Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с. 16-21.

Поступила: 12.03.2018
Окончательный вариант: 11.04.2018

УДК 519.246.2

Имитационное моделирование систем, подчиняющихся неравенству Гронуолла-Беллмана

Бутов А. А.[1,*], ЕникееваА.Ф.[1]

[*]butovaa@ulsu.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе рассмотрены случайные дискретные процессы с единичными скачками и со скачками случайного размера. Представлены оценки этих процессов, полученные на основе дискретного аналога леммы Гронуолла.

Ключевые слова: *дискретный процесс, случайный процесс, процесс с единичным скачком, оценка случайного процесса, лемма Гронуолла-Беллмана.*

Введение

В случае необходимости построения компьютерной модели непрерывного процесса, возможна реализация лишь дискретного процесса с определенной, заданной дискретностью. Это и будет программное моделирование непрерывного процесса, являющегося, на самом деле, процессом – дискретным аналогом непрерывного.

В настоящей работе рассматриваются монотонно неубывающие случайные дискретные процессы. Возникает вопрос, как найти процесс, являющийся для них оценкой граничных значений.

Классическая лемма Гронуолла-Беллмана позволяет оценить функцию, удовлетворяющую определённому дифференциальному или интегральному неравенству, решением соответствующего дифференциального или интегрального уравнения (подробнее см. [2]). В данном случае рассматривается оценка непрерывных процессов.

Для оценки дискретных процессов существует дискретный аналог леммы Гронуолла, представленный в [1]. Однако в этой книге рассматривается оценка процессов со скачками в пронумерованные моменты времени (т.е. в качестве индекса времени рассматривается номер очередного скачка). Мыв настоящей работе построим точечные процессы со скачками в случайные моменты времени при $t \geq 0$. Следовательно, здесь рассматривается полезная при имитационном моделировании модификация дискретного аналога леммы Гронуолла для представленных ниже случаев.

1. Неравенство Гронуолла для дискретного времени

Лемма 1(Согласно дискретному аналогу леммы Гронуолла, приведённому в [1]).Если для некоторых величин φ_m, $m = 0,1,\dots,N$ выполняется неравенство

$$0 \leq \varphi_0 \leq \tilde{a}, \qquad 0 \leq \varphi_{m+1} \leq \tilde{a} + \tilde{b} \cdot \sum_{k=0}^{m} \varphi_k \ , \qquad m = 0,1,\dots,N-1,$$

то справедлива оценка

$$0 \leq \varphi_m \leq \tilde{a} \cdot \left(1 + \tilde{b}\right)^m, \qquad m = 0,1,\dots,N.$$

Доказательство проводится по индукции.

Замечание. В лемме 1 рассматривается процесс с пронумерованными скачками в заданныемоменты времени, а мы рассматриваем неравенство Гронуолла-Беллмана для некоторыхдискретных процессов со скачками в случайные моменты времени.

2. Вспомогательный дискретный процесс с единичными скачками

Рассмотрим дискретный процесс вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_{s-} d\pi_s \ , X_0 = X_{t_0} = 1,$$

где π_t – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ (случайныйпроцесс с единичными скачками) (термины и обозначения см. в [3]).

Для решения этого уравнения в дискретные моменты t_m (при заданном уровне дискретности имитационного моделирования) получаем выражение

$$X_{t_m} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \Delta\pi_{t_k}\right). \tag{1}$$

гдеX_{t_m} – значение дискретного процесса (1) в момент времени t_m. Обозначим X_m – значение дискретного процесса (1) в момент -того скачка.Следовательно,если $\Delta\pi_{t_{m+1}} = \pi_{t_{m+1}} - \pi_{t_m} \in \{0,1\}$, то$\Delta\pi_{m+1} = \pi_{m+1} - \pi_m = 1$.

Тогда, согласно лемме 1, если выполняется неравенство

$$X_{m+1} \leq \tilde{a} + \tilde{b} \cdot \sum_{k=0}^{m} X_k, \tag{2}$$

то справедлива оценка

$$X_m \leq \tilde{a} \cdot \left(1 + \tilde{b}\right)^m. \tag{3}$$

ВычислимX_{m+1} в соответствии с формулой (1) и с учетом введенных обозначений:

$$X_{m+1} = 2^{m+1} \quad => \sum_{k=0}^{m} X_k = \sum_{k=0}^{m} 2^k.$$

Очевидно, что

$$2^m = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k + 1 \quad => X_{m+1} = 1 + \sum_{k=0}^{m} X_k,$$

и тогда значение дискретного процесса (1) в момент времени t_{m+1}:

$$X_{t_{m+1}} = 1 + \sum_{k=0}^{m} X_{t_k} \cdot I\{\Delta X_{t_k} \neq 0\}.$$

Теперь,убирая индикатор скачка $I\{\Delta X_{t_k} \neq 0\}$, получаем неравенство

$$X_{t_{m+1}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{m} X_{t_k},$$

эквивалентное выражению(2), где $\tilde{a} = \tilde{b} = 1$. Тогда в соответствии с формулой(3) для дискретного процесса с единичными скачками (1)справедлива оценка

$$X_{t_m} \leq 2^m. \tag{4}$$

Утверждение 1. В соответствии с дискретным аналогом леммы Гроноулла-Беллмана, для дискретного процесса (1) справедлива оценка (4).

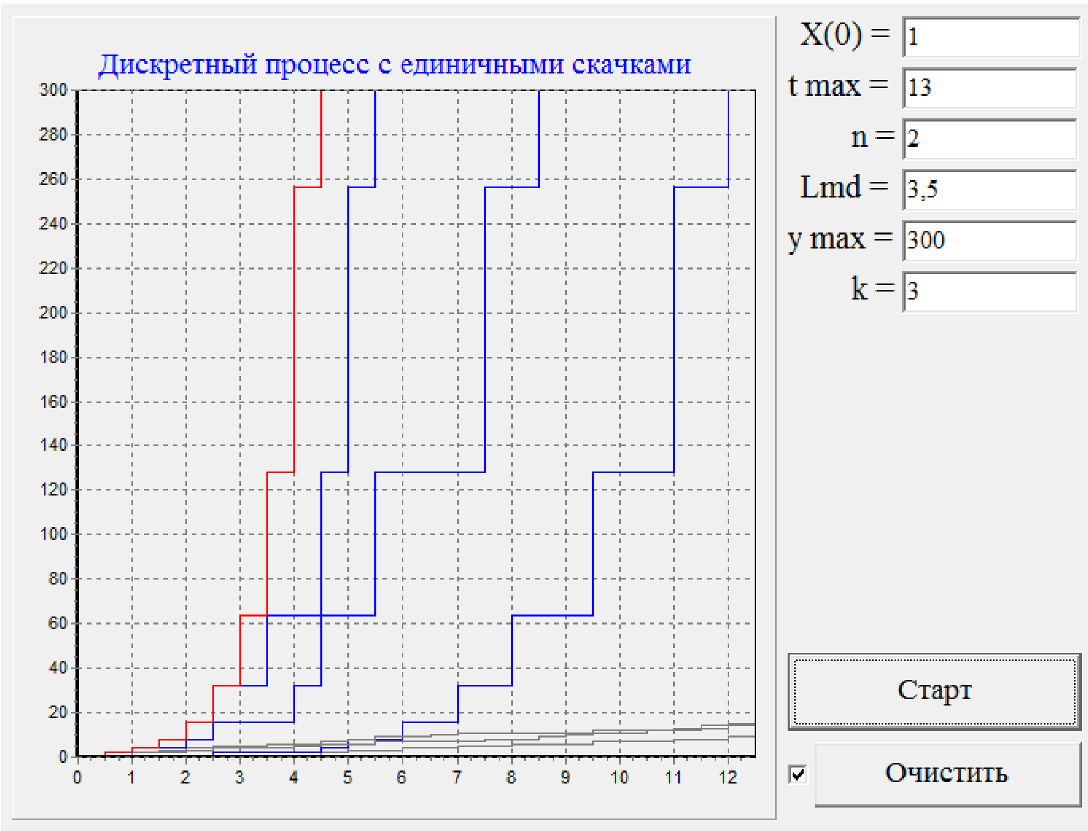

Рис. 1.Демонстрация полученного результата согласно утверждению 1.

На рис. 1 представлена программная реализациятрех траекторий ($k = 3$) дискретного случайного процесса (1) с параметрами: $X_0 = 1$, $t_{max} = 13$, $\Delta t = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, $\lambda = 3.5$. Масштаб графиковпо оси ординат $y_{max} = 300$. Траектории серого цвета – пуассоновский процесс, синего – процесс (1), красного – оценка (4). Как видим, ни одна из траекторий процесса не превышает его оценки.

3. Вспомогательный дискретный процесс со скачками случайного размера

Рассмотрим дискретный процесс вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s \,, Y_t = \sum_{0<s<t} \Delta Y_s,$$

где Y_t – тоже дискретный процесс со скачками $\infty > A > \Delta Y_s > a > 0$ и некоторой интенсивностью $\lambda > 0$.

Решая это уравнение, получаем

$$X_{t_m} = X_{t_0} \cdot \prod_{s=1}^{m} \left(1 + \Delta Y_{t_s}\right), \tag{5}$$

где X_{t_m} – значение дискретного процесса (5) в момент времени t_m . Обозначим X_mзначение дискретного процесса (5) в момент m-того скачка.

Тогда если выполняется неравенство (2), то справедлива оценка (3).

ВычислимX_{m+1} в соответствии с формулой (5) и с учетом введенных обозначений:

$$X_{m+1} = X_0 \cdot \prod_{s=1}^{m+1} (1 + \Delta Y_s),$$

$$\sum_{k=0}^{m} X_k = X_0 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{k} (1 + \Delta Y_s)\right)\right).$$

Подставляя в неравенство (2), получаем

$$X_0 \cdot \prod_{s=1}^{m+1} (1 + \Delta Y_s) \le \tilde{a} + \tilde{b} \cdot X_0 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{k} (1 + \Delta Y_s)\right)\right). \tag{6}$$

Решим вспомогательную задачу – найти такие значения$\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, при которых будет выполняться это неравенство.

Пусть $\tilde{b} = 1$. Тогда неравенство (6) принимает вид

$$\tilde{a} \ge X_0 \cdot \left(\prod_{s=1}^{m+1} (1 + \Delta Y_s) - \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{k} (1 + \Delta Y_s)\right) - 1\right).$$

В случае равенства, подставляя$\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в (5), получаем неравенство

$$X_m \le X_0 \cdot \left(\prod_{s=1}^{m+1} (1 + \Delta Y_s) - \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{k} (1 + \Delta Y_s)\right) - 1\right) \cdot 2^m.$$

Итак, мы получили оценку процесса (5) с учётом того, что скачки происходят в случайный момент времени (а не только в каждый перечисленный момент скачка):

$$X_{t_m} \le X_{t_0} \cdot \left(\prod_{s=1}^{m+1} (1 + \Delta Y_{t_s}) - \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{k} (1 + \Delta Y_{t_s}) \right) - 1 \right) \cdot 2^m. \qquad (7)$$

Утверждение 2. В соответствии с дискретным аналогом леммы Гроноулла-Беллмана, для дискретного процесса (5) справедлива оценка (7).

Оценить дискретный процесс (5) можно и другим способом, отталкиваясь от того, что максимальный размер скачка равен $(A - a)$. Тогда в(5) заменим ΔY_{t_s} его максимальным значением, и, таким образом, получаем неравенство

$$X_{t_m} \le X_{t_0} \cdot \big(1 + (A - a)\big)^{m+1}. \qquad (8)$$

Утверждение 3. Принимая во внимание максимальный размер скачка, для дискретного процесса (5) справедлива оценка (8).

На рис. 2 представлена программная реализация трех траекторий ($k = 3$) дискретного случайного процесса (5) с параметрами: $X_0 = 1,\ t_{max} = 5,\ \Delta t = \frac{1}{n} = \frac{1}{3},\ \lambda = 2.5$.Масштаб графиковпо оси ординат $y_{max} = 200$. Размер скачков вспомогательного процесса: $a = 1, A = 3$. Траектории серого цвета – вспомогательный процесс, синего – процесс (5), красного – оценка (8). Как видим, ни одна из траекторий процесса не превышает оценки.

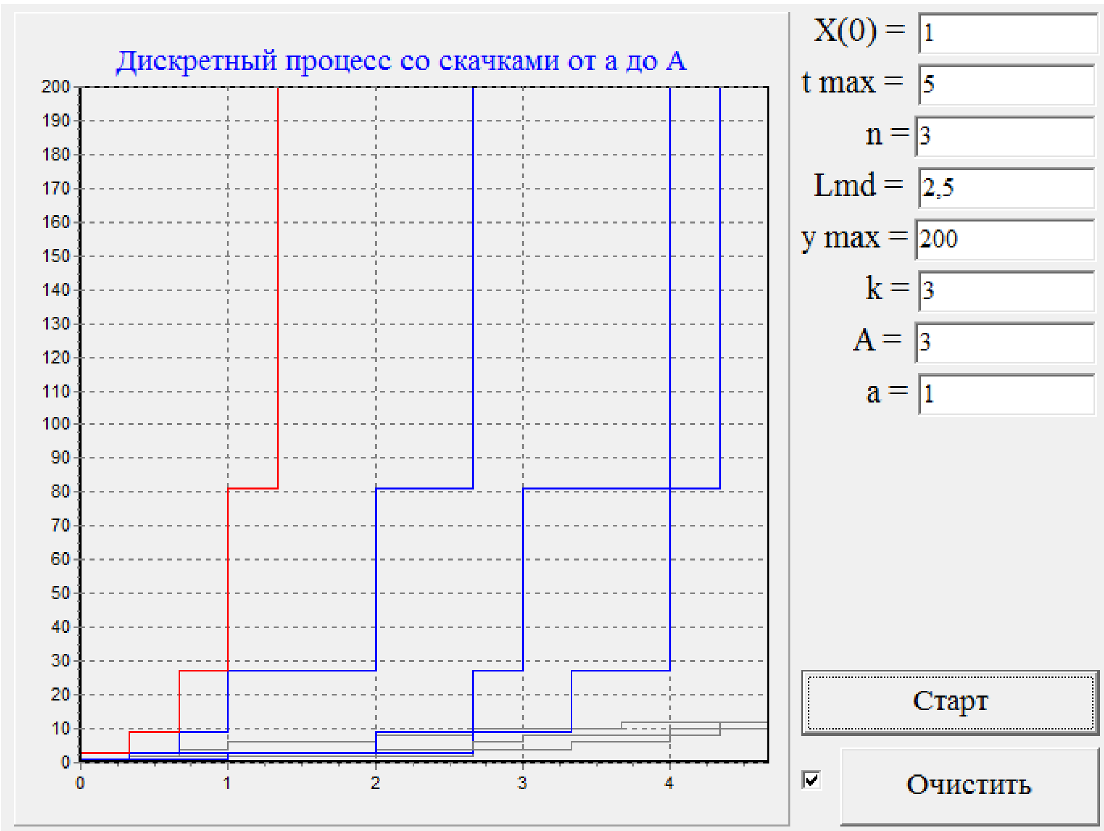

Рис. 2.Демонстрация полученного результата согласно утверждению 3

Заключение

На основе дискретного аналога леммы Гронуолла были получены оценки двух случайных дискретных процессов. Построены и проанализированы компьютерные модели этих процессов, которые демонстрируют адекватность полученных оценок.

Список литературы

1. Васильев Ф.П. *Лекции по методам решения экстремальных задач.* М.: МГУ, 1974.
2. Интернет-энциклопедия «Википедия». *.Лемма Гронуолла-Беллмана.* Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/ (дата обращения 01.10.2017).
3. Бутов А.А. *Теория случайных процессов и её дополнительные главы*: *учеб. пособие. Ч. 1: Введение в стохастическое исчисление.* Ульяновск: УлГУ, 2016.