Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 2, с. 41-51.

Поступила: 12.12.2018
Окончательный вариант: 23.12.2018

УДК 517.929.4

Анализ устойчивости нелинейных систем с запаздыванием на основе их специального представления

Седова Н.О. [1,*]

[*] nata-sedova@yandex.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

Рассматриваются методы исследования устойчивости нелинейных систем с запаздыванием, основанные на представлении правой части системы в виде выпуклой комбинации линейных систем и использовании квадратичных функций Ляпунова.

Ключевые слова*: устойчивость, нелинейная система с запаздыванием, квадратичная функция Ляпунова*

Введение

Одна из сложностей анализа математических моделей состоит в том, что большинство реальных процессов и явлений являются нелинейными, в то время как большинство существующих методов анализа рассчитаны на линейные системы; что касается нелинейной теории, то она часто оказывается недостаточной или трудно применимой при решении практических задач. Поэтому различные методы сведения нелинейной задачи к линейной получают широкое распространение в современном математическом моделировании. В ряде задач управления изучаемые нелинейные явления оказывается удобно описывать с помощью нечетких систем Такаги–Сугено (ТС-систем) [1]. Нечеткие множества и правила нечеткого вывода здесь используются для описания глобальной нелинейной системы в терминах множества локальных линейных систем, гладко связанных между собой посредством функций нечеткой принадлежности. Такой метод моделирования предлагает альтернативный подход к описанию сложных нелинейных систем. Одним из преимуществ этого подхода является возможность применения широкого спектра линейных методов к анализу различных свойств нелинейной динамической системы, в первую очередь устойчивости, на основе ее представления в виде ТС-модели.

Вопрос о вариантах такого представления, а также задача об устойчивости и управления для полученной системы активно изучались для случая, когда исходная система описывается обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями. В последнее десятилетие появились публикации о результатах исследования устойчивости для систем Такаги–Сугено с запаздыванием.

Под устойчивостью системы будем понимать традиционную устойчивость по Ляпунову ее положения равновесия, соответствующего нулевому решению. Пусть непрерывные функции $\mu_i(x): R^n \to [0,1]$, $i = 1,\ldots, p$, удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x) = 1$. Рассмотрим в ограниченной области пространства $D \subset R^n$ (предполагаем, что $0 \in D$) непрерывную вектор-функцию $f(x)$, такую что $f(0)=0$. Сумма $\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x) A_i x$ может в области D представлять заданную вектор-функцию $f(x)$ точно или приближенно. Первый случай всегда имеет место, если существует представление $f(x)=A(x)x$ с непрерывными в окрестности нуля компонентами матрицы $A(x)$ (заметим, что такое представление в общем случае не единственно) [1]. Известно также несколько способов приближенного представления – если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным в D, то такое представление можно построить с любой наперед заданной точностью (см. например [1,2]).

С распространением методов нечеткой логики в математическом моделировании указанное представление получило соответствующую интерпретацию, поскольку свойства функций $\mu_i(x)$ позволяют трактовать их как функции принадлежности нечетким множествам [3]. Каждому нечеткому множеству соответствует нечеткое «ЕСЛИ... ТО...»-*правило*, описывающее локальное поведение системы. При этом каждое правило характеризуется «четким» выводом из нечетких предпосылок. Другой особенностью ТС-моделей является линейное описание локальной динамики системы в консеквентной части каждого правила.

Например, для системы ОДУ вида $\dot{x} = f(x)$ i-ое правило (основанное на указанном представлении правой части) имеет вид: ЕСЛИ $x \in M_i$ ТО $\dot{x} = A_i x$, где M_i – нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_i(x)$. Линейные уравнения в консеквентной части называются «вершинными» или «подсистемами». Более компактная эквивалентная запись такой системы имеет вид $\dot{x} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x) A_i x$, где p – количество правил.

Таким образом, нечеткая модель процесса может быть построена не только в результате идентификации с использованием численной информации, но и на основе аналитического описания, что может оказаться более удобным для систем с известной динамикой. Преимущество использования нечетких продукционных правил в том, что они позволяет описать исходную функцию на качественном уровне, получить ее *интерпретируемую модель*. Другим мотивом рассмотрения нечеткой модели является тот факт, что построенные на основе этой модели «нечеткие» регуляторы во многих случаях демонстрируют преимущества по сравнению с «обычными», в частности, оказываются менее чувствительными к параметрическим возмущениям [1,4]. Кроме того, линейность подсистем, возникающих в правилах, позволяет привлечь средства линейной теории для синтеза регулятора, что делает алгоритм этого синтеза более конструктивным и зачастую сводящимся к рутинной вычислительной процедуре.

Успехи использования нечетких систем Такаги–Сугено в задачах устойчивости и управления для систем, описываемых ОДУ, привели к многочисленным исследованиям возможностей применения аналогичного подхода для систем с запаздыванием. При этом самым активно изучаемым и применяемым методом анализа и синтеза (как и для ОДУ) остается прямой метод Ляпунова (большой перечень публикаций на эту тему приведен, например, в обзоре [4]). Схема исследования в большинстве публикаций она и та же: выбирается квадратичная функция $V_0(x) = x^T Px$ либо квадратичный функционал (функционал Ляпунова–Красовского) той или иной структуры, так что неизвестными параметрами управления оказываются несколько постоянных матриц, а достаточные условия асимптотической устойчивости сводятся к системе линейных матричных неравенств (ЛМН). Поскольку современные алгоритмы выпуклой оптимизации и их доступные компьютерные реализации позволяют эффективно решать ЛМН [5], сведение задачи к ЛМН в настоящее время часто фактически отождествляется с ее решением. Однако система ЛМН может и не иметь решения, особенно учитывая специфику задачи: количество таких неравенств пропорционально квадрату количества слагаемых в сумме (правил нечеткой модели), и может быть довольно значительным. Поэтому оправданы усилия, направленные на «уменьшение консервативности» получаемых неравенств. Один из путей – изменить класс функций Ляпунова. Исследования в этом направлении привели к разработке нескольких подходов: 1) применение кусочно-квадратичных (переключаемых) функций. Позволяет ослабить условия устойчивости, однако задача стабилизации непрерывной системы приводит к билинейным матричным неравенствам, алгоритмов решения которых в общем случае не существует; 2) нечеткие функции Ляпунова, зависящие от функций $\mu_i(x)$. В этом случае условия устойчивости зависят от производных этих функций, нарушается выпуклость задачи оптимизации, и, следовательно, как и в первом случае, возникают трудности с эффективными способами ее решения. Для устранения указанных недостатков в последнее десятилетие предложено несколько решений. Общей особенностью полученных в этом направлении результатов является усложнение структуры управления в задаче стабилизации (при этом оно теряет непосредственную нечеткую интерпретацию и не может непосредственно применяться к нечетким системам со стандартными правилами фаззификации-дефаззификации). Другой подход – использование модифицированных, более гибких условий устойчивости в качестве основы для анализа ТС-систем. В результате получаемые ЛМН получаются, вообще говоря, менее консервативными. Некоторые идеи развития такого подхода будут предметом обсуждения данной работы.

Далее для краткости будем называть устойчивой систему дифференциальных уравнений с асимптотически устойчивым (в смысле Ляпунова) нулевым решением.

Основные результаты

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x(t), x(t-\tau(t))(A_i x(t) + A_{id} x(t-\tau(t))) \tag{1}$$

Здесь $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $x(t) \in D$, $D \subset R^n$ – множество, содержащее начало координат в качестве внутренней точки, $0 \le \tau(t) \le r$ – в общем случае переменное, кусочно непрерывное (ограниченное) запаздывание (тождественно не равное нулю), $r > 0$ - постоянное значение, характеризующее наибольшую величину запаздывания; A_i, A_{id} - постоянные матрицы размера $n \times n$; $\mu_i : D \times D \to [0,1]$ – непрерывные функции. Заметим, что аргументы функций $\mu_i(.)$ выбраны из соображения, что в случае точного или приближенного представления правой части системы $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)))$ ($f(x,y) : D \times D \to R^n$, $f(0,0) = 0$) в виде выпуклой комбинации линейных функций получается система вида (1). В общем случае функции $\mu_i(.)$ могут зависеть от заданных величин $z_1, \ldots z_k$, которые могут быть функциями времени и (или) состояния системы; это не влияет на большинство приведенных далее результатов.

Отметим, что в последние десятилетия во многих работах рассматриваются также варианты этой системы с несколькими слагаемыми, содержащими различные запаздывания, с добавлением неопределенностей в матрицы системы и возмущений – такая модификация системы не влияет на применяемую методику, а лишь увеличивает количество параметров системы и усложняет получающиеся ЛМН (см. например [6-8]). Полученные в большинстве работ условия устойчивости означают, что при нулевом запаздывании система устойчива, а переменное запаздывание «медленно изменяющееся», так что $|\dot{\tau}(t)| \le d < 1$.

Используем следующие традиционные для уравнений с запаздыванием обозначения. Обозначим x_t элемент (банахова) пространства $C = C([-r,0], R^n)$ с супремум-нормой $\|\cdot\|$, определяемый формулой $x_t(s) = x(t+s)$ для $s \in [-r,0]$. В сделанных предположениях система (1) имеет единственное решение для любой начальной точки $t_0 \in R^+$, $\varphi_0 \in C$. Это решение, обозначаемое $x(t; t_0, \varphi_0)$, определено на некотором интервале $[t_0 - r, T)$ ($T > t_0$)

так, что $x(t_0+s)=\varphi_0(s)$. При этом если для всех $t\in[t_0-r,T)$ $x(t;t_0,\varphi_0)\in K$, то $T=+\infty$ [9].

В дальнейшем для симметрической квадратной матрицы M, неравенство $M>0$ ($M<0$) означает положительную (отрицательную) определенность матрицы, нестрогое же неравенство обозначает соответствующую «полуопределенность», знак «*» в записи матриц обозначает блок, транспонированный симметричному к нему.

Ясно, что задача об устойчивости системы (1) тесно связана с анализом устойчивости аналогичной линейной системы с запаздыванием. Заметим, однако, что устойчивость всех систем $\dot{x}(t)=A_i x(t)+A_{id}x(t-\tau)$ не гарантирует устойчивости для системы (1). Поэтому даже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, несмотря на линейность подсистем, к исследованию нечетких систем Такаги-Сугено приходится привлекать прямой метод Ляпунова. Для систем с запаздыванием существует два направления этого метода, в которых для вывода об устойчивости используются или функции (метод Разумихина), или функционалы (метод Красовского). Вычисляя производную выбранного функционала (или функции) в силу исследуемой системы и учитывая требования соответствующей теоремы об асимптотической устойчивости (см., например, [7]), получаем достаточные условия устойчивости системы в терминах ее параметров. Так, для линейной системы вида $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-\tau(t))$ такие условия могут выражаться: 1) в терминах матриц системы (не зависящие от запаздывания условия); 2) в терминах матриц системы и максимальной величины τ запаздывания в системе, а также, в случае переменного запаздывания, величины d, где $|\dot{\tau}(t)|\le d$. Условия, относящиеся ко второму типу, как правило, менее консервативны. Использование квадратичной функции и классической теоремы Разумихина приводит к условиям, не зависящим от запаздывания, и из этих условий следует, что матрица A в системе гурвицева, так что для решения задачи стабилизации неустойчивой системы обратной связью с запаздыванием такие условия не годятся. Условия, зависящие от запаздывания (полученные как методом функций, так и методом функционалов), основаны на преобразовании выражения для производной в силу системы с использованием тождественных соотношений для решения. Одно из таких соотношений – равенство $x(t-\tau(t))=x(t)-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)ds$: его можно использовать как для преобразования $x(t-\tau(t))$. На основании этого преобразования, используя положительно определенную квадратичную функцию $V_0(x)=x^TPx$ и условия Разумихина, можно доказать следующий результат [10]:

Теорема 1. *Система (1) устойчива, если существует матрица* $P>0$ *и числа* $a,b>0$ *такие, что для всех* $i=1,\ldots,p$ *справедливы следующие матричные неравенства:*

$$\alpha_i(P,a)=\begin{pmatrix}-aP^{-1} & A_iP^{-1}\\ * & -P^{-1}\end{pmatrix}\le 0,\quad \beta_i(P,b)=\begin{pmatrix}-bP^{-1} & A_{id}P^{-1}\\ * & -P^{-1}\end{pmatrix}\le 0,$$

$$C_i(P,a,b)=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\Phi_i+(a+b)P^{-1} & A_{id}P^{-1}\\ * & -\frac{1}{2}P^{-1}\end{pmatrix}<0$$

где $\Phi_i = P^{-1}(A_i + A_{id})^T + (A_i + A_{id})P^{-1}$.

Здесь использование обратной матрицы P^{-1} позволяет записать условия устойчивости в виде ЛМН. При этом из неравенств $C_i(P,a,b)<0$ следует, что $\Phi_i<0$, а из условий $P>0$, $\Phi_i<0$ вытекают оставшиеся условия Теоремы 1 для достаточно малых значений r.

Отметим, что такие условия не учитывает информацию о функциях μ_i, которые считаются известными. Частично восполнить этот пробел позволяет использование функций «нечеткой структуры» [12-14], в этом случае верхняя оценка производной функции в силу системы, а значит, и условия устойчивости, будут содержать величины β_i такие, что $|\dot{\mu}_i|\le\beta_i$. В некоторых случаях подобные конструкции позволяют ослабить требования к параметрам системы по сравнению с получаемыми на основе обычных. Однако при этом возникают дополнительные сложности, обозначенные во введении.

Использование ослабленных требований к функциям, гарантирующим устойчивость системы, позволяет получить менее консервативные условия устойчивости для системы (1). Например, если некоторые собственные значения матриц Φ_i лежат на мнимой оси, то приведенные выше условия устойчивости неприменимы, при этом система (1) может быть устойчивой. Замена требования знакоопределенности на знакопостоянство для функции Ляпунова или (и) ее производных позволяет эффективно исследовать такие случаи. В частности, используя теоремы об устойчивости из [15], можно получить следующий результат:

Теорема 2. *Пусть существуют симметричные (размера* $n\times n$*) матрицы* $P_1\ge 0$, P_2 *и для* $k=1,2$ *существуют положительные числа* a_k, b_k *такие, что матрицы* $\alpha_i(P_k,a_k)$, $\beta_i(P_k,b_k)$, $C_i(P_k.a_k,b_k)$, *определенные как в теореме 1, при всех* $i=1,\ldots,p$ *удовлетворяют условиям:*

а) $\alpha_i(P_k,a_k)$, $\beta_i(P_k,b_k)$, $C_i(P_1.a_1,b_1)$ *неположительно определены;*

б) существуют числа λ, λ_i, $i=1,\ldots,p$ *такие, что* $P_2+\lambda P_1>0$, $C_i(P_2,a_2,b_2)+\lambda_i P_1>0$

Тогда система (1) устойчива.

Другие типы преобразований системы (1), позволяющие увеличить гибкость получаемых достаточных условий устойчивости в форме ЛМН, рассмотрены в многочисленных работах Э. Фридман (см., например, [11]). В частности, использование так называемого дескрипторного подхода [11] позволяет улучшить достаточные условия устойчивости за счет увеличения количества матриц-параметров в получающейся системе ЛМН.

Приведем один из вариантов использования такого подхода. Рассмотрим систему (1) с постоянным запаздыванием $\tau(t)\equiv r$ и систему

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{p}\mu_i(x(t),x(t-r))(A_i+A_{id})x(t)-$$
$$A_{id}\int_{t-r}^{t}\sum_{j=1}^{p}\mu_j(x(s),x(s-r))(A_j x(s)+A_{jd}x(s-r))ds \tag{2}$$

полученную в результате ее преобразования.

Применение дескрипторного подхода состоит в том, что производная $\dot{x}(t)$ не выражается через состояние системы, а рассматривается как самостоятельная переменная при вычислении производной функции Ляпунова. Например, для квадратичной функции Ляпунова выражение для производной можно представить в виде $V'=x^T P\dot{x}+\dot{x}^T Px$, или $V'=(1/r)\int_{t-r}^{t}v^T\overline{P}v ds$, где

$$v=(x^T(t)\quad x^T(s)\quad x^T(s-r)\quad \dot{x}^T(t))^T \text{ и } \overline{P}=\begin{pmatrix}0&0&0&P\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\P&0&0&0\end{pmatrix},$$

а затем добавить (тождественно равное нулю) выражение

$$2(x^T(t)M_1+x^T(s)M_2+x^T(s-r)M_3+\dot{x}^T(t)M_4)\times$$
$$\left(\int_{t-r}^{t}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\mu_i\mu_j\left(\frac{1}{r}(A_i+A_{id})x(t)-A_{id}A_j x(s)-A_{id}A_{jd}x(s-r)-\frac{\dot{x}(t)}{r}\right)ds\right)$$

с некоторыми матрицами M_1, M_2, M_3 и M_4 размера $n\times n$.

Тогда $V'=\int_{t-r}^{t}v^T\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\mu_i\mu_j C_{ij}\right)v\,ds$, где

$$C_{ij}=\left(C_{ij}^{kl}\right)_{k,l=1}^{4},\quad C_{ij}^{kl}=\left(C_{ij}^{lk}\right)^T, \tag{3}$$

$$C_{ij}^{11}=\frac{1}{r}(M_1(A_i+A_{id})+(A_i+A_{id})^T M_1^T),\ C_{ij}^{44}=-\frac{1}{r}(M_4+M_4^T),$$

$$C_{ij}^{12}=-M_1A_{id}A_j+\frac{1}{r}(A_i+A_{id})^T M_2^T,\ C_{ij}^{13}=-M_1A_{id}A_{jd}+\frac{1}{r}(A_i+A_{id})^T M_3^T,$$

$$C_{ij}^{14}=\frac{1}{r}(P-M_1+(A_i+A_{id})^T M_4^T),\ C_{ij}^{22}=-M_2A_{id}A_j-(A_{id}A_j)^T M_2^T,$$

$$C_{ij}^{23}=-M_2A_{id}A_{jd}-(A_{id}A_j)^T M_3^T,\ C_{ij}^{24}=-\frac{1}{r}M_2-(A_{id}A_j)^T M_4^T,$$

$$C_{ij}^{33}=-M_3A_{id}A_{jd}-(A_{id}A_{jd})^T M_3^T,\ C_{ij}^{34}=-\frac{1}{r}M_3-(A_{id}A_{id})^T M_4^T.$$

Эти построения приводят к следующему результату:

Теорема 3. *Пусть существует* $n \times n$*-матрицы* $P > 0$, M_1, M_2, M_3 *и* M_4, *удовлетворяющие следующим ЛМН:*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1p}^T & \cdots & C_{pp} \end{pmatrix} \le 0,$$

где C_{ij} *определяются формулами (3), а также одному из следующих условий:*

а) из условий $\max\limits_{t-r \le s \le t} x^T(s)Px(s) = x^T(t)Px(t)$ *и* $C(\mu_1 v^T, \ldots, \mu_p v^T)^T = 0$ *(где* $v = (x^T(t) \quad x^T(s) \quad x^T(s-r) \quad \dot{x}^T(t))^T$*) следует* $x(t) = 0$*;*

б) $\mathrm{rank}(C_{k_1^1 k_1^2}, \ldots, C_{k_q^1 k_q^2}) = n$, *где* $q \ge 1$ *и* $k_i^j \in \{1, \ldots, p\}$ *такие, что при условии* $\max\limits_{t-r \le s \le t} x^T(s)Px(s) = x^T(t)Px(t) > 0$ *для некоторого* $s \in [t-r, t]$ *и всех* $i \in \{1, \ldots, q\}$ *выполняются неравенства* $\mu_{k_i^1}(x(t), x(t-r))\mu_{k_i^2}(x(s), x(s-r)) > 0$.

Тогда система (2) устойчива.

Можно также сформулировать более удобное с точки зрения проверки условий утверждение в терминах ЛМН:

Теорема 4. *Предположим, что существуют* $n \times n$*-матрицы* $P \ge 0$, $\tilde{P}$, M_i, $\tilde{M}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, *а также матрицы* X, Y, Z *подходящей размерности такие, что матрица* C, *определяемая в Теореме 2, а также матрица* $\tilde{C}$, *определяемая по аналогии через матрицы* $\tilde{P}$ *и* $\tilde{M}_i$, *удовлетворяют следующим ЛМН:* $C \le 0$, $\tilde{P} + X^T P + PX > 0$, $-\tilde{C} + Y^T P_d + P_d Y > 0$, $P_d + Z^T C + CZ \le 0$, *где* $P_d = diag(P, \ldots, P) \in R^{4np \times 4np}$. *Тогда система (2) устойчива.*

Главный недостаток практического применения приведенных результатов заключается в том, что вычислительные алгоритмы плохо справляются с решением нестрогих матричных неравенств (в частности, поиском знакопостоянных, а не знакоопределенных матриц). Тем не менее, эффективное использование знакопостоянных функций возможно для систем специальной структуры, в частности, каскадных систем [10], а также для получения условий устойчивости по части переменных.

Заключение

Достаточные условия устойчивости системы (1), справедливые для произвольных функций $\mu_i(.)$, могут быть записаны в виде системы ЛМН относительно неизвестной матрицы *P*. Таким образом, при условии эквивалентности исходной нелинейной системы и системы (1) для доказательства устойчивости для нелинейной системы достаточно убедиться в разрешимости системы ЛМН. Если же правая часть исходной системы может аппроксимирована правой частью системы вида (1), то выводы об устойчивости можно делать на основании соответствующих результатов для уравнений с возмущениями.

Однако в рассматриваемом случае методика ЛМН наряду с очевидными преимуществами имеет также и серьезные сложности в практическом применении.

Первый очевидная проблема связана с построением представления (1) для заданной нелинейной системы. Даже не принимая во внимание случаи, когда способ такого построения не очевиден, можно заметить, что для общей нелинейной системы такое представление возможно лишь в ограниченной области пространства состояний, но главная проблема - экспоненциальный рост числа слагаемых в правой части системы (1) с ростом размерности системы и ее сложности. Это приводит к необходимости отказа, в общем случае, от точного представления в пользу приближенных, но менее сложных. Значительный прогресс в этом направлении достигнут в работах P. Baranyi с соавторами (см. [16]).

Основным недостатком с точки зрения анализа устойчивости является достаточный характер получаемых условий устойчивости в виде ЛМН и, как следствие, отсутствие гарантии разрешимости получаемой системы ЛМН в случае устойчивости нулевого решения системы (1). Это обусловлено, в частности, ограничениями применяемого метода. Фиксация определенного класса (структуры) функций Ляпунова (а метод Ляпунова не указывает способа построения подходящей функции в общем случае) является дополнительным «источником консерватизма».

В целях смягчения этого ограничения предлагаются различные расширения простейшего класса квадратичных функций, например, кусочно-квадратичные и так называемые нечеткие функции Ляпунова, использующие в качестве коэффициентов при квадратичных слагаемых функции $\mu_i(.)$. Обзор результатов, полученных в этом направлении, можно найти, например, в [17]. С другой стороны, использование неквадратичных функций приводит к значительному росту вычислительной сложности задачи решения системы ЛМН вследствие увеличения количества неизвестных матриц и, главное, количества неравенств.

Кроме того, представление правой части исходной системы в виде (1) неоднозначно, а разрешимость получаемых ЛМН существенно зависит от выбора конкретных матриц A_i, A_{id}. При этом ясно, что для конкретной системы трудно заранее предсказать и тем более формализовать наиболее выгодный с точки зрения анализа устойчивости алгоритм построения представления вида (1).

Для уравнений с запаздыванием естественно также применение функционалов Ляпунова-Красовского различной структуры. Большое количество результатов, основанных на применении обобщенных квадратичных функционалов для линейных систем с запаздыванием, получено в работах Э. Фридман с соавторами (см., например,

[10]). Многие из этих результатов использовались для получения достаточных условий устойчивости для системы (1) (см., например, [18,19] и др.).

Результирующие ЛМН зависят также и от способа оценки производной выбранной функции Ляпунова. Известные способы их получения приводят к более или менее избыточно ограничительным условиям отрицательной определенности производной. Учет в анализе устойчивости свойств функций $\mu_i(x)$, в частности, локальности их носителей, также позволяет уточнить условия устойчивости и уменьшить вычислительную сложность задачи решения системы ЛМН. Некоторые результаты, полученные в этом направлении, приведены в [20].

Список литературы

1. Tanaka K., & Wang H.O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach.* N.Y.: Wiley, 2001
2. Al-Hadithi B.M., Jimenez A. & Matia F. A new approach to fuzzy estimation of Takagi–Sugeno model and its applications to optimal control for nonlinear systems // *Applied Soft Computing*. 2012, no 12, p.280–290.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets // *Information and Control.* 1965, no 8, p.338–353.
4. Chen C.-W. A critical review of parallel distributed computing and the Lyapunov criterion for multiple time-delay fuzzy systems // *Int. Journal of the Physical Sci.* 2011, № 6 (19), p.4492–4501.
5. Nesterov Yu. & Nemirovskii A. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming.* Philadelphia: SIAM, 1994.
6. Lee H.J., Park J.B., & Joo Y.H. Robust control for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying input delay // *Transactions of the ASME*. 2005, no 127, p.302–306.
7. Lien C.-H. & Yu K.-W. Robust control for Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying state and input delays // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008, № 35, p.1003–1008.
8. Ha M., Jeong C., Song J. M., & Park P. Delay-dependent control and stability analysis for T–S fuzzy systems with a sensor delay // *In Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*. 2011, vol. 2.
9. Hale J.K. *Theory of functional differential equations*. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.
10. Дружинина О.В., Седова Н.О. Анализ устойчивости и стабилизации нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017, № 1, с. 21-35.
11. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // *European Journal of Control*. 2014, № 20, p. 271–283.
12. Yeh K., Chen C. W., Lin S. H., & Chen C. Y. Stability analysis of time-delay fuzzy systems using fuzzy Lyapunov method // *In Intelligent Information and Database Systems*, 2009. ACIIDS 2009. First Asian Conference on (p. 243-248).

13. Zhang Z., Lin C., & Chen B. New stability and stabilization conditions for T–S fuzzy systems with time delay // *Fuzzy Sets and Systems*. 2015, № 26, p.82–91.
14. Liu L., Zhai D., Lu A., & Zhang Q. H_∞ Fuzzy filtering for nonlinear singular systems with time-varying delay // *Advances in Difference Equation.* 2015 (1).
15. Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки. 2005, т. 78, № 3, с. 468-472.
16. Baranyi P. *TP-model transformation-based-control design frameworks.* Springer International Publishing, 2016.
17. Guerra T.M., Sala A., Tanaka K. Fuzzy control turns 50: 10 years later // *Fuzzy sets and systems*. 2015, v.281, p.168-182.
18. Yang J., Luo W.-P., Shi K.-B., Zhao X. Robust stability analysis of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay by improved delay-partitioning approach // *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016, i. 9, p.171–-185.
19. Kwon O.M., Park M.J., Lee S.M., Park J.H. Augmented Lyapunov–Krasovskii functional approaches to robust stability criteria for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying delays // *Fuzzy Sets and Systems.* 2012, v.201, p.1--19.
20. Sala A. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems // *Annual Reviews in Control*. 2009, v.33 (1), p.48–58.