. *Seifert G.* Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type, // J. Differential equations, **16** (1974), p.289–297.
19. *Terjéki J.* On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations. // Annalea Polonici Mathematici, **36** (1979), p.299–314.

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

$$W_2^2[0, 1]^{13}$$

В.Ю. Свиридов

1. Существует множество методов численного решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений [1]. Однако большинство методов предназначено для решения регулярных (корректно поставленных) задач. В то же время при усложнении математических моделей возникают так называемые сингулярные задачи интегральных и дифференциальных уравнений, для которых проблема численного решения далека от завершения. Такие задачи привлекают в последние годы внимание многих исследователей [2,3].

В работах [4,5,6] предложен метод нормальной сплайн-коллокации проекционного типа [1] численного решения интегральных уравнений первого рода [4], а также интегро-дифференциальных уравнений

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt} + B(t)x(t) - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

с краевыми (в частности, начальными) условиями

$$Cx(0) + Dx(1) = g, \quad (2)$$

где $x, f, g \in R^n$, A, B, C, D, K - квадратные матрицы порядка n . Матрицы A и B могут вырождаться. В случае отсутствия в (1) дифференциального терма ($A(t) \equiv 0$), условия (2) не вводятся.

Из теории метода нормальных сплайнов следует, что он может применяться, в отличие от стандартных методов сеточного или проекционного типов [1], к сингулярным задачам с вырожденными матрицами A или, в случае интегральных уравнений, с вырожденными матрицами B . Применимость метода и его эффективность для вырожденных дифференциальных уравнений была подтверждена в

¹³Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект N 01-01-00731

работе [7]. Данная статья посвящена проблеме реализации этого метода для интегро-дифференциальных уравнений.

2. Метод нормальных сплайнов основан на предположении, что решение (1), (2) существует в гильбертовом пространстве соболевского типа $W_2^l[0, 1]$ с нормой

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{l-1} \left(x_i^{(k)}(0) \right)^2 + \int_0^1 \left(x_i^{(l)}(s) \right)^2 ds \right) \quad (3)$$

и переходе от уравнения (1) к коллокационной системе на некоторой сетке $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$

$$A(t_k)\dot{x}(t_k) + B(t_k)x(t_k) - \int_0^1 K(t_k, s)x(s)ds = f(t_k), 1 \leq k \leq m. \quad (4)$$

Для коллокационной системы (4) вместе с условиями (2) ставится задача о нормальном решении, т.е. о поиске решения, минимизирующего норму (3). Кроме того, в этом методе используется свойство компактного вложения $W_2^l[0, 1]$ в $C^{l-1}[0, 1]$ (см. [8]). В силу этого вложения значения искомой функции и ее производной в точках t_k , т.е. $x(t_k)$ и $\dot{x}(t_k)$, а также $\int_0^1 K(t_k, s)x(s)ds$ являются линейными непрерывными функционалами. Согласно теореме Ф.Рисса [8], их можно представить в виде скалярного произведения $\langle h_k, x \rangle$, которое определяется нормой (3). Канонические образы h_k исходных точечных и интегральных функционалов образуют базисную систему функций для нормального решения системы (4), аппроксимирующего решение исходной задачи и называемого нормальным сплайном. Для того, чтобы обеспечить непрерывность получаемых при дискретизации функционалов от искомого решения в случае дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, необходимо выбирать пространство W_2^l с индексом $l \geq 2$, для интегральных уравнений ($A \equiv 0$) можно брать $l = 1$.

Проблема канонического преобразования интегральных функционалов в общем случае решается численно. Кроме того, необходимо также вычислять элементы матрицы Грама системы канонических образов. Эта часть алгоритмизации метода является

наиболее трудоемкой. В работе [9] была предложена экономичная схема канонического преобразования интегральных функционалов в W_2^1 . Этого достаточно для интегральных уравнений. В данной статье схема [9] модифицируется для случая $l = 2$, что, как отмечено выше, необходимо для интегро-дифференциальных уравнений. Приводятся результаты ее использования на ряде тестовых примеров.

3. Ограничимся далее случаем $n = 1$, тогда матрицы $A(t)$, $B(t)$, $K(t, s)$ являются функциями $a(t)$, $b(t)$, $k(t, s)$, матрицы C и D - скалярами c и d .

Канонические образы точечных и интегральных функционалов строятся с помощью воспроизводящего ядра, являющегося функцией Грина некоторой краевой задачи (см. [5,6]). Для пространства $W_2^2[0, 1]$ такая функция имеет вид

$$G(s, t) = \begin{cases} 1 - \frac{s^3}{6} + \left(\frac{s^2}{2} + s\right)t, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{t^3}{6} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)s, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Образами точечных функционалов $a(t_k) \frac{dx_{t_k}}{dt}$ будут функции $a(t_k) \frac{\partial G(s, t_k)}{\partial t}$ пространства $W_2^2[0, 1]$, образами функционалов $b(t_k)x(t_k)$ функции $b(t_k)G(s, t_k)$ и образами интегральных функционалов $\int_0^1 k(t_k, s)x(s)ds$ функции

$$h_k(s) = \int_0^1 k(t_k, \tau)G(s, \tau)d\tau, k = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Решение (нормальный сплайн) представляется в виде

$$x^m(s) = \sum_{i=1}^{m+1} u_i \hat{h}_i(s), \quad (7)$$

$$\hat{h}_k(s) = a(t_k) \frac{\partial G(s, t_k)}{\partial t} + b(t_k)G(s, t_k) - h_k(s), 1 \leq k \leq m,$$

$$\hat{h}_{m+1}(s) = cG(s, 0) + dG(s, 1).$$

Коэффициенты u_i находятся из системы

$$\Gamma u = f^m, \quad (8)$$

где $f^m = (f(t_1), \dots, f(t_m), g)^T$, $\Gamma = \{g_{ij} = \langle \hat{h}_i, \hat{h}_j \rangle\}$ - матрица Грама системы функционалов $\{\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{m+1}\}$. Элементы этой матрицы находятся по формуле:

$$g_{ij} = a(t_i)a(t_j)G''_{st}(t_i, t_j) + a(t_i)b(t_j)G'_t(t_j, t_i) + a(t_j)b(t_i)G'_t(t_i, t_j) + \\ b(t_i)b(t_j)G(t_i, t_j) - a(t_i) \langle \frac{\partial G(s, t_i)}{\partial t}, h_j(s) \rangle - b(t_i) \langle G(s, t_i), h_j(s) \rangle - \\ - a(t_j) \cdot \langle \frac{\partial G(s, t_j)}{\partial t}, h_i(s) \rangle - b(t_j) \cdot \langle G(s, t_j), h_i(s) \rangle + \\ + \langle h_i(s), h_j(s) \rangle, \quad (9)$$

$$\langle G(s, t_i), h_j(s) \rangle = \int_0^1 k(t_j, s)G(s, t_i)ds = h_j(t_i), \quad (10)$$

$$\langle \frac{\partial G(s, t_i)}{\partial t}, h_j(s) \rangle = \int_0^1 k(t_j, s) \frac{\partial G(s, t_i)}{\partial t} ds, \quad (11)$$

$$\langle h_i(s), h_j(s) \rangle = \int_0^1 k(t_i, s)h_j(s)ds. \quad (12)$$

Отметим, что вычисление (12) с учетом (6) является вычислением повторного интеграла.

4. Исследуем трудоемкость алгоритма нахождения решения методом нормальных сплайнов при численном построении квадратур и вычислении по формулам (6), (7), (8), (9). Под трудоемкостью будем понимать количество вычисления функции ядра в узлах квадратурных формул. Обозначим количество интервалов интегрирования по переменным τ и s в формулах (6) и (12) соответственно T и S . Из соображения точности следует брать $\gg S \gg m$. Общая трудоемкость показана в таблице 1.

Таблица 1.

Формула	Вычислений ядра	Количество *, /
(9)	$m(S+1)(T+1)$	$m(10+2(S+1)+(S+1)(T+1))$
(8)	-	порядка m^3
(7)	$m(S+1)$	$m+1$

Таким образом, основная трудоемкость алгоритма выпадает на вычисление матрицы Грама и ее элементов (9).

При численном построении приходится находить элементы $h_k(s_i)$ для каждого k , $1 \leq k \leq m$, и для каждого i , $0 \leq i \leq S$, отдельно. Но можно находить эти значения для каждого k и для всех i . Это достигается следующим образом. Рассмотрим формулу (6):

$$\begin{aligned} h_k(s) = & \int_0^1 k(t_k, \tau) G(s, \tau) d\tau = \int_0^s \left(1 - \frac{\tau^3}{6}\right) k(t_k, \tau) d\tau + \\ & + s \int_0^s \left(\frac{\tau^2}{2} + \tau\right) k(t_k, \tau) d\tau + \left(1 - \frac{s^3}{6}\right) \int_s^1 k(t_k, \tau) d\tau + \\ & + \left(\frac{s^2}{2} + s\right) \int_s^1 \tau k(t_k, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для снижения трудоемкости при численной реализации сетки по s и τ должны согласоваться. При численном интегрировании методом Симпсона на равномерной сетке, сетка по τ должна быть кратной сетке по s , причем с четным коэффициентом. Возьмем $T = 2nS$, где $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $R(j) = j \bmod 2 + 1$ и применим к (6) формулу Симпсона:

$$h_k(s_i) \approx \frac{2}{3T} (r_k^1(s_i) + r_k^2(s_i) + r_k^3(s_i) + r_k^4(s_i)),$$

где

$$\begin{aligned} r_k^1(s_i) &= 0.5k(t_k, 0) + \sum_{j=1}^{in} R(j)k(t_k, \tau_j) \left(1 - \frac{\tau_j^3}{6}\right), \\ r_k^2(s_i) &= s_i \sum_{j=1}^{in} R(j)k(t_k, \tau_j) \left(\tau_j + \frac{\tau_j^2}{2}\right), \\ r_k^3(s_i) &= \left(1 - \frac{s_i^3}{6}\right) \left(0.5k(t_k, 1) + \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j)k(t_k, \tau_j)\right), \\ r_k^4(s_i) &= \left(\frac{s_i^2}{2} + s_i\right) \left(0.5k(t_k, 1) + \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j)\tau_j k(t_k, \tau_j)\right) \end{aligned}$$

Обозначим

$$w_i^2 = \sum_{j=1}^{in} R(j)k(t_k, \tau_j) \left(\tau_j + \frac{\tau_j^2}{2} \right), \quad w_i^3 = \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j)k(t_k, \tau_j),$$

$$w_i^4 = \sum_{j=in+1}^{T-1} R(j)\tau_j k(t_k, \tau_j), \quad i = 1, \dots, m; \quad w_S^3 = w_S^4 = 0.$$

Получим рекуррентное соотношение для $r_k^1(s_i)$:

$$r_k^1(s_{i+1}) = r_k^1(s_i) + \sum_{j=in+1}^{(i+1)n} R(j)k(t_k, \tau_j) \left(1 - \frac{\tau_j^3}{6} \right). \quad (13)$$

Заметим, что

$$w_{i+1}^2 = w_i^2 + \sum_{j=in+1}^{(i+1)n} R(j)k(t_k, \tau_j) \left(\tau_j + \frac{\tau_j^2}{2} \right), \quad (14)$$

$$w_{i-1}^3 = w_i^3 + \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} R(j)k(t_k, \tau_j), \quad (15)$$

$$w_{i-1}^4 = w_i^4 + \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} R(j)\tau_j k(t_k, \tau_j), \quad (16)$$

тогда

$$r_k^2(s_i) = s_i w_i^2, \quad (17)$$

$$r_k^3(s_i) = (w_i^3 + 0.5k(t_k, 1)) \left(1 - \frac{s_i^3}{6} \right), \quad (18)$$

$$r_k^4(s_i) = (w_i^4 + 0.5k(t_k, 1)) \left(\frac{s_i^2}{2} + s_i \right). \quad (19)$$

Мы получили рекуррентные соотношения (13) для вычисления $r_k^1(s_{i+1})$; (14), (17) - для $r_k^2(s_{i+1})$; (15), (18) - для $r_k^3(s_{i+1})$; (16), (19) - для $r_k^4(s_{i+1})$.

Таким образом, по этим формулам мы можем вычислить $h_k(s_i)$ для каждого k и для всех i за два прохода: при прямом проходе высчитываются r_k^1 и r_k^2 , при обратном - r_k^3 и r_k^4 . При вычислении

элементов матрицы Грама следует при прямом проходе алгоритма сохранять значения функции ядра в массиве, чтобы не высчитывать их при обратном проходе. Трудоемкость такого алгоритма равна $m(T+1)$.

5. Таблица 2.

Ядро	Ns	N τ	Время решения (сек)	
			ф-лы Симпсона	компактные ф-лы
K1.	20	40	1.016	0.302
	50	500	25.921	1.785
	100	1000	117.600	3.461
	150	300	46.460	1.538
K2.	20	40	1.181	0.360
	50	500	30.612	2.238
	100	1000	120.497	4.285
	150	300	54.316	1.840

В таблице 2 приведены сравнительные результаты вычисления матрицы Грама для двух интегральных ядер: $k_1(t, s) = e^{ts}$ и $k_2(t, s) = \sin(t + s)$. Через Ns и $N\tau$ обозначим число интервалов интегрирования в формулах (12) и (6) соответственно. Расчет производился на равномерной сетке ($m = 29$).

В таблице 3 приведены результаты решения двух тестовых примеров с помощью описанного выше метода. Первый тест - краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений.

Задача 1.

$$t \frac{dx(t)}{dt} + x(t) - \int_0^1 e^{ts} x(s) ds = te^t + e^t - \frac{e^{t+1} - 1}{t+1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$x(0) + x(1) = 1 + e.$$

Второй - интегральное уравнение.

Задача 2.

$$tx(t) - \int_0^1 2 \sin(t + s) x(s) ds = (t - 0.5) \sin(t) - \cos(t) + 0.5 \sin(t + 2),$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Оба уравнения сингулярные. Коэффициент при главном члене в обоих случаях равен t . Он принимает нулевое значение в начале промежутка $[0,1]$. Задачи решались также на равномерной сетке ($m = 29$). Погрешность решения вычислялась по формуле

$$\max_{1 \leq k \leq m-1} \left| x^m \left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2} \right) - \varepsilon \left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2} \right) \right|,$$

где $\varepsilon(t)$ - точное решение. Для задачи 1 $\varepsilon(t) = e^t$ и для задачи 2 $\varepsilon(t) = \sin(t)$.

Тесты проводились на компьютере с процессором Pentium Celeron (частота 300Mhz), 32 Mb ОЗУ в системе Win95.

Таблица 3.

Задачи	Ns	N τ	Время решения (сек)		Погрешность
			ф-лы Симпсона	компактные ф-лы	
1.	20	40	1.016	0.412	8.52466e-04
	50	500	26.402	2.018	8.51292e-04
	100	1000	119.124	3.873	8.51434e-04
	150	300	47.763	2.143	8.51444e-04
2.	20	40	1.208	0.467	5.29733e-04
	50	500	30.797	2.610	1.87819e-04
	100	1000	121.834	4.931	4.23758e-05
	150	300	55.418	2.665	4.21182e-05

Автор благодарит за постановку задачи и оказанное внимание к работе научного руководителя профессора Горбунова В.К.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
2. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск: Наука, 1980.

3. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. Новосибирск: Сибирская издательская фирма РАН "Наука", 1998.
4. Горбунов В.К. Редукция линейных интегральных уравнений с равномерной погрешностью в правой части // ЖВМиМФ. 1985.Т.25. N 2. С.210-223.
5. Горбунов В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации // ЖВМиМФ. 1989.Т.2. N 2. С.212-224.
6. Горбунов В.К. Экстремальные задачи обработки результатов измерений. Фрунзе: Илим,1990.
7. Горбунов В.К., Петрищев В.В. Метод нормальных сплайнов в вырожденных системах дифференциальных уравнений // Уч. записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып.3. 1997. С.125-132.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. Петрищев В.В. Экономичная схема вычисления канонических образов интегральных функционалов метода нормальных сплайнов // Уч. записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып. 2(7). 1999. С.37-43.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ¹⁴

Е.В.Филаткина

В работе исследована задача об устойчивости почти периодических систем по части переменных. Рассмотрен пример.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t, x), P(t, 0) = 0, \quad (1)$$

где вектор-функция $P(t, x) \in C(D \times R, R^n)$, где D - открытая область в R^n (R - действительная ось, R^n - n -мерное вещественное пространство с некоторой нормой $\|x\|$, содержащая точку $x = 0$).

$P(t, x)$ является почти периодической по t равномерно по x в смысле следующего определения [1].

Определение. Непрерывная функция $P(t, x) \in C(D \times R, R^n)$ называется почти периодической по t равномерно по x , если существует относительно плотное множество почти периодов τ функции $P(t, x)$ с точностью до ϵ , то есть для любого $\epsilon > 0$ существует положительное число $l = l(\epsilon)$ такое, что любой отрезок $[a, a + l]$, $a \in R$, содержит по меньшей мере одно число τ , для которого выполнено неравенство :

$$\|(P(t + \tau, x) - P(t, x))\| < \epsilon \quad \forall t, \forall x \in D.$$

Рассмотрим семейство сдвигов $\{P_\tau(t, x) = P(t + \tau, x), \tau \in R\}$ являющееся предкомпактным в некотором функциональном пространстве F почти периодических функций. Откуда имеет место, в частности, следующее утверждение [2].

Утверждение 1. Пусть $h_q \rightarrow \infty$ - произвольная последовательность действительных чисел, тогда существует подпоследовательность $\{h_p\} \in \{h_q\}$ и существует функция $P^*(t, x) \in F$, для которой последовательность $P(t + h_p, x)$ сходится к функции $P^*(t, x)$ равномерно по совокупности переменных (t, x) на любом множестве $M \times R$, где M -компакт в D , то есть

$$P^*(t, x) = \lim_{h_p \rightarrow \infty} P(t + h_p, x)$$

¹⁴Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-01005.

и функция $P^*(t, x)$ будет равномерно непрерывна по x на каждом множестве $M \times R$, почти периодична по t равномерно по x на этом множестве и, следовательно, непрерывна по совокупности переменных (t, x) на $M \times R$.

Определим систему

$$\dot{x} = P^*(t, x)$$

как предельную к системе (1).

Пусть $V(t, x) \in C^1(D \times R, R)$ есть функция Ляпунова почти периодическая по t . Соответственно, можно определить функциональное пространство F_v почти периодических функций, в котором семейство сдвигов $\{V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x), \tau \in R\}$ предкомпактно. Функции (P^*, V^*) , будем называть предельной парой для (P, V) если функции P^* и V^* являются предельными к P и V для одной и той же последовательности.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($m > 0, n = m + p, p > 0$) — переменные, по отношению к которым исследуется устойчивость. Для удобства обозначим их через $y_i = x_i$ ($i = 1, \dots, m$), а остальные переменные — через $z_j = x_{m+j}$ ($j = 1, \dots, p$).

Используя методику исследований из работы [3] можно получить следующую теорему.

Теорема 1.

- 1) Предположим, что решения системы (1), начинающиеся в некоторой окрестности точки $x=0$ равномерно ограничены по z ;
- 2) Существует функция $V(t, x)$ -определенно положительная по y , почти периодическая по t , допускающая бесконечно малый высший предел, с производной $\dot{V}(t, x) \leq 0$;
- 3) Для любой предельной пары (P^*, V^*) множество $\{V^*(t, x) > 0\} \cap \{\dot{V}^*(t, x) = 0\}$ не содержит целых решений системы $\dot{x} = P^*(t, x)$. Тогда нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически y -устойчиво.

Из свойств почти периодической функции следует, что среди множества предельных пар найдется хотя бы одна, которая будет совпадать с исходной.

Отсюда и [2,3] получим следующий результат:

Теорема 2.

Предположим, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 1;

а также: $\{V(t, x) > 0\} \cap \{\dot{V}(t, x) = 0\}$ не содержит целых решений системы (1).

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически y -устойчиво равномерно по x .

Аналогичную форму имеет теорема об y -неустойчивости.

Пример.

Пусть кабина центрифуги представляет собой твердое тело, которое может свободно поворачиваться вокруг оси OO' относительно державки COO' [5]. Последняя, в свою очередь, приводится во вращение с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси CD (ω -известная почти периодическая функция по t). Предположим, что центр масс кабины M расположен на оси OG на некотором расстоянии r , обозначим расстояние OC через l . Определим положение кабины углом между прямыми OC и GO . Пусть m - масса, а J - момент инерции кабины относительно оси OO' . Кинетическая энергия для данной системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} (J + mr^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 (r^2 + l^2 + 2lr \cos \alpha).$$

Получим уравнения движения в следующем виде:

$$(J + mr^2) \ddot{\alpha} + m\omega^2(t)lr \sin \alpha = M$$

Пусть при некотором $M = M_0(t)$ система совершает заданное вращательное движение $\alpha = \alpha_0(t)$ - почти периодическая функция. Рассмотрим задачу о стабилизации заданного движения $\alpha = \alpha_0(t)$. Введем возмущение $x = \alpha - \alpha_0$. Тогда уравнение возмущенного движения примет вид:

$$(J + mr^2) \ddot{x} + 2m\omega^2(t)lr \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \alpha_0(t) \right) = M_{cm}, \quad (2)$$

где $M = -M_0(t)$. Положим $M_{cm} = -k_0 \dot{x}$. Если обозначим

$$k = \frac{k_0}{J + mr^2}, f(x) = \sin \left(\frac{x}{2} \right), g(t, x) = \frac{2m\omega^2(t)lr \cos \left(\frac{x}{2} + \alpha_0(t) \right)}{J + mr^2},$$

тогда уравнение (2) приведет к виду:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + f(x)g(t, x) = 0.$$

Для этого уравнения может быть использована функция Ляпунова в виде [5]

$$V(t, x) = \frac{\dot{x}^2}{g(t, x)} + 2 \int_0^x f(x) dx.$$

Отсюда, используя [6] и теорему 1, получим следующие условия стабилизации заданного движения для равномерной асимптотической устойчивости:

$$\cos(\alpha_0(t)) \geq \gamma_0 > 0$$

$$\cos(\alpha_0(t)) (2k + 2\omega(t)\dot{\omega}(t)) - \omega^2 \sin(\alpha_0(t)) \dot{\alpha}_0(t) \geq \gamma_0 > 0.$$

Замечание.

Теорема 1 аналогична теореме из [3], но имеет некоторую иную формулировку, специфическую для почти периодических систем. Теорема 2 является более общей по сравнению с аналогичной теоремой из [4], а именно: из условий указанной теоремы следует выполнение условий теоремы 2. Обратное не следует, можно построить соответствующий контрпример.

Литература.

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.-М.:Наука, 1967.472 с.
2. Sell G.R.Nonautonomous defferential equations and topological dynamics Trans. Amer.Math.Soc.,1967. V.127,р. 241-283.
3. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ.1994,N5.
4. Игнатьев А.А. Об эквиасимптотической устойчивости по части переменных // ПММ, Том 63., вып. 5. С.871-875.
5. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М., Наука, 1988, 303 с.
6. Андреев А.С., Юрьева О.Д. Об устойчивости с одной степенью свободы // Известия РАЕН. сер. МММИУ. 1997. том 1. С. 102-114.

УДК 621.9.079; 621.892

МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ШЛИФОВАНИЯ ПРИ ЗАХВАТЕ ЧАСТИЦ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРИМЕСЕЙ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В СОЖ¹

А.Ю. Богданов, В.В. Богданов

В работе на основе новых вероятностных моделей решаются задачи нахождения итоговых качественных параметров шлифованных поверхностей с учетом влияния внешней случайной среды в виде распределенных в технологической жидкости частиц абразивных примесей. При этом соответствующие расчетные модели получены для схем плоского, круглого наружного и внутреннего шлифования.

1. Постановка задачи. Модель процесса плоского шлифования

Многочисленные экспериментальные исследования Л.В.Худобина, Ю.В.Полянского, Е.П.Гульнова [1-3] и других исследователей убедительно доказали возможность проникновения механических примесей, содержащихся в СОЖ, в зону резания при шлифовании и влияние их на шероховатость шлифованных поверхностей.

Однако до настоящего времени нет достаточного теоретического подтверждения альтернативным гипотезам проникновения механических примесей в зону резания.

Предположим, что воздействие примесей на изменение шероховатости поверхности происходит по следующей схеме. Механические примеси, загрязняющие СОЖ, проникают в зону резания, размещаются в межзерновом пространстве шлифовального круга, изменяют микрорельеф рабочей поверхности круга, изменяют шероховатость шлифованной поверхности по сравнению со случаем шлифования с чистой жидкостью.

Рассмотрим гипотезу проникновения механических примесей в зону резания посредством захвата их рабочей поверхностью (в данном случае периферией) шлифовального круга при плоском шлифовании, круглом наружном и внутреннем шлифовании.

На рис.1 приведена схема захвата частиц механических примесей радиуса r периферией круга при плоском шлифовании (AB - снимаемый припуск; в приведенном на рис. 1 случае $AB = H = \Delta$, т.е. распределенная кромка круга совпадает с заглублением; существуют также варианты, ко-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 01-01-00902.

The diagram shows a large sphere of radius R_K rolling on a horizontal surface. The center is O_1 and the point of contact is A . A horizontal line passes through O_1 at height b from the surface, with points H and L marked on it. A smaller sphere of radius r is tangent to the large sphere at point E and to the surface at point D . Its center is O_2 . A line z passes through O_2 and C . Angles α and α_1 are indicated at the centers. A curved arrow indicates the large sphere is rotating clockwise.

$$\cos \alpha = \frac{R_k - H}{2R_k + 2r + z}; \quad \cos \alpha = \frac{r}{r + z} \quad (1)$$
$$\cos \alpha = \frac{R_k - r - H}{R_k + r};$$

$$PE = L = R_{\kappa} \sin \alpha = (R_{\kappa} / (R_{\kappa} + r)) \sqrt{4R_{\kappa} r + 2R_{\kappa} H - 2rH - H^2};$$

Уравнение кривой (шлифовального круга)

Определим площадь зоны захвата

$$S = \int_H^P dy \int_{\sqrt{R_k^2 - (y - R_k)^2}}^P dx = \int_H^P (L - \sqrt{R_K^2 - (y - R_K)^2}) dy =$$

$$= (P - H)L - \int_H^P \sqrt{R_K^2 - (y - R_K)^2} dy$$

$$\int_H^P (\sqrt{R_k - (y - R_k)^2}) dy = \left| \begin{matrix} u = y - R_k \\ du = dy \end{matrix} \right| = \int_{H-R_k}^{P-R_k} \sqrt{(R_k^2 - u^2)} du =$$

$$\begin{aligned}
&= (u/2) \sqrt{(R_k - u^2)} + (R_k^2 - u) + (R_k^2/2) \arcsin(u/R_k) \Big|_{H - R_k}^{P - R_k} = \\
&= -(R_k - P)/2) \sqrt{2R_k P - P^2} - (R_k^2/2) \arcsin((R_k - P)/R_k) + \\
&+ (R_k - H)/2) \sqrt{2R_k H - H^2} + (R_k^2/2) \arcsin((1 - H)/R_k).
\end{aligned}$$

Заметим, что при $x \approx 1$ $\arcsin x \approx \pi/2 - \sqrt{2 - 2x}$.

Из рис.1 видно, что общая площадь зоны захвата частиц примесей может быть определена по-разному. Например:

- 1) $S_3 = S_{NME} + S_r$;
- 2) $S_3 = S_{NME} + S_{EMD} + S_r$;
- 3) $S_3 = S_{NME} + S_{EMC} + 1/2 S_r$;
- 4) $S_3 = S_{NME} + S_{EMC}$;
- 5) $S_3 = S_{NME} + S_{EMD} + 1/2 S_r$.

Остановимся для определенности на первом варианте, так как выбор иной схемы не повлечет за собой каких-то существенных изменений. Тогда площадь зоны захвата оценивается как сумма площадей фигуры NME и самой частицы радиуса r

$$\begin{aligned}
S_3 = & (P - H)L + ((R_k - P)/2) \sqrt{2R_k P - P^2} + (R_k^2/2) \arcsin(1 - (P/R_k)) - \\
& - ((R_k - H)/2) \sqrt{2R_k H - H^2} - (R_k^2/2) \arcsin(1 - (H/R_k)) + \pi r^2.
\end{aligned}$$

Предполагаем, что r - максимальный радиус частицы механических примесей, которую может захватить круг: $r = \frac{m_a + 3\sigma_a}{2}$. При этом средний объем зоны захвата $V_3 = S_3 m_a$.

Считая известной функцию распределения частиц механических примесей (шлама), содержащихся в СОЖ, по размерам $F_w(x) = P\{\text{диаметр частицы шлама} < x\}$ найдем соответствующий закон распределения по массам $F_w^M(x) = P\{\text{масса частицы шлама} < x\}$. Имеем

$$\begin{aligned}
F_w^M(x) &= P\{(4/3)\pi(d^3/8)\rho_w < x\} = P\{d < \sqrt[3]{(6x/\pi\rho_w)}\} = P\{d < \sqrt[3]{(6/\pi\rho_w)} \sqrt[3]{x}\} \\
&= F_w(\sqrt[3]{(6/\pi\rho_w)} \sqrt[3]{x}).
\end{aligned}$$

Причем плотность распределения частиц шлама

$$f_w^M(x) = f_w(\sqrt[3]{(6/\pi\rho_w)} \cdot \sqrt[3]{x}) (1/3) (\sqrt[3]{(6/\pi\rho_w)}) (1/\sqrt[3]{x^2}),$$

где ρ_w - плотность материала шлама.

Тогда средняя масса захваченных частиц шлама и средняя масса шлама в объеме захвата, соответственно:

$$\bar{M}_w = \int_0^{+\infty} x f_w^M(x) dx; \quad M_3 = V_3 C,$$

где C - концентрация шлама в СОЖ.

Среднее число частиц шлама в зоне захвата

$$\bar{N}_w = M_3 / \bar{M}_w.$$

Число захваченных частиц

$$N_w^3 = \bar{N}_w \cdot \bar{\varepsilon},$$

где $\bar{\varepsilon}$ - степень захвата частиц шлама шлифовальным кругом (средняя степень внедрения абразивных частиц).

Найдем среднее число зерен круга на его поверхности, граничащей с зоной захвата:

$$N_a = \int EN \cdot \rho_l,$$

где ρ_l - линейная плотность распределения вершин абразивных зерен (шт/мм).

$$\int EN = \int AE - \int AN$$

$$\int AE = R_k \cdot \alpha = R_k \arccos((R_k - r - H) / (R_k + r))$$

Чтобы найти $\int AN$, найдем

$$\cos \alpha_1 = (R_k - H) / R_k = \arccos((R_k - H) / R_k),$$

$$\int AN = R_k \arccos((R_k - H) / R_k).$$

Окончательно имеем

$$\int EN = R_k \{ \arccos((R_k - r - H) / (R_k + r)) - \arccos((R_k - H) / R_k) \}$$

$$N_a = \rho_l R_k \{ \arccos((R_k - r - H) / (R_k + r)) - \arccos(1 - H/R_k) \}.$$

Тогда коэффициент размещения частиц шлама в межзерновом пространстве круга $\beta \in (0; 1)$ [4] вычисляется как отношение

$$\beta = N_a / (N_a + N_w^3) \quad (2)$$

Функция распределения вершин зерен круга с учетом захваченных частиц механических примесей

$$F_{\Sigma} = \beta F_6(x) + (1 - \beta) F_{нов}(x). \quad (3)$$

Подставив (2) в (3) имеем

$$F_{B\Sigma} = (N_a / (N_a + N_w^3)) F_6(x) + (1 - (N_a / (N_a + N_w^3))) F_{нов}(x),$$

где $F_6(x) \sim N(m_6, \sigma_6^2)$ - функция распределения вершин зерен на поверхности круга; m, σ^2 - соответственно, математическое ожидание и дисперсия;

$F_{нов}(x) \sim N(m_{нов}, \sigma_{нов}^2)$ - функция распределения вершин (новых вершин) абразивных частиц (механических примесей), захваченных кругом и размещенных в межзерновом пространстве на поверхности круга.

Динамическая функция распределения вершин зерен круга [4]

$$F_в(x) = \int_0^{+\infty} f_a(d_0) \left[\int_0^x f_c(s) [1 - (1 - \min(x-s, d_0)/d_0)^{\alpha-1}] ds \right] dd_0. \quad (4)$$

Распределение частиц механических примесей, разместившихся в межзерновом пространстве круга

$$F_{нов}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{нов}} \int_{-\infty}^x e^{-(t-m_{нов})^2/2\sigma_{нов}^2} dt, \quad (5)$$

$$f_{нов}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{нов}} e^{-(t-m_{нов})^2/2\sigma_{нов}^2} dt. \quad (6)$$

Функция распределения шероховатости поверхности после операции окончательной обработки с учетом загрязнения СОЖ механическими примесями

$$F_{шп}^{нов}(x) = F_{шп}(x)(1 - P_y^N(x+H-\Delta)), \quad (7)$$

где P_y^N - вероятность среза металла на уровне x хотя бы одним из N зерен;

$F_{шп}(x)$ - функция распределения шероховатости поверхности после операции предварительной обработки (исходная шероховатость поверхности заготовки).

В соответствии с формулой Бернулли

$$P_y^N(x) = 1 - e^{N \ln(1 - P_y^1(x))}, \quad (8)$$

где N - число зерен, участвующих в процессе обработки;

$P_y^1(x)$ - вероятность среза металла на уровне x единичным зерном.

Для плоского шлифования

$$N = 2\rho_0 \cdot \gamma_p ((V_k/V_d) \cdot 2R_k h - h^2 + R_k \arccos(R_k - h/R_k)), \quad (9)$$

где V_k, V_d - скорость круга и заготовки (детали);

ρ_0 - линейная плотность зерен круга;

$t = L_0/V_d$ - время контакта круга с заготовкой;

γ_p - процент режущих зерен;

L_0 - длина активной зоны шлифования;

P - величина зоны формирования шероховатости.;

$$P_y^1(x) = \int_y^H \frac{\sqrt{2(R_k - H + y)(y - x)(y - x)^2}}{\sqrt{2R_k H - H^2}} f_B(y + H) dy. \quad (10)$$

После соответствующих подстановок зависимостей (9), (10) в (7) и (8) получим значения шероховатости шлифованной поверхности в учетом влияния механических примесей, содержащихся в СОЖ.

2. Модель процесса круглого наружного шлифования

Рассмотрим случай захвата частиц механических примесей шлифовальным кругом при круглом наружном шлифовании (рис 2).

Центр полярной системы координат совмещён с O_1 . Тогда уравнение круга: $\rho_1(\varphi) = R_k$.

Окружность заготовки в декартовой системе координат

$$x^2 + (y + (R_d + R_k))^2 = (R_d + H)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi (R_d + R_k) \rho + (R_d + R_k)^2 = (R_d + H)^2.$$

Обозначим $2 \sin \varphi (R_d + R_k) = b$; $(R_d + R_k)^2 - (R_d + H)^2 = c$. Имеем

$$\rho^2 + b\rho + c = 0; c > 0$$

$$\rho_2(\varphi) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \text{ так как имеет место двузначность и необходимо}$$

брать ближнюю точку.

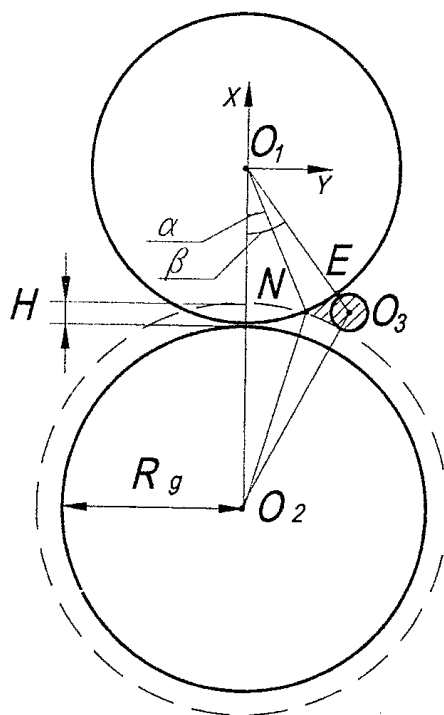


Рис.2. Исследование захвата частиц при круглом наружном шлифовании; O_1 - центр круга; O_2 - центр детали; R_k - радиус круга; R_d - радиус детали; H - распределённая кромка круга

$$S_{\text{захвата}} \approx \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\beta} \rho_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{(\beta - \alpha)}{2} R_k^2 + \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Найдём α и β . Сначала найдём α . В ΔO_1NO_2 все стороны известны:

$|O_1N| = R_k$, $|O_2N| = R_d + H$, $|O_1O_2| = R_d + R_k$. По теореме косинусов

$$|O_2N|^2 = |O_1N|^2 + |O_1O_2|^2 - 2|O_1N||O_1O_2|\cos\alpha;$$

$$(R_d + H)^2 = R_k^2 + (R_d + R_k)^2 - 2R_k(R_d + R_k)\cos\alpha;$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(R_d + H)^2 - R_k^2 - (R_d + R_k)^2}{-2R_k(R_d + R_k)}\right).$$

В $\Delta O_1O_2O_3$ известны все стороны: $|O_1O_2| = R_d + R_k$; $|O_1O_3| = R_k + r$;

$$|O_2O_3| = R_d + r + H;$$

$$|O_2O_3|^2 = |O_1O_2|^2 + |O_1O_3|^2 - 2|O_1O_2||O_1O_3|\cos\beta;$$

$$(R_d + r + H)^2 = (R_d + R_k)^2 + (R_k + r)^2 - 2(R_d + R_k)(R_k + r)\cos\beta;$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{(R_d + r + H)^2 - (R_d + R_k)^2 - (R_k + r)^2}{-2(R_d + R_k)(R_k + r)}\right).$$

Для случая круглого наружного шлифования

$$P_y^I(x) = \int_x^H \frac{\arccos\left(1 - \frac{(y-x)(y+x+2R_k-2H)}{2(R_d-x)(R_d+R_k-H)}\right)}{\arccos\left(1 - \frac{H(2R_k-H)}{2R_d(R_d+R_k-H)}\right)} f_B(y+H) dy; \quad (11)$$

$$N = 2\rho\gamma_p\left((V_k/V_d R_d \arccos\left(1 - \frac{H(2R_k-H)}{2R_d(R_d+R_k-H)}\right) + \right. \\ \left. + R_k \arccos\left(1 - \frac{H(2R_d-H)}{2R_k(R_d+R_k-H)}\right)\right). \quad (12)$$

Функция распределения шероховатости шлифованной поверхности для случая круглого наружного шлифования может быть получена после соответствующих подстановок зависимостей (11-12) в зависимости (7-8).

3. Модель процесса внутреннего шлифования

Рассмотрим случай захвата частиц механических примесей шлифовальным кругом при внутреннем шлифовании (рис.3).

Пусть центр полярной системы координат совмещён с O_1 . Тогда уравнение шлифовального круга: $\rho_1(\varphi) = R_k$.

Пунктирная окружность в декартовой системе координат:

$$x^2 + (y - (R_\partial - R_\kappa))^2 = (R_\partial - H)^2.$$

Переходим к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases};$$

и получаем новую зависимость

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - (R_\partial - R_\kappa))^2 = (R_\partial - H)^2;$$

$$\rho^2 - 2 \sin \varphi (R_\partial - R_\kappa) \rho + (R_\partial - R_\kappa)^2 - (R_\partial - H)^2 = 0 - \text{ неявное задание.}$$

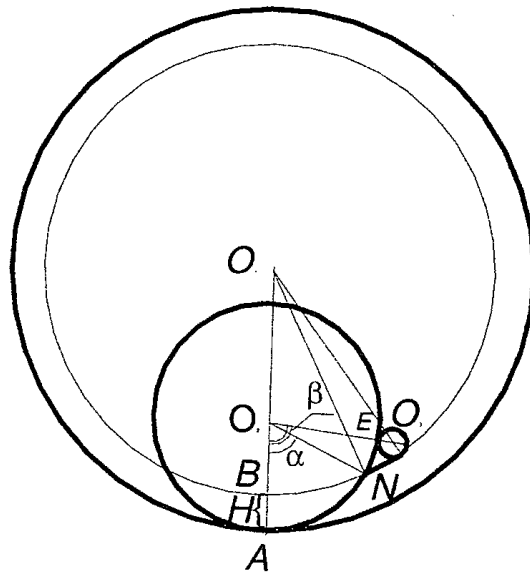


Рис.3. Схема, поясняющая захват частиц при круглом внутреннем шлифовании; R_∂ - радиус детали; R_κ - радиус круга; r - радиус частицы механических примесей; H - снимаемый припуск (заглубление); S - искомая площадь.

Обозначим $2 \sin \varphi (R_\partial - R_\kappa) = b$; $(R_\partial - R_\kappa)^2 - (R_\partial - H)^2 = c$. Имеем

$$\rho^2 + b\rho + c = 0, \quad \rho_2(\varphi) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \text{ так как } c < 0 \text{ (уравнение тонкой окружности).}$$

Тогда площадь захвата

$$S_{\text{захвата}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \beta} \rho_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{(\beta - \alpha)}{2} R_\kappa^2 + \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Найдём углы α и β , т. к. в $\triangle O_1 O_2 N$ все стороны известны:
 $|O_1 O_2| = R_\partial - R_\kappa$; $|O_1 N| = R_\kappa$; $|O_2 N| = R_\partial - H$.

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} |O_2N|^2 &= |O_1O_2|^2 + |O_1N|^2 - 2|O_1O_2| \cdot |O_1N| \cos(\pi - \alpha) \Rightarrow \\ (R_\partial - H)^2 &= (R_\partial - R_\kappa)^2 + R_\kappa^2 + 2R_\kappa(R_\partial - R_\kappa) \cos \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{(R_\partial - H)^2 - (R_\partial - R_\kappa)^2 - R_\kappa^2}{2R_\kappa(R_\partial - R_\kappa)} \Rightarrow \text{находим угол } \alpha$$

Определим угол β , когда в $\triangle O_1O_2O_3$ известны все стороны:

$$|O_1O_2| = R_\partial - R_\kappa; \quad |O_1O_3| = R_\kappa + r; \quad |O_2O_3| = R_\partial - H - r.$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} |O_2O_3|^2 &= |O_1O_2|^2 + |O_1O_3|^2 - 2|O_1O_2| \cdot |O_1O_3| \cos(\pi - \beta) \Rightarrow \\ (R_\partial - H - r)^2 &= (R_\partial - R_\kappa)^2 + (R_\kappa + r)^2 + 2(R_\partial - R_\kappa)(R_\kappa + r) \cos \beta \Rightarrow \\ \beta &= \arccos \left(\frac{(R_\partial - H - r)^2 - (R_\partial - R_\kappa)^2 - (R_\kappa + r)^2}{2(R_\partial - R_\kappa)(R_\kappa + r)} \right). \end{aligned}$$

Максимальный радиус частицы шлама, которую способен захватить

круг:
$$r \approx \frac{m_{\text{абразива}} + 3\sigma_{\text{абразива}}}{2}.$$

Средний объём зоны захвата $V_{\text{захвата}} \approx S_{\text{захвата}} m_{\text{абразива}}.$

Массовая плотность распределения шлама

$$f_{\text{шлама}}^m(x) = f_{\text{шлама}} \left(\sqrt[3]{\frac{6}{\pi \rho_{\text{шлама}}}} \sqrt[3]{x} \right) \cdot \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi \rho_{\text{шлама}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Средняя масса частиц шлама

$$\overline{M}_{\text{шлама}} = \int_0^{+\infty} x f_{\text{шлама}}^m(x) dx$$

Число захваченных частиц шлама

$$N_{\text{шлама}}^{\text{захв}} = \frac{V_{\text{захвата}} \cdot C}{M_{\text{шлама}}} \varepsilon.$$

Найдём среднее число зёрен круга на его поверхности, граничащей с зоной захвата

$$N_{\text{абразива}} = \angle EN / \rho_1 = (\beta - \alpha) \cdot R_\kappa.$$

Тогда коэффициент β определится из соотношения:

$$\beta = \frac{N_{\text{абразива}}}{N_{\text{абразива}} + N_{\text{шлама}}^{\text{захв}}}.$$

Для случая внутреннего шлифования

$$P_y'(x) = \int_x^H \frac{\arccos(1 - \frac{(y-x)(2R_k + 3y - x - 2H)}{2(R_\delta + x)(R_\delta - R_k + H)})}{\arccos(1 - \frac{H(2R_k + H)}{2R_\delta(R_\delta - R_k + H)})} f_B(y+a) dy; \quad (13)$$

$$N = 2\rho\gamma_p((V_k/V_\delta)R_\delta \arccos(1 - \frac{H(2R_k + H)}{2R_\delta(R_\delta - R_k + H)}) + R_k \arccos(1 - \frac{H(2R_k + H)}{2R_k(R_\delta - R_k + H)})) \cdot \quad (14)$$

Функция распределения шероховатости шлифованной поверхности для случая внутреннего шлифования может быть получена после соответствующих подстановок зависимостей (13), (14) в зависимости (7), (8).

Полученные зависимости могут быть использованы при моделировании процессов круглого наружного, внутреннего и плоского шлифования периферией круга, при которых используется СОЖ, загрязненная механическими примесями. Процессы шлифования с чистой СОЖ могут быть рассмотрены как частные случаи.

Литература

- [1] Худобин Л.В., Бердичевский Е.Г. Техника применения смазочно-охлаждающих средств в металлообработке. Москва: Машиностроение, 1977. 189 с.
- [2] Полянский Ю.В. Повышение эффективности операций шлифования путем стабилизации свойств СОЖ. Дис. ... доктора техн. наук. Ульяновск. 1982.
- [3] Гульнов Е.П. Исследование механизма взаимодействия твердых частиц, содержащихся в СОЖ, с рабочей поверхностью шлифовального круга и поверхностью шлифуемой детали. Дис. ... канд. техн. наук. Ульяновск. 1979. 270 с.
- [4] Богданов В.В., Богданов А.Ю. Динамический закон распределения вершин зерен абразивного инструмента с учетом его механического износа и загрязнения. Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Вып.1(6). Ульяновск, 1999.С. 56-64.

Содержание.

<i>А.С.Андреев, И.А.Чудинова.</i> К задаче об ориентации спутника относительно произвольной системы координат	3
<i>Т.А.Бойкова, К.Ризито.</i> Об устойчивости обобщенных стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе	12
<i>Т.А.Борисова, О.Д.Юрьева.</i> О влиянии на устойчивость положения равновесия гироскопических сил и диссипативных сил с частичной диссипацией	17
<i>А.А.Бутов.</i> Теорема для оценок вероятностей пересечения границы простым монотонным дифференцируемым процессом	21
<i>М.А.Волков.</i> Одна задача об условном распределении моментов пересечения границ точечными процессами	26
<i>Д.Р.Воденин, А.Е.Русанова.</i> Обучающая система "Теория случайных процессов"	30
<i>В.К.Горбунов, К.С.Македонский.</i> Опыт реализации методов построения дифференцируемых функций полезности	33
<i>М.В.Дмитриева, Е.Б.Ким.</i> К задаче о стабилизации движения управляемой механической системы	44
<i>С.С.Константинов.</i> Получение оценок вероятности пересечения границы монотонным дифференцируемым процессом специального вида	49
<i>В.Л.Леонтьев, А.Ю.Мелентьев.</i> Численный метод решения задач динамики криволинейных стержней	55
<i>О.А.Перегудова.</i> О применении формулы В.М.Алексеева вариации параметров в методе векторных функций Ляпунова	61
<i>Ю.Г.Савинов, С.А.Хрусталева.</i> Стохастическая модель динамики распределения клеток по длинам теломер	67
<i>И.А.Санников.</i> Математическая модель процесса изменения артериального давления человека	73
<i>Н.О.Седова.</i> К вопросу о полной неустойчивости для дифференциальных уравнений запаздывающего типа	77
<i>В.Ю.Свиридов.</i> Каноническое преобразование интегральных функционалов метода нормальных сплайнов в пространстве $W_2^2[0, 1]$	95
<i>Е.В.Филаткина.</i> Об устойчивости по части переменных почти периодических систем дифференциальных уравнений	104

<i>А.Ю.Богданов, В.В.Богданов. Модели процессов шлифования при захвате частиц механических примесей, содержащихся в СОЖ</i>	108
---	-----

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
Ульяновского государственного
университета

Серия
Фундаментальные проблемы математики и механики

Выпуск 1(10)

Под редакцией академика РАН, профессора
А.С.Андреева

Оформление обложки - *Воденина М.А.*

Оригинал-макет - *Лугошкина Т.В.*

Корректор - *Гайтан Л.Г.*

Подписано в печать 03.12.01.
Формат 60х84/8. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. печ. л. 13,92. Уч.-изд. л. 11,90. Тираж 100 экз.
Заказ №142/428

Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории оперативной полиграфии
Ульяновского государственного университета
432700, г.Ульяновск, ул.Л.Толстого, 42

Обложка отпечатана в ООО ПФ НИССА-ПРЕСС
432032, г.Ульяновск, Московское шоссе, 86