Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с.29-33.

Поступила: 02.04.2018
Окончательный вариант: 13.05.2018

УДК 519.21

Методы математического моделирования процессов рандомизации для эффектов отражения

Бутов А. А.[1,*], Сухарева А.Ю.[1]

[*]butovaa@ulsu.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В данной статье описываются методы построения математической модели рандомизации для эффектов отражения. Для этого приводится два способа моделирования: задание уравнения процесса с отражением от двух границ и использование дробной части. В работе будут рассматриваться оба случая в виде математического и компьютерного описания, а полученные результаты сравниваться.

Ключевые слова*: имитационная модель, случайные блуждания, процесс рандомизации, эффект отражения.*

Введение

В настоящее время большинство процессов, протекающих в дискретных системах со стохастическим характером функционирования, описываются в рамках теории случайных процессов (ТСП, см. [1]). Они служат для математического описания самых разнообразных явлений во многих дисциплинах, таких как физика, химия, биология, механика, а также в прикладных математических задачах.

Одним из наиболее эффективных методов изучения сложных систем является компьютерное моделирование. Оно используется для получения новых знаний об объекте или приближённой оценки поведения системы.

В данной работе будет рассмотрено построение имитационных моделей рандомизации процессов с отражением от двух границ, см. также работу с рандомизацией при отражении от одной границы [2].

Составим их математическое и компьютерное описание, используя разные способы моделирования.

1. Математическая модель

Приведём общее математическое описание для обоих способов.

Пусть на стохастическом базисе $\boldsymbol{B}$ заданы точечные процессы:

– процесс $A = (A_t)_{t\geq 0}$ – пуассоновский процесс с компенсатором

$$\tilde{A}_t = \lambda \cdot t, \tag{1.1}$$

где параметр $\lambda > 0$ – интенсивность;

– процесс $B = (B_t)_{t\geq 0}$– пуассоновский процесс с той же интенсивностью и компенсатором

$$\tilde{B}_t = \lambda \cdot t, \tag{1.2}$$

где параметр $\lambda > 0$ – интенсивность.

Процессы A и B – независимые пуассоновские процессы.

Тогда процесс их разности:

$$X_t = A_t - B_t. \tag{1.3}$$

Зададим параметр N – граница, от которой будет отражаться процесс X. $(N \geq 1)$

Пусть τ – момент скачка. Тогда

$$\Delta X_\tau = \begin{cases} 1, \\ -1. \end{cases} \tag{1.4}$$

В том случае, если в какой-либо момент времени t предыдущий момент скачка становится равным N, т.е.

$$X_{\tau-} = N, \tag{1.5}$$

то последующий скачок может принять значение одного из следующих вариантов:

$$X_\tau = N + 1, \tag{1.6}$$

– процесс выходит за границу N

или

$$X_\tau = N - 1, \tag{1.7}$$

– процесс отражается от границы N.

Зададим формулу для построения процесса с отражением от границы N, обозначив его Y_t.

Пусть предыдущий момент скачка этого процесса равен N:

$$Y_{\tau-} = N. \tag{1.8}$$

Тогда новый процесс будет либо совершать скачок вниз, либо пропускать этот скачок.

В первом случае процесс будет выглядеть так:

$$Y_\tau = Y_\tau - 1. \tag{1.9}$$

Тогда формула для процесса Y_t

$$Y_t = \int_0^t I\{Y_s \in (0, N)\} \cdot (dA_s - dB_s) + \int_0^t I\{Y_{s-} = 0\} \cdot (dA_s + dB_s) -$$
$$- \int_0^t I\{Y_{s-} = N\} \cdot (dB_s + dA_s). \tag{1.10}$$

Второй метод – построение процесса, используя дробную часть.Для этого введём новый процесс x_t, значения которогоявляются дробной частью от частного, в числителе которого находится значение процесса X_t в момент времени t, а в знаменателе константа N:

$$x_t = \left\{\frac{X_t}{N}\right\}. \tag{1.11}$$

Теперь, умножив полученное на N, должен получиться искомый процесс.

$$y_t = x_t \cdot N. \tag{1.12}$$

2. Компьютерная модель

Дискретизация математических моделей (1.1) – (1.2) осуществлялась в два этапа, см. [3].

На первом этапе непрерывная область$[0; T]$была заменена на дискретную область – совокупность конечного числа точек$\left\{t_k: t_k = \frac{k}{L}, k = 0, 1, \dots, [LT]\right\}$, где функция$[x]$обозначает целую часть числа x, $-\infty < x < +\infty$. Данное множество представляет собой равномерную разностную сетку с шагом дискретизации$\Delta = \frac{1}{L}$, где L – натуральное число.

На втором этапе был сделан переход от случайных процессовA, B, X, Y, x, yк их дискретным аналогам:

$$A_{k+1} = A_k + \Delta_A, \tag{2.1}$$

$$B_{k+1} = B_k + \Delta_B, \tag{2.2}$$

$$X_{k+1} = A_{k+1} - B_{k+1}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} Y_{k+1} = Y_k + (\Delta_A - \Delta_B) \text{ (если } 0 < Y_{k+1} < N), \\ \text{(иначе если } Y_k = 0) \;\; Y_{k+1} = Y_k + (\Delta_A + \Delta_B), \\ \text{(иначе если } Y_k = N) \;\; Y_{k+1} = Y_k - (\Delta_B + \Delta_A), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$x_{k+1} = x_k + \left\{\frac{X_{k+1}}{N}\right\}, \tag{2.5}$$

$$y_{k+1} = y_k + x_{k+1} \cdot N, \tag{2.6}$$

где$A_k = A_{t_k}$, $B_k = B_{t_k}$, $X_k = X_{t_k}$, $Y_k = Y_{t_k}$, $x_k = x_{t_k}$, $y_k = y_{t_k}$.

Величины скачковΔ_A иΔ_B вычисляются следующим образом:

1. Δ_A= 1, если$\xi \in (0{,}5;\ 0{,}5 + \lambda \cdot \Delta)$, иначе$\Delta_A$= 0. Здесь$\xi \sim R[0; 1]$, Δ – шаг дискретизации.
2. Δ_B= 1, если$\eta \in (0{,}5;\ 0{,}5 + \mu \cdot \Delta)$, иначе$\Delta_B$= 0. Здесь $\eta \sim R[0; 1]$, и не зависит отξ.

Компьютерное моделирование случайных блужданий было реализовано на языке высокого уровня C++ (см. рис.1).

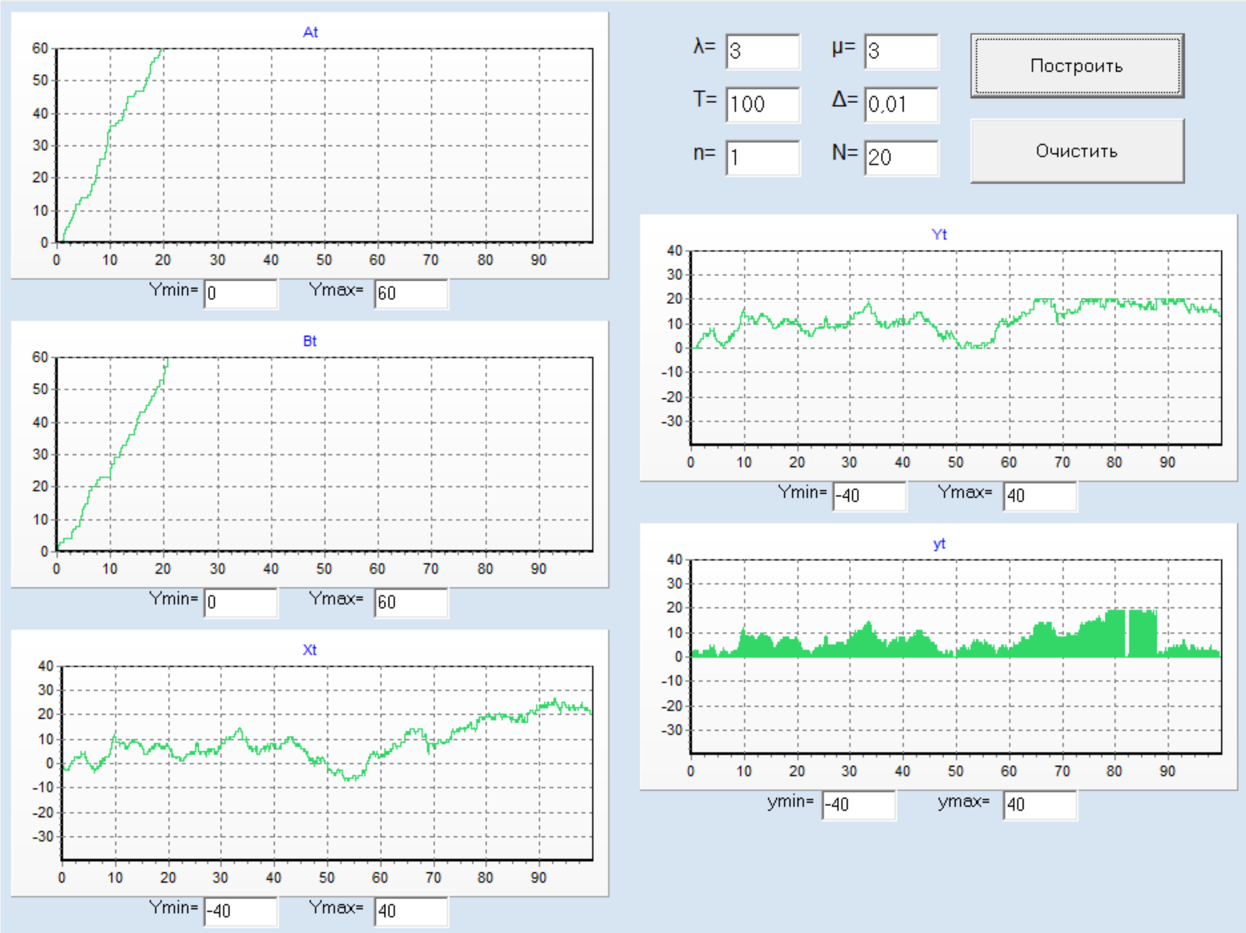

Рис. 1.Компьютерная модель рандомизации процесса с отражением

Заключение

В настоящей работе были построены компьютерные модели рандомизации процессов с отражением от двух границ.

Для построения процессов рандомизации использовались два метода:

1. Процесс с отражением, совершающий скачок вниз, если предыдущий момент скачка достиг заданной границы Nи совершающий скачок вверх, если предыдущий момент скачка оказался равным 0.
2. Рассмотрение дробной части процессаX_t, делённого на число N, с последующим умножением полученной дробной части наN. В результате этого метода предотвращался выход траекторий за пределы заданной границы и если предыдущий момент скачка был равен значению N, происходил «спад в 0».

На рис. 1 показан пример работы программы.

Сравнивая два метода по графикамY_tи y_tна рис. 1, легко видеть, что результатыработы двух методов оказываются «визуально» близки. Работа предполагает дальнейшие исследования как в области проверки адекватности, так и при исследовании отражений от переменных границ.

Список литературы

1. Бутов А.А. *Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие*. Ч. 1: Введение в стохастическое исчисление. Ульяновск, УлГУ, 2016.
2. Бутов А.А., Липцер Р.Ш. Диффузионная аппроксимация с отражением для модели массового обслуживания с автономным прибором// *"Статистика и управление случайными процессами"* (сб. тр. МИАН). М.: Наука, 1989.
3. Бутов А.А., Волков М.А., Санников И.А. *Технология имитационного стохастического моделирования: учебно-методическое пособие.* Ульяновск: УлГУ, 2006.