Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с. 34-37.

Поступила: 08.01.2018
Окончательный вариант: 14.03.2018

УДК 51.76 + 519.216.2

Математическая модель многостадийного старения с восстановлением

Бутов А.А.[1], Шабалин А.С.[2,*], Чибрикова Т.С.[3]

[*]LITO73@rambler.ru
[1,2,3]УлГУ, Ульяновск, Россия

В настоящей работе представлены результаты, показывающие, что процесс старения хоть и является многостадийным, но кривая дожития явно не выделяет наличие таких стадий. Представлено качественное сравнение теоретической функции распределения Гомпертца и эмпирической, полученной в результате моделирования.

***Ключевые слова**: Геронтология, многостадийность старения, математические модели, распределение Гомпертца.*

Введение

Старение – универсальная особенность, присущая как объектам живой природы, так и неживой, зачастую к этому процессу относят износ системы или организма. При математическом моделировании старение можно рассматривать как процесс накопления повреждений элементов и изменений внутренних свойств, причем такое накопление происходит с разной интенсивностью. Теории накопленных разрушений, ошибок или мутаций, чаще описываются стохастическими моделями [2].

Для решения задачи прогноза предстоящей продолжительности жизни еще в 19 веке была разработана актуальная до сих пор модель Гомпертца [3]. На основе этой модели строятся функции распределения моментов смертности и функции дожития. Особенностью модели является возможность рассуждения в терминах двух фундаментальных процессов: начальной смертности и темпа старения. В настоящей работе представлены результаты показывающие, что процесс старения хоть и является многостадийным, но кривая дожития явно не выделяет наличие таких стадий.

1. Материалы и методы исследования

Рассмотрим функцию распределения Гомпертца [4] $F=(F_t)_{t\geq 0}$:

$$F(t)=1-\exp\{-\eta\cdot(\exp\{b\cdot t\}-1)\} \tag{1}$$

где $b>0$ - параметр масштабирования, $\eta>0$ - коэффициент распределения.

В работе процесс старения рассматривается на основе уравнения, описывающего процесс Орнштейна-Уленбека:

$$dX_t=-\lambda\cdot X_t dt+\delta\cdot dW_t \tag{2}$$

с начальным условием $X_0>0, \lambda>0, \delta>0$ - параметры моделирования, $W=(W_t)_{t\geq 0}$ - стандартный винеровский процесс.

В модели предполагается, что при исчерпании ресурсов текущей стадии, реализуется перестройка организма, обеспечивающая на последующей стадии полноценное функционирование. Системы, которые обладали энергетическими ресурсами в избытке, начинают увеличивать свой уровень функционирования, что приводит к компенсированию уровня других систем [1]. Зададим условия, при которых в модели будет происходить восстановление, т.е. некоторую границу $\bar{x}$, при достижении которой процесс X_t увеличивается (скачкообразно) на $\Delta X_t>0$:

$$\bar{x}=\overline{x_0}\cdot\exp\{-\alpha\cdot t\}, \tag{3}$$

где $\overline{x_0}$ - начальное граничное значение, $\alpha>0$ - некоторая константа, t - время

$$\Delta X_t=\bar{x}+x_0^i, \tag{4}$$

$$x_0^i=X_0\cdot\exp\{-i\cdot\rho\}, \tag{5}$$

где $X_0>0$ - начальное значение процесса X_t, $i\geq 0$ - номер стадии старения, $\rho>0$ - константа. Момент гибели $\tau>0$ определяется как момент пересечения процессом X_t некоторой критической границы b>0:

$$\tau=\inf\{X_t\leq b\}. \tag{6}$$

2. Результаты и обсуждение

При проведении компьютерного эксперимента применялся численный метод Эйлера – Муруямы решения стохастистических дифференциальных уравнений. Результаты моделирования представлены на рис. 1.

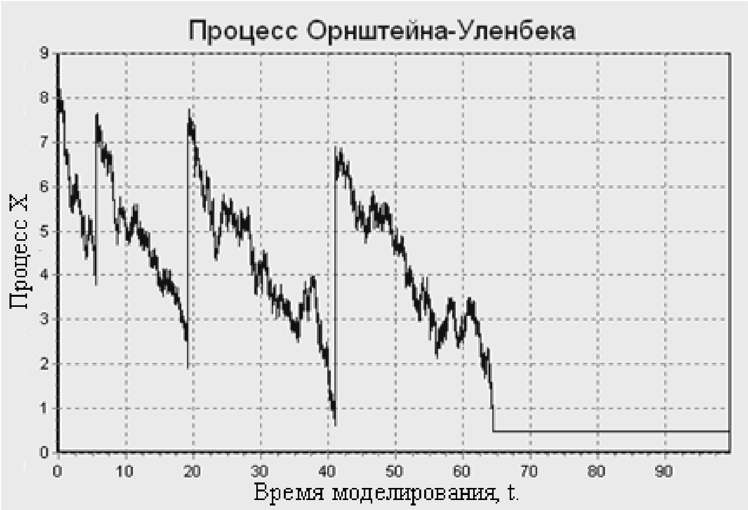

Рис. 1. Траектория процесса X_t с параметрами $X_0 = 8, \alpha = 0{,}005, \lambda = 0{,}1, \delta = 0{,}6, \rho = 0{,}05, \bar{x}_i = 0{,}5$.

В эксперименте генерируется n=1000 траекторий процесса X_t. Рассматриваются моменты $\tau_1,\ldots,\tau_n$ – моменты остановки (смертности). Далее строится эмпирическая функция $F^n(t)$ распределения моментов остановки:

$$F^n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} I\left\{\tau_j \le t\right\}. \tag{7}$$

Проведем сравнение эмпирической функции распределения (7) и теоретической функции распределения Гомпертца (1). Результаты моделирования представлены на рис. 2.

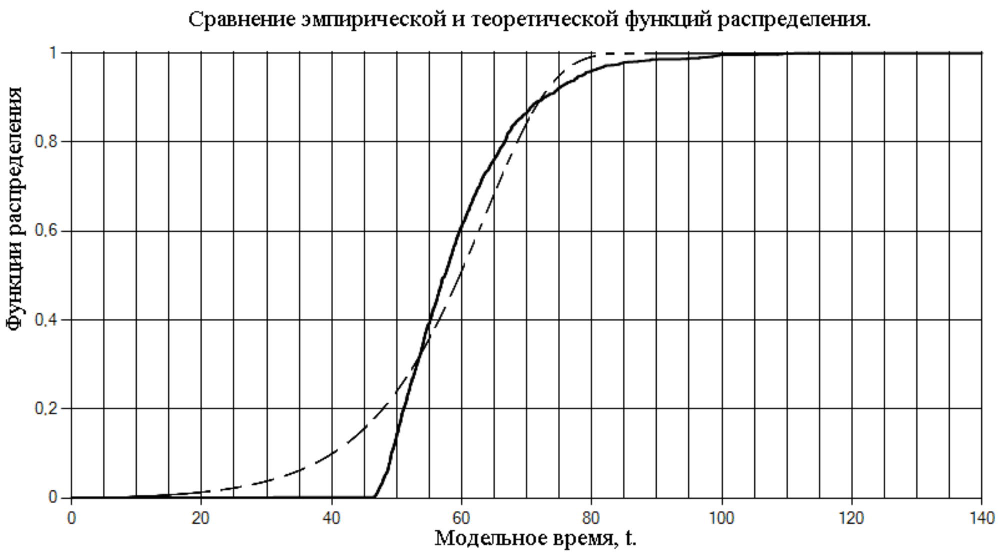

Рис. 2. Теоретическая функция распределения – пунктирная линия. Эмпирическая функция распределения – сплошная линия.

3. Выводы.

Несмотря на то, что, в настоящей работе, рассматривалась многостадийная модель старения организма, кривая дожития их явно не выявляет – она близка к общеизвестному распределению Гомпертца. Но приведенные Гомпертцом уравнения и формулы справедливы только для однородных выборок и внешних условий без значительных изменений, а статистические данные по реальным популяциям могут и должны отличаться от чистой экспоненты. Следовательно, стадии развития организма необходимо выявлять по изменениям физиологических показателей при жизни объектов, а не по «финальной» кривой дожития.

Список литературы.

1. Анисимов, В. Н. Основные принципы построения многостадийной многоуровневой математической модели старения / В. Н. Анисимов [и др.] // *Успехи геронтологии*. 2010. Т. 23, № 2. С. 163-167.
2. Бутов, А. А. *Математические модели физиологии в самостоятельных работах студентов и работах аспирантов: методическое пособие. Ч.2* / А. А. Бутов. Ульяновск: УлГУ, 2015. 23 с.
3. *Геронтология in siliko: становление новой дисциплины. Математические модели, анализ данных и вычислительные эксперименты*: сборник научн. тр. / Под ред. Г.И. Марчука и др. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 535 с.
4. Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* V. 115-1825. P. 513-585.