Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018. № 2. с.21-23.

Поступила: 28.09.2018
Окончательный вариант: 30.10.2018

УДК 51.76+519.21

Методы имитационного моделирования мультивариантных процессов

Бутов А.А.[1,*], Карева П.В.[1]

[*]butovaa@ulsu.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

В данной работе представлена математическая и компьютерная модель мультивариантного процесса в форме решения интегрального стохастического уравнения. Данная форма представления мультивариантных процессов удобна и для аналитических исследований, и для задач имитационного компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *точечный процесс, мультивариантный процесс, случайный процесс, имитационное моделирование, случайные моменты.*

Во многих областях техники и естественных наук возникают задачи, которые требуют описания последовательности событий, происходящих в отдельные моменты времени или в отдельных точках пространства. В простейшем одномерном случае последовательность таких случайных событий можно характеризовать случайными моментами времени их появления t_1, t_2, $t_3, \ldots,$ на временной оси t. Такую последовательность событий называют случайным точечным процессом.

Точечные процессы являются одними из самых изучаемых процессов в природе. Они возникают как в теоретических задачах, так и в приложениях теории вероятностей. Точечный процесс может быть, как считающим, так и мультивариантным.

В данной работе будут рассматриваться мультивариантные процессы.

Точечным процессом $V=(V_t)_{t\geq 0}$ на некотором стохастическом базисе $\mathcal{B}$ называется неубывающий процесс с $V_0 \in N^0=\{0,1,2,\ldots\}$, кусочно-постоянными траекториями, допускающий только единичные скачки $\Delta V_t = V_t - V_{t-} \in \{0;1\}$, и, принимающий значения только из $N^0=\{0,1,2,\ldots\}$.

Процесс $X_t = (\pi_t)^2$ не является точечным, поскольку совершает не только единичные скачки (скачки равны $\Delta X_t = (2\pi_{t-}+1)\cdot\Delta\pi_t$, и в случае $\Delta\pi_{t-}\neq 0$ и $\Delta\pi_t = 1$, очевидно $\Delta X_t > 1$). Случайный процесс, совершающий скачки в случайные моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_k, \ldots$ подобно точечному процессу, но не единичного размера, а на некоторые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots$ и называется мультивариантным процессом.

Далее рассмотрим определение данного процесса.

Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots\}$ - последовательность случайных величин на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. На стохастическом базисе B определена строго монотонная последовательность моментов остановки, то есть, последовательность конечных Марковских моментов $\{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_k, \ldots\}$ такая, что P - п.н. $0 < \tau_1$, $\tau_1 < \tau_2$, и для всех $k \geq 1$ выполняются неравенства $\tau_k < \tau_{k+1}$. Тогда пусть $\forall k \geq 1$ случайные величины ξ_k являются $\mathcal{F}_{\tau_k}$ - измеримыми. Тогда мультивариантным точечным процессом (мультивариантным процессом) называется последовательность

$$(\tau_k, \xi_k)_{k\geq 1}. \tag{1}$$

Стоит заметить, что, в качестве некого мультивариантного процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ (обобщающего строгое понятие точечного считающего) подразумевается решение следующего интегрального стохастического уравнения:

$$X_t = X_0 - \int_0^t (\xi_{(1+N_{s-})} - X_{s-}) dN_s. \tag{2}$$

где точечный считающий процесс $N = (N_t)_{t\geq 0}$ имеет свои скачки $\{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_k, \ldots\}$

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I\{\tau_k \leq t\}, \tag{3}$$

и, соответственно, $\forall k \geq 1$

$$\tau_k = \inf\{t : t \geq 0, N_t \geq k\} \tag{4}$$

Уравнение (1) может рассматриваться как интегральное, типа Лебега-Стилтьеса с соответствующим определением интеграла как суммы:

$$X_t = X_0 - \sum_{0<s\leq t} (\xi_{(1+N_{s-})} - X_{s-}) \Delta N_s, \tag{5}$$

где скачок считающего процесса равен $\Delta N_t = N_t$ - N_{t-}.

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \mathrm{I}\{\tau_k \leq t\} \tag{6}$$

Данная форма представления мультивариантных процессов удобна и для аналитических исследований, и для задач имитационного компьютерного моделирования.

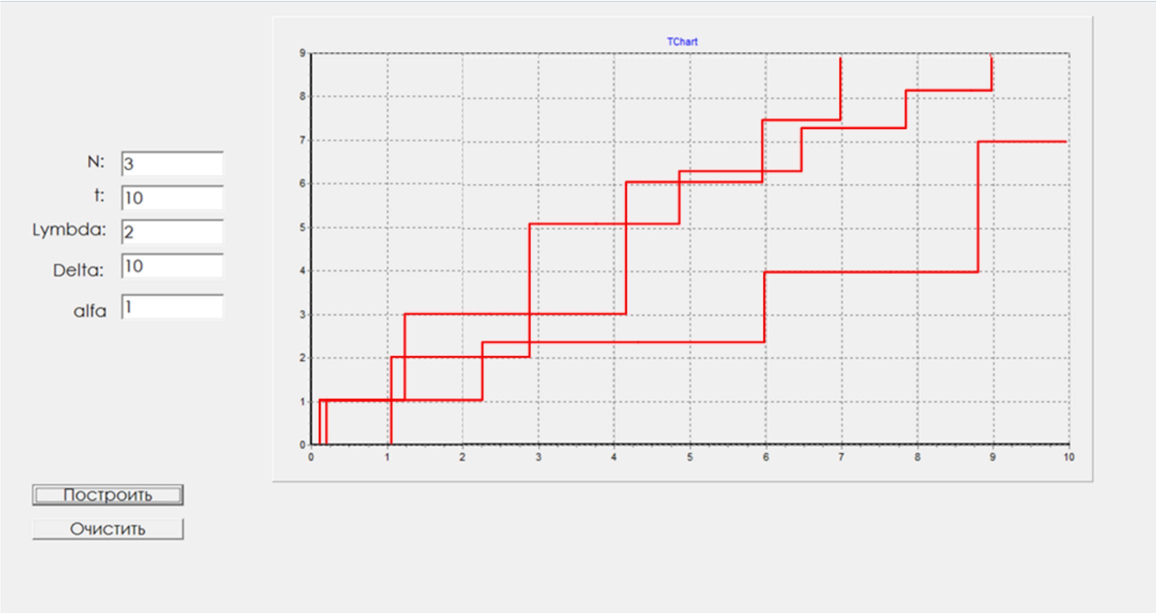

Рис. 1. Мультивариантный процесс для трех траекторий с параметром $\boldsymbol{\lambda = 2}$

Список литературы

1. Бутов А.А., Волков М.А., Санников И.А. *Технология имитационного стохастического моделирования:* учебно-методическое пособие. Ульяновск: УлГУ, 2006.
2. Бутов А.А., Раводин К.О. *Теория случайных процессов*: учебное пособие / А.А.Бутов, К.О.Раводин. Ульяновск: УлГУ, 2009.
3. Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы* / В.И.Тихонов, М.А.Миронов. — Москва: издательство «Советское радио», 1977.
4. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* / Перевод с пересмотренного третьего английского издания Ю.В. Прохорова с предисловием А.Н. Колмогорова. В 2-х томах. Т. 1: Пер.с англ. М.: Мир, 1984.