



Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 2, с. 15-20.

Поступила: 10.06.2018

Окончательный вариант: 21.09.2018

© УлГУ

УДК 51.76+519.21

Математическая и компьютерная модель циркадных ритмов измерений артериального давления

Бутов А.А.^{1, *}, Веренцова О.В.¹

* butovaa@ulsu.ru

¹УлГУ, Ульяновск, Россия

В работе представлена математическая и компьютерная модель циркадных ритмов измерений артериального давления, а именно модель нормального суточного артериального давления, артериального давления при стрессе и инфаркте.

Ключевые слова: артериальное давление, циркадные ритмы, пуассоновский процесс.

Введение

В настоящее время математическое и компьютерное имитационное моделирование широко используется в биологии и медицине как актуальный и эффективный метод решения прикладных задач, для которых классические методы трудно применимы, малоэффективны или требуют высоких затрат ресурсов.

В качестве объекта исследования рассматриваются процессы изменения артериального давления (АД). Программа позволяет исследовать нормальное суточное АД, а также АД при стрессе и инфаркте.

Приведем основные определения из медицины:

Артериальное давление – давление, оказываемое кровью на стенки артерий, измеряется в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.).

Верхняя граница (систолическое артериальное давление) – давление, оказываемое при выталкивании крови в артерии из сердца.

Нижняя граница (диастолическое артериальное давление) – давление, оказываемое при расслаблении сердца.

Стресс – реакции организма человека на внешний раздражитель.

Инфаркт миокарда – поражение сердечной мышцы из-за недостаточного его кровоснабжения, вследствие закупорки атеросклеротической бляшкой артерии сердца.

1. Математическая модель

Рассмотрим на стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ непрерывный случайный процесс $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ – процесс изменения артериального давления. Этот процесс можно рассмотреть как процесс изменения систолического или диастолического артериального давления путем изменения начальных параметров. Траектории процесса X описываются следующим стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = dY_t + \mu(Y_t - X_t)dt + \delta dW_t \quad (1)$$

где Y_t – процесс, показывающий ожидаемое значение артериального давления в момент времени t , t – время, измеряемое в сутках, μ – коэффициент стремления к значению процесса Y_t , δ – коэффициент диффузии.

$W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ – стандартный винеровский процесс.

Для моделирования процесса Y_t были взяты результаты суточного мониторинга артериального давления (СМАД). Из каждого измерения систолического артериального давления было вычтено среднесуточное систолическое давление. Далее для каждого измерения было получено среднее значение, т.е. получена суточная амплитуда систолического артериального давления (см. рис. 1).

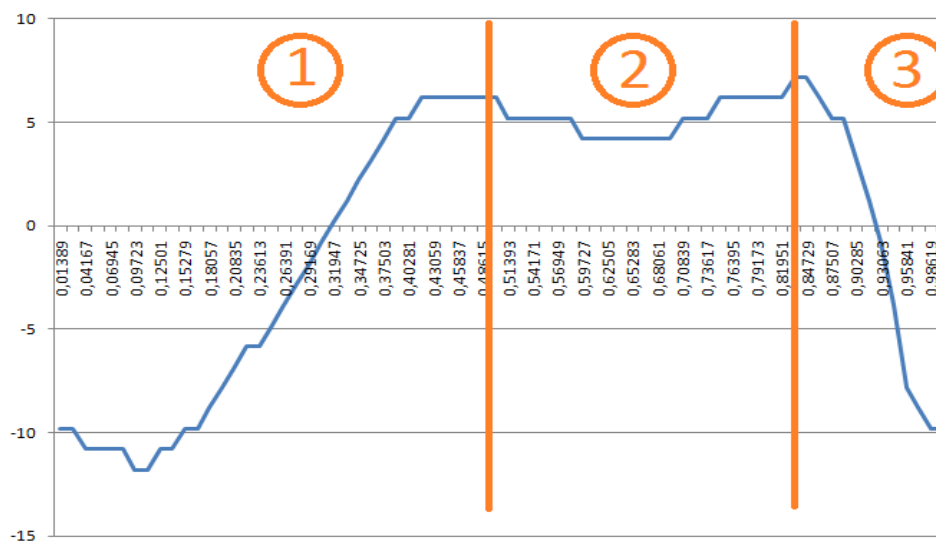


Рис. 1. Суточная амплитуда систолического артериального давления.

Визуально изменение давление было разделено на три части: возрастание, удержание, спад (см. рис. 1), обозначено цифрами 1, 2 и 3 соответственно.

Для каждой из этих частей была применена полиномиальная аппроксимация, и получена система уравнений, описывающая изменение артериального давления в течение суток.

$$\begin{cases} Y_t = \tilde{Y} - \sigma(605t^3 + 516.1t^2 - 76t - 8.3), & 0 \leq t \leq 0.44448 \\ Y_t = \tilde{Y} + \sigma(-17.3t^3 + 102.2t^2 - 108.5t + 36.6), & 0.44448 < t \leq 0.84729 \\ Y_t = \tilde{Y} + \sigma(12279.1t^3 - 34264.1t^2 + 31695.4t - 9718.5), & 0.84729 < t < 1 \end{cases} \quad (2)$$

где \tilde{Y} – среднесуточное значение артериального давления, σ - коэффициент изменчивости артериального давления в течение суток.

Для стрессовой ситуации дополним стохастическое дифференциальное уравнение (1):

$$dX_t = dY_t + \mu(Y_t - X_t)dt + \delta dW_t + (\omega + Y_t - X_t)I(d\pi_t > 0), \quad (3)$$

где μ – коэффициент стремления к значению процесса Y_t , ω - случайная величина из нормального распределения с математическим ожиданием a и дисперсией D (характеризует величину, на которую возрастет артериальное давление при стрессовой ситуации), $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ , отвечающий за наступление стрессовой ситуации.

При осложнении инфаркта миокарда может развиваться кардиогенный шок, клиническим проявлением которого является артериальная гипотензия, при которой систолическое артериальное давление может упасть на 30 мм рт. ст. от нормального. Рассмотрим именно такой случай и дополним стохастическое дифференциальное уравнение (1):

$$dX_t = dY_t + \mu(Y_t - \omega I(\pi_t > 0) - X_t)dt + \delta dW_t, \quad (4)$$

где ω - случайная величина из нормального распределения с математическим ожиданием a и дисперсией D (характеризует величину, на которую упадет артериальное давление при инфаркте миокарда), $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ , первый скачек которого отвечает за наступление инфаркта.

2. Компьютерная модель

Построена компьютерная модель изменения артериального давления при помощи уравнений (1)-(4).

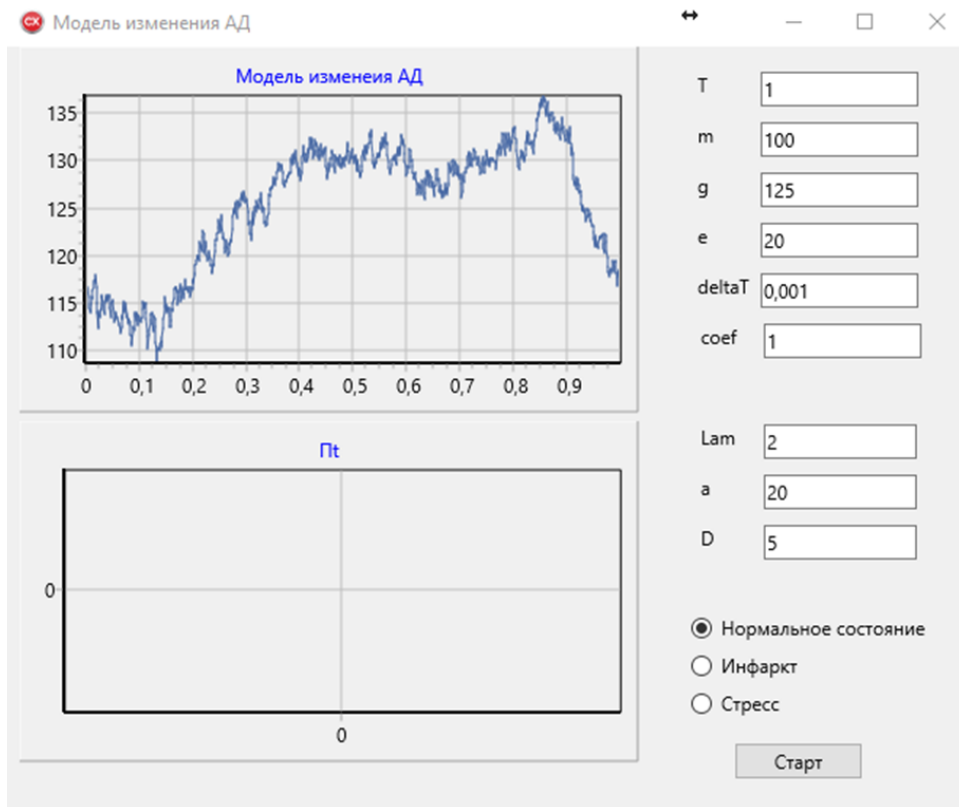


Рис. 2. График процесса изменения артериального давления при нормальном состоянии и $T=1$ день, $\mu=100$, $\bar{Y}=125$ мм рт.ст, $\delta=20$, $\Delta t=0.001$, $\sigma=1$.

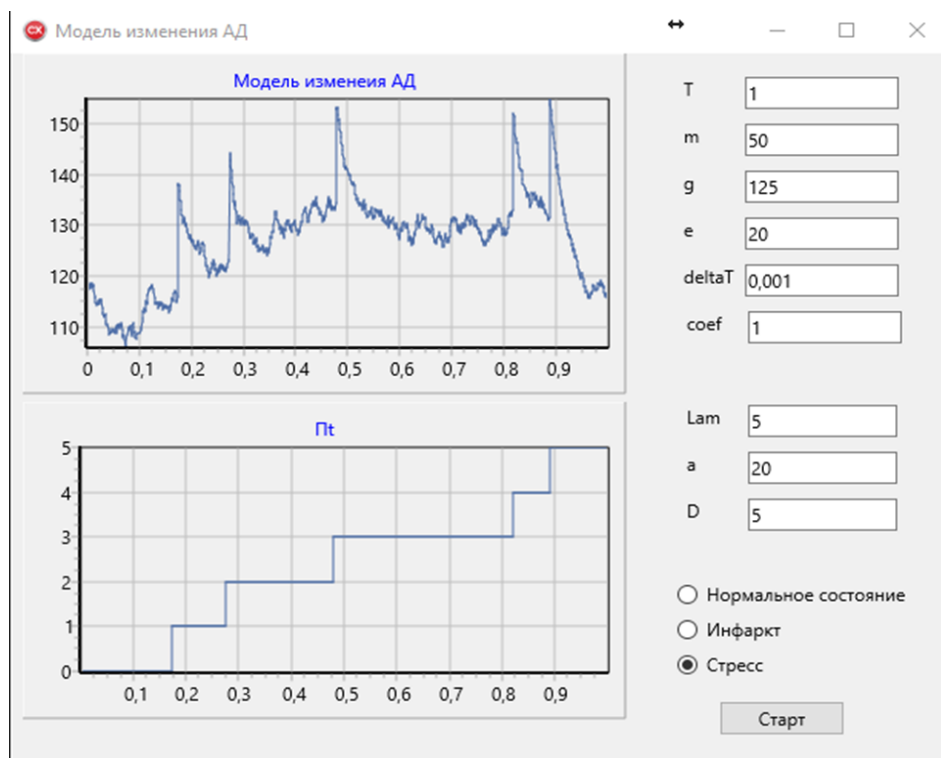


Рис. 3. График процесса изменения артериального давления при стрессе и $T=1$ день, $\mu=50$, $\bar{Y}=125$ мм рт.ст, $\delta=20$, $\Delta t=0.001$, $\sigma=1$, $\lambda=5$, $a=20$, $D=5$.

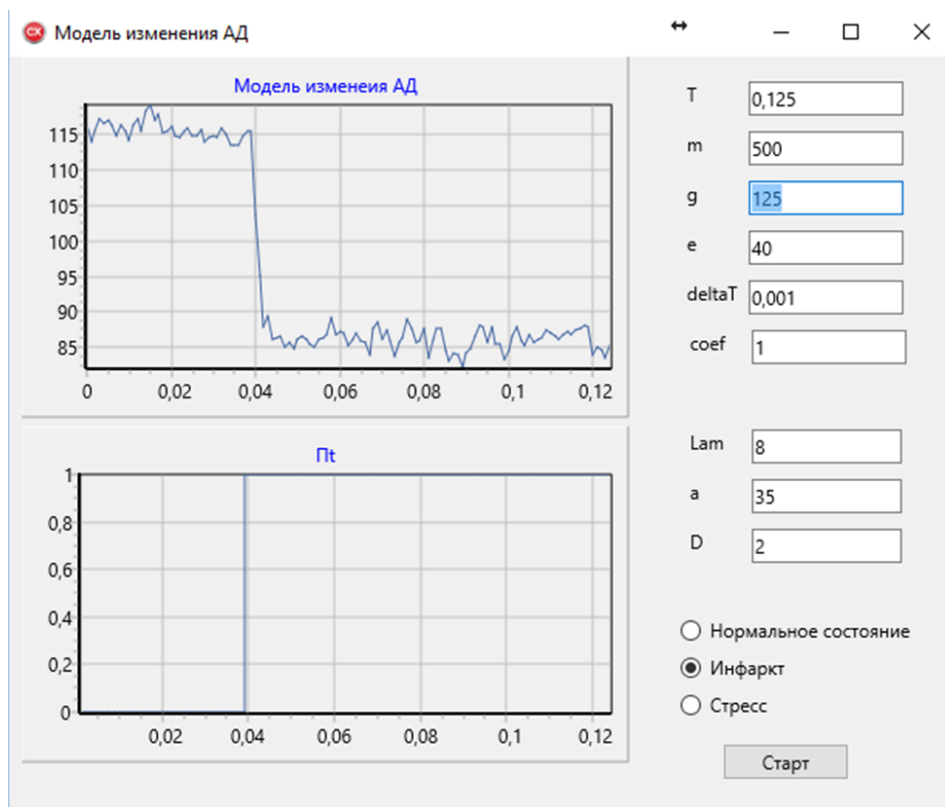


Рис. 4. График процесса изменения артериального давления при инфаркте миокарда и $T=0.125$ (3 часа), $\mu=500$, $\bar{Y}=125$ мм рт.ст., $\delta=40$, $\Delta t=0.001$, $\sigma=1$, $\lambda=8$, $a=35$, $D=2$.

3. Анализ модели

Для начала рассмотрим характеристики процесса при нормальном состоянии организма, параметры, использованные для моделирования процесса можно увидеть на рис. 2. Максимальная плотность наблюдается около среднего. При этом выборочное среднее ~ 125 , минимум ~ 109 , максимум ~ 137 , размах ~ 28 . Такие характеристики говорят нам, что состояние человека не вызывает никаких опасений.

Рассмотрим характеристики процесса при воздействии стресса на организм, параметры, использованные для моделирования процесса можно увидеть на рис. 3. Максимальная плотность наблюдается около среднего. При этом выборочное среднее ~ 127 , минимум ~ 106 , максимум ~ 155 , размах ~ 49 . Такие характеристики говорят, что перед нами человек с кратковременным повышением давления при возникновении стрессовой ситуации, но его состояние не вызывает никаких опасений.

И в заключении рассмотрим характеристики процесса при возникновении инфаркта миокарда, параметры, использованные для моделирования процесса можно увидеть на рис. 4. Максимальные плотности наблюдаются около двух эпицентров, что сразу говорит о тяжелых проблемах. При этом выборочное среднее ~ 96 , минимум ~ 82 , максимум ~ 119 , размах ~ 37 . Такие характеристики говорят нам, что у человека с нормальным давлением

произошло резкое уменьшение давления на ~ 30 мм рт. ст., что является критическим состоянием организма

Список литературы

1. Дильман В.М. *Большие биологические часы (введение в интегральную медицину)*. 1982.
2. Бутов А.А., Волков М.А., Санников И.А. *Технология имитационного стохастического моделирования: учебно-методическое пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2006.
3. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов: учебное пособие*. Ульяновск: УлГУ, 2009.
4. Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы*. Москва: издательство «Советское радио», 1977.
5. *Большой медицинский словарь*. Режим доступа: <http://medslv.ru> (дата обращения 01.06.2018).