



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с. 8-12.

Поступила: 01.03.2018

Окончательный вариант: 15.05.2018

© УлГУ

УДК 519.216.2:519.216.5:004.94:616-01

Моделирование процессов оптимизации наблюдений в условиях компенсации потерь

Бурмистрова В.Г., Усачев А.А.*

[*graf9190@mail.ru](mailto:graf9190@mail.ru)

УлГУ, Ульяновск, Россия

В настоящей работе рассматривается задача нахождения оптимального управления для интенсивности наблюдения событий процесса выработки АТФ в течение жизни человека, с учетом введения инсулиновых инъекций.

Ключевые слова: Модель, момент остановки, семимартингал, задача оптимизации, выработка АТФ.

Введение

К 1997 году в мире насчитывалось свыше 220 млн. больных сахарным диабетом, предположительно к 2025 г. заболеваемость может удвоиться. Сейчас отмечается увеличение количества больных сахарным диабетом как у инсулинозависимых, так и инсулино-независимых людей. Причины столь стремительного увеличения заболевших не вполне ясны. Полагают, что в случае инсулино-независимого сахарного диабета это происходит за счет старения населения, «эпидемии» ожирения, быстрого распространения малоподвижного образа жизни и увеличения доли маловесных среди новорожденных, а не только за счет накопления и роста числа генетических нарушений. [1]

В мембранах клеток-мишеней имеются поры и рецепторы, предназначенные для проникновения глюкозы. Однако без инсулина у клеток инсулин-зависимых тканей они закрыты, и глюкоза проникнуть внутрь клетки не может. Без инсулина у больных, с одной стороны, наблюдается повышенное содержание сахара в крови, а, с другой стороны, клетки испытывают «дефицит энергии» из-за нехватки глюкозы именно внутри клеток [2]. Инсулин увеличивает транспорт глюкозы через мембраны мышечных и жировых клеток, и глюкоза поступает внутрь клетки, где утилизируется митохондриями. Митохондрии являются основными производителями энергоносителей клеток большинства тканей. Эти

внутриклеточные образования синтезируют АТФ (аденозинтрифосфорная кислота). Энергия АТФ расходуется по мере необходимости организма.[2] Известным фактом является и то, что количество митохондрий в организме человека с возрастом «спадает» по экспоненте [6].

В настоящей работе предложен способ оценивания того, как изменяется возможная выработка АТФ в течение жизни человека, с учетом введенных инъекций. Разработаны и исследованы две модели взаимодействия максимально возможной выработки АТФ и инъекции инсулина, а также решена задача оптимизации для нахождения интенсивности инъекций.

1. Модель изменения максимально возможной выработки АТФ и гипотетических моментов инъекций

Пусть на стохастическом базисе с обычными условиями Деллашери [4] $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ задан процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha \cdot (t - \tau(k))\} \cdot I\{\tau(k) \leq t\} \cdot \exp\{-\beta t\} \quad (1)$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$ - параметры модели. Для всех $k = 1, 2, \dots$ определены моменты остановок (моменты инъекций) $\tau(k)$ такие что:

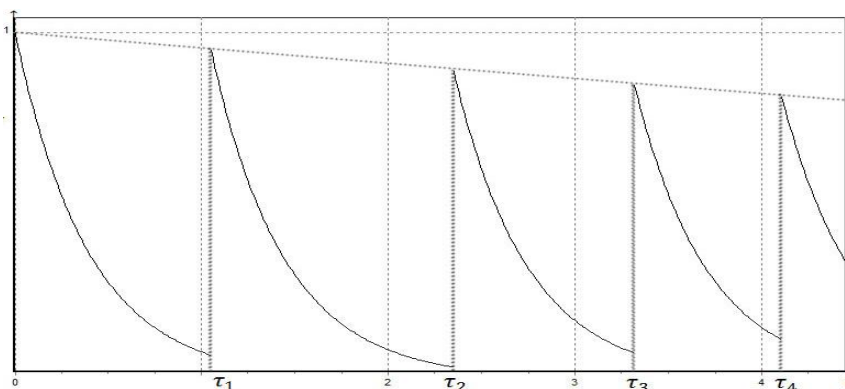
$$\tau(k) = \inf(t: t \geq 0; t > \tau(k-1); \pi_t = k) \quad (2)$$

Процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ :

$$\pi_t = \lambda t + m_t^\lambda, \quad (3)$$

где $\lambda > 0$ - интенсивность скачков процесса.

В результате имитационного моделирования был получен график (рис. 1) изменения максимально возможной выработки АТФ, с введением инъекции инсулина в определенные моменты. Моменты τ_1, τ_2, \dots на рис. 1 - моменты инъекций. Также на рис. 1 видно, что максимально возможная выработка АТФ спадает по экспоненте.



Время t, дни

Рис. 1. Изменение максимально возможной выработки АТФ, с введением инъекции инсулина в моменты определяемые заранее выбранной интенсивностью.

Очевидно, эта модель не учитывает последствия продолжительного нахождения при низком уровне выработки АТФ.

2. Модель введения инсулина до достижения критического уровня максимально возможной выработки АТФ

Предположим, что снижение максимально возможной выработки АТФ до определенного уровня (в модели будем обозначать δ), является для организма «критическим», а пребывание в таком состоянии длительное время может привести к пагубным последствиям для организма.

Рассмотрим математическую модель с условиями Делашери, процессом $X = (X_t)_{t \geq 0}$ определенным по формуле (1). Моменты инъекций определяются как:

$$\tau(k) \geq \inf(t: t > \tau(k-1), X_t \leq \delta) \quad (4)$$

На рис. 2 представлен график, полученный в результате имитационного моделирования, где можно наблюдать частоту и продолжительность нахождения организма в «критическом» состоянии. Моменты τ_1, τ_2, \dots на рис. 2 - моменты инъекций.

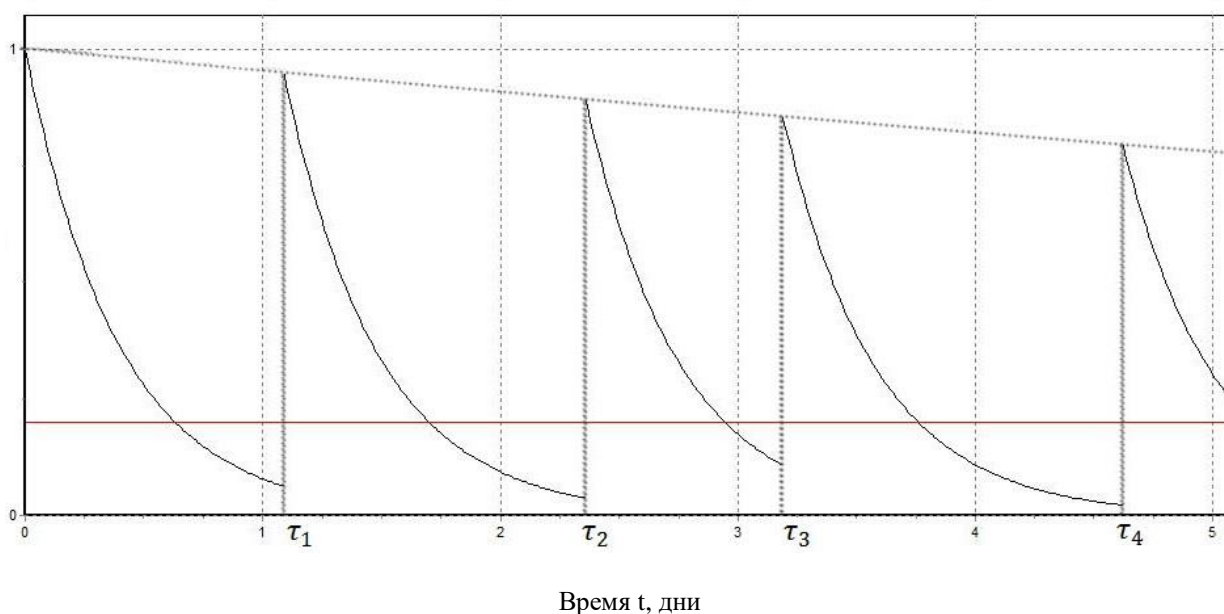


Рис. 2. Изменение максимально возможной выработки АТФ, с введением инъекции инсулина в моменты определяемые критическим уровнем.

По результатам исследования предыдущих двух моделей актуальным становится вопрос выбора оптимальной интенсивности инъекций.

3. Задача оптимизации для выбора оптимального значения интенсивности

Рассмотрим функцию потерь $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^T (\delta - \exp\{-\beta t\} \cdot \exp\{-\alpha \cdot (t - \tau(k))\}) \cdot I\{\tau(k) \leq t\} + \lambda. \quad (5)$$

где моменты $\tau(k)$ определяются по формуле (3), константа λ - интенсивность пуассоновского процесса $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$, T - конечный момент наблюдения.

Возникает задача нанесения меньшего ущерба организму, в модели это нахождение ниже критического уровня, при этом уменьшение количества инъекций. Решение данной задачи является решением задачи оптимизации [4,5]:

$$\Phi(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda} \quad (6)$$

При имитационном моделировании получили изменение целевой функции в зависимости от λ (рис. 3).

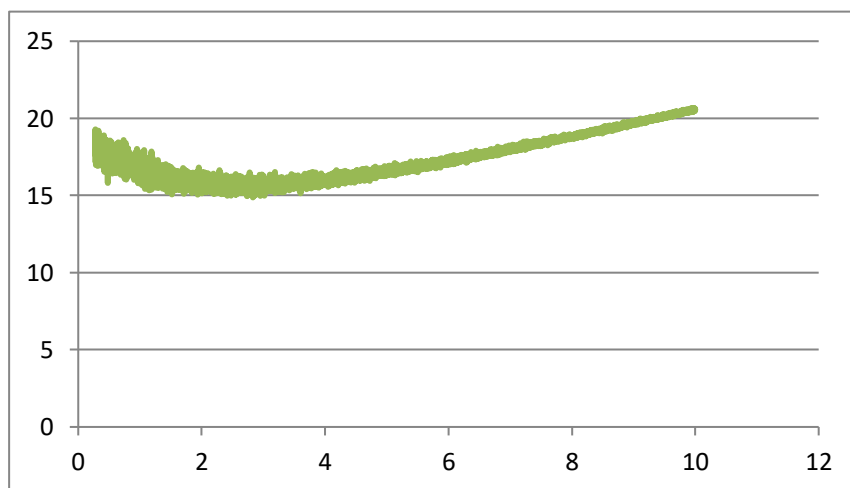


Рис. 3. Изменение целевой функции заданной по формуле (5) в зависимости от изменения параметра интенсивности λ .

Очевидно, оптимальным значением интенсивности является $\lambda = 2,87$.

Заключение

В результате построения и исследования рассматриваемых моделей получили оптимальное значение интенсивности инъекций. Результаты данной работы можно использовать для оценивания вреда наносимого несвоевременным введением инъекций.

Для компьютерного моделирования были выведены дискретные аналоги описанных выше уравнений. Построение имитационной стохастической модели проводилось на компьютере с процессором Intel® Core™ i5-4590 CPU @ 3.3GHz (4 CPUs) и ОЗУ 8 ГБ. Программная модель реализована на языке программирования Borland Delphi 7.0.

Список литературы

1. *Клиническая фармакология по Гудману и Гилману. В 4 т. Т. 4. Сахарный диабет и физиологическое действие инсулина* / Ред. профессор А.Г. Гилман Изд.: Практика, 2006.
2. Буланов Ю., Анаболизм с инсулином.
Режим доступа: <https://profilib.net/chtenie/68930/yuriy-bulanov-anabolizm-s-insulinom-ii-3.php#t1> (дата обращения 10.05.2018).
3. *Теория случайных процессов* / А.А. Бутов, К.О. Равадин; Ульяновский государственный университет. Ульяновск, 2009. П.п. 1.1 с. 5.
4. Butov A.A., Random walks in random environments of a general type. // *Stochastic and Stochastic Reports, Gordon and Breach Science Publishers S.A.*, 1994, V. 48, p. 145– 160.
5. Butov A.A., On the Optimization Problem of Stochastic Observations of Random Walks// *Mathematics and Statistics* 2(3), 2014, с.142-146.
6. Mitteldorf J., Mitochondria in Aging, I: Mechanisms and Background. Режим доступа: <https://joshmitteldorf.scienceblog.com/> (дата обращения 10.05.2018).