*Ссылка на статью:*
// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2019, №1, с. 70-77.

Поступила: 07.05.2019
Окончательный вариант: 06.06.2019



***УДК 004.942***

# Анализ методов исследования процессов с разладками

***Москвичева М.Г.***[1*]

[*]fialka2010_87@mail.ru
[1]УлГУ, Ульяновск, Россия

При исследовании процессов в технике, биологии часто встречаются процессы с изменяющимися в случайные моменты времени характеристиками, такие моменты принято называть моментами «разладки». Обнаружение наиболее быстрее (с определенным уровнем ложных тревог) и точнее позволяют в дальнейшем проводить управление наблюдениями в стохастических системах и управление подвижными объектами в условиях неполноты информации. Различные методы обнаружения разладок помогают определить, действительно ли процесс достиг статистически управляемого состояния на правильно заданном уровне или остается в этом состоянии, а затем поддерживать управление и высокую степень однородности важнейших характеристик продукции или услуги посредством непрерывной записи информации о качестве продукции в процессе производства. Использование различных методов обнаружения и их тщательный анализ ведут к лучшему пониманию и совершенствованию процессов. Согласно хронологии развития теории процессов с разладками в данной работе приводится краткий обзор существующих методов.

***Ключевые слова***: *разладка, винеровский процесс, карты Шухарта, случайные процессы*.

## Введение

При исследовании процессов в технике, биологии часто встречаются процессы с изменяющимися в случайные моменты времени характеристиками, такие моменты принято называть моментами «разладки». Синоним слова «разладка» - повреждение, расстройка ([1, 2]), по справочнику технического переводчика ([3]) «разладка» - нарушение нормальной работы.

Свое применение «разладка» нашла в статистическом контроле, теории обнаружения. В работах (см., например, [4-8]) исследуются и обсуждаются методы обнаружения моментов изменений вероятностных характеристик случайных процессов, т.е. моментов разладок.

Обнаружение наиболее быстрее (с определенным уровнем ложных тревог) и точнее позволяют в дальнейшем проводить управление наблюдениями в стохастических системах и управление подвижными объектами в условиях неполноты информации. Различные методы обнаружения разладок помогают определить, действительно ли процесс достиг статистически управляемого состояния на правильно заданном уровне или остается в этом состоянии, а затем поддерживать управление и высокую степень однородности важнейших характеристик продукции или услуги посредством непрерывной записи информации о качестве продукции в процессе производства. Использование различных методов обнаружения и их тщательный анализ ведут к лучшему пониманию и совершенствованию процессов.

Согласно хронологии развития теории процессов с разладками в данной работе приводится краткий обзор существующих методов. Аналогичные обзоры различных методов, обнаружения моментов изменения вероятностных свойств, приведены также, например, в [9,10 и др.].

## 1. Карты Шухарта. Примеры

Контрольная карта впервые была предложена У.Шухартом в 1924г. для управления технологическим процессом [11]. Предполагается, что это самый первый метод вероятностной диагностики процесса.

Теория контрольных карт различает два вида изменчивости [12].

Первый вид [12] – изменчивость из-за «случайных (обычных) причин», обусловленная бесчисленным набором разнообразных причин, присутствующих постоянно, которые нелегко или невозможно выявить. Каждая из таких причин составляет очень маленькую долю общей изменчивости, и ни одна из них не значима сама по себе. Тем не менее, сумма всех этих причин измерима и предполагается, что она внутренне присуща процессу. Исключение или уменьшение влияния обычных причин требует управленческих решений и выделения ресурсов на улучшение процесса системы.

Второй вид [12] – реальные перемены в процессе. Они могут быть следствием некоторых определяемых причин, не присущих процессу внутренние и могут быть устранены, по крайней мере, теоретически. Эти выявляемые причины рассматриваются как «неслучайные» или «особые» причины изменения. К ним могут быть отнесены поломка инструмента, недостаточная однородность материала, производственного или контрольного оборудования, квалификация персонала, невыполнения процедур и т.д.

Цель контрольных карт [12] – обнаружить неестественные изменения в данных из повторяющихся процессов и дать критерии для обнаружения отсутствия статистической управляемости. Процесс находится в статистически управляемом состоянии, если изменчивость вызвана только случайными причинами. При определении этот приемлемого уровня изменчивости любое отклонение от него считают результатом действия особых причин, которые следует выявить, исключить или ослабить.

Момент разладки определяется как момент выхода контролируемого показателя за некоторую пороговую границу. Обобщение контрольных карт Шухарта предложено Г.Хотеллингом, см. в [13].

Контрольная карта (карта Шухарта) это линейчатый график, построенный на основании данных измерений показателей процесса в определенные моменты времени [12].

На координатной плоскости по оси абсцисс откладываются моменты времени (или номер измерения), по оси ординат значения измерений. Обязательным являются верхняя, нижняя контрольная граница статистически допустимых изменений случайной величины и среднее значений всех измерений. Если значение показателя лежит между контрольными границами, то оно считается удовлетворительным [14]. Другими словами, в каждый момент проверяется гипотеза H0: процесс статистически управляем. Альтернативная гипотеза H1: статистическая неуправляемость. Если значение показателя окажется на одной из границ или за ее пределами, то нулевая гипотеза отклоняется, процесс требует вмешательство. Обычно контролируется как изменение среднего значения показателя, так и изменение технологического рассеивания [14].

Контрольные карты Шухарта бывают двух основных типов: для количественных и для альтернативных [12]. При этом для каждой контрольной карты две ситуации, когда стандартные значения заданы или нет. Стандартные значения устанавливаются с некоторыми конкретными требованиями или целями [12]. Более подробно формулы для построения карт приведены в ГОСТ [12].

## 2. Скорейшее обнаружение нарушения стационарного режима. Формулировка метода Вальда

Проблема наилучшего выбора впервые были представлены в 40-х годах в работах известного американского статистика А.Вальда в связи с задачами последовательного различения гипотез [7, 15]. А.Вальдом рассматривались последовательно независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестным законом распределения, методами математической статистики определялись тип распределения этих наблюдений. Количество производимых наблюдений заранее не фиксируется, а моменты остановок имеют случайный характер и определяются наблюдателем в зависимости от значений наблюдаемых величин. А. Вальд предложил задачу о различии двух простых гипотез по результатам независимых наблюдений. В [6] предлагается последовательный метод, оптимальный в классе всех последовательных методов, названный критерием последовательных отношений вероятностей.

Рассмотрим постановку этой задачи. Пусть $\theta$ - случайная величина, принимающая значения 0,1, …, а наблюдения $X_1, X_2,...$ таковы, что при условии $\theta = n$ величины $X_1, X_2,...X_{n-1}$ независимы и одинаково распределены и имеют функцию распределения $F_0(x)$, а $X_n, X_{n+1},...$ - также независимы и одинаково распределены, но имеют функцию распределения $F_1(x) \neq F_0(x)$. То есть в моменты $\theta$ происходит изменение вероятностных характеристик у наблюдаемого процесса. Возникает задача, как, последовательно наблюдая величины $X_1, X_2, \ldots$ решить вопрос о том, в какой момент следует сделать вывод о произошедшей «разладке» - изменении вероятностных характеристик, но так, чтобы с одной стороны избежать ошибки классификации (объявления о «разладке» в тот момент, когда она еще в действительности не произошла), а с другой стороны – минимизировать время между возникновением «разладки» и ее фактическим обнаружением. Рассматривается задача проверки гипотезы.

В работах [16, 21, 23] исследованы и получены оценки моментов разладки при решении задач о различии и различных распределениях моментов разладки.

## 3. Задачи о разладке в Байесовской постановке

Предполагается [6], что на некотором измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы случайные величины $\theta, \xi_1, \xi_2, \ldots$ и вероятностная мера $P^\pi$ такие, что

$$P^\pi\{\theta = 0\} = \pi,\ P^\pi\{\theta = n\} = (1-\pi)(1-p)^{n-1}p,\ n \geq 1,$$

где p и π – известные постоянные, $0 < p \leq 1$ и $\pi \in [0,1]$, и для каждого множества $A = \{\omega: \xi_1 \leq x_1, \ldots, \xi_n \leq x_n\}$

$$P^\pi(A) = \pi P^1(A) +$$

$$+(1-\pi)\sum_{i=0}^{n-1} p(1-p)^i P^0\{\xi_1 \leq x_1, \ldots, \xi_i \leq x_i\} \cdot P^1\{\xi_{i+1} \leq x_{i+1}, \ldots, \xi_n \leq x_n\} +$$

$$+(1-\pi)(1-p)^n P^0(A)$$

где $P^1$ и $P^0$ – две вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F}^\xi)$, $\mathcal{F}^\xi = \sigma\{\omega: \xi_1, \xi_1, \ldots\}$, не зависящие от π и обладающие тем свойством, что $P^j\{\xi_1 \leq x_1, \ldots, \xi_n \leq x_n\} = \prod P^j\{\xi_k \leq x_k\}$.

Без ограничения общности можно считать, что функции распределения $F^j(x) = P^j\{\xi_1 \leq x\}$ имеют плотности $p_j(x)$, $j = 0,1$ (по некоторой -конечной мере $\mu$).

Другими словами, если $\theta = 0$, то наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с плотностью вероятности $p_1(x)$. При условии же $\theta = i$ случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots$ независимы в совокупности, причем $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}$ одинаково распределены с плотностью вероятности $p_0(x)$, а $\xi_i, \xi_{i+1}, \ldots$ одинаково распределены с плотностью вероятности $p_1(x)$.

Рассматриваемая ниже постановка задачи скорейшего обнаружения момента появления «разладки» сохраняет свой смысл и для более общих распределений. Геометрический характер распределения вероятностей для момента появления «разладки» принят лишь ради простоты изложения.

Пусть τ – момент остановки (относительно системы σ – алгебр $F^\xi = \{\mathcal{F}_n^\xi\}$, $n \geq 0$, где $\mathcal{F}_0^\xi = \{\emptyset, \Omega\}$ и $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\omega: \xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Применительно к рассматриваемой нами задаче скорейшего обнаружения момента появления разладки удобно представлять момент $\tau$ как тот момент, в который объявляется «тревога» о появлении изменений в вероятностных характеристиках наблюдаемого процесса. Понятно, что желательно так выбирать момент объявления «тревоги» $\tau$, чтобы этот момент был «ближе» всего к моменту $\theta$. В качестве величины, характеризующей «риск» от использования момента $\tau$, в работе [6] рассматривается величина $c > 0$

$$p^{\pi}(\tau) = P^{\pi}\{\tau < \theta\} + cM^{\pi}\max\{\tau - \theta, 0\},$$

где $P^{\pi}\{\tau < \theta\}$ естественно интерпретировать как вероятность ложной тревоги, а $M^{\pi}\max\{\tau - \theta, 0\}$ – как средство время запаздания в обнаружении момента появления разладки, когда тревога подается правильно, т.е. когда $\tau \geq \theta$.

**Определение.** Для данного $\pi \in [0,1]$ момент остановки $\tau_n^*$ будем называть $\pi$ – байесовским, если $p^{\pi}(\tau_n^*) = \inf(\tau)$, где inf берется по классу всех моментов остановки $\tau \in \mathfrak{M}[F^{\xi}]$ (носительно системы $F^{\xi}$).

***ТЕОРЕМА 1.*** *Пусть* $c > 0$, $p > 0$ $\pi_n^{\pi} = P^{\pi}\{\theta \leq n | F_n^{\xi}\}$ *- апостериорная вероятность наличия разладки к моменту времени* $n$; $\pi_0^{\pi} = \pi$. *Тогда момент*

$$\tau_n^* = inf\{n \geq 0 : \pi_n^{\pi} \geq A^*\},$$

*где* $A^*$ *- некоторая постоянная, является* $\pi$ *- байесовским.*

Данной задаче посвящено также большое количество работ ([7, 22]). В постановке этой задачи в работе [23] решается задача наилучшего вида в условиях ожидаемого изменения характеристик базового случайного процесса.

## 4. Задача о разладке для винеровского процесса. Байесовская постановка

В работе [6] представлено решение задачи о разладке для винеровского процесса при обобщенном байесовском подходе, где получена асимптотика функции риска.

Предполагаем, что на некотором вероятностном простарнстве $(\Omega, \mathcal{F}, P^{\pi})$ заданы: независимые между собой случайная величина $\theta$ со значениями в $[0, \infty)$ и стандартный винеровский процесс $\omega = (\omega_t, t \geq 0)$ такие, что

$$P^{\pi}\{\theta = 0\} = \pi,\ P^{\pi}\{\theta \geq t | \theta > 0\} = e^{-\lambda t},\ t>0,$$

где $\lambda$ – известная константа, $0 < \lambda < \infty$, $0 \leq \pi \leq 1$ и $\omega_0 = 0$, $M^{\pi}\omega_t = 0$, $M^{\pi}[\omega_t - \omega_s]^2 = t - s$, $t \geq s \geq 0$. Предполагается, что наблюдению подлежит случайный процесс $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$, допускающий стохастический дифференциал

$$d\xi_t = r\chi(t - \theta)dt + \sigma d\omega_t,\ \xi_0 = 0,$$

где $\sigma^2 > 0$, $r \neq 0$, $\chi(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$

Иначе говоря, структура наблюдаемого процесса такова, что

$$\xi_t = \begin{cases} \sigma\omega_t, t < \theta, \\ r(t - \theta) + \sigma\omega_t, t \geq \theta. \end{cases}$$

По аналогии со случаем дискретного времени, рассмотрим задачу скорейшего обнаружения момента $\theta$ в байесовской и условной постановках.

$$p^{\pi} = \inf\{P^{\pi}\{\tau < \theta\} + cM^{\pi}\max\{\tau - \theta, 0\}\},$$

где inf берется по классу всех моментов остановки $\tau \in \mathfrak{M}[F^{\xi}]$. Момент $\tau_{\pi}^{*}$ является $\pi$ – байесовским, если его функция риска $p^{\pi}(\tau_{\pi}^{*}) = P^{\pi}\{\tau_{\pi}^{*} < \theta\} + cM^{\pi}\max\{\tau_{\pi}^{*} - \theta, 0\}$ совпадает с $p^{\pi}$.

***ТЕОРЕМА 2.*** *$\pi$ – байесовский момент*

$\tau_{\pi}^{*} = \inf\{t \geq 0: \pi_{t}^{\pi} \geq A^{*}\}$,

*где* $\pi_{t}^{\pi} = P^{\pi}\{\theta \leq t|\mathcal{F}_{n}^{\xi}\}$, *а порог* $A^{*}$ *есть (единственный) корень уравнения*

$\int_{0}^{A^{*}} e^{-\Lambda[H(A^{*})-H(x)]}\frac{dx}{x(1-x)^{2}} = C^{-1}$,

*где* $C = c(\frac{r^{2}}{2\sigma^{2}})^{-1}$, $\Lambda = \lambda(\frac{r^{2}}{2\sigma^{2}})^{-1}$ *и* $H(x) = \ln\frac{x}{1-x} - \frac{1}{x}$.

*Более того,*

$$p^{\pi} = \begin{cases} (1 - A^{*}) + C\int_{1/A^{*}}^{1/\pi}\frac{e^{\Lambda x}(x-1)^{\Lambda}}{x^{2}}[\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-\Lambda u}u}{(u-1)^{2+\Lambda}}du]dx, \pi \in [0, A^{*}]; \\ 1 - \pi, \pi \in [A^{*}, 1]. \end{cases}$$

## 5. Другие способы обнаружения оптимального момента нарушения стационарного режима, «разладки»

В данном параграфе кратко приведены методы из [23]

Предполагается, что $B = (B_{t})_{t\geq 0}$ – броуновское движение, заданое на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.Наблюдаемый процесс $X = (X_{t})_{t\geq 0}$ имеет следующую структуру:

$$X_{t} = \mu(t - \theta)^{+} + \sigma B_{t}$$

где $\sigma > 0$, $\mu \neq 0$ и $\theta$ – некоторый момент со значениями в $[0, \infty)$ (и называется моментом разладки).

Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$ со значениями в $[0, \infty)$ является моментом остановки (марковским моментом), если при каждого $t \geq 0$ событие $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_{t}$, $\mathcal{F}_{t} = \mathcal{F}_{t}^{X}$ $(= \sigma(X_{s}, s \leq t))$ есть $\sigma$- алгебра событий, порождаемых значениями $X_{s}$, $s \geq t$.

Сформулируем несколько вариантов оптимизационных задач о разладке.

Величина $\theta$ – параметр, принимающий значения в $[0, \infty)$.

Вариант B.

Фиксируем некоторое число $T > 0$ и рассматриваем класс $\mathfrak{M}_{T} = \{\tau: E_{\infty}\tau \geq T\}$ моментов остановки $\tau$, для которых среднее время $E_{\infty}\tau$ до ложной тревоги (т.е. когда $\theta = \infty$) равно T. Пусть

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty E_\theta (\tau - \theta)^+ d\theta.$$

Момент $\tau_T^*$ называется оптимальным в классе $\mathfrak{M}_T$, если $\frac{1}{T} \int_0^\infty E_\theta (\tau_T^* - \theta)^+ d\theta = B(T)$.

Вариант С.

Пусть $C(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \ge 0} E_\theta (\tau - \theta | \tau \ge \theta)$.

Момент $\tau_T^* \in \mathfrak{M}_T$ является оптимальным (если он существует), если $\sup_{\theta \ge 0} E_\theta (\tau_T^* - \theta | \tau_T^* \ge \theta) = C(T)$.

Вариант D.

Пусть $D(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \ge 0} \operatorname{ess\,sup}_\omega E_\theta ((\tau - \theta)^+ | \mathcal{F}_\theta)(\omega)$.

где $\mathcal{F}_\theta = \sigma(X_s, s \le \theta)$ и $\operatorname{ess\,sup}\limits_{\omega}$ есть операция взятия существенного супремума. Момент $\tau_T^* \in \mathfrak{M}_T$ является оптимальным (если он существует), если $\sup_{\theta \ge 0} \operatorname{ess\,sup}_\omega E_\theta ((\tau_T^* - \theta)^+ | \mathcal{F}_\theta)(\omega) = D(T)$.

## Заключение

В данной работе приводится хронология развития теории о разладке. Приведенные методы позволят в дальнейшем решать задачи скорейшего обнаружения случайно появляющихся «целей», задачи обнаружения спонтанно возникающих эффектов, задачи скорейшего обнаружения момента появления арбитража и т.п. Для многих информационных систем весьма актуальна разработка методов скорейшего обнаружения нежелательных случайно появляющихся «внедрений» и создания методов защиты от кибератак.

## Список литературы


1. Словарь синонимов. Режим доступа: https://synonymonline.ru (дата обращения 06.06.2019).
2. Словари и энциклопедии на Академики. Режим доступа: https://dic.academic.ru (дата обращения 06.06.2019).
3. Справочник технического переводчика. Режим доступа: https://technical_translator_dictionary.academic.ru (дата обращения 06.06.2019).
4. Бурмистрова В.Г. *Семимартингальные математические и компьютерные модели в адачах смертности:* дис. … к.ф.-м.н. Ульяновск: УлГУ, 2006.
5. Бродский Б.Е., Дарховский Б.С. Проблемы и метод вероятностной диагностики // *Автоматика и телемеханика*. 1999, №8, с.3-50.
6. Ширяев А.Н. *Статистический последовательный анализ*. М.: Наука, 1976.
7. Вальд А. *Последовательный анализ* (пер. с английского). М., 1960.
8. Бурмистрова В.Г. Система оценивания и принятия решения о компенсаторных воздействиях по наблюдаемым уровням онкомаркеров / В.Г. Бурмистрова, А.А. Бутов, К.О. Раводин // *Материалы 3-й Международной конференции: Математическое моделирование социальной и экономической динамики*. М.: РГСУ, 2010, с.5-6.

9. Клингене Н.И., Телькснис Л.А. Методы обнаружения разладок случайных процессов // *Автоматика и телемеханика*. 1983, №10, с.5-56.
10. Никифоров И.В. *Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов.* М.: Наука, 1983.
11. Шухарт У.А. *Экономический контроль качества производственного продукта*. Вэн Ноустренд К., Нью-Йорк, 1931.
12. ГОСТ Р 50779.42-99 *Статистические методы. Контрольные карты Шухарта.* М.: Стандартинформ, 2008.
13. Hoteling H.H. Multivariate quality control illustrated by the air testing of sample bombsites // *Techniques of statistical analysis.* 1947, p.111-184.
14. Клячкин В.Н. *Модели и методы многомерного статистического контроля технологического процесса:* дис. … д.т.н. Ульяновск: УлГТУ, 2003.
15. Ширяев А.Н. *Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений* М.: МЦНМО, 2014.
16. Chow Y.S. and Robbins. On optimal stopping rules // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*. 1963, v, 2, no.1, p.33-49.
17. Galchuk L.I., Rozovskii B.L., The disorder problem for a Poisson process // *Theory of Prob. and Appl.* 16, 1971.
18. Gapeev P.V., The disorder problem for compound Poisson processes with exponential jumps, *Ann. Appl. Probab*. 2005, v.15, no. 1A, p.487–499.
19. Ширяев А.Н., Липцер Р.Ш. Об одной байесовской задаче последовательного поиска в диффузионной аппроксимации. *Теория вероятностей и ее применение*. 1964, т.1, с.192-199.
20. Михалевич В.С. Байесовский выбор между двумя гипотезами по среднему значению нормального процесса. *Вестник Киевского Университета.* 1958, т.1, № 1, с.101-104.
21. Ширяев А.Н. К теории решающих функций и управлению процессом наблюдения по неполным данным. *Trans. Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague.* 1964, p.657-681.
22. Дарховский Б.С. О двух задачах оценивания моментов изменения вероятностных характеристик случайной последовательности // *Теория вероятностей и ее применения.* 1984, т.29, с.464-473.
23. Ивашко Е. Е. *Задачи наилучшего выбора с разладкой*. С.-Пб.: СпГУ, 2009.
24. Ширяев А.Н. *Стохастические задачи о разладке.* М.: МЦНМО, 2016.