



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 1, с.83-89.

Поступила: 06.05.2018

Окончательный вариант: 28.05.2018

© УлГУ

УДК 621.3

Математическое моделирование

электрической цепи

Санкин Н. Ю.^{1,*}

[*sankin66@mail.ru](mailto:sankin66@mail.ru)

¹УлГУ, Ульяновск, Россия

Работа посвящена разработке способа расчета электромеханических систем, как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, позволяющему строить, например, переходные процессы в электрической цепи в зависимости от напряжения, исследовать устойчивость работы электромеханических систем

The work is devoted to the development of a method for calculating electromechanical systems, both with concentrated and distributed parameters, which allow constructing, for example, transient processes at any point of the electrical network under any nodal loads as a function of voltage, to investigate the stability of the operation of electromechanical systems in the presence of non-linear elements.

Ключевые слова: сложная электрическая цепь, математическое моделирование

В ряде практически важных задач необходимо охарактеризовать сложную электрическую цепь, когда ее внутреннее строение неизвестно, ограниченным числом параметров [1, 2]. К числу подобных задач, например, относится определение параметров активных и пассивных четырехполюсников [3].

В данной работе рассматривается математическое моделирование электрической цепи с малым активным сопротивлением, содержащей емкости и индуктивности, а также цепи с распределенными параметрами, представляемой в виде последовательности колебательных звеньев, умноженных на дифференцирующее звено, число которых может оказаться значительно меньше, чем число контуров цепи. Методика основана на обработке экспериментальных или теоретических АФЧХ системы [4, 5].

Дифференциальные уравнения сложной электрической цепи в матричном виде записываются следующим образом:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + B \int_0^t i dt = u(t), \quad (1)$$

где i – s -мерный вектор токов системы; s – число контуров; L – матрица индуктивностей; R – матрица сопротивлений; B – матрица коэффициентов емкостных сопротивлений; $u(t)$ – s -мерный вектор напряжений, действующих в контурах системы.

Продифференцируем систему (1) по времени и преобразуем по Лапласу:

$$L(p^2 i - pi_0 - \dot{i}_0) + R(pi - i_0) + Bi = pu - u_0. \quad (2)$$

Здесь i , u – соответственно векторы токов и напряжений, преобразованных по Лапласу; i_0 , u_0 – начальные векторы токов и напряжений; \dot{i}_0 – начальная скорость изменения вектора тока.

Решение уравнения (2) можно записать следующим образом:

$$i = (Lp^2 + Rp + B)^{-1} \cdot (pu - u_0 + Ri_0 + Lpi_0 + Li_0). \quad (3)$$

Рассмотрим приближенное представление решения (3) в виде ряда по собственным функциям однородного уравнения, полагая, что активные сопротивления контуров равны нулю:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + Bi = 0. \quad (4)$$

Будем искать решение (4) в виде:

$$i = A \sin \omega t, \quad (5)$$

где A – вектор амплитуд колебаний токов. Подставив (5) в (4), получим:

$$(-L\omega^2 + B)A = 0. \quad (6)$$

Однородная система алгебраических уравнений (6) имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю:

$$\| -L\omega^2 + B \| = 0. \quad (7)$$

Условие равенства нулю определителя (7) приводит к частотному уравнению n -го порядка относительно ω^2 , которое имеет n корней, равное числу контуров системы. Эта задача по существу является задачей на собственные значения. Задача по нахождению собственных форм колебаний является задачей по нахождению собственных векторов из системы уравнений:

$$(-L\omega_n^2 + B)A_n = 0, \quad (8)$$

где ω_n^2 – квадрат n -й собственной частоты; A_n – вектор амплитуд n -й формы колебаний.

Собственные формы колебаний ортогональны:

$$(LA_m)^T A_n = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|A_m\|^2, & m = n. \end{cases} \quad (9)$$

В выражении (9) величина $\|A_m\| = \sqrt{(LA_m)^T A_m}$ называется энергетической нормой m -й формы колебаний. При этом очевидно, что

$$\omega^2 (LA_m)^T A_m = (BA_m)^T A_m, \quad (BA_m)^T A_m = 0.$$

Будем искать решение продифференцированного по времени уравнения (1) по формам собственных колебаний

$$i = \sum_{m=1}^s \alpha_m(t) A_m, \quad (10)$$

где α_m – неизвестные коэффициенты, являющиеся функциями времени.

Подставляя выражение (10) в уравнение (1), получим:

$$L \sum_{m=1}^s \ddot{\alpha}_m(t) A_m + R \sum_{m=1}^s \dot{\alpha}_m(t) A_m + B \sum_{m=1}^s \alpha_m(t) A_m = \frac{dU}{dt}, \quad (11)$$

Умножим скалярно уравнение (11) на векторы $A_n, n = \overline{1, s}$, воспользовавшись условиями (9):

$$\ddot{\alpha}_n(t) \|A_n\|^2 + \left[R \sum_{m=1}^s \dot{\alpha}_m(t) A_m \right]^T A_n + \omega_n^2 \alpha_n(t) \|A_n\|^2 = \left(\frac{dU}{dt} \right)^T A_n. \quad (12)$$

Если бы матрица R была подобна матрице L или B , то второе слагаемое также упростилось бы, и система разбилась бы на независимые уравнения. Обозначая

$$(RA_n)^T A_n / \|A_n\|^2 = 2s_{nn} \quad \text{и} \quad (RA_m)^T A_n / \|A_n\|^2 = 2s_{mn},$$

запишем систему (12) в виде:

$$\ddot{\alpha}_n(t) + 2s_{nn} \dot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) + \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^s 2s_{mn} \dot{\alpha}_m(t) = \left(\frac{dU}{dt} \right)^T A_n / \|A_n\|^2. \quad (13)$$

Если структуры матрицы R и B близки, то можно пренебречь слагаемыми, содержащими s_{mn} . Тогда вместо (13) получим

$$\ddot{\alpha}_n(t) + 2s_{nn} \dot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) = \left(\frac{dU}{dt} \right)^T A_n / \|A_n\|^2. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (14) по Лапласу при ненулевых начальных условиях и найдем преобразованные коэффициенты $\alpha_n(p)$:

$$\alpha_n(p) = \frac{(pu - u_0 + Ri_0 + Lpi_0)^T A_n}{\omega_n^2 \|A_n\|^2} \cdot \frac{1}{(T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1)}, \quad (15)$$

где $T_{2n}^2 = 1/\omega_n^2$; $T_{1n} = 2s_{nn}/\omega_n^2$.

Подставляя выражение (15) в преобразованное по Лапласу решение (10), найдем:

$$I(p) = \sum_{n=1}^s \frac{k_n [pu - u_0 + Ri_0 + Lpi_0 + Li_0]}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1}, \quad (16)$$

где величины $k_n = A_n^T A_n / (\omega_n^2 \|A_n\|^2)$ образуют матрицу коэффициентов усиления.

Формула (16) является приближенным представлением решения (3) при нулевых начальных условиях и позволяет строить простые математические модели сложных электрических цепей. Для этого, полагая $p = j\omega$, строим АФЧХ, исходя из соотношения (3) при нулевых начальных условиях. Число существенно проявляющих себя витков АФЧХ k соответствует числу членов ряда (16), при этом часто $k < s$, хотя для двух- и трехконтурных цепей $k = s$.

Затем по формулам из работы [69] находим:

$$T_{1n}/T_{2n} = \omega_n/\omega_{nmax} - \omega_{nmax}/\omega_n = \gamma_n, \quad T_{1n} = \gamma_n T_{2n}, \quad (17)$$

где $T_{2n} = 1/\omega_n$ – n -я собственная частота системы, определяется по максимуму вещественной части АФЧХ; ω_{nmax} – частота, соответствующая экстремальному значению мнимой части АФЧХ. Коэффициенты k_n находим по формуле

$$k_n = A_n/T_{2n}, \quad (18)$$

где A_n – размер петли АФЧХ по вещественной оси.

Для примера рассмотрим систему, состоящую из двух контуров (рис. 1). Эта двухконтурная электрическая цепь имеет следующие параметры: $L_1 = 1$ Гн; $L_2 = 0,5$ Гн; $r_1 = 0,2$ Ом; $r_2 = 0,1$ Ом; $c_1 = 0,5$ Ф; $c_2 = 0,25$ Ф.

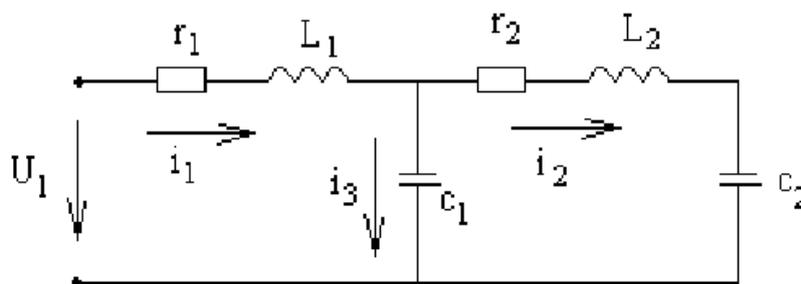


Рис. 1. Двухконтурная цепь

Для нахождения тока i_2 воспользуемся соотношением (3). Положив $p = j\omega$, получим АФЧХ:

$$i_2(p) = W(p) \cdot U_1(p), \quad (19)$$

где $W(p) = \frac{c_1 p}{(T_{11} p^2 + T_{12} p + 1 + k) \cdot (T_{22} p^2 + T_{21} p + 1) - 1}$; $k = \frac{c_1}{c_2}$; $T_{11} = L_2 c_1$;

$$T_{12} = r_2 c_1; \quad T_{22} = L_1 c_1; \quad T_{21} = L_1 c_1.$$

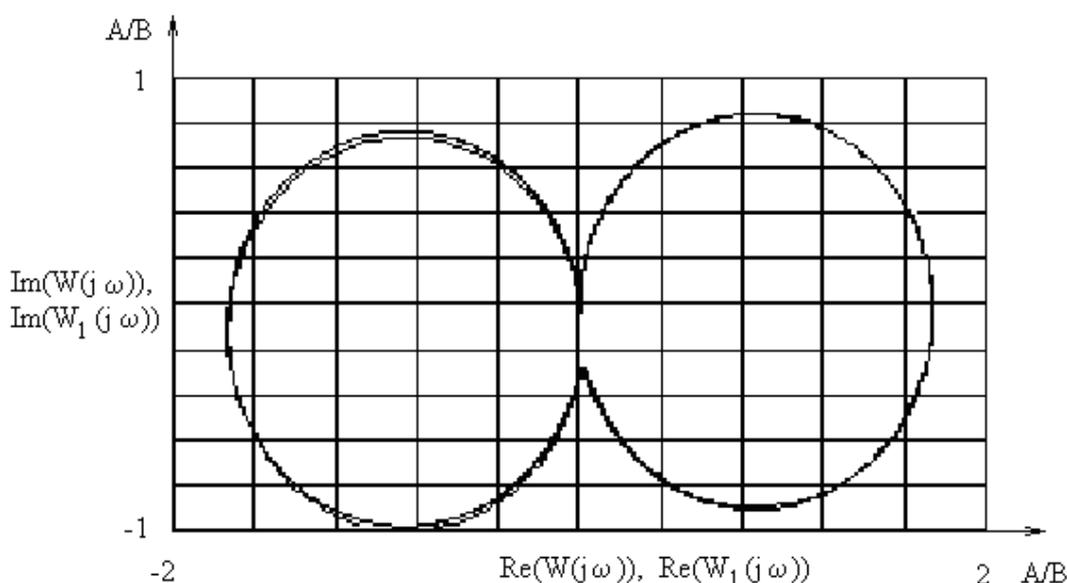


Рис. 2. АФЧХ двухконтурной электрической цепи

АФЧХ двухконтурной электрической цепи показана на рис. 2. По характеристике рис. 2 получаем: $\omega_1 = 1,15 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{1max} = 1,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2 = 3,6 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{2max} = 3,55 \text{ с}^{-1}$; $A_1 = 1,74 \text{ А/В}$; $A_2 = -1,74 \text{ А/В}$.

Для построения математической модели электрической системы, согласно формуле (16), предположим, что каждый виток АФЧХ мало влияет на экстремальные точки ω_{1max} , ω_1 и т. д. Амплитуды A_1 , A_2 и т. д. будем находить приближенно, экстраполируя витки АФЧХ, при этом воспользуемся формулами (17) и (18) для цепи с одним контуром. Тогда

$$W_1(p) = \frac{k_1 p}{(T_{11}^2 p^2 + T_{12} p + 1)} + \frac{k_2 p}{(T_{22}^2 p^2 + T_{21} p + 1)}. \quad (20)$$

На рис. 2 два витка АФЧХ. Следовательно, в ряду (16) необходимо оставить два члена. При этом графики, построенные по формулам (19) и (20), практически совпадают.

Передаточная функция для электромеханических колебательных систем при наличии интегрирующего усилителя в цепи измерения получается умножением $W(j\omega)$ на $1/p$:

$$W(p) = \sum_{n=1}^s \frac{k_n}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

АФЧХ для этого случая изображены на рис. 3, АФЧХ двухконтурной электрической цепи при наличии двух интегрирующих звеньев в цепи измерения показана на рис. 4.

Если в качестве кинематического параметра использовать двойной интеграл от выходного сигнала колебательной системы, то передаточная функция равна

$$W(p) = \sum_n \frac{K_n}{T_{2n}^2 p^2 + T_{1n} p + 1} \cdot \frac{1}{p^2},$$

где постоянные времени определяют по формулам:

$$T_{1n} = \frac{2\sqrt{(2 - 5T_{2n}^2\omega_{nmax}^2 + 2T_{2n}^4\omega_{nmax}^4)(-\omega_{nmax} + T_{2n}^2\omega_{nmax}^3)^2}}{-2T_{2n}^2\omega_{nmax}^4 + 4\omega_{nmax}^2}, T_{2n} = 1/\omega_{1n},$$

ω_{nmax} и ω_n – частоты, соответствующие экстремальным значениям мнимой и вещественной части АФЧХ, построенной по выше приведенной формуле $W(p)$.

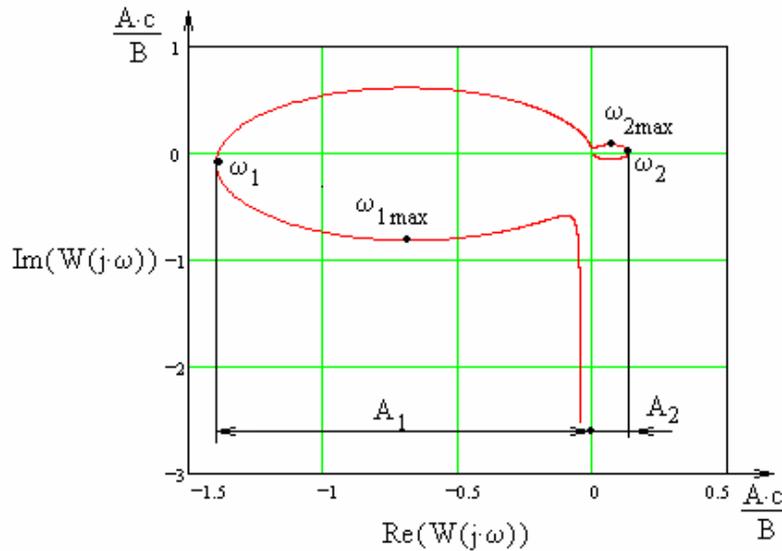


Рис. 3. АФЧХ двухконтурной электрической цепи при наличии интегрирующего звена в цепи измерения

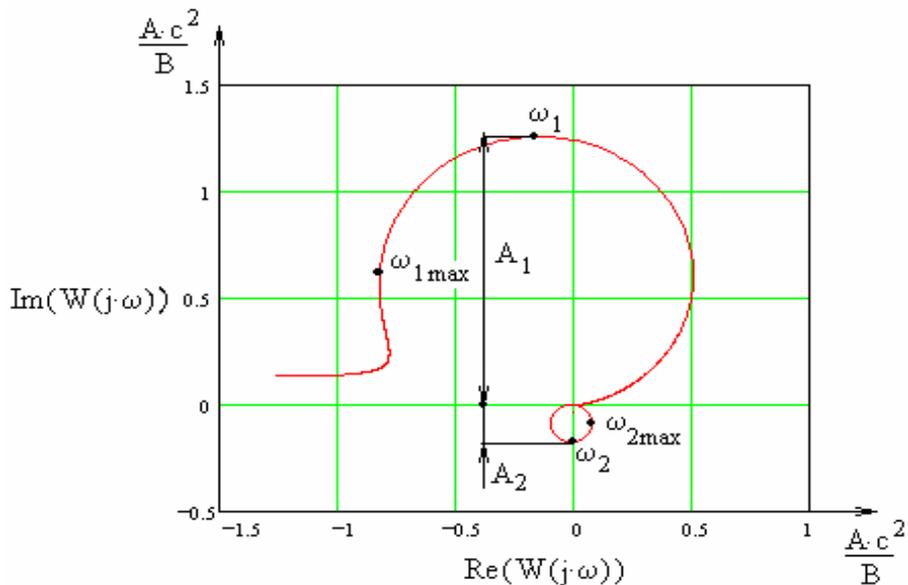


Рис. 4. АФЧХ двухконтурной электрической цепи при наличии двух интегрирующих звеньев в цепи измерения

Коэффициенты усиления находим по формуле $K_n = \pm A_n T_{1n} \omega_n^3$, где A_n – размер петли АФЧХ по мнимой оси; $K_n > 0$, если петля АФЧХ находится выше своей начальной точки, $K_n < 0$, если петля АФЧХ лежит ниже начальной точки.

Относительный коэффициент демпфирования находим по формуле $\gamma = T_1/T_2$.

Для получения переходного процесса может быть использовано дискретное преобразование Фурье. Результат можно получить, осуществив численное интегрирование при $t=0 \dots \infty$ по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (W(j\omega) \cdot e^{j\omega t}) d\omega.$$

Поскольку при учете рассеяния энергии амплитуда частотной характеристики с увеличением частоты стремится к нулю, т. е. высокочастотные составляющие амплитуды с ростом частоты оказывают все меньшее влияние на функцию напряжения, можно ограничиться конкретным верхним значением частоты, найденным экспериментально. Частотный диапазон проще всего оценивается при помощи численного эксперимента и выбирать таким образом, чтобы результат решения не зависел от верхнего предела интегрирования в пределах заданной точности.

Таким образом, разработан способ расчета электромеханических систем, как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, позволяющий строить, например, переходные процессы в электрической цепи при любых узловых нагрузках и любом характере изменения входного напряжения от времени, а также исследовать устойчивость их работы при наличии нелинейных элементов. использован авторами как шаблон. Описаны элементы статьи и стили DOC-файла, необходимые для оформления этих элементов.

Список литературы

1. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей М.: Связь, 1967.
2. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высш. шк., 1985.
3. Веников В. А. Электрические системы: управление переходными режимами электроэнергетических систем / В. А. Веников и др. М.: Высш. шк., 1982.
4. Пирожков С. Л. Математическое моделирование сложных электрических цепей // *Механика и процессы управления: сб. научн. тр.* Ульяновск: УлГТУ, 1998.
5. Санкин Ю. Н. Спектральный метод анализа сложных электрических цепей / Ю. Н. Санкин, С. Л. Пирожков // *Электрические системы и комплексы: Межвуз. сб. научн. тр.; под ред. А. С. Карандаева.* Магнитогорск: МГТУ, 1998, вып. 4, с. 163–168.