



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018. № 1. С. 98-108.

Поступила: 01.02.2018

Окончательный вариант: 05.05.2018

© УлГУ

УДК 519.711.2

## О решении задачи стабилизации линейной системы запаздывающей обратной связью

Токмаков С.В.<sup>1,\*</sup>

[\\*tokmakov007@gmail.com](mailto:tokmakov007@gmail.com)

<sup>1</sup>УлГУ, Ульяновск, Россия

---

Рассмотрена одна из постановок задачи построения обратной связи по выходу, а именно, задача стабилизации для линейной системы дифференциальных второго порядка линейной обратной связью, не зависящей от значений производных искомым функций. В работе изучен метод, основанный на уменьшении требуемой информации о состоянии системы за счет искусственного введения запаздывания в структуру управления. Возможен также учет информационного запаздывания в цепи управления. При этом нахождение параметров управления сводится к решению системы линейных матричных неравенств. Рассматриваемый вид уравнений удобен для описания движений механических систем. Для тестирования рассматриваемой методики изучена классическая задача управления перевернутым маятником, изучено влияние величины запаздывания на стабилизирующие свойства управления, а также проведено сравнение по ряду характеристик с управлением аналогичной структуры, построенным другим методом.

*Ключевые слова:* линейная управляемая система, стабилизация, запаздывание.

---

### Введение

Математическая модель многих механических, биологических, экономических и других процессов описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. В практических задачах целью моделирования часто является решение задачи стабилизации того или иного режима функционирования системы. Для удобства исследования переменные модели часто выбираются таким образом, чтобы этот режим соответствовал нулевому решению дифференциальных уравнений модели. Наиболее универсальной является задача стабилизации с использованием управления в виде обратной связи. В случае, когда все переменные состояния доступны для измерения, может быть сформулирована задача построения обратной связи по состоянию, если же измеряется лишь вектор выхода, то ста-

вится задача управления «по выходу». Задача стабилизации по состоянию изучена гораздо больше, особенно в линейной постановке. Однако на практике возникает вопрос реализации построенного управления. С этой точки зрения актуальной задачей является уменьшение размерности вектора измерения, достаточного для построения регулятора. Во-первых, измерение далеко не всех параметров системы возможно практически осуществить на реальном объекте. Во-вторых, наличие датчиков в контуре управления может внести дополнительные погрешности в систему, поскольку каждый измеритель представляет собой отдельный динамический объект. Пренебрежение соответствующей динамикой может сказаться на адекватности используемой математической модели, а учет переходных процессов в измерителях увеличивает размерность и повышает сложность модели.

Проблема уменьшения размерности вектора, используемого для построения стабилизирующей обратной связи, исследовалась с помощью различных подходов. Важным частным случаем стабилизируемых систем являются механические системы, для которых возникают сложности с оцениванием текущих значений параметров системы (например, текущие значения возмущений параметров деформации) и особенно с оцениванием скоростей. Задача синтеза стабилизирующей обратной связи для системы дифференциальных уравнений второго порядка без использования значений производных активно исследуется в последние десятилетия. В работе [1] представлен обзор современных подходов к решению задачи стабилизации механической системы без измерения скоростей.

В данной работе рассмотрена задача стабилизации для линейной системы дифференциальных второго порядка линейной обратной связью, не зависящей от значений производных искомым функций. К сожалению, использование лишь текущих значений самих функций в структуре обратной связи не позволяет построить управление с нужными свойствами. Однако текущее значение производной можно аппроксимировать, используя два близких значения самой функции. Используя эту идею, можно попытаться на основе известной стабилизирующей обратной связи, зависящей от положений и скоростей системы, построить управление, не зависящее от скоростей, но использующее не текущие (или не только текущие), а предшествующие измеренные значения. Один из вариантов реализации такого подхода – алгоритм, предложенный в [2]. Благодаря линейности рассматриваемой задачи, нахождение параметров стабилизирующего управления сводится к решению системы линейных матричных неравенств (ЛМН).

Применение современных компьютерных технологий при создании систем управления обуславливает привлекательность (там, где это возможно) формализованного подхода к решению задач. Те классы задач, для которых удается однозначно сформулировать алгоритм решения без привлечения эвристической компоненты и элементов творчества, допускают широкое применение вычислительной техники при их решении, что позволяет существенно увеличить их допустимую сложность и размерность, а также снизить требования к квалификации разработчика. Именно такого рода причинами вызвано широкое применение преобразования постановок и способов решения различных задач в форму линейных матричных неравенств и связанных с ними оптимизационных задач. Для до-

вольно широкого класса задач теории управления требуется лишь установить разрешимость ЛМН, без определения полного множества решений. Многие из таких задач могут быть решены с использованием уже готовых программных продуктов, в том числе широко распространенных; в частности, с помощью стандартных инструментов математической среды MatLab, использованных и в данном исследовании.

Апробация рассмотренного метода, изучение его достоинств и недостатков проведены на примере задач стабилизации в описанной выше постановке для перевернутого маятника на подвижном основании. Для синтеза управления используются два «запаздывающих значения» искомой функции, при этом одно из запаздываний может быть нулевым. Изучены некоторые вопросы о влиянии на свойства управления диапазонов запаздывания, проведено сравнение с результатами, полученными другим методом.

## 1. Задача стабилизации для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Нахождение стабилизирующего управления на основе решения ЛМН

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{y}(t) = A_1 y(t) + A_2 \dot{y}(t) + B u(t - h_1), \quad (1.1)$$

где  $t \in R^+ = [0, +\infty)$  - независимая переменная (время),  $y(t) \in R^n$  - вектор, описывающий положение системы,  $\dot{y}(t)$  и  $\ddot{y}(t)$  обозначают первую и вторую производные функции по времени соответственно,  $u(t) \in R^k$  ( $k \leq n$ ) - управляющее воздействие,  $h_1 \geq 0$  - запаздывание в структуре управления. Будем искать управление имеет вид линейной обратной связи с запаздыванием:

$$u(t) = K_1 y(t) + K_2 y(t - h), \quad (1.2)$$

где  $h > 0$ ,  $A_1, A_2 \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times k}$ ,  $K_1, K_2 \in R^{k \times n}$  - постоянные матрицы.

При отсутствии управления система (1.1) имеет нулевое (стационарное) решение. Предположим, что это решение при  $u(t) \equiv 0$  неустойчиво по Ляпунову, и рассмотрим задачу стабилизации в следующей форме: найти матрицы  $K_1, K_2 \in R^{k \times n}$  такие, что нулевое решение системы (1.1)-(1.2) асимптотически устойчиво.

Введем обозначения

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))' = (y(t), \dot{y}(t))', \quad h_2 = h_1 + h$$

(здесь штрих обозначает транспонирование). Тогда система (1.1) примет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} x(t) + \sum_{i=1}^2 K_i x_1(t - h_i). \quad (1.3)$$

Предположим, что пара матриц  $\left( \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \right)$  стабилизируема. Это означает, что существует матрица  $K \in R^{k \times 2n}$  такая, что матрица  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} K$  гурвицева.

Матрица  $K$ , удовлетворяющая такому условию, определяется при этом не единственным образом, и существуют различные способы построения подходящей матрицы. Один из способов, позволяющих найти численно некоторую матрицу  $K$  - решение системы

матричных неравенств  $P > 0$ ,  $(A + BK)'P + P(A + BK) < 0$  (здесь знак  $>$  означает положительную определенность матрицы). Эта система нелинейна относительно неизвестных матриц  $P$  и  $K$ , однако она приводится к линейной. Действительно, умножим второе неравенство справа и слева на  $P^{-1}$  и обозначим  $KP^{-1} = M$ . Тогда система матричных неравенств приводится к виду

$$\begin{cases} P^{-1}A' + M'B' + AP^{-1} + BM < 0, \\ P^{-1} > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

линейному относительно  $P^{-1}$  и  $M$ . Эта система имеет множество решений, одно из которых находится численно средствами Matlab. После этого находим  $K = MP$ .

Пусть  $h_2 > 0$  – заданная постоянная, матрицы  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  – такие, что  $K = (\bar{K}_1, h_2\bar{K}_2)$ .

Предположим, что  $h_1 = O(h_2^2)$ , обозначим  $K_1 = \bar{K}_1 + \bar{K}_2$ ,  $K_2 = -\bar{K}_2$ , и определим также матрицу

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_1 + B(K_1 + K_2) & A_2 - h_2BK_2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Зададим теперь систему матричных неравенств:

$$\begin{aligned} h_2^2 K_2' B' S B K_2 - 4h_2^{-2} S < 0 \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi & \Phi \\ \Phi' & -R_1 & 0 \\ 0 & \Phi' & -4R_2 \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\Phi = D_1 P (0 \ B)'$ ,  $\Phi_1 = D_1' P + P D_1 + \text{diag}\{h_1^2 K_1' R_1 K_1, h_2^4 K_2' R_2 K_2\}$

Справедливо следующее утверждение:

**ТЕОРЕМА 1 [2].** Пусть матрицы  $K_i \in R^{k \times n}$  ( $i = 1, 2$ ) и постоянные  $h_1 \geq 0$ ,  $h_2 > 0$  таковы, что матрица (1.5) гурвицева. Если существуют положительно определенные  $S \in R^{n \times n}$ ,  $P \in R^{2n \times 2n}$ ,  $R_1 \in R^{k \times k}$ ,  $R_2 \in R^{k \times k}$  такие, что неравенства (1.6) выполняются, то нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво. Заметим, что при выполнении прочих условий неравенства (1.6) всегда разрешимы при достаточно малых положительных  $h_2$  и  $h_1 = O(h_2^2)$ .

Для сравнения результатов рассмотрим здесь также способ построения линейного управления с запаздыванием, предложенный в [3] и также применимый к системе (1.1).

Предположим, что положение механической системы определяется  $n$  обобщенными координатами  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ . Кинетическая энергия такой системы представима в виде:  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}$ . Здесь матрица  $A$  размерности  $n \times n$  – положительно определенная.

Движения рассматриваемой системы определяются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = U, \quad (1.7)$$

где  $U$  – управляющая сила.

Предположим, что

$$Q_0 + U(t) = -F_0(t)q(t) + C_0(t)q(t - h),$$

где  $Q_0 = \frac{\partial L}{\partial q}$  – потенциальная сила. Тогда

$$U(t) = -Q_0 - F(t)q(t) + C_0(t)q(t - h) \quad (1.8)$$

Пусть матрица  $A$  не зависит от  $q$ . Тогда система (1.7) примет вид:

$$A\ddot{q} = -F(t)q(t) + C_0(t)q(t - h) \quad (1.9)$$

Имеет место следующий результат:

**ТЕОРЕМА 2** [3]. Пусть матрицы  $F(t) = F_0(t) - C_0(t)$ ,  $C_0(t)$ ,  $C_1(t) = -F(t) + \int_{-h}^0 C_0(t) A^{-1} \int_{t+s}^t F(\tau) d\tau ds$  являются положительно определенными, ограниченными и равномерно непрерывными размерности  $n \times n$ ,  $C_1(t)$  дифференцируема при всех  $t \in \mathbf{R}^+$ , причем справедливы следующие неравенства:

$$\max_{(i,j)} |F_{ij}| \leq f_1 = \text{const}, \max_{(i,j)} |C_{ij}| \leq c_1 = \text{const}, \max_{(i,j)} |A_{ij}| \leq a_1 = \text{const},$$

$$\frac{1}{2h} C_1^{-1} C_0 h - \frac{1}{4h} C_1^{-1} \dot{C}_1 C_1^{-1} A \geq \left( \frac{c_1 a_1 n^3 h^2 (f_1 + c_1)}{2} + \varepsilon_0 \right) E,$$

$$\varepsilon_0 = \text{const} > 0, C_1^{-1} A > 0.$$

Тогда управление вида (1.8) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия  $q = \dot{q} = 0$  системы (1.7).

## 2. Стабилизация перевернутого маятника

Одной из классических тестовых задач в теории управления является перевернутый маятник. В данной работе рассмотрим модель перевернутого маятника, установленного на подвижную платформу (см. рис. 1). Линеаризованная система уравнений движения в приведенных на рисунке обозначениях без учета управления примет вид

$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= 0 \\ ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} &= mgl\theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

а с учетом управляющей силы  $U = F$  преобразуется к следующей нормальной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m+M)g}{Ml} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{Ml} \end{pmatrix} U \quad (2.2)$$

Построим управление для системы (2.2), используя теорему 1. Следуя [2], положим  $U = au$ , где  $a$  - коэффициент усиления управления. В этом случае система (2.2) с учетом запаздывания в структуре управления имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m+M)g}{Ml} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{M} \\ -\frac{a}{Ml} \end{pmatrix} u(t - h_1) \quad (2.3)$$

Для численного решения системы (2.3), (1.2) будем использовать значения параметров из примера в [2]:  $M = 3.9249$ ,  $m = 0.2047$ ,  $l = 0.2302$ ,  $g = 9.81$ ,  $a = 25.83$ ,  $h_2 = 0.02$ .

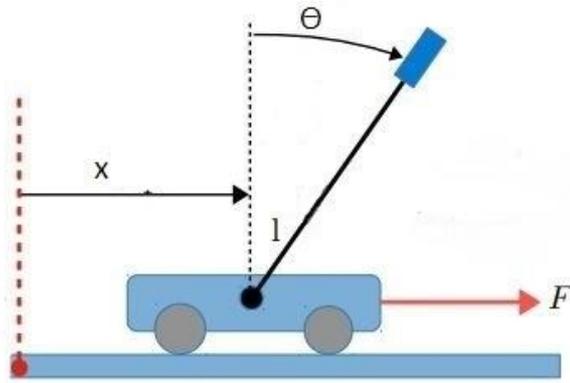


Рис. 2. Перевернутый маятник на подвижном основании.

Решая ЛМН (1.4) и применяя теорему 1, найдем сначала некоторую пару  $\bar{K}_1, h_2 \bar{K}_2$ , а затем вычислим  $K_1, K_2$  для значения  $h_2 = 0.02$ :  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758)$ ,  $K_2 = (-4.1811 \ -6.1603)$ . Решая теперь систему ЛМН из теоремы 1 при фиксированных  $K_1, K_2$  и  $h_2$ , и различных  $h_1 \geq 0$ , выясним диапазон значений  $h_1$ , для которых выполняются условия теоремы 1. В результате получаем, что  $h_1 \in [0, h_1^*]$ , где  $h_1^* \approx 0.01114$ .

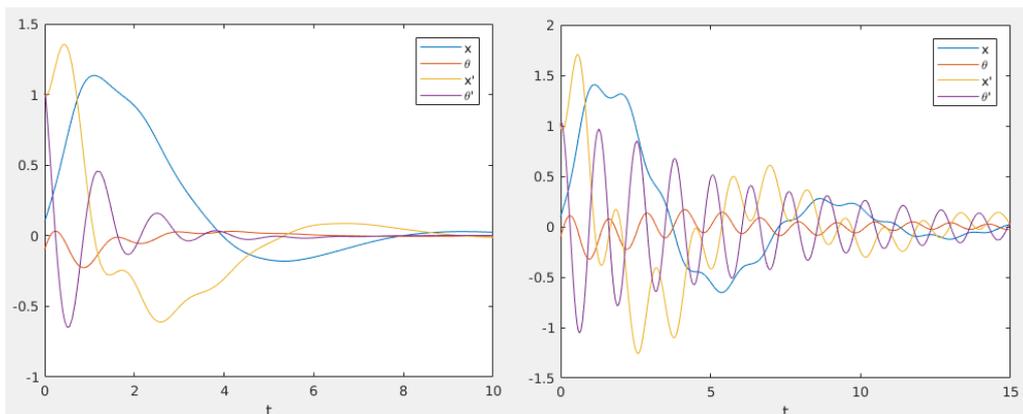
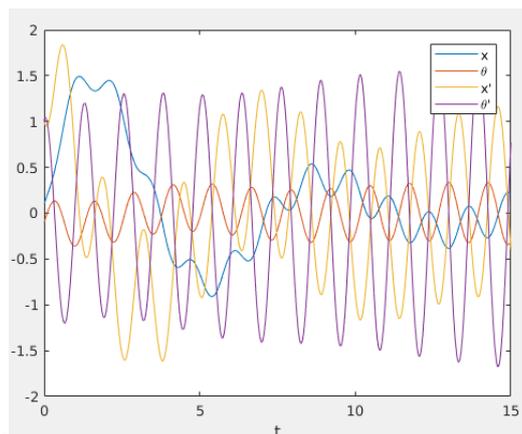


Рис. 2а. Графики решения системы (2.3), (1.2) с параметрами  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758)$ ,  $K_2 = (-4.1811 \ -6.1603)$  и начальными значениями (0.1; -0.1; 1; 1). Значения запаздываний –  $h_1 = 0.001 < h_1^*$ ,  $h_2 = 0.02$  слева;  $h_1 = 0.01 < h_1^*$ ,  $h_2 = 0.02$  справа (условия теоремы 1 выполняются, нулевое решение системы устойчиво). Значение  $h_1^*$  на правом графике близко к  $h_1$ , поэтому скорость сходимости меньше.

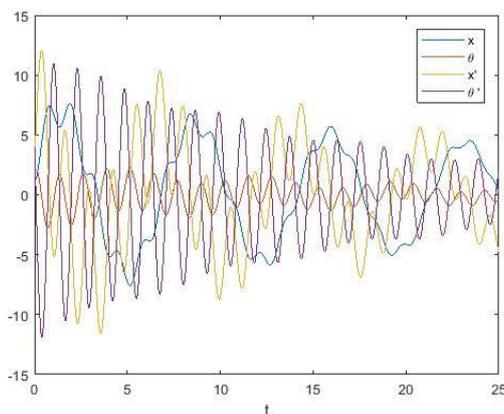
Построение численных решений системы (2.3), (1.2) с выбранными параметрами  $K_1, K_2$  и  $h_2$  и различными  $h_1$  показывает (рис. 2 а-б), что при заданных значениях  $K_1, K_2$  и  $h_2$  полученная оценка  $h_1^*$  довольно точная.

Увеличивая значение  $h_2$  до величины 0.1, получим  $h_1^* \approx 0.03416$ . Заметим, что для обоих полученных значений  $h_2$  имеем  $h_1^* \approx 3h_2^2$ ; при достаточно больших значениях  $h_2$  (больших чем 0.1172), система ЛМН (1.6) не имеет решений ни при каких значениях  $h_1$ . Эти результаты вычислительного эксперимента согласуются с условиями теоремы 1.

Таким образом, при фиксированных значениях коэффициентов управления получаем ограничения на максимальную величину запаздывания в структуре управления, которая зависит от величины  $h_2$ . В свою очередь, множество значений  $h_2$ , при которых ЛМН из условий теоремы 1 имеют решения, ограничено сверху. Насколько точно эта граница, можно оценить на основе анализа численных решений системы. Численные эксперименты показывают, что асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.3), (1.2) сохраняется при увеличении значения  $h_2$  по крайней мере до значения 0.178, однако дальнейший рост  $h_2$  приводит к появлению колебаний нарастающей амплитуды.



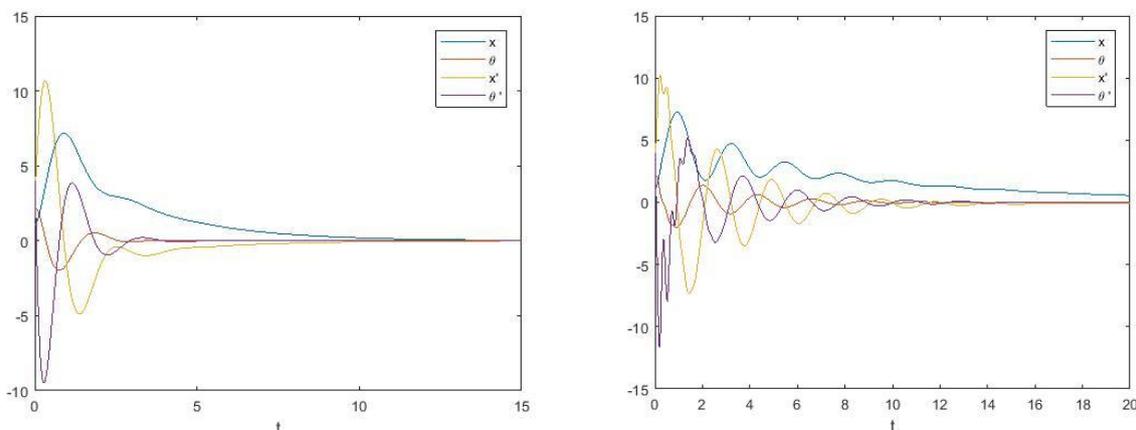
**Рис. 2б.** Графики решения системы (2.3), (1.2) с параметрами  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758)$ ,  $K_2 = (-4.1811 \ -6.1603)$  и начальными значениями (0.1; -0.1; 1; 1). Значения запаздываний  $h_1 = 0.012 > h_1^*$ ,  $h_2 = 0.02$  (условия теоремы 1 не выполняются, нулевое решение системы неустойчиво).



**Рис. 3а.** Графики решения системы (2.3), (1.2) с параметрами  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758)$ ,  $K_2 = (-4.1811 \ -6.1603)$  и начальными значениями (1,2,3,4). Значения запаздываний  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0.001$ .

С другой стороны, уменьшение обоих параметров  $h_1$ ,  $h_2$  до нулевых значений приведет к неустойчивости нулевого решения управляемой системы. При этом численные решения системы (2.3), (1.2) даже при очень малых значениях  $h_2$  и нулевом  $h_1$  продолжают сходиться к нулю. Правда, при этом качество переходного процесса заметно ухудшается, в частности, значительно уменьшается скорость сходимости. Если же при нулевом первом

запаздывании увеличивать  $h_2$ , то сходимость сначала улучшается, а затем вновь начинает ухудшаться (см. рис. 3а-3б). Что касается соответствующих системе (2.3), (1.2) ЛМН (1.6), то они не имеют решений при малых  $h_2$  и нулевом  $h_1$  (по крайней мере при  $h_2 < 10^{-6}$ ).



**Рис. 3б.** Графики решения системы (2.5), (1.2) с параметрами  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758)$ ,  $K_2 = (-4.1811 \ -6.1603)$  и начальными значениями (1,2,3,4). Значения запаздываний  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0.05$  слева,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0.15$  справа.

Построим теперь управление для линейной системы (2.3), используя теорему 2. Для этого добавим управляющую силу вида (1.8) и запишем систему (2.3) в виде (1.9), где

$$A = \begin{pmatrix} m + M & ml \\ ml & ml^2 \end{pmatrix}, q(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}, Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ mgl \theta \end{pmatrix}. \text{ Положим}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}, C_0(t) = C_0 = cA, \text{ где } c > 0, f_1 > 0.$$

Тогда условия теоремы 2 выполняются, если

$$ch^2 - 2 > 0, \tag{2.4}$$

$$m + M - k > 0, \tag{2.5}$$

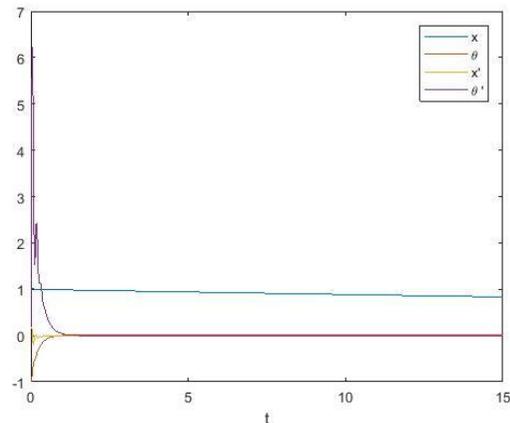
$$Mml^2 - k(ml^2 + m + M - k) > 0, \tag{2.6}$$

где  $k = 4a_1^2 h^2 f_1 (f_1 + ca_1)(ch^2 - 1) > 0$ . Таким образом, если параметры  $c, f_1, h$  удовлетворяют условиям (2.4)-(2.6), то управление (1.8) является стабилизирующим.

Система, замкнутая построенным управлением, может быть записана в виде:

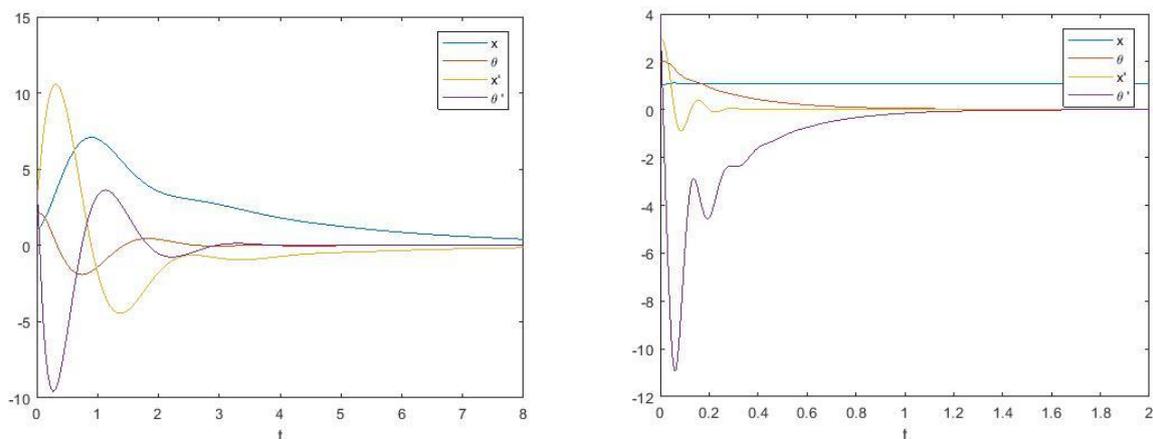
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c - \frac{f_1}{M} & \frac{f_1}{Ml} & 0 & 0 \\ \frac{f_1}{Ml} & -c - \frac{f_1(m+M)}{Mml^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-h) \\ \theta(t-h) \\ \dot{x}(t-h) \\ \dot{\theta}(t-h) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Подберем подходящие значения параметров  $c, f_1, h$  и построим численные решения системы (2.7). Типичные графики представлены на рис.4: угол, угловая скорость и скорость платформы, то есть все переменные состояния системы, кроме координаты платформы, довольно быстро приближаются к нулевым значениям (хотя в начале движения могут значительно возрасти по модулю), отклонение же платформы от состояния покоя убывает очень медленно.

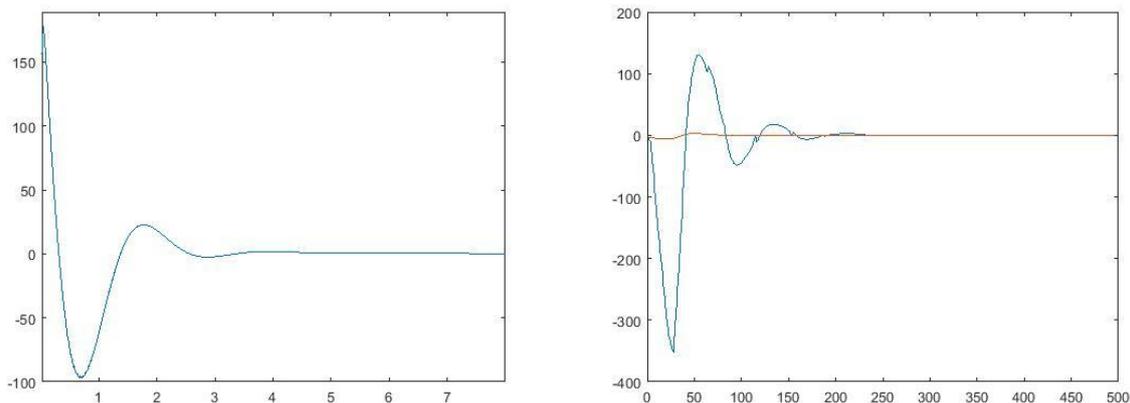


**Рис. 4.** Графики изменения координат и скоростей для системы (2.7) при  $c = 801, f_1 = 1.645, h = 0.05$ . Начальная точка  $(1; -1; 0.4; 0.2)$ .

В работе было проведено сравнение поведения системы (2.3) под действием управлений (1.2) и (1.8) с одинаковыми значениями запаздываний. Заметим, что второе из построенных управлений является, в отличие от первого, векторным (размерность вектора управления по построению совпадает с размерностью вектора обобщенных координат системы). На рис.5 представлены результаты численного моделирования, отражающие типичную картину поведения решений управляемой системы.



**Рис. 5.** Графики решения системы (2.3), (1.2) с параметрами  $K_1 = (4.2479 \ 8.6758), K_2 = (-4.1811 \ -6.1603), h_1 = 0, h_2 = 0.05$  слева. Графики изменения координат и скоростей для системы (2.7) при  $c = 801, f_1 = 1.67, h = 0.05$  справа. Начальная точка  $(1,2,3,4)$ .



**Рис. 6.** Графики изменения скалярного управления и графики изменения компонент векторного управления соответственно, значения параметров те же, что на рис. 5.

Хорошо видно, что все переменные состояния системы, за исключением координаты основания, приближаются к равновесным значениям значительно быстрее под действием векторного управления по сравнению с построенным ранее скалярным, однако векторное поигрывает с точки зрения перерегулирования процесса. Наконец, сравнение управлений с точки зрения затрат демонстрирует преимущество скалярного управления: во-первых, оно требует вычисления и формирования только одного управляющего сигнала, во-вторых, выигрывает с точки зрения максимального абсолютного значения управления. Иллюстрация к полученным результатам представлена на рис. 6. Что касается методики построения управлений, то для скалярного управления она более формализована, поскольку сводится к решению системы ЛМН определенной структуры, не зависящей ни от размерности задачи, ни от конкретных значений параметров. Для векторного управления структура управления, с одной стороны, допускает большую свободу выбора (например, параметры управления могут зависеть от времени), с другой стороны, система неравенств, обеспечивающих устойчивость, не линейна по отношению к искомым параметрам управления и не имеет формального алгоритма решения даже в простых случаях. Отметим, что формализация методики построения, обоснованной теоремой 1, возможна в первую очередь благодаря линейности как исходной системы, так и конструируемого управления.

## Заключение

В работе рассматривается задача стабилизации нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка управлением в виде линейной обратной связи. Предполагается, что система стабилизируема по состоянию. На основе известной обратной связи по состоянию строится обратная связь с запаздыванием, использующая два предшествующих положения системы (или одно текущее и одно предшествующее), но не зависящая от производных.

Для нахождения управления применяется известный результат, позволяющий сформулировать условия относительно параметров управления в виде системы матричных не-

равенств, в которых эти параметры являются неизвестными. При фиксированных значениях запаздываний в управлении матричные неравенства оказываются линейными относительно неизвестных матриц и их численные решения могут быть найдены с использованием известных алгоритмов, реализованных, в частности, в виде встроенных функций в системе MatLab.

Рассмотренный метод позволил формализовать и программно реализовать алгоритм построения стабилизирующего управления заданной структуры при достаточно малых значениях запаздывания. В работе алгоритм реализован на примере классической задачи стабилизации перевернутого маятника. Получены некоторые оценки для диапазонов допустимых запаздываний при заданных значениях коэффициентов усиления, исследованы численные решения замкнутой системы дифференциальных уравнений, подтверждающие эффективность используемого метода. На этом же примере проводится сравнение с управлением, построенным другим методом (также использующем предыдущие значения координат системы для обратной связи).

### Список литературы

1. Андреев А.С., Перегудова О.А. Синтез управления двухзвенным манипулятором без измерения скоростей // *Автоматизация процессов управления*, № 4 (42), 2015, с.81-89.
2. Fridman E., Shaikhet L. E. Delay-induced stability of vector second-order systems via simple Lyapunov functionals // *Automatica*, 74 (2016), p.288–296.
3. Павликов С. В., Исавнин А. Г. О стабилизации управляющей механической системы с запаздывающей обратной связью // *Вестник ВГУ, сер.: Физика. Математика*, 2014, № 1, с.139-146.