Ссылка на статью:
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018, № 2, с. 35-40.

Поступила: 14.05.2018
Окончательный вариант: 20.09.2018

УДК 519.7

Алгоритм реализации ФАЛ СФЭ и его программная реализация

Михеева Е.А. [1]***, Хисамутдинов Д.И.*** [1,*]

[*] d.hisa@yandex.ru
[1] УлГУ, Ульяновск, Россия

В данной работе дан определенный алгоритм реализации функций алгебры логики схемами из функциональных элементов на программном уровне.

Ключевые слова: *дискретная математика, функции алгебры логики, схемы из функциональных элементов*

Одним из интересных примеров приложения алгебры логики является теория управляющих систем. Основными классами «дискретных» управляющих систем являются контактные схемы, формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ).

В данной работе остановимся на синтезе СФЭ. Задача синтеза управляющих систем является одной из основных задач кибернетики. В общих чертах эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть задан запас элементарных средств. Заданы правила построения из них более сложных образований – схем. Задан способ нахождения по схеме реализуемой ею функции. Задача синтеза состоит в получении для каждой функции алгебры логики (ФАЛ) наилучшей СФЭ, реализующей эту функцию.

Все необходимые обозначения, понятия и определения по ФАЛ взяты из [1], соответственно, по СФЭ взяты из [2].

Определение 1. Полюс есть логическая сеть, при этом он является ее единственной вершиной.

Если S_1 и S_2 – логические сети без общих вершин, то их объединение есть логическая сеть $S = S_1 \cup S_2$, вершинами которой являются вершины исходных логических сетей S_1 и S_2.

Если S – логическая сеть и E – элемент (входы и выход которого не являются вершинами S), то результат присоединения всех входов элемента E к некоторым вершинам S есть снова логическая сеть. При этом к одной вершине S могут присоединяться различные входы элемента E, но каждый вход присоединяется только к одной вершине. Вершинами новой логической сети являются вершины S и выход элемента E .

Определение 2. СФЭ называется логическая сеть, в которой:

1) каждому полюсу приписана одна из переменных x_1, …, x_r, …, причем, разным полюсам – разные переменные, полюсы называются входами схемы;

2) каждому элементу E с r входами поставлена в соответствие некоторая ФАЛ

φE $(y_1, \dots, y_r)$, , существенно зависящая от r аргументов (при r=0 функция φE есть константа) и называемая функцией элемента E; элемент E с сопоставленной ему функцией φE называется функциональным элементом;

3) вершины, отмеченные символом *, называются выходами схемы.

Определение 3. Если S – СФЭ, а $L(S)$ – число элементов в схеме S, то $L(S)$ называется сложностью схемы S.

Определение 4. Если функции всех элементов схемы S принадлежат множеству $Б$, то будем говорить, что схема S есть схема в базисе $Б$.

Замечание 1. В дальнейшем мы будем рассматривать СФЭ в стандартном базисе $Б$ = {&, V, -}.

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$. Считается, что схема S, реализующая f , тем лучше, чем меньше ее сложность $L(S)$. В этих условиях задача ставится так: для каждой функции f требуется найти реализующую ее схему S, на которой $L(S)$ достигает минимума.

Обозначим этот минимум через $L(f)$:

$$L(f) = \min_{\text{S, реал. . f}} L(S)$$

по всем схемам S, реализующим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определим функцию

$$L(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2} L(f) \quad \text{- функция Шеннона,}$$

где max берется по всем функциям от n аргументов.

Другими словами, $L(n)$ – минимальная сложность СФЭ, реализованной самой сложной функцией среди функций, зависящих от n переменных.

Основная задача синтеза: Найти такой метод синтеза схем, позволяющий для любой ФАЛ от n аргументов построить схему S, для которой $L(S)$ близко к $L(n)$. Такой подход был предложен К.Э. Шенноном в 1949 г. при рассмотрении контактных схем и дан наилучший по порядку метод синтеза контактных схем (см. [3]).

Поставим следующий вопрос: можно ли любую ФАЛ реализовать СФЭ?

На этот вопрос дает положительный ответ теорема 1 (см. [2]).

Теорема 1. *Каждая ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть реализована некоторой СФЭ S и притом $L(n) \leq n * 2^{n+1}$, где $n \geq 1$.*

Следствие 1. $L(n) \leq n * 2^{n+1}$, где $n \geq 1$.

Далее опишем алгоритм реализации ФАЛ СФЭ.

Функция вводится с клавиатуры в векторной форме. Далее векторная форма функции представляется в виде таблицы (табл.1).

Таблица 1. Табличное представление ФАЛ

$x_1\ x_2\ \dots\ x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0 0 … 0	$f(0,0,\dots,0)$
0 0 … 1	$f(0,0,\dots,1)$
…	…
1 1 … 0	$f(1,1,\dots,0)$
1 1 … 1	$f(1,1,\dots,1)$

Известна

Теорема 2. [1]. *Каждая ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $\forall \kappa, 1 \leq k \leq n$, представима в виде:*

$$1.\ f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_k^{\sigma_k} \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots x_n),$$

$$2.\ f(x_1, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} (x_1^{\bar\sigma_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar\sigma_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots x_n)).$$

Замечание 2. Теорема 2 дает разложение каждой ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по любому числу её аргументов.

Следствие 2. Если в пункте 1 теоремы выполняется условие $k = n$, то разложение имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$ – СДНФ (Совершенная Дизъюнктивная Нормальная Форма).

Следствие 3. Если в пункте 2 теоремы 2 k=n, то разложение имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar\sigma_n})$$ – СКНФ (Совершенная Конъюнктивная Нормальная Форма).

Далее в зависимости от наименьшего числа единичных (или нулевых) значений в табличном представлении введенной нами ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ составим ее СДНФ (или СКНФ) согласно следствию 2 (или 3). В случае равенства единичных и нулевых значений в табличном представлении функции оставим ту форму её представления, которая дает минимальную сложность $L(S)$ СФЭ.

Полученную СДНФ (или СКНФ) данной ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реализуем СФЭ в стандартном базисе. По полученной СФЭ, реализующей нашу ФАЛ, определим $L(S)$, которую потом сравниваем с функцией Шеннона $L(n)$.

Программа, реализующая вышеописанный алгоритм, написана на языке программирования высокого уровня *C#*, так как этот язык считается самым подходящим инструментом для реализации алгоритмов такого типа. Более того, *C#* - это самый гибкий в работе язык высокого уровня.

Результаты работы программы приведены в Приложении (рис. 2 – 5).

Замечание 3. Оценка сложности СФЭ, реализующей ФАЛ, в первую очередь зависит от вида представления самой ФАЛ.

Замечание 4. Программная реализация ФАЛ СФЭ способствует внедрению информационных технологий в обучение дискретной математике.

Список литературы

1. Яблонский С.В. Функциональные построения в к-значной логике // *Труды математического института имени В.А. Стеклова АН СССР*. 1958. т.51, с.3-142.
2. Лупанов О.Б. *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Shannon C. The synthesis of two-terminal switching circuits // *BSTJ*. 1949, v.28, no 1, p. 59-98.

ПРИЛОЖЕНИЕ

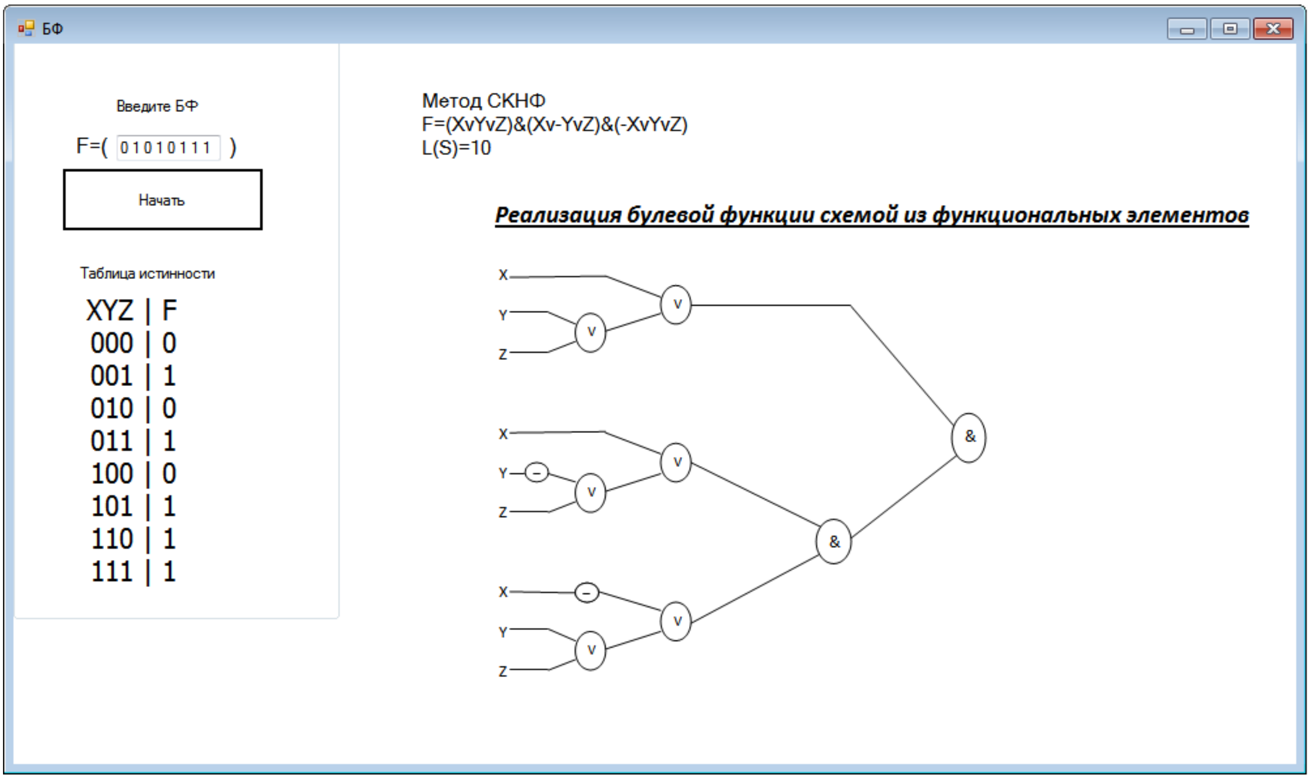

Рис.1.Пример выполнения работы программы

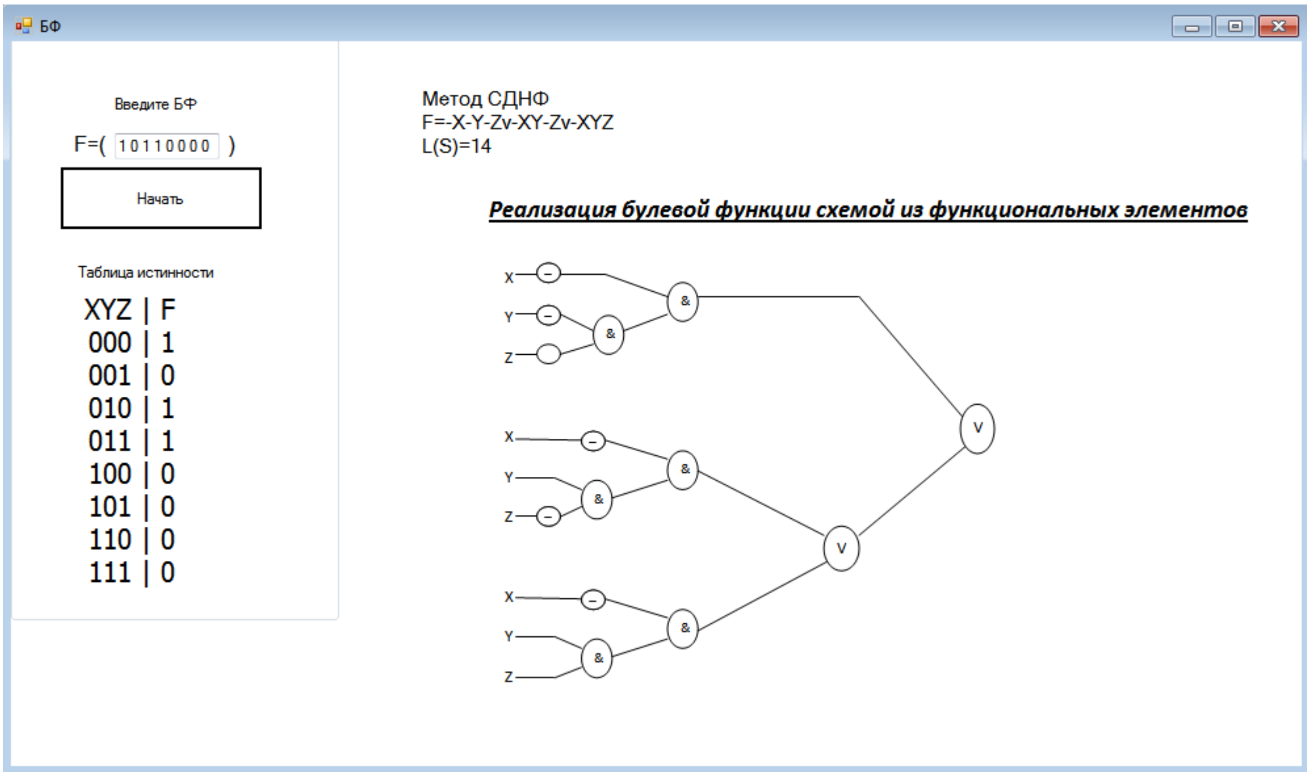

Рис.2..Пример выполнения работы программы

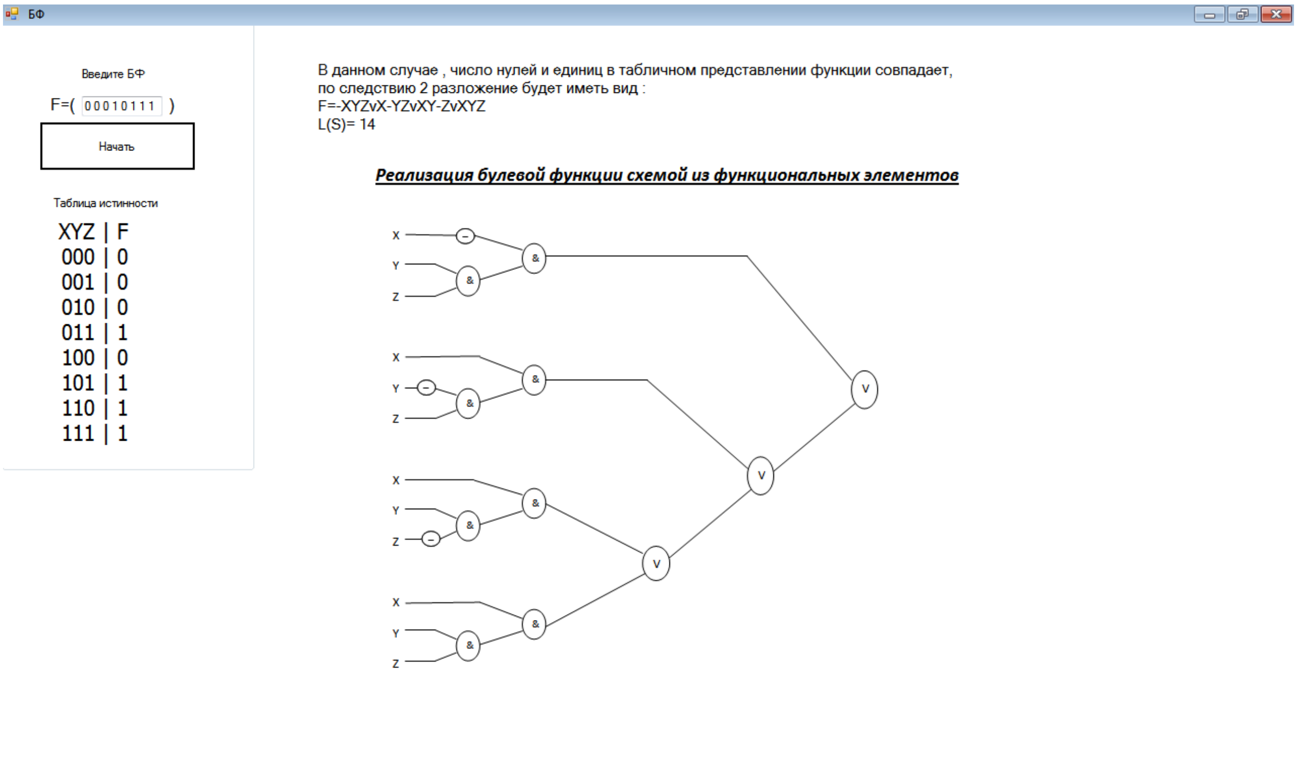

Рис.3.Пример выполнения работы программы

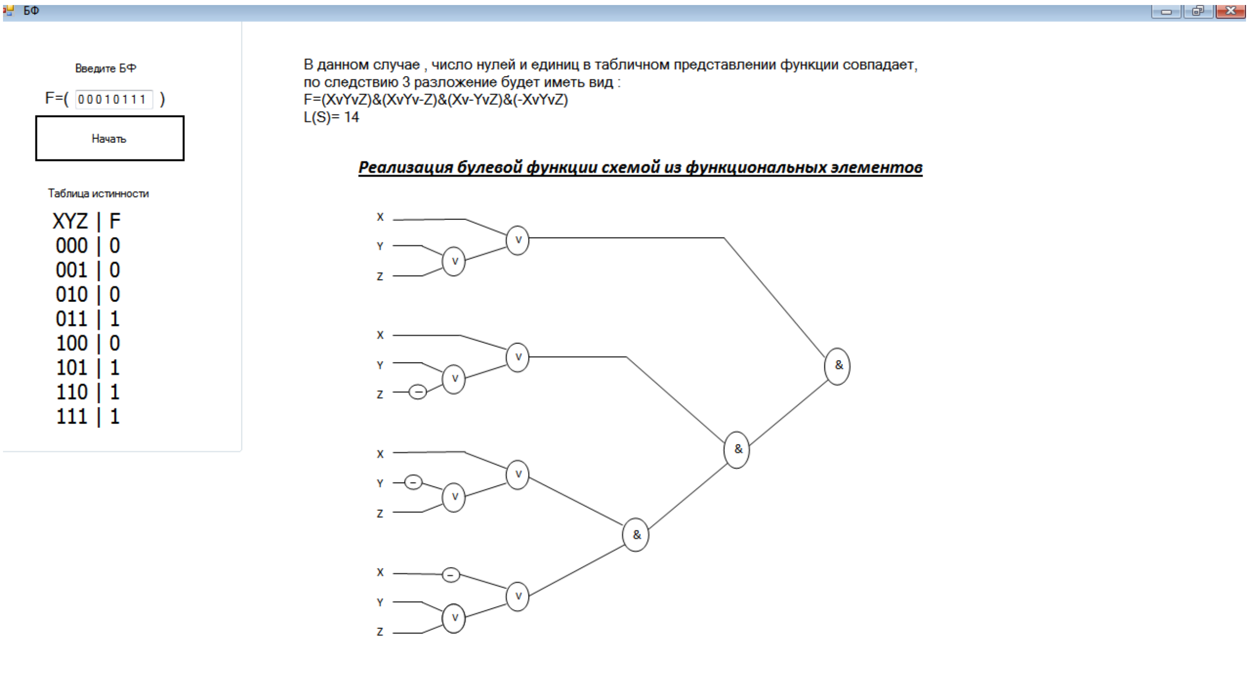

Рис.4.Пример выполнения работы программы